Cebir Notları

Alper ÇAY, *alpercay@hotmail.com*

Aşkın Sayılar

1844 yılına kadar aşkın[1] sayıların varlığının bilinmediğine inanmak zor. İlk önceleri bu sayıların tanımlarından başka bir şey bilinmiyordu.

Bir **rasyonel sayı**, *a* ve *b* tamsayı olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen bir sayıdır. Ondalık gösterimde rasyonel sayılar ya bir yerde biter ya da arka arkaya gelen rakamların bir kalıp halinde sonsuz biçimde tekrarından oluşur.

Bir **irrasyonel sayı**, *a* ve *b* tamsayı olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde ifade edilemeyen sayıdır. Ondalık gösterimde hiçbir zaman sona ermez ve arka arkaya gelen rakamların bir kalıp halinde tekrarı biçiminde değildir.

Bir **cebirsel sayı**, katsayıları rasyonel olan bir polinom denklemin köküdür. Rasyonel veya irrasyonel olabilir. Mesela 2 cebirsel bir sayıdır çünkü $10x = 20$ denkleminin köküdür. $\sqrt{2}$ sayısı da cebirsel bir sayıdır, çünkü $x^2 = 2$ denkleminin köküdür.

Aşkın sayılar, örneğin π ve *e*, irrasyonel sayılardır ve rasyonel katsayılı cebirsel bir denklemin kökleri değillerdir.

1844 yılında Fransız matematikçi Joseph Liouville (1809-1882), aşkın sayıların varlığını ispatlayan ilk kişi oldu ve hatta bunlardan sonsuz adet bulunduğunu gösterdi. **Liouville sayıları** yapay ya da suni sayılar olarak adlandırılır çünkü Liouville bu sayıları matematikte hiçbir yerde bulamadı. En basit *Liouville sayısı* ikilik aşkın olan

0.110001000000000000000001...

sayısıdır. Bu sayıdaki 1 rakamının yeri ardışık faktöryeller tarafından verilir. Örneğin ilk birin yeri 1! = 1 olduğundan ilk sıradadır. İkinci bir 2! = 2 olduğundan ikinci sırada ve üçüncü bir ise 3! = 6 olduğundan altıncı sıradadır ve böylece devam edilerek bir rakamının yeri belirlenir.

İrrasyonel olacak fakat aşkın olmayacak şekilde yapay sayılardan yeni sayılar inşa etmek kolaydır (ikinin karekökü gibi). Ama aşkın olacak şekilde bu tür sayılar inşa etmek kolay değildir. Şimdi 0,101001000100001... sayısını göz önüne alalım. Liouville bu şekildeki her sayının hatta herhangi bir basamağın 2'den 9'a kadar rakamlarla yer değiştirilmesiyle elde edilen sayıların da aşkın olduğunu gösterdi.

π, *e* ve diğer ünlü irrasyonel sayıların aşkın olduğunun gösterilmesi uzun sürmedi. Sayıların aşkınlığının ispatındaki büyük gelişmelere rağmen bir çok derin soru hala çözümsüzdür. Örneğin e^{π}'nin aşkın olduğu ispatlandı fakat henüz hiç kimse π^{e}'nin aşkın olup olmadığını hatta $\pi + e$, πe, e^{e} veya π^{π} sayılarının irrasyonel olup olmadığını bilmiyor. Hepsinin aşkın olduğuna inanılıyor fakat dehanın biri bunu ispatlamadıkça π ile *e*'nin toplamının rasyonel bir sayı olması mümkün!

Diğer Louville sayılarından başka en ünlü yapay aşkın sayı sayma sayılarının önüne ondalık noktası konularak basitçe şu şekilde oluşturulur:

0.123456789101112131415...

Bu sayı **Mahler sayısı** olarak isimlendirilir çünkü bu sayının tüm tabanlarda aşkın olduğunu ilk kez ispatlayan matematikçi Kurt Mahler'dir. Bunun on tabanı için zarif bir ispatını İvan Niven'in harika küçük kitabı "*İrrational numbers*" da bulabilirsiniz.

Kurt Mahler (1903-1988)

[1] İngilizcesi ''transcendental''.

Herhangi bir sayı düşünün. Eğer bu sayının her basamağı ya da her çiftli, her üçlü veya herhangi özel bir kalıptaki basamağı beklediğimiz sıklıkta gözüküyor ve bu sayı rastlantısal olarak oluşturulmuşsa bu sayıya "*normal*" denir. Şimdiye kadar π, e ve bütün cebirsel sayıların irrasyonel kökleri normallik için yapılan tüm istatistik testlerini geçtiler. Fakat hiç kimse henüz bu sayıların normal olduklarının ispatlayamadı.

a, 0'dan ve 1'den farklı bir cebirsel sayı ve b de herhangi bir irrasyonel sayı olmak üzere a^b sayısının aşkın olduğu 1934 yılında ispatlandı (Gelfond-Schneider Teoremi). Buna göre 2^{π} ve $10^{\sqrt{2}}$ sayıları aşkın sayılardır.

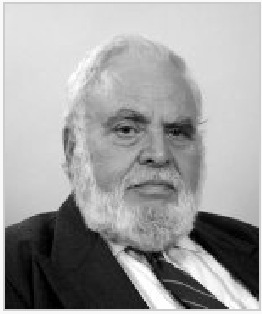
Şimdi şaşırtıcı tesadüflere bir göz atalım. Mahler sayısının son beş basamağına dikkat edin. Bunlar dört ondalığa kadar π sayısıdır. Her pozitif tamsayının Mahler sayısının herhangi bir yerinde gözükeceği açıktır. Fakat birçok sayı normalde sayma sayısı olarak bulunması gereken yerden oldukça önde gösterilir. π sayısına çok erken sıra gelir çünkü 3 sayısı 13'ün son basamağıdır ve 14 ile 15 bu sayıyı izler.

π sayısının beş ondalığa kadar en erken 14159**3-14159**4 olarak göründüğüne dikkat edin. 666 sayısını göz önüne alalım. Elbette bu sayı sayma sayıları içinde gösterilir fakat bu sayıyı erken bir şekilde 65-**66-6**7 dizisi içinde bulabilirsiniz.

Bu tür tanıdık sayıların köklerin bir tam gücü olarak, telefon numaranızın son dört rakamı olarak, ev numaranız olarak ya da benzeri birçok şekilde Mahler sayısında en erken göründüğü yerleri araştırmak zararsız bir eğlencedir. Eğer verilen herhangi bir sayının sayma sayıları içerisinde en erken nerde görüneceğini bulabilen bir işlemi formülize edebiliyorsanız bu daha iyi bir eğlencedir.

Eğer bir sayı sayma sayısı olarak bulunması gereken pozisyondan daha önde gözüküyorsa bu sayıya **erken kalkan**[2] diyelim. Örnek olarak ünlü 1492 yılı bir erken kalkandır. (49**1-492**). 2'nin 13'üncü kuvveti olan 8192 bir erken kalkandır. (1**8-19-2**0) π gibi aşkın sayı olan e sayısı da her ne kadar π kadar erken olmasa da dört ondalığa kadar (2,7182) bir erken kalkandır.(**2718-2**719)

En küçük erken kalkan asal nedir? Gelecek yıl ne zaman bir erken kalkan olacaktır?


Solomon W. Golomb

Matematikçi Solomon W.Golomb bir mektubunda evinin posta kodunun çok erken kalkan olduğundan bahsediyor.

(910111,9-10-11)

Golomb erken kalkan sayıların sayılabilir çoklukta olduğunu çünkü sayma sayılarının bir alt kümesi olduğunu söylüyor. Golomb hemen hemen tüm tamsayıların erken kalkan olduğuna emin. Tek basamaklı erken kalkan sayı yoktur, fakat iki basamaklı sayıların yarısı erken kalkandır.

[2] İngilizcesi ''early bird''.