

## DİOFANT DENKLEMLERİ

1.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  denkleminin aralarında asal olan çözümlerini bulunuz. (PSS134.98)

**Çözüm:**  $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z} \Rightarrow z(x+y) = xy$ . Eşitliğin sol tarafı  $z$ 'e bölünür ve  $(z, x) = (z, y) = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow x+y = \pm xy \Rightarrow y = x(\pm y - 1) \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow 0 = \pm 1$  veya  $y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$  Çözüm yoktur.

2.  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  denkleminin  $x = y = z = 0$  dışında tamsayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız. (PSS124.E12)

**Çözüm:** Sağ taraf çift olduğundan  $x, y, z$  sayılarından en az biri (diyelim  $x$ ) çifttir.  $\Rightarrow 2xyz \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow y \equiv z \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1 \Rightarrow x_1 \equiv y_1 \equiv z_1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$  Her  $n$  için  $2^n \mid (x, y, z) \Rightarrow x = y = z = 0$

3.  $n^n + 1 = (n+1)(2n+1)$  eşitliğinin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır? (UMO-1995)

**Çözüm:**  $n^n + 1 = 2n^2 + 3n + 1, n \neq 0 \Rightarrow n^{n-1} = 2n + 3 \Rightarrow n(n^{n-2} - 2) = 3 \Rightarrow n \in \{1, -1, 3, -3\}$ . Bunlardan  $n = -1$  ve  $n = 3$  denklemi sağlar.

4.  $2x+5y = xy-1$  eşitliğini sağlayan kaç  $(x, y)$  tamsayı ikilisi vardır?(UMO-2004)

**Çözüm:**  $2x - xy + 5y - 10 = -11 \Rightarrow (x-5)(y-2) = 11 \Rightarrow x-5 = -11, -1, 1, 11, (x, y) = (-6, 1), (4, -9), (6, 13), (16, 3);$  yani 4 adet ikili vardır.

5.  $n$  nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için  $a^2 + ab - 6b^2 = n$  eşitliğini sağlayan  $a, b$  tam sayıları bulunur? (UMO-2004)

A) 17                      B) 19                      C) 29                      D) 31                      E) 37

**Çözüm:**  $(a+3b)(a-2b) = n$  asal olduğundan  $a+3b = \pm n; a-2b = \pm 1$  olmak zorunda. Örneğin  $a+3b = -n; a-2b = -1 \Rightarrow 5b = -n+1 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{5}$ . Diğer üç durumda da  $n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow$  Sadece  $n = 31$  denklemi sağlar:  $(13, 6), (-13, -6), (19, -6), (-19, 6)$ .

6.  $i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  olmak üzere,  $top^2 = iyitop$  ise,  $y - i$  kaçtır? (UMO-2004)

**Çözüm:**  $top^2 = 1000 \cdot iyi + top \Rightarrow top(top - 1) = 1000 \cdot iyi$  ( $top, top - 1$ ) = 1  $\Rightarrow$  bunlardan biri tektir ve  $5^3$ 'e bölünür, diğeri  $2^3$ 'e bölünür, 5'e bölünmez. 125, 375, 625, 875 sayılarından komşusu 8'e bölünen sadece 375 ve 625'tir.  $625 \cdot 624 = 390000$ ;  $\boxed{376 \cdot 375 = 141000} \Rightarrow y - i = 3$ .

7.  $k$  sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için  $x^2 - y^2 = k$  eşitliğini sağlayan  $(x, y)$  tam sayı ikilisi yoktur? (UMO-2005)

A) 2005      B) 2006      C) 2007      D) 2008      E) 2009

**Çözüm:**  $k$  tekse  $x - y = 1$ ,  $x + y = k$  denklemlerinin

$$x = \frac{k+1}{2}, y = \frac{k-1}{2} \text{ gibi kökü vardır.}$$

$k = 2008$  ise,  $x - y = 2$ ,  $x + y = 1004$ 'ün kökü vardır.

$$x - y \equiv x + y \pmod{2} \Rightarrow k \equiv (x - y)(x + y) \equiv 0, 1 \pmod{4} \Rightarrow$$

$k = 2006 \equiv 2 \pmod{4}$  durumunda çözüm yoktur  $\Rightarrow$  yanıt B şıkkıdır.

8.  $xyz = 510510$  ve  $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$  eşitliklerini sağlayan kaç  $(x, y, z)$  pozitif tamsayı üçlüsü vardır? (UMO-2005)

**Çözüm:**  $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \Rightarrow (x, y) = (y, z) = (x, z) = 1$   
 $y(x^2 - z^2) + zx(z - x) + y^2(z - x) = 0 \Rightarrow (z - x)(zx + y^2 - yx - yz) = 0$

$$(z - x)(z - y)(x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = x = 1, y = 510510; \\ z = y = 1, x = 510510; \\ x = y = 1, z = 510510. \end{cases}$$

Yani verilen denklemleri sağlayan üç tane  $(x, y, z)$  üçlüsü vardır.

9.  $\llbracket a \rrbracket$  ile  $a$  gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket + \llbracket 5x \rrbracket + \llbracket 7x \rrbracket + \llbracket 11x \rrbracket + \llbracket 13x \rrbracket = 1994$$

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket + \llbracket 5x \rrbracket + \llbracket 7x \rrbracket + \llbracket 11x \rrbracket + \llbracket 13x \rrbracket = 1995$$

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket + \llbracket 5x \rrbracket + \llbracket 7x \rrbracket + \llbracket 11x \rrbracket + \llbracket 13x \rrbracket = 1996$$

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket + \llbracket 5x \rrbracket + \llbracket 7x \rrbracket + \llbracket 11x \rrbracket + \llbracket 13x \rrbracket = 1997$$

denklemlerinden kaç tanesinin çözüm kümesi boş değildir?(UMO-1997)

**Çözüm:**  $n \llbracket x \rrbracket \leq \llbracket nx \rrbracket \leq n \llbracket x \rrbracket + n - 1$

$$\Rightarrow 40 \llbracket x \rrbracket \leq \llbracket x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket + \llbracket 5x \rrbracket + \llbracket 7x \rrbracket + \llbracket 11x \rrbracket + \llbracket 13x \rrbracket \leq 40 \llbracket x \rrbracket + 34$$

$1994 = 40 \cdot 49 + 34$ ;  $1995 = 40 \cdot 49 + 35$ ;  $35 > 34, \dots \Rightarrow$  Sadece ilk denklemin çözüm kümesi boş değildir.

10.  $p^2 - 2q^2 = 1$  eşitliğini sağlayan tüm  $p, q$  asal sayılarını bulunuz. (PSS131.15)

**Çözüm:**  $2q^2 = (p-1)(p+1)$  sayısı 4'e bölünür  $\Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow q = 2, p = 3$ .

11.  $p$  asal ve  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(1+p)^n = 1 + pn + n^p$$

eşitliğini sağlayan kaç  $(p, n)$  sıralı ikilisi vardır? (UMO-2001)

**Çözüm:**  $1 + np + \binom{n}{2} \cdot p^2 + \dots + p^n = 1 + pn + n^p \Rightarrow$

$$p \left[ \binom{n}{2} p + \dots + p^{n-1} \right] = n^p \Rightarrow n = pm \text{ ve } p^n \leq n^p \Rightarrow p^{pm} \leq (pm)^p \Rightarrow$$

$$p^{m-1} \leq m \Rightarrow m \leq 2 \text{ } m = 1 \Rightarrow \binom{p}{2} + \dots + p^{m-2} = p^{p-2} \Rightarrow p = 2.$$

$m = 2 \Rightarrow p = 2$  sağlamaz.

12.  $x^2 + y^2 = x^2y^2$  denkleminin  $x = y = 0$  dışında tamsayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız. (PSS132.43)

**Çözüm:**  $x, y$  tekse, sol taraf çift, sağ taraf tek olur.  $\Rightarrow$  Çelişki.

$x, y$ 'den biri tek diğeri çiftse, sol taraf tek, sağ taraf çift olur.  $\Rightarrow$  Çelişki.

$$\Rightarrow x = 2x_1, y = 2y_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4x_1^2y_1^2 \Rightarrow x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2 \text{ v.s.}$$

$$\Rightarrow \text{her } n \text{ için } 2^n \mid x, y \Rightarrow x = y = 0.$$

13. 
$$\begin{cases} xz - yt = 1 \\ xt + 4yz = 3 \end{cases}$$

denklem çiftinin  $x, y, z, t$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere kaç tane  $(x, y, z, t)$  çözüm takımı vardır? (UMO-1993)

**Çözüm:**  $xt + 4yz = 3 \Rightarrow yz = 0, xt = 3$ .  $z = 0$  olursa,  $yt = -1 \Rightarrow$  Çelişki.  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = z = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow (x, y, z, t) = (1, 0, 1, 3)$   
 $\Rightarrow$  tek çözüm.

14. Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir. Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 adet artarak bir tam kareden bir fazla hale gelir. Mayıs ayında, tavşan sayısı, yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare olur. Tavşanların Mart ayındaki sayısı nedir? (UMO-1994)

**Çözüm:**  $m_{art} = x^2; n_{isan} = m + 100 = y^2 + 1; s_{mayıs} = n + 100 = z^2$ .  
 $y^2 + 1 + 100 = z^2 \Rightarrow (z - y)(z + y) = 101 \Rightarrow z - y = 1; z + y = 101$   
 $\Rightarrow z = 51, y = 50 \Rightarrow m = y^2 + 1 - 100 = 50^2 - 100 + 1 = (50 - 1)^2 = 49^2$

15.  $b$  pozitif bir tam sayı ve  $( )_b$  sayıların  $b$  tabanına göre gösterimi olmak üzere

$$(12)_b \cdot (15)_b \cdot (16)_b = (3146)_b$$

ise,  $(12)_b + (15)_b + (16)_b$  sayısının 10 tabanındaki karşılığı nedir? (UMO1994)

**Çözüm:**  $(b+2)(b+5)(b+6) = 3b^3 + b^2 + 4b + 6 \Rightarrow b^3 - 6b^2 - 24b - 27 = 0$ .  
 $b > 6$  ve  $b \mid 27 \Rightarrow b = 9$  sağlıyor.  $\Rightarrow (12)_9 + (15)_9 + (16)_9 = 40$ .

16.  $x$  ve  $y$  tam sayı olmak üzere,  $x^2 - y^2 = 1996$  eşitliğini sağlayan kaç  $(x, y)$  sıralı ikilisi vardır? (UMO-1996)

**Çözüm:**  $(x - y)(x + y) = 1996 \Rightarrow x - y \equiv x + y \equiv 0 \pmod{2}$   
 $\Rightarrow x - y = \pm 2, x + y = \pm 2 \cdot 499$  veya  $x - y = \pm 499 \cdot 2, x + y = \pm 2$   
 $\Rightarrow$  dört tane çözüm vardır.

17. Aşağıdakilerden hangisi,  $m$  ve  $n$  tam sayılar olmak üzere,  $m^2 + 3mn - 4n^2$  şeklinde ifade edilemez? (UMO-1999)

A) 69                      B) 76                      C) 91                      D) 94                      E) Hiçbiri

**Çözüm:**  $m^2 + 3mn - 4n^2 = (m - n)(m + 4n)$ .  $(m + 4n) - (m - n) = 5n \Rightarrow$   
çarpanların farkı 5'e bölünür.  $69 = 23 \cdot 3$ ;  $76 = 76 \cdot 1$ ;  $91 = 91 \cdot 1$ ;  
 $94 = 47 \cdot 2 \Rightarrow$  yanıt E şıkkıdır.

- 18.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0 \\ 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0 \end{cases}$$

sistemini sağlayan kaç  $(x, y, z)$  pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır? (UMO2000)

**Çözüm:**  $(-5)/ \quad 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0$   
 $(3)/ \quad 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0$   
-----  
 $y^2 - z^2 = 48$

ve  $y - z \equiv y + z \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow$

- (a)  $y - z = 2, y + z = 24 \Rightarrow y = 13, z = 11, x = 16$   
(b)  $y - z = 4, y + z = 12 \Rightarrow y = 8, z = 4, x = \pm\sqrt{46} \Rightarrow$  çözüm değil  
(c)  $y - z = 6, y + z = 8 \Rightarrow y = 7, z = 1, x = 4$

$\Rightarrow$  iki çözüm vardır.

19.  $(2a + b)(2b + a) = 2^c$  eşitliğini sağlayan kaç  $(a, b, c)$  pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır? (UMO-2001)

**Çözüm:**  $2a + b = 2^d$ ;  $2b + a = 2^e$ .  $a, b \geq 1 \Rightarrow d > 0, e > 0 \Rightarrow b, a$  çifttir.  $a = 2a_1, b = 2b_1 \Rightarrow (2a_1 + b_1)(2b_1 + a_1) = 2^{c-2}$ .

Benzer şekilde  $a_1 = 2a_2, b_1 = 2b_2$  v.s. her  $n$  için  $2^n \mid a, b \Rightarrow$  Çelişki.  
 $\Rightarrow$  Çözüm yoktur.