

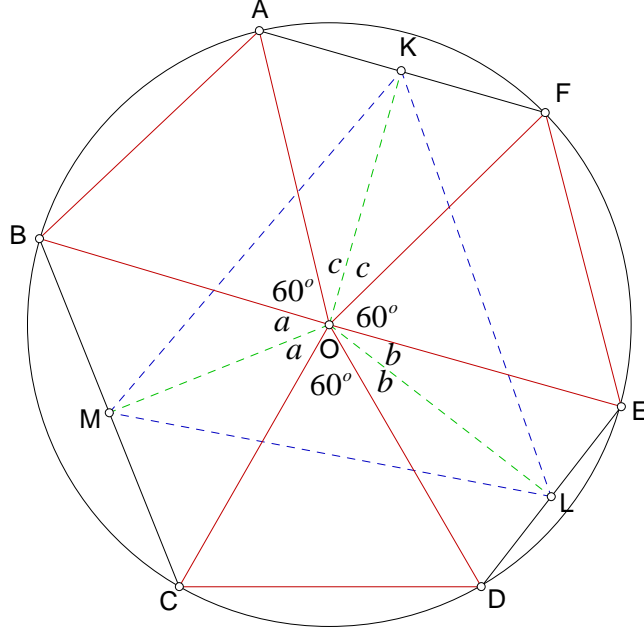
**SORU:**  $O$  merkezli bir çemberin içine bir köşesi  $O$  olacak şekilde üç tane eş olan  $OAB$ ,  $OCD$ ,  $OEF$  eşkenar üçgenleri çiziliyor.

a)  $AF$ ,  $ED$  ve  $CB$  'nin orta noktaları sırasıyla  $K,L$  ve  $M$  ise  $KLM$  'nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

b)  $AD$ ,  $BE$  ve  $CF$  'nin orta noktaları sırasıyla  $P,Q$  ve  $R$  ise  $PQR$  'nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM (L. Gökçe):**

a)



Genelliği bozmadan  $O$  merkezli çemberin yarıçapının 1 olduğunu kabul edebiliriz. Merkezden kirişe çizilen dikmeler kirişi iki eş parçaya böldüğünden  $OM \perp BC$ ,  $OL \perp DE$ ,  $OK \perp AF$  olur. Şekilde  $\angle BOC = 2a$ ,  $\angle DOE = 2b$ ,  $\angle AOF = 2c$  olarak harflendirelim.  $a + b + c = 90^\circ$  dir.

Amacımız,  $|ML|^2 = |LK|^2 = |KM|^2$  olduğunu göstermektir. Bu eşitliğin sağladığını gösterirsek,  $KLM$  'nin eşkenar olduğunu da göstermiş oluruz.

$OMC$  dik üçgeninde  $|OM| = \cos a$  ve  $ODE$  dik üçgeninde  $|OL| = \cos b$  dir.  $OML$  üçgeninde kosinüs teoreminden  $|ML|^2 = \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(60^\circ + a + b)$  dir.  $OLK$  üçgeninde  $|LK|^2 = \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cdot \cos b \cdot \cos c \cdot \cos(60^\circ + b + c)$  dir.

$$\begin{aligned}
 & |ML|^2 = |LK|^2 \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(60^\circ + a + b) = \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cdot \cos b \cdot \cos c \cdot \cos(60^\circ + b + c) \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 a - \cos^2 c = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(150^\circ - c) - 2 \cdot \cos b \cdot \cos c \cdot \cos(150^\circ - a) \\
 \Leftrightarrow & (\cos a + \cos c) \cdot (\cos a - \cos c) = 2 \cdot \cos b \cdot (\cos c \cdot \cos(30^\circ + a) - \cos a \cdot \cos(30^\circ + c)) \\
 \Leftrightarrow & 2 \cdot \cos\left(\frac{a+c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-c}{2}\right) \cdot (-2) \cdot \sin\left(\frac{a+c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-c}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \cos b \cdot (\cos(30^\circ + a + c) + \cos(30^\circ + a - c) - \cos(30^\circ + a + c) - \cos(30^\circ + c - a)) \\ &\Leftrightarrow -\sin(a + c) \cdot \sin(a - c) = 2 \cdot \cos b \cdot (\cos(30^\circ + a - c) - \cos(30^\circ + c - a)) \\ &\Leftrightarrow -\cos b \cdot \sin(a - c) = 2 \cdot \cos b \cdot (-2) \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin(a - c) \end{aligned}$$

Bu son eşitliğin doğru olduğu açıkça görülmektedir. Böylelikle, önermeler mantığına göre ilk yazdığımız  $|ML|^2 = |LK|^2$  eşitliği de doğrudur.

Benzer yolla  $|LK|^2 = |KM|^2$  olduğunu da gösterebiliriz. Dolayısıyla  $|ML|^2 = |LK|^2 = |KM|^2$  olup  $KLM$  'nin eşkenar üçgen olduğu sonucuna varırız.

b) Bu kısmın ispatı da yukarıdaki çözüme benzer bir akli yürütme ile kolaylıkla yapılabilir.