

TAM KARELER

1. Bir 1000 basamaklı sayıda bir tanesi dışında tüm basamaklar 5' tir. Bu sayının hiçbir tam sayının karesi olamayacağını kanıtlayınız. (2L44)

Çözüm: Son rakam 5 ise, bir önceki 2 olmak zorunda.

\Rightarrow sayının rakamları toplamı $s \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$ tamkare olamaz.

Son rakam 1 veya 9 ise sayı $\equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow$ tamkare olamaz.

Sayı tek sıfırla bitemez. Son rakam 4 ise, sayı $\equiv 2 \pmod{4}$.

Son rakam 6 ise, $s \equiv 6 \pmod{9} \Rightarrow$ sayı 3' e bölünüp, 9' a bölünmüyor.
 \Rightarrow tamkare olamaz.

2. $n > 1$ olmak üzere $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, ilk n asal sayının çarpımıysa, $p-1$ ve $p+1$ sayılarının hiçbir tam sayının karesi olamayacağını kanıtlayınız. (PSS132.51)

Çözüm: $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p-1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p-1$ tamkare olamaz.

$p \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow p+1 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow p+1$ tamkare olamaz.

3. $n > 11$ tam sayıları için $n^2 - 19n + 89$ sayısının tamkare olmadığını gösteriniz. (PSS133.69)

Çözüm: $n^2 - 20n + 100 < n^2 - 19n + 89 < n^2 - 18n + 81$

$\Rightarrow (n-10)^2 < n^2 - 19n + 89 < (n-9)^2$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 89$ tamkare olamaz.

4. n tam sayı olmak üzere, $49n + 14$ şeklinde yazılabilen bir sayı bir tam sayının karesi olabilir mi?

Çözüm: $7 \mid (49n + 14)$; $7^2 \nmid (49n + 14) \Rightarrow 49n + 14$ tamkare olamaz.

5. $3n^2 + 3n + 7$ sayısının tam küp olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır? (170.36)

Çözüm:

- $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise, $3n^2 + 3n + 7 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$ tamküp olamaz.
- $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise, $3n(n+1) + 7 \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow$ tamküp olamaz.
- $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise, $3n(n+1) + 7 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$ tamküp olamaz.

6. $5p(2^{p+1} - 1)$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardır? (2003.14)

Çözüm: $p = 2$ ve $p = 5$ sağlamaz. Diğer durumlarda $5p(2^{p+1} - 1)$ bir tamkare ise, p^2 'ye bölünmek zorunda. O halde $2^{p+1} - 1$ de p 'ye bölünmek zorunda. Dolayısıyla $0 \equiv 2^{p+1} - 1 \equiv 2^2 \cdot 2^{p-1} - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow p = 3$.

7. $2^n + 65$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır? (154.32)

Çözüm: $n \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2^n + 65 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow$ tamkare olamaz.

$n \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 2^n + 65 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow$ tamkare olamaz.

$n = 2k$ ve $2^n + 65 = x^2$ ise $(x - 2^k)(x + 2^k) = 65 = 5 \cdot 13 = 1 \cdot 65$.

- $x - 2^k = 5; x + 2^k = 13 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n = 4$

- $x - 2^k = 1; x + 2^k = 65 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \boxed{n=10}$

8. $2n + 1$ ve $3n + 1$ sayıları tamkare ise, $5n + 3$ sayısının asal olamayacağını gösteriniz. (PSS131.16)

Çözüm: $2n + 1 = a^2; 3n + 1 = b^2$

$$\Rightarrow 5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4a^2 - b^2 = (2a + b)(2a - b)$$

$$5n + 3 \text{ asal ise } \Rightarrow 2a - b = 1 \Rightarrow 5n + 3 = 2a + b = 2b + 1$$

$$\Rightarrow 2b + 1 = (3n + 1) + (2n + 2) = b^2 + 2n + 2$$

$$\Rightarrow b^2 - 2b + 1 = -2n \Rightarrow (b - 1)^2 = -2n \Rightarrow \text{Çelişki.}$$

9. $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ sayısının tamkare olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır? (88.32)

Çözüm: $\frac{(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1)}{p} = n^2$ ise, $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1, 2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 1$ olduğun-

dan ikisinden biri tamkaredir. $2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv -1 \pmod{4}$ ($p \geq 5$ için)

\Rightarrow tamkare olamaz.

$$2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = m^2 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} = (m - 1)(m + 1) \Rightarrow m - 1 = 2^t, m + 1 = 2^s$$

$$\Rightarrow \frac{p-1}{2} = 1 + 3 \Rightarrow p = 3 \text{ veya } 7.$$

10. a ve b tam sayıları için $a^2 + b^2$ sayısı 7'ye bölünüyorsa, a ve b sayılarının her ikisinin 7'ye bölündüğünü kanıtlayınız.

Çözüm: $a^2, b^2 \in \{0, 1, 2, 4 \pmod{7}\}; a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{7}$

$$\Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}.$$

11. Aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ denkleğini sağlayan en az bir x tam sayısı vardır? (2003.22)

A) 97 B) 98 C) 99 D) 100 E) Hiçbiri

Çözüm: $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (p asal) denkleğinin kökü sadece $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda var. O halde

$97 \equiv 1 \pmod{4}$ $x^2 \equiv -1 \pmod{97}$ ' nin kökü var (2^{48} , 2^{24} veya 2^{12}).

$a^2 \equiv -1 \pmod{98}$ olsaydı, $a^2 \equiv -1 \pmod{7}$. Bu mümkün değil, çünkü $7 \equiv 3 \pmod{4}$.

$a^2 \equiv -1 \pmod{99} \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{11}$. Bu da mümkün değil, çünkü $11 \equiv 3 \pmod{4}$.

$a^2 \equiv -1 \pmod{100} \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{4}$. Olamaz.

12. Üç tam sayının kareleri toplamının 8 'e bölünmesinden elde edilen kalanın 7 olamayacağını kanıtlayınız. (B141)

Çözüm: $a^2, b^2, c^2 \in \{0, 1, 4 \pmod{8}\}$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{8}\}$.

13. Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tamsayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tamsayıyı içerir? (2004:18)

Çözüm: 8 ardışık sayı alınırsa, bunların arasında 4 ' e bölünüp 8 ' e bölünmeyen bir n bulunacak. $n = 2^2 \cdot \dots$ şeklinde olacak. 7 tane sayı şöyle seçilebilir: $37, 38, 39, 40, 41, 42, 43$.

14. Dört basamaklı $aabb$ sayısı bir tamkaredir. Bu sayıyı bulunuz. (PSS131.26)

Çözüm: $aabb = 11(100a + b) = x^2 \Rightarrow 100a + b \equiv 0 \pmod{11}$
 $\Rightarrow a + b \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a + b = 11$.
Sadece $a = 7, b = 4$ sağlar: $7744 = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2$.

15. Bir tam sayının karesinin basamakları toplamı 2003 olabilir mi?

Çözüm: $s(A) = 2003 \Rightarrow A \equiv s(A) \equiv 2 \pmod{3}$
 $\Rightarrow A$ tamkare olamaz.

16. Bir tam sayının karesinin basamakları toplamı 2004 olabilir mi?

Çözüm: $s(A) = 2004 \Rightarrow A \equiv s(A) \equiv 6 \pmod{9}$
 $\Rightarrow A$ tamkare olamaz.

17. Beş ardışık pozitif tamsayının kareleri toplamının tamkare olamayacağını gösteriniz. **(PSS131.30)**

Çözüm: $a = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 5n^2 + 10 \Rightarrow 5 \mid a, 5^2 \nmid a \Rightarrow a$ tamkare olamaz.

18. $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$ denkleminin, x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır? **(4.11)**

Çözüm: $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x + 5 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \neq y^2$.

19. Pozitif tam bölenlerinin sayısı tek sayı olan her pozitif tam sayının bir tam sayının karesine eşit olduğunu gösteriniz. **(2L51)**

Çözüm: $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_s^{a_s}$ olsun. $(a_1+1) \cdot \dots \cdot (a_s+1)$ tek $\Rightarrow a_i+1$ tek $\Rightarrow a_i$ çift $\Rightarrow a_i = 2b_i \Rightarrow n = (p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_s^{b_s})^2$.

20. İki tek sayının kareleri toplamı bir tam sayının karesine eşit olabilir mi? **(B156)**

Çözüm: $a = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2 \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow a$ tamkare olamaz.

21. $aaabbb$ şeklindeki bir altı basamaklı sayı tam kare olabilir mi?

Çözüm: $aaabbb = 111000 \cdot a + 111 \cdot b = 3 \cdot 37(1000 \cdot a + b)$ olduğundan $aaabbb$ tamkare ise $a + b = 1000 \cdot a + b \equiv 0 \pmod{111}$ olmalıdır. $0 < a + b < 20 < 111 \Rightarrow aaabbb$ tamkare olamaz.

22. x ve y tam sayılar olmak üzere $x^2 + y^2$ toplamı 3'e bölünüyorsa ve $100 < x, y < 200$ ise (x, y) ikilisi kaç değişik değer alabilir?

Çözüm: $a^2 \in \{0, 1 \pmod{3}\}$ olduğundan $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ ise $x \equiv y \equiv 0 \pmod{3}$ olmalıdır. $\Rightarrow x, y \in \{102, 105, \dots, 198\}$.
 $\frac{198-102}{3} + 1 = 33 \Rightarrow 33 \cdot 33 = 1089$.

23. Aşağıdakilerden hangisi tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz? **(123.2)**

A) 23 B) 24 C) 25 D) 28 E) 33

Çözüm: $ax^2 + bx + c$ polinomunun diskriminantı sadece

$$\Delta = b^2 - 4ac \equiv 0, 1 \pmod{4}$$

olabileceğinden $\Delta = 23$ olamaz.

24. $\sqrt{17p + 625}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir? **(125.6)**

- A) 3 B) 67 C) 101 D) 151 E) 211

Çözüm: $\sqrt{17p + 625} = a \Rightarrow a^2 - 25^2 = 17p \Rightarrow (a - 25)(a + 25) = 17p$

- $a - 25 = 1; a + 25 = 17p \Rightarrow 51 = 17p \Rightarrow \boxed{p=3}$
- $a - 25 = p; a + 25 = 17 \Rightarrow a < 0$. Olamaz.
- $a - 25 = 17; a + 25 = p \Rightarrow \boxed{p=67}$

En büyüğü $\boxed{67}$

25. $2p^4 - 7p^2 + 1$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır? **(140.4)**

- A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

Çözüm: $p = 3$ ise, $2p^4 - 7p^2 + 1 = 100 = 10^2$.

$p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv p^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2p^4 - 7p^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

\Rightarrow tamkare olamaz. \Rightarrow B).

26. $p > 5$ bir asal sayı ise, $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$ veya $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$ olduğunu gösteriniz. **(PSS132.42)**

Çözüm: $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \in \{1, 4, 7, 10, 13 \pmod{15}\}$.

$p^2 \in \{1, 4 \pmod{5}\} \Rightarrow p^2 \notin \{7, 10, 13 \pmod{15}\} \Rightarrow p^2 \in \{1, 4 \pmod{15}\}$

$\Rightarrow p^2 \in \{1, 4, 16, 19 \pmod{30}\}$.

$p^2 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow p^2 \in \{7, 19 \pmod{30}\}$.

27. $x^3 - 13y^3 = 1453$ eşitliğini sağlayan (x, y) tamsayı sıralı ikililerinin sayısı kaçtır? **(161.11)**

Çözüm: $a^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{7}$ olabilir. \Rightarrow

$x^3 - 13y^3 \equiv x^3 + y^3 \equiv -2, -1, 0, 1, 2 \pmod{7}$ olabilir.

$1453 \equiv 4 \equiv -3 \pmod{7} \Rightarrow$ çözüm yoktur.

28. $39p + 1$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardır? (162.14)

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

Çözüm: $39p + 1 = x^2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 3 \cdot 13 \cdot p \Rightarrow$

(a) $x - 1 = 1 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 3 \cdot 13 \cdot p.$

(b) $x - 1 = 3 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 15 \neq 3 \cdot 13 \cdot p.$

(c) $x - 1 = 13 \Rightarrow 3p = x + 1 = 15 \Rightarrow \boxed{p=5}$

(d) $x - 1 = 39 \Rightarrow p = x + 1 = 41 \Rightarrow \boxed{p=41}$

(e) $x + 1 = 13 \Rightarrow$ sağlamaz.

(f) $x + 1 = 39 \Rightarrow p = x - 1 = 37 \Rightarrow \boxed{p=37}$

$\Rightarrow 3$ sayı.

29. İki basamaklı bir sayının, bunun ters yazılımı ile toplamı bir tamsayının karesine eşittir. Bu özelliğe sahip olan tüm iki basamaklı sayıları bulunuz. (8.3)

Çözüm: $(xy) + (yx) = a^2 \Leftrightarrow 11(x + y) = a^2 \Leftrightarrow x + y = 11b^2.$

$x + y \leq 18 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (xy) = 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.$