İKİ BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

TEOREM: a, b, c birer tamsayı ($a \neq 0$, $b \neq 0$) olmak üzere $ax + by = c$ denklemini sağlayan x, y tamsayılarının bulunması için gerek ve yeter şart $(a,b) = d$ sayısının, c yi tam bölmesidir. Burada (a,b) gösterimi, a ve b nin en büyük ortak bölenini ifade etmektedir.

İSPAT: Eğer d sayısı c yi tam bölmüyorsa denklemin tamsayılarda çözülemeyeceği açıktır. $d \mid c$ alalım. Öklid algoritması uygulanarak sonlu adım sonucunda

$$
\begin{aligned}
a &= b.q_1 + r_1 \\
b &= r_1.q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2.q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}.q_n + r_n
\end{aligned}
$$

Burada r_n sıfırdan farklı son kalanı göstermektedir. Bir başka deyişle $r_n = d$ dir. d sayısının, a ve b nin bir lineer kombinasyonu olduğunu görmek için $r_{n-1}, r_{n-2}, ..., r_1$ sayılarını geriye doğru yok ederek a, b ve $r_n = d$ arasında bir bağıntı yazmak yeterlidir.

Söylediklerimizi iki örnekle açıklayalım:

Problem 1: $20x + 25y = 2009$ denklemini tamsayılarda çözünüz.

Çözüm: Eşitliğin sol tarafı 5 ortak parantezine alınırsa $5(4x + 5y) = 2009$ olur. Sağ taraftaki 2009 sayısı 5 ile tam bölünemeyeceğinden bu denklemin çözümü yoktur.

Problem 2: $22x - 17y = 13$ denklemini tamsayılarda çözünüz.

Çözüm: $(22,17) = 1$ ve $1|13$ olduğundan denklemin tamsayılarda çözümü vardır. Öklid algoritmasından

$$
\begin{aligned}
22 &= 1.17 + 5 \\
17 &= 3.5 + 2 \\
5 &= 2.2 + 1
\end{aligned}
$$

olup $d = 1$ olduğu görülmektedir. Geriye doğru işlemleri yaparsak

$1 = 5 - 2.2$

$1 = 5 - 2.(17 - 3.5)$

$1 = 7.5 - 2.17$

$1 = 7(22 - 17) - 2.17$

$1 = 7.22 - 9.17$

olur. Şimdi bu eşitliği 13 ile genişleterek $13 = (7.13)22 - (9.13)17$ olur. Buradan $x = 7.13 = 91$, $y = 9.13 = 117$ olarak bulunur.

L. Gökçe

(www.geomania.org)