FERMAT VE EULER TEOREMLERİ

1. 8^{103} sayısı 13 'e bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: Fermat teoreminden $8^{12} \equiv 1 \pmod{13}$
   $\Rightarrow 8^{103} \equiv (8^{12})^8 \cdot 8^7 \equiv 8^7 \equiv 2^{21} \equiv 2^9 \equiv 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 3 \cdot 2 \equiv 5 \pmod{13}$.

2. $3^{6^{19}+19}$ sayısı 17 'ye bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: Fermat teoreminden $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. $6^{19}+19 \equiv a \pmod{16}$ olsun. $6^{19} \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{16} \Rightarrow$
   $3^{6^{19}+19} \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 10 \pmod{17}$.

3. $20^{15} - 1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$'e bölündüğünü gösteriniz.

   Çözüm: $20^{15} \equiv 9^{15} \equiv 3^{30} \equiv (3^{10})^3 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 11 \mid (20^{15} - 1)$
   $20^{15} \equiv 2^{30} \cdot 5^{15} \equiv 1 \cdot 36^{15} \equiv 6^{30} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow 31 \mid (20^{15} - 1)$
   $20^{15} \equiv 81^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61} \Rightarrow 61 \mid (20^{15} - 1) \Rightarrow$
   $(11 \cdot 31 \cdot 61) \mid (20^{15} - 1)$.

4. Her n tam sayısı için $n^{33} - n$ sayısının 15'e bölündüğünü gösteriniz.

   Çözüm: $n^{33} - n = n(n^{32} - 1)$.

   $(n, 3) = 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n^{32} \equiv 1 \pmod{3}$
   $(n, 5) = 1 \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n^{32} \equiv 1 \pmod{5}$
   $\Rightarrow (3 \cdot 5) \mid n(n^{32} - 1)$.

5. 55^{2003} sayısı 12'ye bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: $\phi(12) = (2^2 - 2)(3 - 1) = 4 \Rightarrow$
   $55^{2003} \equiv (7^4)^{500} \cdot 7^3 \equiv 7 \pmod{12}$.

6. 10^{104} sayısı 28'e bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: $28 = 4 \cdot 7$. $10^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^{104} \equiv (3^6)^{17} \cdot 3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 10^{104} \equiv 2;\ 9;\ \boxed{16};\ 23 \pmod{28}$ olabilir. $10^{104} \equiv 0 \pmod{4}$.
   $\Rightarrow 10^{104} \equiv 16 \pmod{28}$.

7. $2^{2^{17}+6} + 1$ sayısı 19'a bölündüğünde elde edilen kalanı hesaplayın.

   Çözüm: $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$. $2^{17} + 6 \equiv a \pmod{18}$ olsun.
   $\phi(9) = 6 \Rightarrow 2^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv (2^6)^2 \cdot 2^5 + 6 \equiv 2 \pmod{9}$
   $\Rightarrow a \equiv 2,\ 11 \pmod{18}$ olabilir. $a \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{18} \Rightarrow$
   $2^{2^{17}+6} + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 5 \pmod{19}$.

8. Aşağıdaki a sayılarından hangisi için $n^a \equiv n \pmod{a}$ bağıntısını sağlamayan en az bir n tamsayısı vardır? **(UMO-1996)**

A) 667 B) 561 C) 547 D) 503 E) 491

Çözüm: $a = 547, 503, 491$ durumlarında a asal olduğundan, Fermat teoreminden dolayı $n^a \equiv n \pmod{a}$.
$a = 561 = 11 \cdot 3 \cdot 17$ durumunda: $(n, 11) = 1$ ise, $n^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n^{561} \equiv (n^{10})^{56} \cdot n \equiv n \pmod{11}$. $11 \mid n$ ise $n^{561} \equiv 0 \equiv n \pmod{11}$.
$(n, 3) = 1$ ise $n^{561} \equiv (n^2)^{280} \cdot n \equiv n \pmod{3}$.
$(n, 3) = 3$ ise $n^{561} \equiv 0 \equiv n \pmod{3}$.
$(n, 17) = 1$ ise $n^{561} \equiv (n^{16})^{35} \cdot n \equiv n \pmod{17}$.
$17 \mid n$ ise $n^{561} \equiv 0 \equiv n \pmod{17}$.
$a = 667 = 23 \cdot 29$ durumunda $2^{667} \equiv 2 \pmod{667}$ olsaydı $2^{667} \equiv 2 \pmod{23} \Rightarrow (2^{22})^{30} \cdot 2^7 \equiv 2^7 \equiv 2 \pmod{23} \Rightarrow 2^6 \equiv 1 \pmod{23}$ olacaktı $\Rightarrow$ Çelişki $\Rightarrow$ (A)

9. 7^{9999} sayısının son üç basamağını bulunuz. **(PSS134.97)**

Çözüm: $7^{9999} \equiv x \pmod{1000}$. $\phi(1000) = 400 \Rightarrow 7x \equiv 7^{10000} \equiv (7^{400})^{25} \equiv 1 \equiv 1001 \pmod{1000} \Rightarrow x \equiv 143 \pmod{1000}$.

10. $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur? **(UMO-2004)**

Çözüm: $\phi(9) = 6 \Rightarrow 2005^6 \equiv 1 \pmod{9}$. $2003^{2004} + 3 \equiv x \pmod{6}$ olsun. $x \equiv 0 \pmod{2}$ ve $x \equiv 2^{2004} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{6} \Rightarrow 2005^{2003^{2004}+3} \equiv 7^4 \equiv 7 \pmod{9}$. $7 = (21)_3$.

11. n'nin tüm pozitif tam değerleri için $5n^{11} - 2n^5 - 3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tam sayı vardır? **(UMO-2004)**

Çözüm: $A = 5n^{11} - 2n^5 - 3n$ olsun. n'nin hem tek hem de çift değerinde A'nın çift olacağı açıktır $\Rightarrow 2 \mid A$.
$n^5 \equiv n \pmod{5} \Rightarrow A = -2n - 3n \equiv 0 \pmod{5}$
$3 \mid n \Rightarrow 9 \mid n^{11}$, $9 \mid n^5$, $9 \mid (3n) \Rightarrow 9 \mid A$.
$3 \nmid n \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow A \equiv 5n^6 \cdot n^5 - 2n^5 - 3n \equiv 3n(n^4 - 1) \equiv 3(n-1) \cdot n \cdot (n+1)(n^2+1) \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \mid A \Rightarrow$ En az $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ sayısının bölenleri kadar, yani $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$ tane A sayısını her n çin bölen pozitif tam sayı vardır. Diğer taraftan $n = 2$ alındığında $A = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 113$ elde edilir. $n = 3$ durumunda A'nın 13'e bölünmediği kolayca kontrol edilir. $\Rightarrow$ Cevap 12'dir.

12. $n < 2005$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sayısının, hiçbiri 5 ile bölünmeyen tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayıları için $a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4$ sayısının 5 ile bölünmesini sağlayan en büyük değeri nedir? **(UMO2005)**

    Çözüm: $a_i^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow a_1^4 + \ldots + a_n^4 \equiv n \equiv 0 \pmod 5$
    $\Rightarrow n = 2000$.

13. 3, 5, 7, 11, 23 sayılardan hangisi $n^{2225} - n^{2005}$ sayısını n'nin bütün tam sayı değerleri için bölmez? **(UMO-2005)**

    Çözüm: $n^{2225} - n^{2005} = n^{2005}(n^{220} - 1)$. $3 \mid n$ ise, $3 \mid n^{2005}(n^{220} - 1)$.
    $3 \nmid n \Rightarrow n^{220} \equiv (n^2)^{110} \equiv 1 \pmod 3$. $\Rightarrow$ Her n için $3 \mid n^{2005}(n^{220} - 1)$.
    $5 \nmid n \Rightarrow n^{220} = (n^4)^{55} \equiv 1 \pmod 5$. Her n için $5 \mid n^{2005}(n^{220} - 1)$.
    $11 \nmid n \Rightarrow n^{220} \equiv (n^{10})^{22} \equiv 1 \pmod{11}$. Her n için $11 \mid n^{2005}(n^{220} - 1)$.
    $23 \nmid n \Rightarrow n^{220} \equiv (n^{22})^{10} \equiv 1 \pmod{23}$. Her n için $23 \mid n^{2005}(n^{220} - 1)$.
    $2^{220} \equiv (2^6)^{36} \cdot 2^4 \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod 7$.

14. $2^{3^{2003}}$ sayısı 17'ye bölündüğünde elde edilen kalanı hesaplayın.

    Çözüm: $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. $3^{2003} \equiv ? \pmod{16}$.
    $\phi(16) = 4^2 - 4 = 12 \Rightarrow 3^{2003} \equiv (3^{12})^{166} \cdot 3^{11} \equiv 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \equiv 11 \pmod{16}$
    $\Rightarrow 2^{3^{2003}} \equiv 2^{11} \equiv 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \equiv (-1) \cdot (-1) \cdot 8 \equiv 8 \pmod{17}$.

15. $6^{2^{100}}$ sayısının son iki basamağını bulunuz.

    Çözüm: $100 = 4 \cdot 25$. $\phi(25) = 20 \Rightarrow 6^{20} \equiv 1 \pmod{25}$.
    $2^{100} \equiv ? \pmod{20}$. $2^{100} \equiv (2^4)^{25} \equiv 1 \pmod 5$. $\Rightarrow$
    $2^{100} \equiv 1, 6, 11, \boxed{16} \pmod{20}$ olabilir. $2^{100} \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$
    $2^{100} \equiv 16 \pmod{20} \Rightarrow 6^{2^{100}} \equiv 6, 31, \boxed{56}, 81 \pmod{100}$ olabilir.
    $6^{2^{100}} \equiv 0 \pmod 4$. $\Rightarrow 6^{2^{100}} \equiv 56 \pmod{100}$.

16. $2^{70} + 3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.

    Çözüm: $2^{70} + 3^{70} \equiv 4^{35} + 9^{35} \equiv 4^{35} + (-4)^{35} \equiv 4^{35} - 4^{35} \equiv 0 \pmod{13}$.

17. 2003^{2004} sayısının son 3 basamağını bulunuz.

    Çözüm: $\phi(1000) = (5^3 - 5^2)(2^3 - 2^2) = 400 \Rightarrow 3^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$
    $\Rightarrow 2003^{2004} \equiv (3^{400})^5 \cdot 3^4 \equiv 81 \pmod{1000} \Rightarrow \underline{081}$.

18. 8^{102} sayısı 18'e bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

    Çözüm: $\phi(9) = 6 \Rightarrow 8^{102} \equiv (8^6)^{17} \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow$
    $8^{102} \equiv 1, \boxed{10} \pmod{18}$ olabilir.
    $8^{102} \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow 8^{102} \equiv 10 \pmod{18}$.

19. 12^{2003} sayısının son iki basamağını bulunuz.

Çözüm: $\phi(25) = 20 \Rightarrow 12^{2003} \equiv 12^3 \equiv 19 \cdot 12 \equiv 3 \pmod{25}$
$\Rightarrow 12^{2003} \equiv 3,\ \boxed{28},\ 53,\ 78 \pmod{100}$ olabilir.
$12^{2003} \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 12^{2003} \equiv 28 \pmod{100}$.

20. $2^{3^{4^5}}$ sayısının son iki basamağını bulunuz.

Çözüm: $\phi(25) = 20$; $\phi(20) = 8 \Rightarrow 3^{4^6} \equiv (3^8)^{2^7} \equiv 1 \pmod{20}$
$\Rightarrow 2^{3^{4^5}} \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow 2^{3^{4^5}} \equiv 2, 27, 52, 77 \pmod{100}$ olabilir.
$2^{3^{4^5}} \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2^{3^{4^5}} \equiv 52 \pmod{100}$.

21. 2^{103} sayısı 18'e bölündüğünde elde edilen kalanı bulunuz.

Çözüm: $\phi(9) = 6 \Rightarrow 2^{103} \equiv (2^6)^{17} \cdot 2 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow$
$2^{103} \equiv 2, 11 \pmod{18}$ olabilir. $2^{103} \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow 2^{103} \equiv 2 \pmod{18}$.

22. $43^{23} + 23^{43}$ sayısının 66'ya bölündüğünü gösteriniz.

Çözüm: $\phi(66) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 11) = 1 \cdot 2 \cdot 10 = 20 \Rightarrow 23^{20} \equiv 1 \pmod{66}$
$\Rightarrow 43^{23} + 23^{43} \equiv (-23)^{23} + 23^{20} \cdot 23^{23} \equiv 0 \pmod{66}$.

23. 3^{2003} sayısının son üç basamağını bulunuz.

Çözüm: $\phi(1000) = 400 \Rightarrow 3^{2003} \equiv (3^{400})^5 \cdot 3^3 \equiv 27 \pmod{1000} \Rightarrow \underline{027}$.

24. $5^n + n^5$ sayısının 11 ile bölünmesini sağlayan 2003'ten büyük en küçük n tam sayısı nedir? **(UMO-2003)**

Çözüm: $5^1 \equiv 5$; $5^2 \equiv 3$; $5^3 \equiv 4$; $5^4 \equiv 9$; $5^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
$(n, 11) = 1$ ise $(n^5)^2 \equiv n^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$.
$5^n + n^5 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 5^n \equiv 1,\ n^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow n = 5k \Rightarrow$
$n \equiv 5,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ 50 \pmod{55}$ olabilir. $2003 \equiv 23 \pmod{55} \Rightarrow$
a) $n \equiv 25 \pmod{55} \Rightarrow n^5 \equiv 3^5 \equiv 1 \not\equiv -1 \pmod{11}$.
b) $n \equiv 30 \pmod{55} \Rightarrow n^5 \equiv (-3)^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow$ sağlar.
$\Rightarrow n = 2003 + (30 - 23) = \underline{2010}$.

25. $p_1 < p_2 < .... < p_{24}, [3, 100]$ aralığındaki asal sayıları göstermek üzere $\sum_{i=1}^{24} p_i^{99!} \equiv a \pmod{100}$ denkliğini gerçekleyen en küçük $a \geq 0$ sayısı nedir? **(UMO-1998)**

Çözüm: $5^{99!} \equiv 1 \pmod 4$; $5^{99!} \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 5^{99!} \equiv 25 \pmod{100}$.
$p \neq 5$; $\phi(100) = 40 \Rightarrow p^{99!} = (p^{40})^a \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow$
$a \equiv 25 + 23 \cdot 1 \equiv 48 \pmod{100} \Rightarrow a$'nın en küçük değeri 48'dir.

26. $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir? **(UMO-2000)**

Çözüm: $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \equiv x \pmod{100}$; $8^{7^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \equiv y \pmod{40}$; $8^{7^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \equiv z \pmod 5$.
$7^{6^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \equiv (-1)^{6^{5^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow z = 8^1 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow$
$y \equiv 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38 \pmod{40}$ olabilir. $8^{7^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow$
$y \equiv 8 \pmod{40}$. $\Rightarrow x \equiv 9^y \equiv 9^8 \equiv (-19)^4 \equiv 61^2 \equiv 21 \pmod{100}$.

27. $3^{105} + 4^{105}$ sayısı 7, 11, 13 sayılarına bölündüğünde elde edilen kalanları bulunuz. **(PSS131.8)**

Çözüm: $3^{105} + 4^{105} \equiv 3^{105} + (-3)^{105} \equiv 0 \pmod 7$.
$3^{105}+4^{105} \equiv (3^{10})^{10} \cdot 3^5 + (4^{10})^{10} \cdot 4^5 \equiv 3^3 \cdot 3^2 + 2^{10} \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{11}$.
$3^{105} + 4^{105} \equiv (3^3)^{35} + (4^{12})^8 \cdot 4^9 \equiv 1 + (-9)^9 \equiv 1 - (3^3)^6 \equiv 0 \pmod{13}$.

28. 7 sayısı, $2, 22, 222, 2222, \ldots$ dizisinin kaç terimini böler? **(UMO-1995)**

Çözüm: $\underbrace{22\ldots2}_{n} = \dfrac{2}{9}(10^n - 1)$.
$n = 6k \Rightarrow 10^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid \underbrace{22\ldots2}_{n} \Rightarrow$ Sonsuz sayıda.

29. n'nin 241, 240, 239, 238, 237 değerlerinden hangisi için, $\sum_{i=1}^{4} i^n$ sayısı 5 ile bölünmez? **(UMO-1995)**

Çözüm: $i^{241} \equiv (i^4)^{60} \cdot i \equiv i \pmod 5 \Rightarrow$
$\sum\limits_{i=1}^{4} i^{241} \equiv 1 + 2 + 3 + 4 \equiv 0 \pmod 5$
$i^{240} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} i^{240} \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow \boxed{\text{n=240}}$
$i^{239} \equiv i^3 \pmod 5 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} i^{239} \equiv 1 + 8 + 27 + 64 \equiv 0 \pmod 5$
$i^{238} \equiv i^2 \pmod 5 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} i^{238} \equiv 1 + 4 + 9 + 16 \equiv 0 \pmod 5$
$i^{237} \equiv i \pmod 5 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} i^{237} \equiv 1 + 2 + 3 + 4 \equiv 0 \pmod 5$.

30. $1 \le a \le 100$ olmak üzere, $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$ bağıntısını sağlayan kaç a tam sayısı vardır? **(UMO-1996)**

Çözüm: $\phi(77) = 60 \Rightarrow (a, 77) = 1$ ise $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$ sağlanır.
$(a, 77) = 1$' i sağlamayan $14 + 9 - 1 = 22$ sayı vardır.
$\Rightarrow$ Bağıntıyı sağlayan $100 - 22 = 78$ sayı bulunur.

31. $1^{1!} + 2^{2!} + \ldots + 13^{13!}$ sayısı 13 ile bölündüğünde kalan kaçtır? **(UMO-1996)**

    Çözüm: $1^{1!} \equiv 1$; $2^{2!} \equiv 4$; $3^{3!} \equiv 1$; $4^{4!} \equiv \ldots \equiv 12^{12!} \equiv 1 \pmod{13}$; $13^{13!} \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 1^{1!} + 2^{2!} + \ldots + 13^{13!} \equiv 4 + 11 \equiv 2 \pmod{13}$.

32. Aşağıdaki p asal sayılarından hangisi için $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin en az bir tam sayı çözümü vardır? **(UMO-1996)**

    A) 653 B) 647 C) 641 D) 617 E) Hiçbiri

    Çözüm: $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ ve $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 3 \mid p-1 \Rightarrow$ (E).

33. $1+2+2^2+2^3+...+2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tam sayısı nedir? **(UMO-2000)**

    Çözüm: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n \equiv 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{77}$
    $\Rightarrow 2^{n+1} \equiv 1 \pmod{7}$; $2^{n+1} \equiv 1 \pmod{11}$.
    $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$; $2^5 \equiv -1$; $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
    $\Rightarrow 3 \mid (n+1)$ ve $10 \mid (n+1) \Rightarrow n+1 = 120 \Rightarrow n = 119$.

34. 3^{2002} sayısı 11'e bölündüğünde kaç kalan verir? **(UMO-2002)**

    Çözüm: $3^{2002} \equiv (3^{10})^{200} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow \boxed{9}$.