Soru : Bir davete katılan 5 kişi girişte şapkasını vestiyere bırakmıştır. Çıkışta herkes rastgele bir şapka alırsa kimsenin kendi şapkasını almama olasılığı kaçtır?

Çözüm : $\frac{!n}{n!}$ n = 5 için $\frac{!5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$

Sorunun çözümümde belkide bu zamana kadar görmediğiniz duymadığınız bir matematiksel bir işlemden yararlanacağız adı alt faktoriyel (Subfactorial)

Ön bilgi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_p| = \sum_{1 \le i \le p} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le p} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{p-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p|$$

Örneğin : $A_1 = \{2, 3, 7, 9, 10\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 9\}$, ve $A_3 = \{2, 4, 9, 10\}$ ise $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10\}$ olduğunu gösterelim

1	A_1	$\{2, 3, 7, 9, 10\}$
	A_2	$\{1, 2, 3, 9\}$
	A_3	$\{2, 4, 9, 10\}$
2	$A_1 \cap A_2$	$\{2, 3, 9\}$
	$A_1 \cap A_3$	$\{2, 9, 10\}$
	$A_2 \cap A_3$	$\{2, 9\}$
3	$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	$\{2, 9\}$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \{2, 3, 7, 9, 10\} + \{1, 2, 3, 9\} + \{2, 4, 9, 10\} - \{2, 3, 9\} - \{2, 9, 10\} - \{2, 9\} + \{2, 9\}$

Yukarıdaki soruyu n = 3 için düşünelim

$\{1, 2, 3\}$ $1 \to 2$ $2 \to 3$ $3 \to 1$ i alsın

$\{3, 1, 2\}$ $3 \to 1$ $1 \to 2$ $2 \to 3$ ü alsın

2 farklı durum söz konusu

n = 4 için olursa

$\{2, 1, 4, 3\}$, $\{2, 3, 4, 1\}$, $\{2, 4, 1, 3\}$, $\{3, 1, 4, 2\}$, $\{3, 4, 1, 2\}$, $\{3, 4, 2, 1\}$, $\{4, 1, 2, 3\}$, $\{4, 3, 1, 2\}$, $\{4, 3, 2, 1\}$

9 farklı durum söz konusu

Gelelim alt faktoriyele;

$$!n \equiv n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$ olarak tanımlanır

buradaki k = n sadece n kişinin alması şeklinde yorumlanabilir.

$!1 = 0$, $!2 = 1$, $!3 = 2$, $!4 = 9$, $!5 = 44$, $!6 = 265$, $!7 = 1854$, $!8 = 14833$, **...**

Ali ERGİN

ali_ergin@hotmail.com