Tanım:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Şeklinde n tane bilinmeyen m tane lineer denklemden oluşan sisteme Lineer Denklem Sistemi, a_{ij} sayılarına denklemim sisteminin katsayıları b_i sayılarına sistemin sabitleri denir.

Lineer denklem sistemi;

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ . & . \quad . & . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ katsayılar matrisi

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$ bilinmeyen matris ve

$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ sabit matris olmak üzere

A.X = B şeklinde gösterilebilir.

Lineer denklem sistemlerinin çözümü:

Öncelikle bir tanım verelim.

TANIM: $[A ; B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ . & . \quad . & . & | & . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$

matrisine lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisi denir.

Homojen lineer denklem sistemi:

$A.X=0_{mxn}$ denklem sistemine **Homojen lineer denklem sistemi** denir.

I. m>n (denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla ise)
rankA=n ise sistemin sadece sıfır (aşikar da denir) çözümü vardır.
(Bu arada rankA >n olamaz neden ☺)

Örnek:

x–4y+z=0
2.x–y+z=0
x+3y–3z=0
2x+6y–3z=0 denklemine bakalım.

m=4 n=3 olup denklem sayısı bilinmeyenden fazladır.

$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinde elemanter satır işlemleri yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 14 & -5 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank A = 3 = n olduğundan sadece sıfır çözüm vardır.

$X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$

rankA=r < n ise sistemin **<u>sıfırdan farklı</u>** ve **<u>n–r tane serbest değişkene</u>** bağlı çözüm vardır.

Örnek:

x–4y+z=0
2.x–y+z=0
3x–5y+2z=0
x+3y =0 denklemine bakalım.

m=4 n=3 olup denklem sayısı bilinmeyenden fazladır.

$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinde elemanter satır işlemleri yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank A = 2 < n=3 olduğundan 3-2=1 serbest değişkene bağlı sonsuz tane çözüm vardır.

Ne demek 1 serbest değişkene bağlı sonsuz çözüm? açıklayalım.

Denklem sistemine eş denklem sistemi

x–4y+z=0

7y–z=0 olup y = k seçelim (seçim bir değişkenli) bu durumda z=7.k olup

x=4.k–7k=–3.k dır.

Çözüm kümesi

$$X=\begin{bmatrix} -3.k \\ k \\ 7.k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$ kısaca (–3,1,7)

vektörünün ürettiği doğru boyunca her vektör sistemin çözümüdür. Kısaca bu vektör uzayının boyutu ile serbest değişken sayısı aynı şeydir.

Devam edecek ☺ uykum geldi ☹ saat 02,37