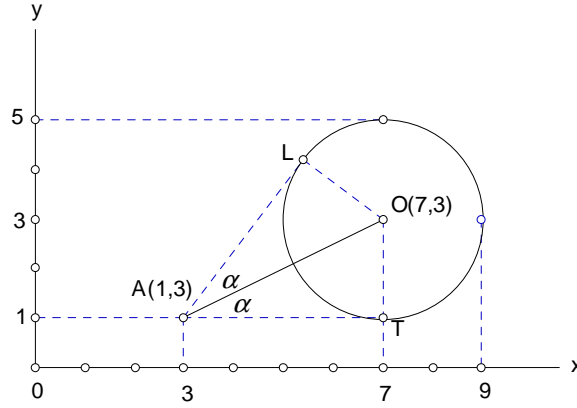


12 – A SINIFI MATEMATİK DERSİ 2. DÖNEM 1. YAZILI SINAVI ÇÖZÜMLERİ

1) $f(x) = x^3 - 3x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ olup $x = \pm 1$ dir. $f(-1) = 10$ ve $f(1) = 6$ dir. Uç değerleri de fonksiyonda yazarsak $f(2) = 10$ olur. İşaret tablosu yapılırsa $(-1, 10)$, $(2, 10)$ noktalarının mutlak maksimum ve $(1, 6)$ noktasının da mutlak minimum olduğu görülür. $10 + 6 = 16$ dir.

2) $y' = \frac{k(x+k) - 1 \cdot (kx+1)}{(x+k)^2} = \frac{k^2 - 1}{(x+k)^2}$ olup fonksiyonun azalan olduğu aralık için $\frac{k^2 - 1}{(x+k)^2} < 0$ olacağından $k^2 - 1 < 0$ sağlanmalıdır. Buradan da $-1 < k < 1$ elde edilir.

3) A noktasından O merkezli çembere AL ve AT teğetleri çizilebilir. AT doğrusu x eksenine paralel olduğundan bunun denklemi $y = 1$ olur. AL nin denklemini yazabilmek için eğim hesaplamasına ihtiyaç olduğu açıktır. AL nin eğimi m_{AL} olmak üzere $m_{AL} = \tan 2\alpha$ dir. ATO dik üçgeninde $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $m_{AL} = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$ bulunur. A(1,3) noktasından geçen bu doğrunun denklemi $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 4x - 5 = 0$ olur.



4) $f(1) = 1$ verildiğinden $k + p = -2 \dots (1)$ dir. Ayrıca $x = 1$ için dönüm noktası olduğundan $f''(1) = 0$ olmalıdır. $f''(x) = 12x^2 + 6kx + 2p$ olduğundan $12 + 6k + 2p = 0 \Rightarrow 3k + p = -6 \dots (2)$ dir. (1) ve (2) denklemleri ortak çözümlerse $k = -2, p = 0$ olur. Böylece $k - p = -2$ dir.

5) Paydanın kökü olan $x = 0$ ve $x = 3$ sayıları için düşey asimptot vardır. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2 - 3x} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimptottur. Bu koşullara uymayan B ve C şıkları elenir. $y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$ olup $x = 2$ de çift katlı kök vardır. Yani grafik x eksenine $x = 2$ de teğet olmalıdır. A şıkkı teğet olmasına rağmen fazladan $x = -2$ noktasında x eksenini kestiği için elenir. E şıkkı ise $x = 2$ de x eksenine teğet olmadığı için elenir. Doğru cevap D seçeneğidir.

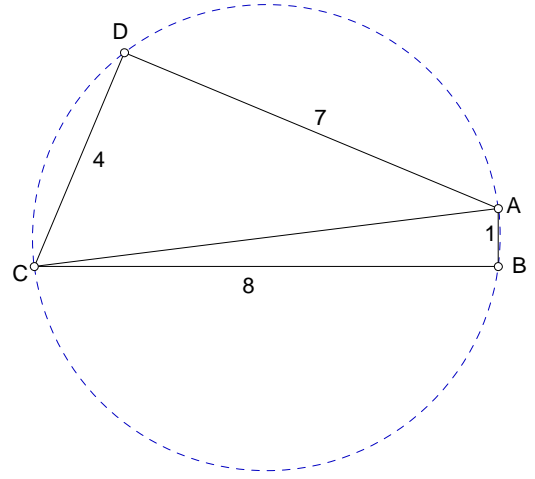
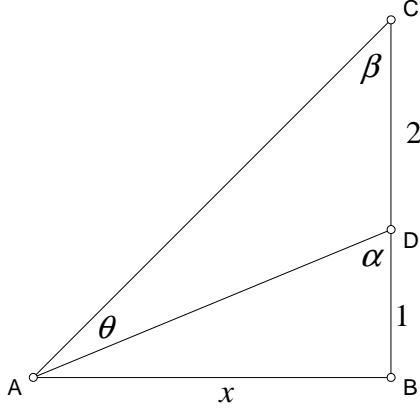
6) x bir değişken olmak üzere $|AB| = x$, $m(\angle ADB) = \alpha$, $m(\angle ACB) = \beta$ olsun. Bu durumda $\theta = \alpha - \beta$ dir. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ aralığında $g(\theta) = \tan \theta$ fonksiyonu artan olduğundan, θ açısının en büyük olması için

$\tan \theta$ nın en büyük olması gerekli ve yeterlidir. $\tan \alpha = \frac{x}{1}$ $\tan \beta = \frac{x}{1}$ ve

$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ olduğu kullanılarak $\tan(\alpha - \beta) = f(x) = \frac{x - \frac{x}{3}}{1 + x \cdot \frac{x}{3}} = \frac{2x}{x^2 + 3}$ fonksiyonu

kurulur. $f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2}$ olup $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6 = 0$ ve $x = \sqrt{3}$ bulunur. Yani $x = \sqrt{3}$ iken

θ açısı en büyük olur. ABC ve ABD dik üçgenlerinin $30 - 60 - 90$ özel üçgeni olacağını görmek kolaydır. $\theta_{\max} = 30^\circ$ dir.



7) $0^\circ < x < 180^\circ$ iken $0 < \sin x \leq 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre iki kenarının uzunluğu bilinen bir üçgenin alanının en büyük olması için verilen kenarlar arasındaki açının 90° olması gerekir. $[AC]$ köşegenini çizelim. ABC ve ADC dik üçgen olursa her birinin alanı ayrı ayrı en büyük değerini alır. Üstelik $8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2$ olduğundan istenen durum sağlanır. Böylece en büyük değer

$$\text{Alan}(ABCD) = \text{Alan}(ABC) + \text{Alan}(ADC) = \frac{8 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2} = 18 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

8) Verilen fonksiyonu $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürdükten sonra 3 defa L'hospital kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{2x \cdot \sin^2 x - x^2 \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x - 2}{2 \cdot \sin^2 x + 4x \cdot \sin 2x + 2x^2 \cdot \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cdot \sin 2x}{6 \cdot \sin 2x + 12x \cdot \cos 2x - 4x^2 \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{\frac{6 \cdot \sin 2x}{\sin 2x} + \frac{12x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} - \frac{4x^2 \cdot \sin 2x}{\sin 2x}} = \frac{-4}{6 + 6 - 0} = -\frac{1}{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

9) Limitte 1^∞ belirsizliği olduğundan logaritma alınarak çözüme gitmek uygun bir yoldur:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} \Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \cdot \ln(1 + \sin 4x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{\tan x} \text{ şekline getirilir. } \frac{0}{0}$$

belirsizliğine dönüşen bu limit için L'hospital kuralı uygulanırsa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{4 \cdot \cos 4x}{1 + \sin 4x}\right)}{1 + \tan^2 x} = 4$ elde edilir.

$\ln a = 4 \Rightarrow a = e^4$ bulunur.

10) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünebilmelidir. Türev ve katlı kök ilişkisinden $Q(1) = Q'(1) = 0$ olmalıdır. $Q(1) = 3 + m + n = 0 \Rightarrow m + n = -3$ olur. $Q'(x) = 3x^2 + 4x + m$ olduğundan $Q'(1) = 7 + m = 0 \Rightarrow m = -7$ dir. Buradan $n = 4$ olur.

Alternatif bir çözüm olarak: $x^3 + 2x^2 + mx + n = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ise $x = 1$ çift katlı kök olduğundan $x_1 = x_2 = 1$ yazılabilir. Kökler toplamı özelliğinden $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ olup $x_3 = -4$ tür. Kökler çarpımı özelliğinden $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -n \Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -n$ ve böylelikle $n = 4$ olur.