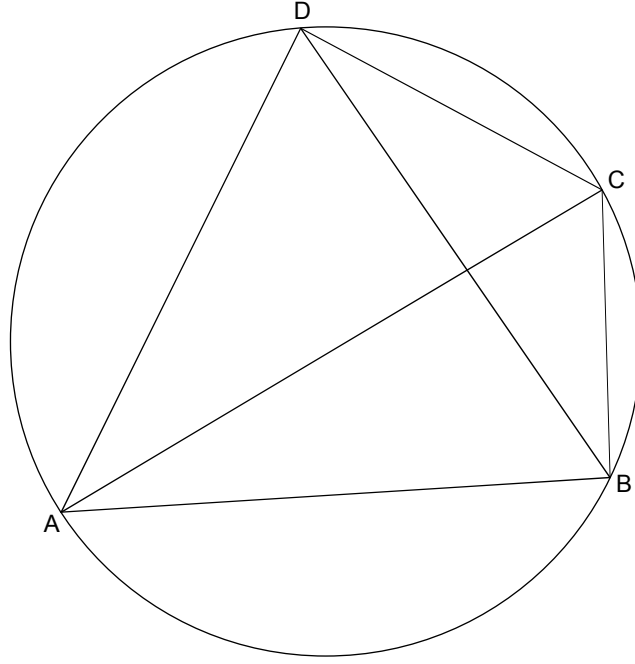
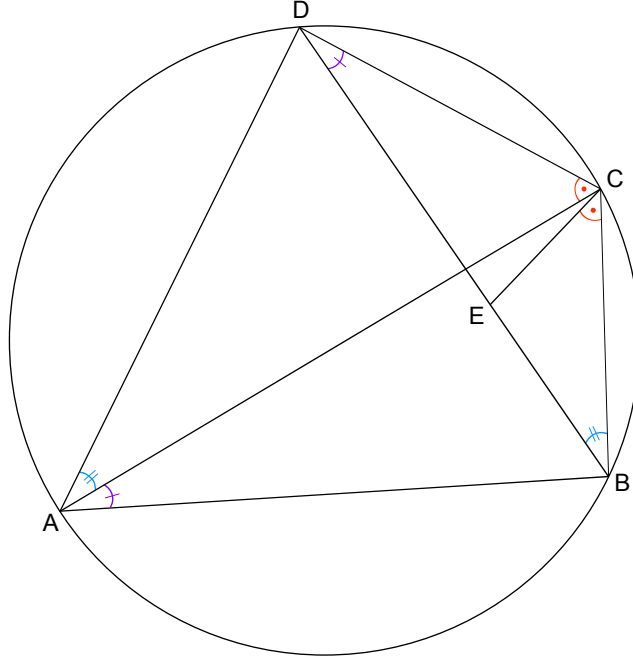


PTOLEMY (BALAMYUS) TEOREMİ



ABCD kirişler dörtgeni [AC] ve [BD] köşegenler olmak üzere
 $|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |DC|$

İspat



[BD] üzerinde $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ECB})$ olacak şekilde bir E noktası alırsak
 $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC})$ (Yay eşitliği olduğundan)

$\triangle ADC \sim \triangle BEC$ olur.

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|EC|} \Rightarrow |AC| \cdot |BE| = |AD| \cdot |BC| \quad (1)$$

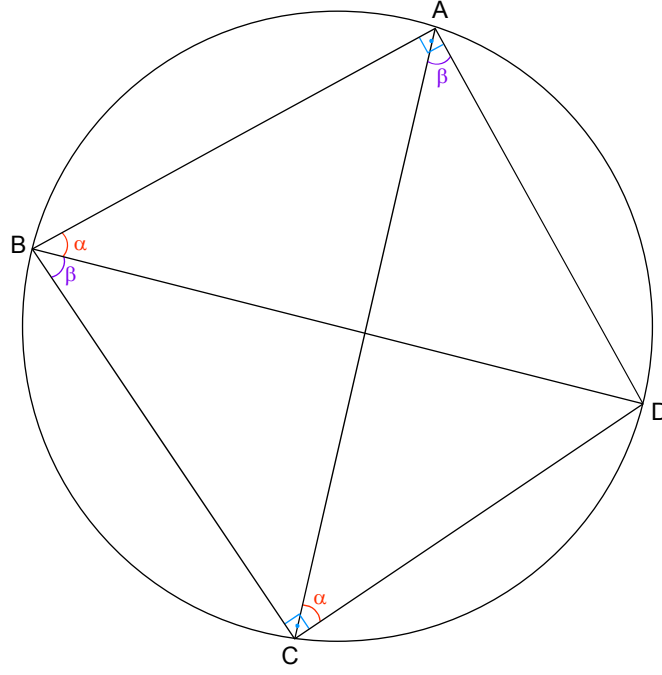
Ayrıca $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|EC|} \Rightarrow |AC| \cdot |DE| = |AB| \cdot |DC| \quad (2)$$

Sonuç olarak (1) ve (2) nin eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BD| &= |AC| \cdot (|BE| + |ED|) \\ &= |AC| \cdot |BE| + |AC| \cdot |ED| \\ &= |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |DC| \end{aligned}$$

Sinüs Toplam Formülünün Batlamyus Teoremiyle İspatı



[BD] çaplı 1 birim çaplı çember çizilirse

$$|AD| = \sin\alpha$$

$$|AB| = \cos\alpha$$

$$|BC| = \cos\beta$$

$$|CD| = \sin\beta$$

ACD üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{|CD|}{\sin\beta} = \frac{|AC|}{\sin(180 - \alpha - \beta)} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\beta} = \frac{|AC|}{\sin(\alpha + \beta)} = |AC| = \sin(\alpha + \beta)$$

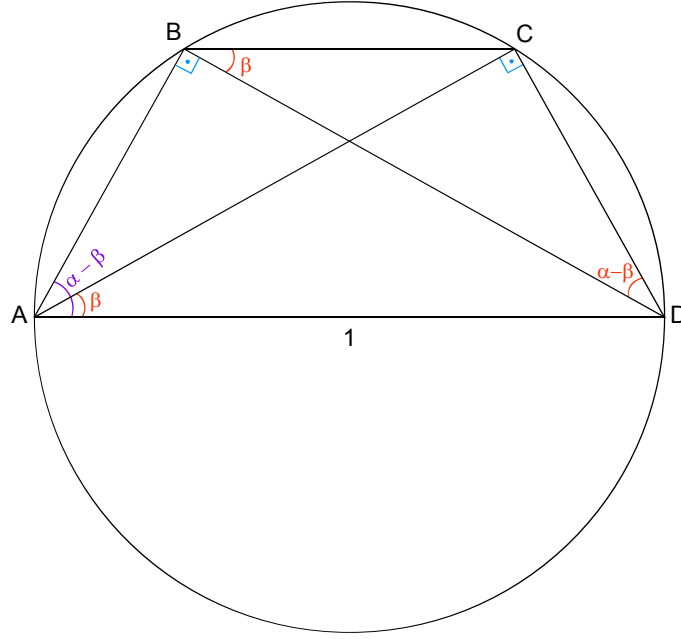
Batlamyus Teoremi'nden

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot 1 = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta \text{ olduğu gösterilmiş olur.}$$

Sinüs Toplam Formülünün Batlamyus Teoremiyle İspatı



[AD] çap uzunluğu 1 birim olan çemberde $m(\widehat{BAD}) = \alpha$, $m(\widehat{CAD}) = \beta$ olsun.

Yay eşitliğinden

$$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CBD}) = \beta$$

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha - \beta$$

Burada

$$|AB| = \cos\alpha \quad |BD| = \sin\alpha \quad |CD| = \sin\beta \quad |AC| = \cos\beta$$

BCD üçgeninde Sinüs Teoremi uygulanırsa

$$\frac{|BC|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{|CD|}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{|BC|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta} \Rightarrow |BC| = \sin(\alpha - \beta)$$

Batlamyus Teoremi'nden

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

$$\cos\beta \cdot \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \sin\beta + 1 \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$