

TAM SAYILARIN BÖLÜNMESİ

1. **(250Pr1)** $n^2 + 1$ sayısı $n + 1$ 'e bölünecek şekilde tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.
2. **(250Pr2)** $x^3 - 3$ sayısı $x - 3$ 'e bölünecek şekilde tüm tam $x \neq 3$ sayılarını bulunuz.
3. **(250Pr3)** $4n^2 + 1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam n sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
4. **(250Pr4)** Her pozitif tam n sayısı için $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.
5. **(250Pr5)** $k = 0, 1, 2, \dots$ için $2^{2^{6k+2}} + 3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.
6. **(250Pr6)** $2^{70} + 3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.
7. **(250Pr7)** $20^{15} - 1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$ çarpımına bölündüğünü kanıtlayınız.
8. **(250Pr8)** Her pozitif tam m sayısı ve $a > 1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right) = (a - 1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

9. **(250Pr9)** Her pozitif n sayısı için $3 \cdot (1^5 + 2^5 + \dots + n^5)$ sayısının $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ 'e bölündüğünü kanıtlayınız.
10. **(250Pr10)** $1^n + 2^n + \dots + (n - 1)^n$ sayısının n 'e bölünmesini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.
11. **(250Pr11)** Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.

12. **(250Pr12)** Her n pozitif tam sayısı için

$$x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, \dots$$

sonsuz dizisinin herbir terimi n 'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

13. **(250Pr13)** Her x çift pozitif tam sayısı için

$$x^x + 1, x^{x^x} + 1, x^{x^{x^x}} + 1, \dots$$

dizisinin terimlerinden hiçbiri n 'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

14. **(250Pr14)** Her n pozitif tam sayısı için $(n + 1)^n - 1$ sayısının n^2 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.

15. **(250Pr15)** Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n - 1)^n - 1}$ sayısının $(2^n - 1)^2$ 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.

16. **(250Pr16)** $2^n + 1$ sayısı n 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.

17. **(250Pr17)** Her $a > 1$ tam sayısı için $a^n + 1$ sayısı n 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

18. **(250Pr18)** $2^n + 2$ sayısı n 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

19. **(250Pr19)** $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.

20. **(250Pr20)** Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n 'ye bölünmediğini kanıtlayınız.

- (a) **(250Pr20a)** $2^n + 1$ sayısının n 'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

21. **(250Pr21)** $3^n + 1$ sayısının n 'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.

22. **(250Pr22)** $n \cdot 2^n + 1$ sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.
23. **(250Pr23)** Her tek p asal sayısı için $n \cdot 2^n + 1$ sayısının p 'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
24. **(250Pr24)** Her pozitif tam n sayısı için, y^y sayısı x^x 'e bölünecek, fakat y sayısı x 'e bölünmeyecek şekilde $x > n$ ve y pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.
25. **(250Pr25)** Her n tek pozitif tam sayısı için $2^{n!} - 1$ sayısının n 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.
26. **(250Pr26)** $2^n - 3$ ($n = 2, 3, \dots$) sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda teriminin; 13'e bölünen sonsuz tane teriminin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir teriminin bulunmadığını kanıtlayınız.
27. **(250Pr27)** $2^n - 2$ ve $3^n - 3$ sayıları n 'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik n sayısını bulunuz.
28. **(250Pr28)** $2^n - 2$ sayısının n 'ye bölünmesini, $3^n - 3$ sayısının da n 'ye bölünmemesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.
29. **(250Pr29)** $2^n - 2$ sayısının n 'ye bölünmemesini, $3^n - 3$ sayısının da n 'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.
30. **(250Pr30)** Her a pozitif tam sayısı için $a^n - a$ sayısı n e bölünecek şekilde bir n bileşik sayı bulunuz.
31. **(250Pr31)** a, b, c tam sayılar olmak üzere $a^3 + b^3 + c^3$ sayısı 9'e bölünüyorsa, a, b, c sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.
32. **(250Pr32)** $a_k, k = 1, 2, 3, 4, 5$ tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

sayısı 9'e bölünüyorsa,

$$3 \mid a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$$

olduğunu kanıtlayınız.

33. **(250Pr33)** $(x, y) = 1$ ve $x^2 + y^2 = z^4$ olmak üzere x, y, z pozitif tam sayılarsa, $7 \mid x \cdot y$ olduğunu kanıtlayınız. $(x, y) = 1$ koşulunun gerekli olduğunu gösteriniz.
34. **(250Pr34)** a, b tam sayıları için $7 \mid a^2 + b^2$ ise $7 \mid a$ ve $7 \mid b$ olduğunu kanıtlayınız.
35. **(250Pr35)** Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda x, y pozitif tam sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız ve böyle çiftlerden en küçüğünü bulunuz:

$$x(x+1) \mid y(y+1), \quad x \nmid y, \quad x+1 \nmid y, \quad x \nmid y+1, \quad x+1 \nmid y+1.$$

36. **(250Pr36)** Her $s \leq 25$ pozitif tam sayısı ve $s = 100$ için basamakları toplamı s 'ye eşit olan ve s 'ye bölünen en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.
37. **(250Pr37)** Her s pozitif tam sayısı için, s 'ye bölünen ve basamakları toplamı s 'ye eşit olan bir n pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
38. **(250Pr38)** Aşağıdakileri kanıtlayınız:
- (a) her pozitif tam sayının $4k + 1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k + 3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından az değildir.
 - (b) $4k + 1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k + 3$ şeklindeki bölenlerinin sayısına eşit olan sonsuz tane pozitif tam sayı bulunur.
 - (c) $4k + 1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k + 3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından fazla olan sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunur.
39. **(250Pr39)** a, b, c herhangi tam sayılar ve n de 3'ten büyük olan bir tam sayı ise, $k + a, k + b, k + c$ sayılarından hiçbiri n 'ye bölünmeyecek şekilde bir k tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
40. **(250Pr40)** $F_n = 2^{2^n} + 1$ için $F_n \mid 2^{F_n} - 2$ olduğunu kanıtlayınız ($n = 1, 2, 3, \dots$).

ARALARINDA ASAL SAYILAR

41. **(250Pr41)** Her k tam sayısı için $2k + 1$ ve $9k + 4$ sayılarının aralarında asal olduğunu kanıtlayınız. $2k - 1$ ve $9k + 4$ sayılarının *OBEB*'ini k 'ya bağlı bir fonksiyon olarak bulunuz.
42. **(250Pr42)** $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan ve her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
43. **(250Pr43)** $n(n+1)(n+2)/6$ şeklinde olan ve her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
44. **(250Pr44)** a ve b bir birinden farklı tam sayı ise, $a + n$ ve $b + n$ sayıları aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
45. **(250Pr45)** a, b, c birbirinden farklı tam sayılarsa, $a + n, b + n, c + n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
46. **(250Pr46)** $a + n, b + n, c + n$ ve $d + n$ sayılarının ikişer ikişer aralarında asal olmasını sağlayan hiçbir n pozitif tam sayısı olmayacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tam sayılarını bulunuz.
47. **(250Pr47)** 6'dan büyük olan her tam sayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.
48. **(250Pr48)** 17'den büyük olan her tam sayının ikişer-ikişer aralarında asal olan 1'den büyük 3 tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini ve 17'nin de bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.
49. **(250Pr49)** Her m pozitif tam sayısı için her $2k$ çift sayısının m ile aralarında asal olan iki pozitif tam sayının farkı şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.
50. **(250Pr50)** Fibonacci dizisinin, tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan bir alt dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.

51. **(250Pr51)** Her $n = 1, 2, \dots$ için $OBEB(n, 2^{2^n} + 1) = 1$ olduğunu gösteriniz.
(250Pr51a) $OBEB(n, 2^n - 1) > 1$ olmasını sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

ARİTMETİK DİZİLER

52. **(250Pr52)** Pozitif tam sayılardan oluşan ve tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan ve terim sayısı yeterince önceden verilen herhangi n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.
53. **(250Pr53)** Her k pozitif tam sayısı için, pozitif tam bölenlerinin sayısı k 'yı bölen tüm n sayıları kümesinin bir sonsuz aritmetik dizi içerdiğini kanıtlayınız.
54. **(250Pr54)** $x(x + 1), y(y + 1), z(z + 1)$ sayıları artan aritmetik dizi oluşturacak şekilde sonsuz sayıda x, y, z pozitif tam sayı üçlüsünün bulunduğunu kanıtlayınız.
55. **(250Pr55)** Kenarları bir aritmetik dizi oluşturan tam sayılar olan tüm dik üçgenleri bulunuz.
56. **(250Pr56)** Pozitif tam sayılardan oluşan, hiçbir üçgen $(n(n + 1)/2$ şeklinde olan) sayı içermeyen ve farkı en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.
57. **(250Pr57)** a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b (k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinin sonsuz tane tam kare içermesi için gerek ve yeterli koşulu bulunuz.
58. **(250Pr58)** Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan ve terim sayısı önceden verilen n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.
59. **(250Pr59)** Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan sonsuz bir aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız.

60. **(250Pr60)** Her biri bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan dört ardışık sayı bulunmadığını kanıtlayınız.
61. **(250Pr61)** Pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizinin bileşik sayılardan oluşan, önceden verilen n 'den fazla sayıda ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
62. **(250Pr62)** a ve b aralarında asal pozitif tam sayılarsa her m pozitif tam sayısı için $ak+b(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinin m ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terimi bulunduğunu kanıtlayınız.
63. **(250Pr63)** Her s pozitif tam sayısı için pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizide önceden verilen herhangi s tane rakamla başlayan terimlerinin bulunduğunu kanıtlayınız.
64. **(250Pr64)** Fibonacci dizisinin üç teriminden oluşan tüm artan aritmetik dizileri bulunuz ve bu dizinin dört teriminden oluşan hiçbir artan aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız.
65. **(250Pr65)** Tam sayılardan oluşan, Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen ve farkı en az olan bir artan aritmetik dizi bulunuz.
66. **(250Pr66)** a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b(k = 0, 1, 2, \dots)$ şeklinde olan ve Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen bir aritmetik dizi bulunuz.
67. **(250Pr67)** a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b(k = 0, 1, 2, \dots)$ şeklinde olan her aritmetik dizinin ikişer ikişer aralarında asal olan sonsuz sayıda teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
68. **(250Pr68)** a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak + b(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinde asal çarpanları aynı olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.
69. **(250Pr69)** a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak + b(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisi ve her s pozitif tam sayısı için, s tane birbirinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.
70. **(250Pr70)** Farkı 10 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.

71. **(250Pr71)** Farki 100 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.
72. **(250Pr72)** Sadece asal sayılardan oluşan, 10 terimli ve son terimi en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.
73. **(250Pr73)** Pozitif tam sayılardan oluşan ve hiçbir terimi iki asal sayının ne toplamı, ne de farkı şeklinde gösterilemeyen artan bir sonsuz aritmetik dizi bulunuz.

ASAL VE BİLEŞİK SAYILAR

74. **(250Pr74)** Her çift $n > 6$ tam sayısı için $(n - p, n - q) = 1$ olacak şekilde p ve q asal sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.
75. **(250Pr75)** Hem iki asal sayının toplamı hem de farkı şeklinde yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.
76. **(250Pr76)** n ile $n + 10$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz. $10m$ ile $10(m + 1)$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük m pozitif tam sayısını bulunuz.
77. **(250Pr77)** $4k + 1$ şeklinde olan her asal sayının, kenar uzunlukları tam sayılar olan bir dik üçgenin hipotenüzünün uzunluğuna eşit olduğunu kanıtlayınız.
78. **(250Pr78)** p, q, r asal sayılar olmak üzere, $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ denkleminin dört tane çözümünü bulunuz.
79. **(250Pr79)** p, q, r, s, t asal sayılar olmak üzere $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ denkleminin çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
80. **(250Pr80)** $p(p + 1) + q(q + 1) = r(r + 1)$ denkleminin tüm p, q, r asal çözümlerini bulunuz.
81. **(250Pr81)** $p(p + 1), q(q + 1), r(r + 1)$ sayılarının bir artan aritmetik dizi oluşturmasını sağlayan tüm p, q, r asal sayılarını bulunuz.

82. **(250Pr82)** $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13$ ve $n + 15$ sayılarının her birinin asal olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.
83. **(250Pr83)** İki tam sayının dördüncü dereceden kuvvetnin toplamına eşit olan beş asal sayı bulunuz.
84. **(250Pr84)** İkiz asal sayılar olmayan sonsuz sayıda ardışık asal sayılar çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız.
85. **(250Pr85)** Hiçbir ikiz asal sayıda bulunmayan sonsuz tane asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
86. **(250Pr86)** $n^2 - 1$ sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz.
87. **(250Pr87)** $n^2 + 1$ sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz. $n^2 + 1$ sayısının birbirinden farklı üç tek sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan bir n pozitif sayısı bulunuz.
88. **(250Pr88)** 7'den büyük olan her ardışık üç sayıdan en az birinin en az iki birbirinden farklı asal böleninin bulunduğunu kanıtlayınız.
89. **(250Pr89)** $n, n + 1, n + 2$ sayılarından her biri birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olacak şekilde beş en küçük pozitif tam sayı bulunuz. Bu özelliğe sahip olan dört ardışık sayının bulunmadığını kanıtlayınız. Her birinin tam iki asal böleni bulunan dört ardışık pozitif tam sayı bulunuz.
90. **(250Pr90)** Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu gösteriniz:
- (a) n ve $n + 1$ sayılarının her birinin sadece bir asal böleni olmasını sağlayan n pozitif tam sayıları sonlu sayıdadır.
 - (b) Sadece sonlu sayıda Mersenne asal sayıları ve sonlu sayıda Fermat asal sayıları vardır.
91. **(250Pr91)** n pozitif tam sayı olmak üzere milyondan büyük olmayan ve iki asal sayının çarpımına eşit olan tüm $2^n - 1$ şeklinde olan sayıları bulunuz. n çift sayı ise ve 4'ten büyükse, $2^n - 1$ sayısının 1'den büyük olan en az üç sayının çarpımı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

92. **(250Pr92)** 47. problemi kullanarak, p_n, n . asal sayıyı göstermek üzere, her $n \geq 3$ için $p_{n+1} + p_{n+2} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.
93. **(250Pr93)** n pozitif tam sayısı için q_n ile, n 'nin böleni olmayan en küçük asal sayıyı gösterelim. 92. problemi kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} = 0$ olduğunu kanıtlayınız.
94. **(250Pr94)** Her $n > 4$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olan en az bir tam sayının bulunduğunu ve her $n > 15$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında, birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
95. **(250Pr95)** Her s pozitif tam sayısı için, yeterince büyük n 'ler için n ile $2n$ arasında s tane bir birinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
96. **(250Pr96)** $1, 31, 331, 3331, \dots$ sonsuz dizisinde sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.
97. **(250Pr97)** $n^4 + (n+1)^4$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.
98. **(250Pr98)** $10^n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
99. **(250Pr99)** $n > 1$ tam sayıları için $\frac{2^{4n+2} + 1}{5}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
100. **(250Pr100)** Her m pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sonsuz dizisinin, bileşik sayılardan oluşan m ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
101. **(250Pr101)** Bir basamağı değiştirilerek bir asal sayı elde edilemeyen bir pozitif tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
102. **(250Pr102)** Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu kanıtlayınız:
- (a) **T.** Her $n > 1$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında en az bir asal sayı bulunur.

- (b) **T1.** Her $n > 1$ tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrılışında üstü bir olan en az bir asal sayı bulunur.
103. **(250Pr103)** Her n pozitif tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrılışında kuvveti 1 olan en az iki asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
104. **(250Pr104)** Her n pozitif tam sayısı için, $p - 1$ ve $p + 1$ sayılarının her birinin en az n tane pozitif tam böleni olacak şekilde bir p asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
105. **(250Pr105)** $p - 1$ ve $p + 1$ sayılarından her birinin en az 3 farklı asal böleni bulunacak şekilde en küçük p asal sayısını bulunuz.
106. **(250Pr106)** Her n pozitif tam sayısı için, $p - 1$, $p + 1$ ve $p + 1$ sayılarının her birinin en az n tane farklı asal böleni olacak şekilde sonsuz sayıda p asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
107. **(250Pr107)** Her n ve s pozitif tam sayıları için, her bir teriminin en az n farklı asal böleni olacak ve bu asal sayıların her birinin kuvveti en az s olacak şekilde istenilen uzunlukta ardışık sayılar dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.
108. **(250Pr108)** $n > 1$ tek sayısı için n ve $n + 2$ sayılarının sayılarının asal olması için, $(n - 1)!$ sayısının n ve $n + 2$ sayılarına bölünmemesinin gerek ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.
109. **(250Pr109)** Her m pozitif tam sayısı için basamakları toplamı m 'den büyük olan bir asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
110. **(250Pr110)** Her m pozitif tam sayısı için en az m basamağı 0 olan asal sayıların bulunduğunu kanıtlayınız.
111. **(250Pr111)** p^4 sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.
112. **(250Pr112)** $2 \leq s \leq 10$ olmak üzere her s için pozitif tam bölenlerinin toplamı bir tam sayının s . dereceden kuvvetine eşit olan tüm asal sayıları bulunuz.
113. **(250Pr113)** $(p - 1)! + 1 = p^m$ denkleminin, $p > 5$ bir asal sayı ve m bir pozitif tam sayı olacak şekilde hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

114. **(250Pr114)** Bir $n < q$ pozitif tam sayısı için q , $(n-1)!$ sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda q asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
115. **(250Pr115)** Her $k \neq 1$ için, $2^{2^n} + k$ sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
116. **(250Pr116)** Tüm $2^{2^n} + k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda $k > 0$ tek sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
117. **(250Pr117)** Her $n = 1, 2, \dots$ sayısı için $2^{2^{2n+1}} + 3, 2^{2^{4n+1}} + 7, 2^{2^{6n+2}} + 13, 2^{2^{10n+1}} + 19$ ve $2^{2^{6n+2}} + 21$ sayılarının her birinin bileşik olduğunu kanıtlayınız.
118. **(250Pr118)** Tüm $k \cdot 2^n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
119. **(250Pr119)** Her $2^n + k$ ($n = 1, 2, \dots$) sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k tek sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
120. **(250Pr120)** k sayısı 2'nin bir kuvveti ise, yeterince büyük n sayıları için tüm $k \cdot 2^{2^n} + 1$ sayılarının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
121. **(250Pr121)** Her $k \leq 10$ pozitif tam sayısı için $k \cdot 2^{2^n} + 1$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.
122. **(250Pr122)** Her $k \cdot 2^{2^n} + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) sayısının bileşik olmasını sağlayan tüm $k \leq 10$ pozitif tam sayılarını bulunuz.
123. **(250Pr123)** Her $n > 1$ tam sayısı için $\frac{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1}{3}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
124. **(250Pr124)** $(2^{2^n} + 1)^2 + 2^2$ şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
125. **(250Pr125)** $1 < a \leq 100$ olmak üzere her a tam sayısı için $a^{2^n} + 1$ sayısı bileşik olacak şekilde en az bir $n \leq 6$ pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
126. **(250Pr126)** Üç tane asal sayının toplamı şeklinde gösterilebilen fakat üçten az sayıda asal sayının toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda tek sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

127. **(250Pr127)** $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5$ eşitliklerini sağlayan ve katsayıları tam sayılar olan hiçbir $f(x)$ polinomunun bulunmadığını, ve her $m > 1$ tam sayısı için, p_n, n . asal sayı olmak üzere $f(k) = p_n (n = 1, 2, \dots)$ olacak şekilde katsayıları rasyonel sayılar olan bir $f(x)$ polinomunun bulunduğunu kanıtlayınız.
128. **(250Pr128)** Her n pozitif tam sayısı için $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$ sayıları asal olacak şekilde katsayıları tam sayılar olan bir $f(x)$ polinomu bulunduğunu kanıtlayınız.
129. **(250Pr129)** x değişkeninin m farklı değerinde m farklı asal sayı veren ve katsayıları tam sayılar olan bir indirgenmez $f(x)$ polinomu bulunuz.
130. **(250Pr130)** $f(x)$, derecesi 0'dan büyük olan tam sayı katsayılı bir polinomsa, sonsuz sayıda p asal sayısı için $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
131. **(250Pr131)** $k + 1, k + 2, \dots, k + 10$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.
132. **(250Pr132)** $k + 1, k + 2, \dots, k + 100$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.
133. **(250Pr133)** 25 tane asal sayı içeren tüm 100 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.
134. **(250Pr134)** 8 tane asal sayı içeren tüm 21 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.
135. **(250Pr135)** $p, p + 2, p + 6, p + 8, p + 12$ ve $p + 14$ sayılarının her biri asal sayı olacak şekilde tüm p sayılarını bulunuz.
136. **(250Pr136)** Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda bir birinden farklı m ve n pozitif tam sayıları ikilisinin bulunduğunu kanıtlayınız:
- (a) m ve n sayılarının asal bölenleri aynıdır;
 - (b) $m + 1$ ve $n + 1$ sayılarının asal bölenleri aynıdır.

DİOFANT DENKLEMLERİ

137. **(250Pr137)** $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
138. **(250Pr138)** $2x^3 + xy - 7 = 0$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz ve pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
139. **(250Pr139)** $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = y^2 + 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
140. **(250Pr140)** $x(x+1) = 4y(y+1)$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün bulunmadığını, fakat pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
141. **(250Pr141*)** p bir asal sayı ve n de bir pozitif tam sayı ise, $x(x + 1) = p^{2n}y(y + 1)$ denkleminin pozitif tam sayılarla hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
142. **(250Pr142)** Verilen k tam sayısı için $x^2 - 2y^2 = k$ denkleminin bir (x_0, y_0) tam sayı çözümü varsa, $x^2 - 2y^2 = -k$ denkleminin bir tam sayı çözümünü bulunuz.
143. **(250Pr143)** Her D tam sayısı için $x^2 - Dy^2 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
144. **(250Pr144)** D , sıfırdan farklı herhangi tam sayı ise, $x^2 - Dy^2 = z^2$ denkleminin, $OBEB(x, y) = 1$ olacak şekilde pozitif tam sayılarla sonsuz tane (x, y, z) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
145. **(250Pr145)** $xy + x + y = 2^{32}$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümlerinin bulunduğunu ve $x \leq y$ koşulunu sağlayan sadece bir çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
146. **(250Pr146)** $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
147. **(250Pr147)** $y^2 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

148. **(250Pr148)** $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ denkleminin tüm rasyonel sayı çözümlerini bulunuz.
149. **(250Pr149)** $4xy - x - y = z^2$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin bulunmadığını ve negatif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
150. **(250Pr150)** m pozitif tam sayı olmak üzere $D = m^2 + 1$ ise, $x^2 + Dy^2 = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
151. **(250Pr151*)** $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.
152. **(250Pr152)** Her m pozitif tam sayısı için $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$ denkleminin, x, y, z aralarında asal olmak üzere tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
153. **(250Pr153)** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
154. **(250Pr154*)** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 2$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
155. **(250Pr155)** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
156. **(250Pr156*)** $m = 1$ ve $m = 2$ için $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 3$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
157. **(250Pr157)** Aşağıdaki **(T₁)** ve **(T₂)** teoremlerinin denk olduğunu kanıtlayınız.
- (T₁)**: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.
- (T₂)**: $u^3 + v^3 = w^3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.

158. **(250Pr158*)** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını, fakat sonsuz sayıda tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
159. **(250Pr159*)** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$ denkleminin, $m = 2$ ve $m = 3$ için pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 4$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
160. **(250Pr160)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ denkleminin, $x \leq y \leq z \leq t$ olmak üzere tüm pozitif tam çözümlerini bulunuz.
161. **(250Pr161)** Her s pozitif tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin sonlu sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
162. **(250Pr162*)** Her $s > 2$ tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ eşitsiliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız. Bu çözümlerinin sayısını I_n ile gösterirsek, $s = 3, 4, \dots$ için $I_{s+1} > I_s$ olduğunu gösteriniz.
163. **(250Pr163)** s , 2'den farklı pozitif tam sayı ise, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin üçgen sayıları ile (yani $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan sayılarla) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
164. **(250Pr164)** $\frac{1}{x^1} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
165. **(250Pr165)** $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunmasını sağlayan tüm s pozitif tam sayılarını bulunuz.
166. **(250Pr166)** $\frac{1}{2}$ sayısını sonlu sayıda artan pozitif tam sayının karelerinin terslerinin toplamı şeklinde gösteriniz.

167. **(250Pr167*)** Her m pozitif tam sayısı ve tüm yeterince büyük s pozitif tam sayıları için $\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_s^m} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

168. **(250Pr168)** Her s pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

169. **(250Pr169)** Her $s \geq 3$ pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

170. **(250Pr170*)** $x + y + z = 3$ ve $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ denklemler sisteminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

171. **(250Pr171)** Hangi n pozitif tam sayıları için $3x + 5y = n$ denkleminin en az bir tane pozitif tam sayı çözümü bulunduğunu araştırın ve n sonsuluğa gittiğinde bu çözüm sayısının da sonsuzluğa gittiğini kanıtlayınız.

172. **(250Pr172)** $n^x + n^y = n^z$ denkleminin tüm n, x, y, z pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

173. **(250Pr173)** Her (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için tek bir $x = n, x = m$ pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

174. **(250Pr174)** Her m pozitif tam sayısı için tam m tane pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

175. **(250Pr175)** m verilen bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$$

denkleminin tam m tane pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

176. **(250Pr176)** $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

177. **(250Pr177)** Her n pozitif tam sayısı için

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \dots + (x+n)^3 = y^3$$

denkleminin tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

178. **(250Pr178)** $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+5)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

179. **(250Pr179)** $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+10)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

180. **(250Pr180)** $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$ denkleminin iki tane pozitif tam sayı çözümünü bulunuz.

181. **(250Pr181)** $1 + x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

182. **(250Pr182)** n, x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $n^x + n^y + n^z = n^t$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

183. **(250Pr183)** x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $4^x + 4^y + 4^z = 4^t$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

184. **(250Pr184)** $2^m - 3^n = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

185. **(250Pr185)** $3^n - 2^m = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

186. **(250Pr186)** $2^x + 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

187. **(250Pr187)** $2^x - 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
188. **(250Pr188)** $x^2 + 2y^2 = z^2$; $2x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
189. **(250Pr189)** $[2(3x + 2y + 1) + 1]^2 - 2(4x + 3y + 2)^2 = (2x + 1)^2 - 2y^2$ özdeşliğini kullanarak $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.
190. **(250Pr190)** $[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[2(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x + 1)^2$ özdeşliğini kullanarak $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız
191. **(250Pr191)**
192. **(250Pr136)**
193. **(250Pr136)**
194. **(250Pr136)**
195. **(250Pr136)**
196. **(250Pr136)**
197. **(250Pr136)**
198. **(250Pr136)**
199. **(250Pr136)**
200. **(250Pr136)**
201. **(250Pr136)**
202. **(250Pr136)**
203. **(250Pr136)**
204. **(250Pr136)**
205. **(250Pr136)**

206. (250Pr136)

207. (250Pr136)

208. (250Pr136)