POISSON DAĞILIMI PROBLEMLERİ (L. Gökçe)

Bir olayın olma sayısı ortalama λ ($\lambda > 0$ bir sabit) olmak üzere, bu olayın *k* defa olması olasılığı Poisson (Payzın okunur) dağılımına göre $P(k) = \dfrac{\lambda^k . e^{-\lambda}}{k!}$ dir. Burada $k = 0, 1, 2, ...$ şeklinde tamsayılardır.

Poisson dağılımı, bir santralde bir saat içinde yapılan telefon konuşma sayısı, büyük bir kitabın sayfalarında çıkan yanlışlıklar gibi çeşitli durumlarda ortaya çıkar. Ayrıca λ nın büyük değerleri için Poisson dağılımının oluşturduğu grafiğin, binom dağılımı grafiğine ve normal dağılım grafiğine (çan eğrisi) yaklaştığı da bilinmektedir.

Binom dağılımında bir olayın olma olasılığı *p* olmak üzere *n* defa tekrarlanan deney için olayın ortalama olma sayısı (beklenen değeri) $\lambda = n.p$ dir. *p* nin çok küçük değerleri için binom dağılımı yerine Poisson dağılımı kullanılabilir. Örneğin bir zar 30 defa atıldığında üst yüze gelen sayının 1 olması için beklenen değer $\lambda = 30.\dfrac{1}{6} = 5$ dir.

Şimdi $P(k) = \dfrac{\lambda^k . e^{-\lambda}}{k!}$ formülünün kullanıldığı birkaç problemi inceleyelim:

ÖRNEK 1: 500 sayfalık bir kitapta rasgele dağılmış 300 yanlış vardır. Herhangi bir sayfanın

a) Tam 2 yanlış

b) 2 ya da daha fazla yanlış

içermesi olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM: 500 sayfa olduğundan herhangi bir sayfada hata olma olasılığı $p = \dfrac{1}{500}$ dür. *p* sayısı çok küçük olduğundan binom dağılımı yerine Poisson dağılımını tercih edebiliriz. 300 tane hata olduğundan $n = 300$ dür ve herhangi bir sayfada oluşacak hata sayısı ortalama olarak $\lambda = n.p = 300.\dfrac{1}{500} = 0,6$ dır. Buna göre olasılık fonksiyonu $P(k) = \dfrac{(0,6)^k . e^{-0,6}}{k!}$ dır.

a) Tam olarak 2 yanlış olması olasılığı $P(2) = \dfrac{(0,6)^2 . e^{-0,6}}{2!} = 0,1$ dir.

b) 2 ya da daha fazla yanlış olması olasılığı $P(2) + P(3) + P(4) + ...$ dır. Bu sonsuz toplam yerine tüm olasılıkların toplamının 1'e eşit olduğunu kullanarak $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + ... = 1$
$\Rightarrow P(2) + P(3) + P(4) + ... = 1 - \left(P(0) + P(1)\right)$ ifadesini de hesaplayabiliriz.

$P(0) = \dfrac{(0,6)^0 . e^{-0,6}}{0!} = 0,549$, $P(1) = \dfrac{(0,6)^1 . e^{-0,6}}{1!} = 0,329$ olduğundan

Tam olarak 2 yanlış olması olasılığı = $1 - \left(0,549 + 0,329\right) = 0,122$ dir.

ÖRNEK 2: Bir taksi durağına günde ortalama 5 şikâyet telefonu gelmektedir. Herhangi bir gün 4 telefon gelmesi olasılığı nedir?

ÇÖZÜM: Bir günde gelen şikâyet telefonu sayısı ortalama $\lambda = 5$ olarak verilmiştir. Poisson dağılımı kullanırsak $P(4) = \dfrac{5^4.e^{-5}}{4!} = 0{,}175$ olarak buluruz.

ÖRNEK 3: Bir fabrikada üretilen ürünlerin %2 si defoludur. Seçilen 100 üründen 3 tanesinin kusurlu üretilmiş olması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM: Elbette $n = 100$ ve $p = 0,02$ için binom dağılımı uygulanabilir. Fakat *p* çok küçük olduğu için $\lambda = n.p = 100.0,02 = 2$ alınarak Poisson yaklaşımı da kullanılabilir. Böylece seçilen 100 üründen 3 tanesinin kusurlu üretilmiş olması $P(3) = \dfrac{2^3.e^{-2}}{3!} = 0{,}18$ olarak bulunur.

ÖRNEK 4 (L. Gökçe): Taksim Meydanı'nda izinsiz gösteri yapmak amacıyla toplanmış kalabalık bir gruba polis müdahale ediyor. Rasgele gözaltına alınan 200 kişiden 4 ya da daha fazlasının solak olma olasılığı nedir?

NOT: Sorunun çözümünde insanların ortalama %2 sinin solak olduğu bilgisini kullanınız ☺

ÇÖZÜM: $n = 200$ ve $p = 0,02$ için binom dağılımı kullanılabilir. Ancak *p* çok küçük olduğu için $\lambda = n.p = 200.0,02 = 4$ alınarak Poisson yaklaşımı da tercih edilebilir. İstenmeyen durumların olasılıkları toplanırsa $P(0)+P(1)+P(2)+P(3) = \dfrac{4^0.e^{-4}}{0!} + \dfrac{4^1.e^{-4}}{1!} + \dfrac{4^2.e^{-4}}{2!} + \dfrac{4^3.e^{-4}}{3!}$ olur. Böylece gözaltına alınan 200 kişiden 4 ya da daha fazlasının solak olma olasılığı $1-\left(\dfrac{4^0.e^{-4}}{0!} + \dfrac{4^1.e^{-4}}{1!} + \dfrac{4^2.e^{-4}}{2!} + \dfrac{4^3.e^{-4}}{3!}\right)$ olur.

ÖRNEK 5 (L. Gökçe): Futbolda 2008 – 2009 lig şampiyonu olan Beşiktaş takımının taraftarları kutlama yapmak amacıyla bayraklarıyla İstanbul caddelerine çıkmıştır. Çeşitli bölgelerde konuşlanan holigan Fenerbahçe taraftarları, Beşiktaş taraftarlarına taş ve sopalarla saldırmıştır. Çıkan olaylarda polis 175 holiganı gözaltına almış, diğerleri ara sokaklara kaçmıştır. Gözaltına alınan holiganlardan en az 2 tanesinin, daha önceden sicilinin bozuk olması olasılığı yüzde kaçtır?

NOT: Sorunun çözümünde, tüm Fenerbahçeli holiganların ortalama %64 ünün zaten sicilinin bozuk olduğu bilgisini kullanınız ☺

ÇÖZÜM: $n = 175$, $p = 0,64$ için ortalama $\lambda = n.p = 175.0,64 = 112$ kişinin sicili bozuktur.

İstenmeyen durumların olasılıkları toplamı $P(0)+P(1) = \dfrac{112^0.e^{-112}}{0!} + \dfrac{112^1.e^{-112}}{1!} = 113.e^{-112}$ olduğundan holiganlardan en az 2 tanesinin, daha önceden sicilinin bozuk olması olasılığı $1-113.e^{-112} = 1-2,58.10^{-47} = 0,9999$ olup bu değer yüzde olarak %99,99 dur.

ÖRNEK 6: Her yıl dünya üzerindeki 50,000 kişiden ortalama 2 kişinin intihar ettiği bilindiğine göre, 100,000 kişilik bir şehirde bir yılda

a) 0

b) 1

c) 2

d) 2 ya da daha fazla

intihar olayı olması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM: Okuyucuya bırakılmıştır.

Kaynaklar:

[1] LIPSCHUTZ, S., Probablity, McGraw – Hill Book Company, New York, 1968

[2] GÖKÇE, L., Olasılık ders notları, Erzincan, 2009