

# LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

**Tanım:**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Şeklinde n tane bilinmeyen m tane lineer denklemden oluşan sisteme Lineer Denklem Sistemi,  $a_{ij}$  sayılarına denklemin sisteminin katsayıları  $b_i$  sayılarına sistemin sabitleri denir.

Lineer denklem sistemi;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ katsayılar matrisi}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} \text{ bilinmeyen matris ve}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \text{ sabit matris olmak üzere}$$

$A \cdot X = B$  şeklinde gösterilebilir.

**Lineer denklem sistemlerinin çözümü:**

Öncelikle bir tanım verelim.

$$\text{TANIM: } [A ; B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

matrisine lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisi denir.

**Homojen lineer denklem sistemi:**

$A \cdot X = 0_{m \times n}$  denklem sistemine **Homojen lineer denklem sistemi** denir.

I.  $m > n$  (denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla ise)

$\text{rank}A = n$  ise sistemin sadece sıfır (aşıkâr da denir) çözümü vardır.

(Bu arada  $\text{rank}A > n$  olamaz neden ☺)

**Örnek:**

$$x - 4y + z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 3y - 3z = 0$$

$2x + 6y - 3z = 0$  denklemine bakalım.

$m=4$   $n=3$  olup denklem sayısı bilinmeyenden fazladır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \text{ matrisinde elemanter}$$

satır işlemleri yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 14 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank} A = 3 = n$  olduğundan sadece sıfır çözüm vardır.

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}A = r < n$  ise sistemin **sıfırdan farklı ve  $n-r$  tane serbest değişkene** bağlı çözüm vardır.

**Örnek:**

$$x - 4y + z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$3x - 5y + 2z = 0$$

$x + 3y = 0$  denklemine bakalım.

$m=4$   $n=3$  olup denklem sayısı bilinmeyenden fazladır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisinde elemanter}$$

satır işlemleri yapalım.

# LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank A = 2 < n=3 olduğundan 3-2=1 serbest değişkene bağlı sonsuz tane çözüm vardır.

Ne demek 1 serbest değişkene bağlı sonsuz çözüm? açıklayalım.

Denklem sistemine eş denklem sistemi

$$x-4y+z=0$$

$7y-z=0$  olup  $y = k$  seçelim (seçim bir değişkenli) bu durumda  $z=7.k$  olup

$$x=4.k-7k=-3.k \text{ dir.}$$

Çözüm kümesi

$$X = \begin{bmatrix} -3.k \\ k \\ 7.k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{kısaca} \quad (-3,1,7)$$

vektörünün ürettiği doğru boyunca her vektör sistemin çözümüdür. Kısaca bu vektör uzayının boyutu ile serbest değişken sayısı aynı şeydir.

**Homojen olmayan lineer denklem sistemleri:**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \neq 0_{m \times 1} \text{ olmak üzere}$$

A.X = B denklem sistemine denir.

**Çözüm koşulları:**

$$\text{rank } [A ; B] = \text{rank} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = r$$

rankA= k ise;

- $k < r$  ise sistemin çözümü yoktur.
- $k = r = n$  ise sistemin tek çözümü vardır.
- $k = r < n$  ise sistemin n-r değişkene bağlı sonsuz çözümü vardır.

**Örnek:**

$$x-4y+z=-2$$

$$2x-y+z=3$$

$$3x-5y+2z=6$$

$x+3y = 3$  denklem sistemine bakalım.

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \text{ arttırılmış matriste}$$

elemanter satır işlemleri yaparsak.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank[A|B]=3 ve RankA= 2 olup. 2<3 olduğundan sistemin çözüm kümesi boş küme-dir.

**Örnek:**

$$x-4y+z=-2$$

$$2x-y+z=3$$

$$3x-5y+2z=1$$

$x + y = 0$  denklem sistemine bakalım.

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ arttırılmış matriste}$$

elemanter satır işlemleri yaparsak.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 21 \end{bmatrix}$$

# LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 21 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Rank[A|B]=3 ve RankA= 3 olup.  
bilinmeyen sayısına eşit olduğundan sistemin  
çözüm kümesi bir elemanlıdır.

$$2.z=21 \text{ den } z=\frac{21}{2} \quad y=\frac{5}{2} \quad \text{ve } x=-\frac{5}{2} \text{ tek}$$

çözümdür.

Bir örnek daha;

**Örnek:**

$$x-4y+z=-2$$

$$2.x-y+z=3$$

$$3x-5y+2z=6$$

$$x+3y =10 \text{ denklem sistemine bakalım.}$$

$$[A|B]= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 10 \end{array} \right] \text{ arttırılmış matriste}$$

elemantar satır işlemleri yaparsak.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 10 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Rank[A|B]=2 ve RankA= 2 olup.  $2 < 3$   
olduğundan sistemin çözüm kümesi  $3-2=1$   
serbest değişkene bağlı sonsuz çözüm vardır.

Denklem sistemine eş denklem sistemi

$$x-4y+z=-2$$

$$7y-z=7 \text{ olup } y = k \text{ seçelim (seçim bir}$$

$$\text{değişkenli) bu durumda } z=7.k-7 \text{ olup}$$

$$x=4.k-7k+7-2= 5-3.k \text{ dir.}$$

Çözüm kümesi

$$X= \begin{bmatrix} 5-3.k \\ k \\ 7.k-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad k \in \mathbb{R} \text{ tek}$$

değişkene bağlı sonsuz çözüm vardır. Bu da

(5,0,-7) den geçen ve (-3,1,7)  
doğrultusundaki doğru boyunca her (x,y,z)  
üçlülünü denklemleri sağlar.

Alıştırmalar:

**67. Gerçek sayılar cismi R üzerinde n denklem ve k bilinmeyenden oluşan homojen bir lineer denklem sistemi veriliyor. Şunlardan hangisi doğru değildir?**

- A) Bu denklem sisteminin her zaman bir çözümü vardır.
- B)  $k > n$  ise bu denklem sisteminin birden çok çözümü vardır.
- C)  $n > k$  ise bu denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.
- D)  $k = n$  ise bu denklem sisteminin birden çok çözümü olabilir.

2000 sınav sorusu☺

## LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

3.  $x - 3y + z = -2$   
 $2x + y - z = 6$   
 $x + 2y + 2z = 2$

lineer denklem sisteminin çözümlü aşağıdakilerden hangisidir?

- A. (0, 1, 1)                      B. (1, 4, 0)  
C. (2, 1, -1)                    D. (1, 0, 1/2)  
E. (2, 2, 0)

4.  $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$   
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

lineer denklem sisteminin çözümlü varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

- A. (2, 1, 1)                      B. (1, 1, 0)  
C. (0, 2, 3)                      D. (1, 1, 1)  
E. Çözüm yok

5.  $y = 3x + 1$  ve  $y = -2x - 4$  doğrularının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- A. (1, 2)                          B. (2, 1)  
C. (-2, -1)                      D. (-1, -2)  
E. (1, -4)

6.  $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$   
 $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$   
 $x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$

lineer denklem sisteminin çözümlü aşağıdakilerden hangisidir?

- A.  $\left\{ \left( -\frac{1}{5}s, -\frac{1}{5}s, -\frac{1}{5}s, s \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$                       B.  $\left\{ \left( \frac{1}{6}s, \frac{1}{6}s, \frac{1}{6}s, s \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$   
C.  $\left\{ (2s, 3s, 4s, s) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$                                       D.  $\left\{ \left( -\frac{1}{6}s, -\frac{1}{6}s, -\frac{1}{3}s, s \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$   
E.  $\left\{ \left( \frac{1}{6}s, \frac{1}{3}s, \frac{1}{6}s, s \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$

7.  $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$   
 $x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3$   
 $-x_4 - x_5 + 2x_6 = -1$

lineer denklem sisteminin çözümlü aşağıdakilerden hangisidir?

- A.  $\{(1 + s, 1 + t, s + t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$   
B.  $\{(1 - s - t, 1 + s + t, s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$   
C.  $\{(2s + t, 1 + s, 1 - t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$   
D.  $\{(1 - s + 2t, s + t, -1 + s + t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$   
E.  $\{(2 - s + t, 1 + s + t, s - 2t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

