İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ

Bir X kümesi ile bu kümenin elemanları üzerinde tanımlı $c_1, c_2, \ldots, c_k$ koşulları verilmiş olsun. c_i koşulunu sağlayan elemanların sayısını n_i $(i = 1, \ldots, k)$ ile, $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_t}$ koşullarının tümünü sağlayan elemanların sayısını da $n_{i_1, i_2, \cdots, i_t}$ $(\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subset \{1,2,\ldots,k\})$ ile gösterelim.

$$N_0 = |X|,$$

$$N_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i ,$$

$$\vdots$$

$$N_t = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subset \{1,2,\ldots,k\}} n_{i_1, i_2, \cdots, i_t}$$

ve verilen koşulların r tanesini sağlayan ($k - r$ tanesini de sağlamayan) elemanların sayısı S_r $(r = 0,1,\cdots,k)$ olmak üzere

$$S_r = \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C(r+i, r) N_{r+i}$$

dir.

Örnek 1. 10^6 dan küçük ve 2,3,5 ve 7 sayıları ile bölünmeyen, kaç tane doğal sayı olduğunu bulmak için $X = \{1,2,\ldots,1.000.000\}$ kümesi üzerinde şu koşulları tanımlayalım:

c_1 : verilen sayı 2 ile bölünür,

c_2 : verilen sayı 3 ile bölünür,

c_3 : verilen sayı 5 ile bölünür,

c_4 : verilen sayı 7 ile bölünür.

Bu durumda

$n_1 = [10^6 / 2] = 500.000$ (2 ile bölünebilen sayıların adedi),

$n_2 = [10^6 / 3] = 333.333$ (3 ile bölünebilen sayıların adedi),

$n_3 = [10^6 / 5] = 200.000$ (5 ile bölünebilen sayıların adedi),

$n_4 = [10^6 / 7] = 142.857$ (7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,2} = [10^6 / 6] = 166.666$ (2 ve 3 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,3} = [10^6 / 10] = 100.000$ (2 ve 5 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,4} = [10^6 / 14] = 71.428$ (2 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{2,3} = [10^6 / 15] = 66.666$ (3 ve 5 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{2,4} = [10^6 / 21] = 47.619$ (3 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{3,4} = [10^6 / 35] = 28.571$ (5 ve7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,2,3} = [10^6 / 30] = 33.333$ (2, 3 ve 5 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,2,4} = [10^6 / 42] = 23.809$ (2, 3 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,2,4} = [10^6 / 70] = 14.285$ (2, 5 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{2,3,4} = [10^6 / 105] = 9.523$ (3, 5 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)

$n_{1,2,3,4} = [10^6 / 210] = 4.761$ (2, 3, 5 ve 7 ile bölünebilen sayıların adedi)
olduğundan

$$N_0 = 1.000.000$$
$$N_1 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1.176.190,$$
$$N_2 = n_{1,2} + n_{1,3} + n_{1,4} + n_{2,3} + n_{2,4} + n_{3,4} = 480.950,$$
$$N_3 = n_{1,2,3} + n_{1,2,4} + n_{1,3,4} + n_{2,3,4} = 80.950,$$
$$N_4 = n_{1,2,3,4} = 4,761$$

elde edilir. 2, 3, 5 ve 7 ile bölünmeyen sayılar, tanımlanan koşulların hiç birisini sağlamayan sayılar olup bunların sayısı

$$S_0 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 - N_4 = 228.571$$

dir.

Örnek 2. Bir önceki örnekteki hesaplamaları kullanarak, 10^6 dan küçük ve 2,3,5 ve 7 sayılarının yalnızca birisi ile bölünen doğal sayıların adedini $S_1 = C(1,1)N_1 - C(2,1)N_2 + C(3,1)N_3 - C(4,1)N_4$=438.096 olarak buluruz.

Örnek 3. 21 şeker 4 çocuğa, her çocuk en fazla 6 şeker almak koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Dağıtım sonunda çocuklara düşen şeker sayılarını x_1, x_2, x_3 ve x_4 ile gösterirsek, problem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21 \quad 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 6$$

denkleminin tam sayılar kümesindeki çözümlerinin sayısının bulunması problemine dönüşmüş olur.

Şimdi

$$c_1 : x_1 \ge 7,$$
$$c_2 : x_2 \ge 7,$$
$$c_3 : x_3 \ge 7,$$
$$c_4 : x_4 \ge 7$$

koşullarını tanımlarsak aradığımız sayı, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ ($0 \le x_1, x_2, x_3, x_4$) denkleminin hiçbir koşulu sağlamayan tam sayı çözümlerinin sayısı olur.

Koşullar göz önünde bulundurulmadan elde edilen çözümlerin sayısı $N_0 = C(24,3)$ dür.

n_1: [$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ ($7 \le x_1$, $0 \le x_2, x_3, x_4$) denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = [$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ ($0 \le x_1', x_2, x_3, x_4$) denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = $C(17,3)$. Simetriden dolayı $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ olduğundan, $N_1 = 4n_1 = 4 \cdot C(17,3)$ dür.

$n_{1,2}$: [$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ ($7 \le x_1, x_2$, $0 \le x_3, x_4$) denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = [$x_1' + x_2' + x_3 + x_4 = 7$ ($0 \le x_1', x_2', x_3, x_4$) denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = $C(10,3)$. Simetriden dolayı $n_{1,2} = n_{1,3} = n_{1,4} = n_{2,3} = n_{2,4} = n_{3,4}$ olduğundan, $N_2 = 6n_{1,2} = 6 \cdot C(10,3)$ dür.

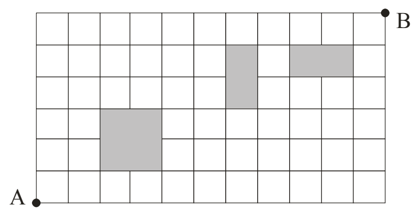
$n_{1,2,3}$: [$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ $(7 \le x_1, x_2, x_3,\ 0 \le x_4)$ denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = [$x_1' + x_2' + x_3' + x_4 = 0$ $(0 \le x_1', x_2', x_3', x_4)$ denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısı] = $C(3,3)$. Simetriden dolayı $n_{1,2,3} = n_{1,2,4} = n_{1,3,4} = n_{2,3,4}$ olduğundan, $N_3 = 4n_{1,2,3} = 4 \cdot C(3,3)$ dür.

Koşullardan hiç birisini sağlamayan çözümlerin sayısı da

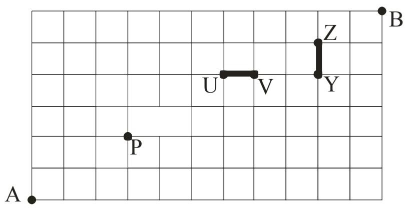
$$S_0 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = C(24,3) - 4 \cdot C(17,3) + 6 \cdot C(10,3) - 4 \cdot C(3,3) = 1032$$

olarak bulunur.

Örnek 4. Aşağıdaki 6×11 ızgaranın A noktasını B noktasına bağlayan ve uzunluğu 17 olan yolların sayısını bulunuz.



Verilen ızgarada nokta ve yolları tamamlayıp yandaki şekilde belirtildiği gibi isimlendirelim. Problem, tamamlanmış ızgaranın A noktasını B noktasına bağlayan $N_0 = C(17,11) = 12.376$ yoldan P noktası ile UV ve ZY doğrularını içermeyenlerin sayısını bulmaktır. Koşulları



c_1: A yı B ye bağlayan yolun P den geçmesi,

c_2: A yı B ye bağlayan yolun UV den geçmesi,

c_3: A yı B ye bağlayan yolun ZY den geçmesi

olarak tanımlarsak,

$$n_1 = C(5;3)C(12;8) = 4.950$$
$$n_2 = C(10;6)C(6;4) = 3.150$$
$$n_3 = C(11,9)C(3,2) = 165$$

$$n_{1,2} = C(5,3)\cdot C(5,3)\cdot C(6,4) = 1.500$$
$$n_{1,3} = C(5,3)\cdot C(8,6)\cdot C(3,2) = 840$$
$$n_{2,3} = C(10,6)\cdot 1\cdot C(3,2) = 630$$

$$n_{1,2,3} = C(5,3)\cdot C(5,3)\cdot 1\cdot C(3,2) = 300$$

ve $N_1 = 8.265$, $N_2 = 2.970$, $N_3 = 300$ bulunur. Sonuç olarak, verilen şartları sağlayan yolların sayısı

$$S_0 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 6.781$$

dir.

Örnek 5. (Şaşkın Dizilişler) $1,2,\dots,n$ sayılarının, her sayının orijinal konumundan farklı bir konumda bulunduğu permütasyona şaşkın diziliş (derangement) adı verilir ve bu dizilişlerin sayısı D_n ile gösterilir. D_n i hesaplamak için c_i koşulunu, i sayısının ($i = 1,2,\dots,n$) orijinal konumunda olması şeklinde tanımlarsak $n_i = (n-1)!$ ve $N_1 = n(n-1)!$ olur. Benzer şekilde $n_{i_1,i_2,\cdots,i_t} = (n-t)!$ ve $N_t = C(n,t)\cdot(n-t)! = \frac{n!}{t!}$ dir. $N_0 = n! = \frac{n!}{0!}$ yazarak

$$D_n = S_0 = \sum_{t=1}^{n}(-1)^t \frac{n!}{t!} = n!\sum_{t=1}^{n}(-1)^t \frac{1}{t!}$$

elde edilir.

Not. $e^x = \sum_{t=1}^{\infty}\frac{x^t}{t!}$ olduğu hatırlanarak $D_n \approx \frac{n!}{e}$ yazabiliriz. Filhakika, $D_n = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right]$ dir.

Örnek 6. n satır ve m sütuna sahip bir satranç tahtasının her bir birim karesi beyaz veya kırmızıya boyanacaktır. Her satır ve her sütunda en az bir tane beyaz birim kare bulunması koşulu ile boyama işinin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

Matrisin her satırı $2^m - 1$ farklı şekilde boyanabileceğinden, her satırında en az bir tane beyaz birim kare bulunmak üzere matris $N_0 = (2^m - 1)^n$ farklı şekilde boyanabilir. Bu şekilde boyanmış bir matriste, i. sütunun ($i = 1, \ldots, m$) tüm birim karelerinin kırmızı olması koşulunu c_i ile belirtelim. c_i koşulu sağlandığında her satırın i. birim karesi kırmızı olacağından geri kalan $m-1$ kareyi $2^{m-1} - 1$ farklı şekilde ve matrisin tümünü de $n_1 = (2^{m-1} - 1)^n$ farklı şekilde boyayabiliriz. $n_1 = \cdots = n_m$ olduğundan $N_1 = m(2^{m-1} - 1)^n$ yazabiliriz. $c_1, \ldots, c_m$ koşullarından herhangi k tanesi sağlandığında her satır için $2^{m-k} - 1$ ve matrisin tümü için de $(2^{m-k} - 1)^n$ boyama şekli olduğundan, $N_k = C(m,k) \cdot (2^{m-k} - 1)^n$ olur. Sonuç olarak problemde istenilen matrislerin sayısı olarak

$$S_0 = \sum_{k=0}^{m} C(m,k) \cdot (2^{m-k} - 1)^n$$

bulunur.