

1.

$$\begin{cases} x + y = t, \\ x^2 + y^2 = 2t \end{cases}$$

denkleminin tüm gerçel değerli  $(x, y, t)$  çözümleri içinde  $t$ 'nin alabileceği en büyük değer ne olur? **(9.21)**

**Çözüm:**  $2(2t) = 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = t^2 \Rightarrow t(4 - t) \geq 0 \Rightarrow t \in [0, 4] \Rightarrow t_{max} = 4.$

2.  $\lfloor x^2 + 4x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + 4\lfloor x \rfloor$  denkleminin gerçel sayılardaki çözüm kümesinde  $x = 0$  sayısını içine alan en geniş aralık nedir? **(36.37)**

**Çözüm:**  $-0, 1 < x < 0 \Rightarrow \lfloor x^2 + 4x \rfloor = -1; \lfloor x \rfloor^2 + 4 \cdot \lfloor x \rfloor = -3 \neq -1$   
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 + 4x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + 4 \cdot \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 + 4x < 1 \Rightarrow 0 \leq (x - x_1)(x - x_2) < 0. x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow 0 \leq x < -2$

3. Her  $a, b, c \geq 0$  için  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$  eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz. **(PSS162.E2)**

**Çözüm:**  $a + b \geq 2\sqrt{ab}; b + c \geq 2\sqrt{bc}; c + a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{abcca} = 8abc$

4. Her  $a, b > 0$  için

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{(a + nb)}{n + 1}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız. **(PSS179.4)**

**Çözüm:**  $\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b} \stackrel{AGO}{\leq} \frac{a + b + \dots + b}{n + 1} = \frac{a + nb}{n + 1}.$

5.  $a$  ve  $b$  pozitif gerçel sayılar ve  $ab(a - b) = 1$  ise,  $a^2 + b^2$  aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) 1    B) 2    C)  $2\sqrt{2}$     D)  $\sqrt{11}$     E) Hiçbiri

**Çözüm:**  $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + ab + ab \geq 3\sqrt{(a - b)^2 a^2 b^2} = 3 \Rightarrow (D)$

6.  $\frac{1}{x} + \frac{2}{2x - 1} \geq 1$  eşitsizliğinin gerçel sayılarda çözüm kümesi ayrık aralıkların birleşimi olarak yazıldığında, bu aralıkların uzunlukları toplamı ne olur? **(9.20)**

**Çözüm:**  $\frac{2x - 1 + 2x - 2x^2 + x}{x(2x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x + 1}{x(2x - 1)} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{2(x - x_1)(x - x_2)}{x(2x - 1)} \leq 0; \quad x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}.$   
 $x \in (0, x_1] \cup \left(\frac{1}{2}, x_2\right] \Rightarrow (x_1 - 0) + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) = x_1 + x_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.$

7.  $x + y + z = 1$  olmak üzere tüm  $x, y, z$  pozitif gerçel sayıları için,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

çarpımının alabileceği en küçük değer nedir? **(21.5)**

**Çözüm:**  $\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x + y + z}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq 54 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} \geq \\ &1 + 9 + \frac{z + x + y}{xyz} + \frac{1}{xyz} = 10 + \frac{2}{xyz} \geq 10 + 54 = 64 \end{aligned}$$

8.  $\llbracket a \rrbracket$  ile  $a$  gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim. Her  $x$  gerçel sayısı için,  $f(x) = x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor$  olarak tanımlanan fonksiyonun değer kümesi nedir? **(79.13)**

**Çözüm:** Her  $a \in \mathbb{R}$  için  $0 \leq a - \llbracket a \rrbracket < 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) + \left(\frac{x}{3} - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor\right) + \left(\frac{x}{6} - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor\right) \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow R = [0, 3)$

9.

$$\frac{4x^2}{1 + 4x^2} = y, \quad \frac{4y^2}{1 + 4y^2} = z, \quad \frac{4z^2}{1 + 4z^2} = x$$

sistemini tam olarak kaç gerçel  $(x, y, z)$  üçlüsü sağlar? **(2003.12)**

**Çözüm:**  $x, y, z \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4z^2}{1 + 4z^2} \leq \frac{4z^2}{2\sqrt{1 \cdot 4z^2}} = z = \frac{4y^2}{1 + 4y^2} \leq \frac{4y^2}{2\sqrt{4y^2}} = y \leq \dots \leq x \Rightarrow x = y = z \Rightarrow 4x^2 = x(1 + 4x^2) \Rightarrow x = 0$

veya  $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

10.  $x, y > 0$  olmak üzere  $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$  sayılarından en küçüğünü  $s$  ile gösterirsek,  $s$ 'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz. **(PSS181.34)**

**Çözüm:**  $s \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s} \Rightarrow s^2 \leq 2 \Rightarrow s \leq \sqrt{2}$ .

$y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow s = \sqrt{2}$

11.  $x > 0, y > 0, z > 0$  ve  $x + y + z = 1$  olmak üzere  $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}$  ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır? **(A6.3.7)**

**Çözüm:**  $\frac{9}{A} = \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}} = \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{y}{3}} + \frac{1}{\frac{y}{3}} + \frac{1}{\frac{y}{3}} + \frac{1}{\frac{z}{5}} + \dots + \frac{1}{\frac{z}{5}}} \stackrel{AHO}{\leq}$

$\frac{x + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \dots + \frac{z}{5}}{9} = \frac{x + y + z}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$A \geq 81x = \frac{y}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow A = 81$

12.  $x, y, z$  gerçel sayılar olmak üzere,

$$2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6zx + 3$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir? **(95.11)**

**Çözüm:**  $A = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 6zx + 9z^2) + (4y^2 - 4yz + z^2) - 3 = (x - y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - z)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow A = 0$

- 13.

$$\begin{cases} (x + y)^5 = z \\ (y + z)^5 = x \\ (z + x)^5 = y \end{cases}$$

sistemini sağlayan kaç  $(x, y, z)$  gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır? **(127.13)**

**Çözüm:** Örneğin  $x \leq y \leq z$  olsun  $\Rightarrow x = (y + z)^5 \geq (z + x)^5 = y \geq (x + y)^5 = z \Rightarrow x = y = z \Rightarrow 2^5 x^5 = x \Rightarrow x = y = z = 0$  veya  $x^4 = 2^{-5} \Rightarrow x = y = z = 2^{-\frac{5}{4}}$

14.  $a, b, c$  gerçel sayıları  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  eşitliğini sağlıyorsa,  $ab + bc + ac$  ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir? **(161.12)**

**Çözüm:**  $A = ab + bc + ac$  olsun.  $1 + 2A = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$ .  
 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ .

15.  $x$  pozitif bir gerçel sayı olmak üzere  $x^2 + \frac{1}{4x}$  ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz? (163.17)

- A)  $\sqrt{3} - 1$     B)  $2\sqrt{2} - 2$     C)  $\sqrt{5} - 1$     D) 1    E) Hiçbiri

**Çözüm:**  $x^2 + \frac{1}{4x} = x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{8x} \cdot \frac{1}{8x}} = \frac{3}{4} \Rightarrow (A)$

16.  $x, y$  gerçel sayıları  $x^2 + xy + y^2 = 1$  eşitliğini sağlıyorsa,  $x^2 + y^2$  aşağıdakilerden hangisi olamaz? (165.21)

- A)  $1/\sqrt{2}$     B)  $1/2$     C)  $\sqrt{2}$     D)  $3 - \sqrt{3}$     E) Hiçbiri

**Çözüm:**  $3(x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2 + x^2 + y^2 \geq 2x^2 + 2y^2 + 2xy \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (B)$

17.  $n$  pozitif bir tam sayı ve  $x$  pozitif bir gerçel sayı olmak üzere,  $nx + \frac{1}{x^n}$  ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

**Çözüm:**  $nx + \frac{1}{x^n} = x + x + \dots + x + \frac{1}{x^n} \geq (n+1) \cdot \sqrt[n+1]{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n \cdot \frac{1}{x^n}} \Rightarrow nx + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$   $n = 1, x = 1 \Rightarrow nx + \frac{1}{x} = 2$ .