

Geometri Notları

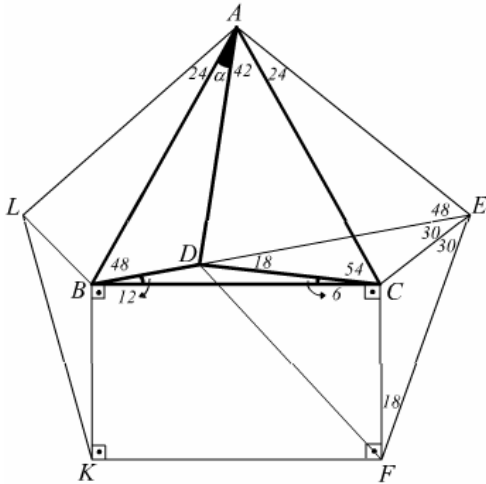
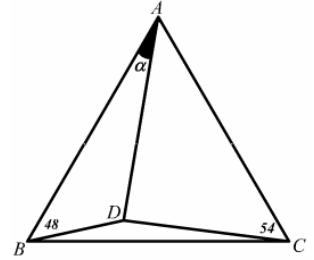
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

ZBS-05 Çözümleri

Soru [Mustafa Yağcı].

D noktası, ABC bir eşkenar üçgeninin iç bölgesindedir.

$m(\angle ABD) = 48^\circ$ ve $m(\angle ACD) = 54^\circ$ olduğuna göre, $\angle BAD$ açısının ölçüsü kaç derecedir?



Çözüm 1 [Mustafa Yağcı]: BD doğrusu üzerindeki bir E noktası için BAE ikizkenar üçgenini oluşturalım.

$|AC| = |AB| = |AE|$ olduğundan CAE üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi CAE üçgeninin aynısını ABC eşkenar üçgeninin soluna yaşıtıralım.

Daha sonra $m(\angle LAE) = 108^\circ$ ve $|LA| = |AE|$ olduğundan L, A, E noktaları bir düzgün beşgenin üç ardışık köşesidir. $AEFKL$ düzgün beşgeni oluşturulursa $BCFK$ bir dikdörtgen olur.

Buradan DEC ile FEC üçgenlerinin eşliği görülür.

Sonuçta $|EF| = |ED|$ çıkar ki aynı zamanda $|EF| = |EA|$ olduğundan $|EA| = |ED|$ olur.

O halde $m(\angle ADE) = 66^\circ$ olduğundan $m(\angle BAD) = \alpha = 18^\circ$.

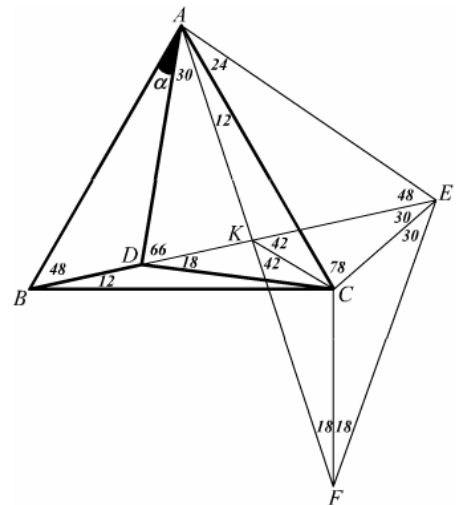
Çözüm 2 [Mustafa Yağcı - Cem Yıldırım]: BD doğrusu üzerindeki bir E noktası için BAE ikizkenar üçgenini oluşturalım.

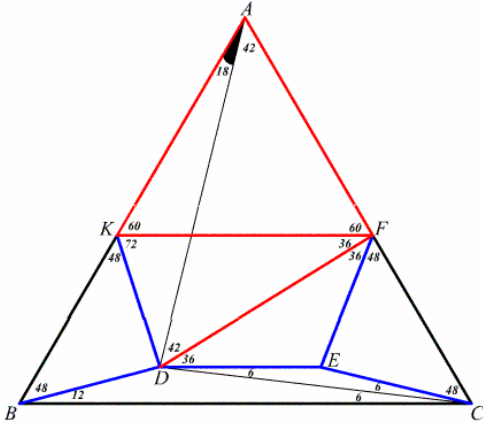
$|AC| = |AB| = |AE|$ olduğundan CAE üçgeni de ikizkenar olur.

Şimdi de $m(\angle CEF) = 30^\circ$ olacak şekilde bir F noktası ile AEF ikizkenar üçgenini oluşturalım. $m(\angle CAF) = 12^\circ$ olur.

$m(\angle KBA) = m(\angle KAB) = 48^\circ$ olduğundan $|AK| = |KB|$ dolayısıyla AKC ile BKC üçgenleri eştir. $m(\angle EKC) = m(\angle FKC) = 42^\circ$ olur. EFC üçgeninde EC ve KC birer iç açıortay olduğundan CF de iç açıortay olmak zorundadır. $m(\angle EFC) = m(\angle KFC) = 18^\circ$ dir.

Sonuçta DEC ile FEC üçgenleri eş çıktığından $|EF| = |ED|$ 'dir aynı zamanda $|EF| = |EA|$ diye $|EA| = |ED|$ olur ki $m(\angle ADE) = 66^\circ$ diye $m(\angle BAD) = \alpha = 18^\circ$.





Çözüm 3 [Mustafa Yağcı]: $BDEC$ ikizkenar yamuğunu oluşturalım.

$m(\angle BCD) = m(\angle CDE) = m(\angle ECD) = 6^\circ$ olduğundan $|BD| = |DE| = |EC|$ 'dir.

AB ve AC kenarları üzerindeki sırasıyla K ve F noktaları için BDK ve CEF ikizkenar üçgenlerini oluşturalım. DEF üçgeni de ikizkenar olur.

Gerekli açı ölçüleri yerlerine yazılırsa DFK üçgeninin de ikizkenar olduğu görülür ki bu da AKF eşkenar üçgen olmasından dolayı DFA üçgeninin ikizkenar olmasını anlatır.

$m(\angle FAD) = 42^\circ$ diye $m(\angle DAK) = m(\angle DAB) = 18^\circ$ olmalıdır.

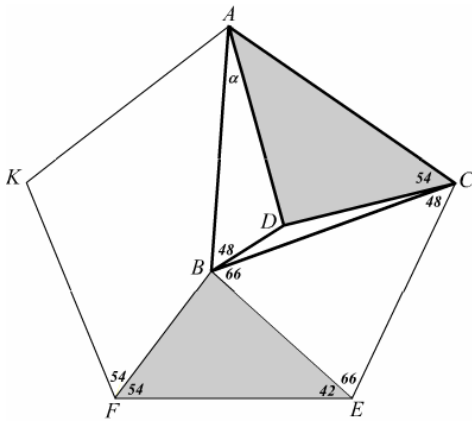
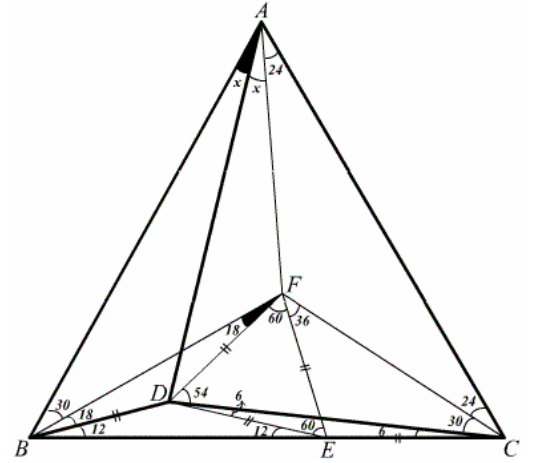
Çözüm 4 [Mustafa Yağcı]: BC üzerindeki bir E noktası için BDE ikizkenar üçgenini oluşturalım.

CED üçgeni de ikizkenar olur. Şimdi DE üzerine üçgenin içine doğru bir DEF eşkenar üçgeni inşa edelim. BDF ve FEC üçgenlerinin de birer ikizkenar olacaklarına dikkat edelim.

ABC üçgeninde BF iç açıortay doğrusu çıktığından ABF ile CBF eşittir. Bunun sonucu olarak CFA üçgeni de ikizkenar olur.

Şimdi $m(\angle FAC) = 24^\circ$ olduğundan $m(\angle BAF) = 36^\circ$ 'dir.

Aynı zamanda $m(\angle BDF) = 144^\circ$ olduğundan $ABDF$ bir kiriş dörtgenidir, o halde $m(\angle BAD) = m(\angle BFD) = 18^\circ$ 'dir.



Çözüm 5 [Mustafa Yurtseven]: ABC üçgenini içinde bırakan ve AC 'yi kenar kabul eden $ACEFK$ düzgün beşgenini inşa edelim.

AFC ikizkenar üçgeninde FB yükseklik olduğundan $m(\angle KFB) = m(\angle EFB) = 54^\circ$.

Diğer yandan $|CB| = |CE|$ olduğundan $m(\angle CBE) = m(\angle CEB) = 66^\circ$. FC köşegeni çizilirse $m(\angle BFC) = m(\angle DCF)$ ve $BD \parallel FC$ olacağından $FBDC$ bir ikizkenar yamuktur. O halde $|FB| = |DC|$.

Aynı zamanda $|FE| = |AC|$ ve $m(\angle EFB) = m(\angle ACD) = 54^\circ$ olduğundan EFB ile ACD üçgenleri eşittir.

$m(\angle CAD) = m(\angle FEB) = 42^\circ$ olduğundan $m(\angle BAD) = 60^\circ - m(\angle CAD) = 60^\circ - 42^\circ = 18^\circ$.

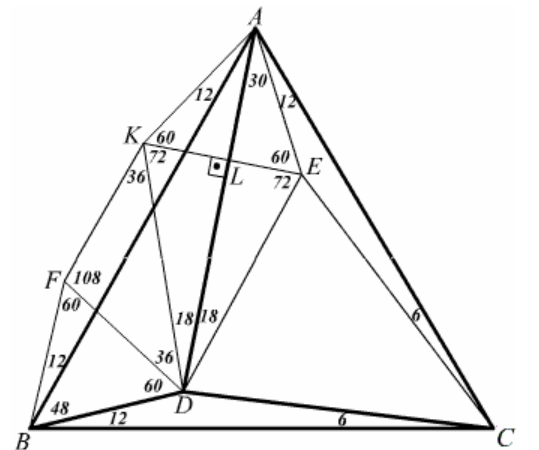
Çözüm 6 [Yunus Temelli]: $[BD]$ kenarı üzerine üçgenin dışına doğru şekildeki gibi BFD eşkenar üçgenini çizelim.

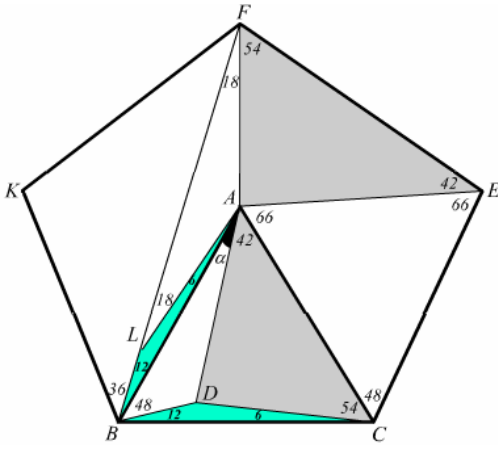
BDC ile BFA üçgenlerinin eşliğini göreyerek $BFKA$ ikizkenar yamuğunu çizelim.

$|BD| = |BF| = |DF| = |FK| = |KA|$ olduğundan DFK üçgeni ikizkenardır.

BDC üçgeni $[AC]$ üzerine AEC olarak kopyalanırsa KAE üçgeni de eşkenar olur.

Buradan $DKAE$ dörtgeninin bir deltoit olduğu görülür. O halde $m(\angle KAD) = 30^\circ$ olmalı, dolayısıyla $m(\angle BAD) = 30^\circ - 12^\circ = 18^\circ$ olarak bulunur.





Çözüm [Nail Karagöz]: BC kenarı üzerine şekildeki gibi $BCEFK$ düzgün beşgenini inşa edelim.

Düzgün beşgenin köşelerinin açıları 108° 'dir. Düzgün beşgenle ilgili diğer bilgileri bildiğimizi varsayıyoruz.

Bu arada, A noktasının düzgün beşgenin merkezi olmadığını belirtelim, şekil aldatabilir.

Şimdi BDC üçgenini BLA olarak ABC üçgeninin dışına kopyalayalım. $m(KBL) = 36^\circ$ olduğundan (kanıtı kolay!), $L \in BF$.

Öte yandan BFC ikizkenar üçgeninde FA yüksekliğin bir parçası olduğundan, $m(BFA) = 18^\circ$. Ayrıca $m(FLA) = 180^\circ - m(BDA) = m(DBA) + m(BCD) = 12^\circ + 6^\circ = 18^\circ$. O halde AFL üçgeni de ikizkenardır ve $|FA| = |AL| = |DC|$.

Aynı zamanda $|FE| = |BC| = |AC|$ ve $m(AFE) = 108^\circ - m(BFK) - m(BFA) = 108^\circ - 36^\circ - 18^\circ = 54^\circ = m(DCA)$ olduğundan AFE ile DCA üçgenleri eştir.

Dolayısıyla $m(CAD) = m(FEA) = 108^\circ - m(AEC) = 108^\circ - (180^\circ - 48^\circ)/2 = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$ ve sonuçta $m(BAD) = 60^\circ - m(CAD) = 60^\circ - 42^\circ = 18^\circ$ olarak bulunur.