

GEOMETRİK ŞEKİLLERDE ORTAYA ÇIKAN ORTALAMA ÇEŞİTLERİ

Hemen her matematik öğrencisi verilen a ve b pozitif sayılarının aritmetik ve geometrik ortalamalarına aşinadır. Verilen iki pozitif sayının diğer birçok ortalamasının olduğunu farkında olan öğrenci sayısı azdır. Her ortalama ele alınan probleme bağlı olarak değişir.

Aşağıda a, b pozitif sayı çiftinin ortalamalarının bazılarının bir listesi verilmiştir.

1) Aritmetik ortalama: $A(a, b) = (a+b)/2$

2) Geometrik ortalama: $G(a, b) = \sqrt{ab}$

3) Harmonik ortalama: $H(a, b) = 2ab/(a+b)$

4) Heronian ortalama: $N(a, b) = (a + \sqrt{ab} + b)/3$

5) Kontraharmonik ortalama: $C(a, b) = (a^2 + b^2)/(a+b)$

6) Kareli ortalama: $R(a, b) = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$

7) Senrodial ortalama: $T(a, b) = 2(a^2 + ab + b^2)/3(a+b)$

Bütün bu ortalamaların homejen olduğuna yani

$$M(ka, kb) = kM(a, b), k > 0$$

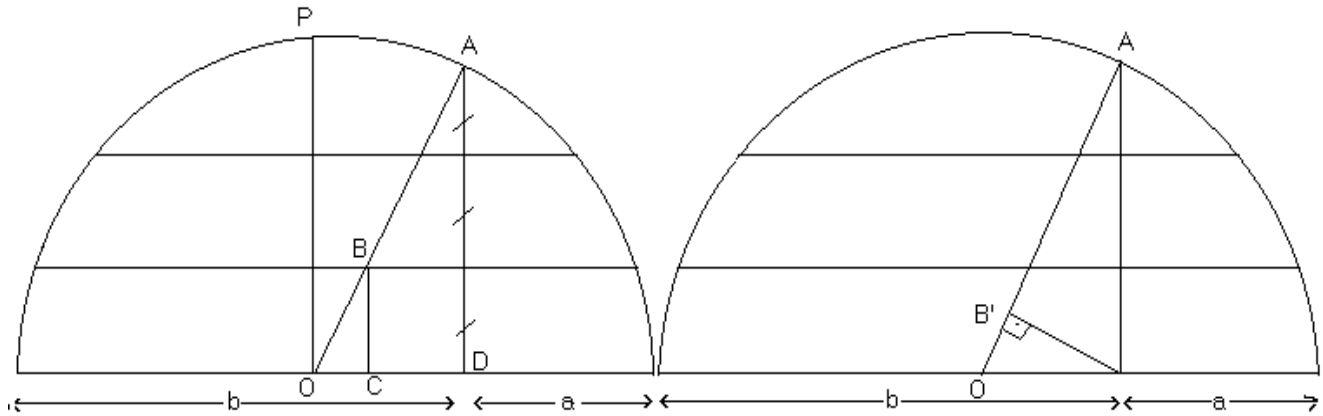
ve simetrik olduğuna yani

$$M(a, b) = M(b, a)$$

olduğuna dikkat ediniz.

Bu yazının amacı bu ortalamalardan bazılarının belli geometrik şekillerde nasıl oluştuğunu göstermektir. Birçok şekilde harmonik ortalamanın ortaya çıkması okuyucuyu şaşırtabilir.

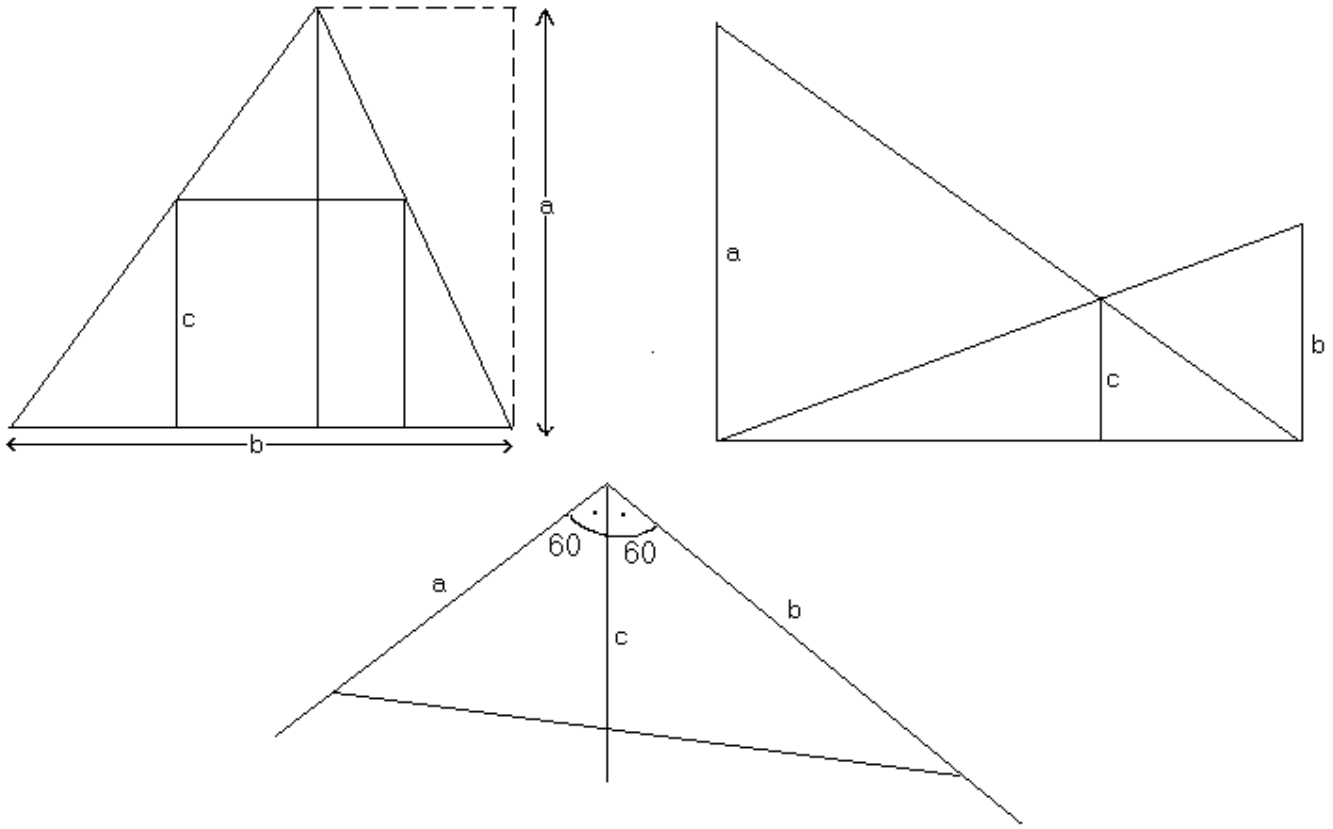
Çemberdeki Ortalamalar: Şekil 1 de sol tarafta a ve b nin aritmetik ortalaması OP , geometrik ortalaması AD , heronian ortalaması ise $AB+BC$ dir. Sağ tarafta ise a ve b nin harmonik ortalaması AB' dür.



Şekil 1 Sol: Aritmetik, geometrik ve heronian ortalamalar. Sağ: Harmonik ortalama

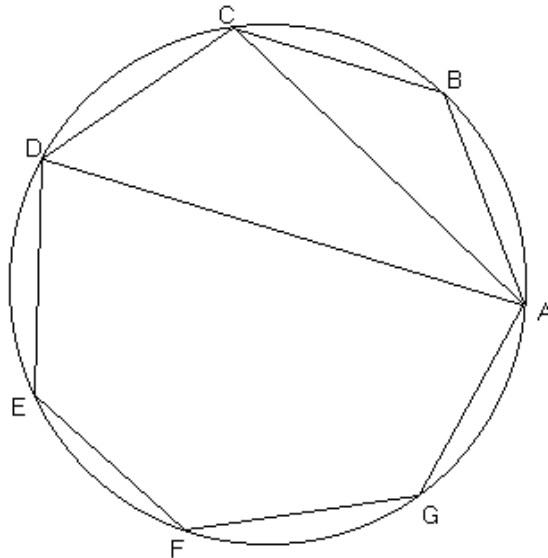
Bu şekilden faydalanarak $H(a,b) < G(a,b) < N(a,b) < A(a,b)$ olduğu gözlenebilir.

Harmonik Ortalamanın Çeşitliliği: Şekil 2 deki her diagramda c , a ve b nin yarı harmonik ortalamasıdır.



Şekil 2 Yarı harmonik ortalama oluşturmının üç yolu

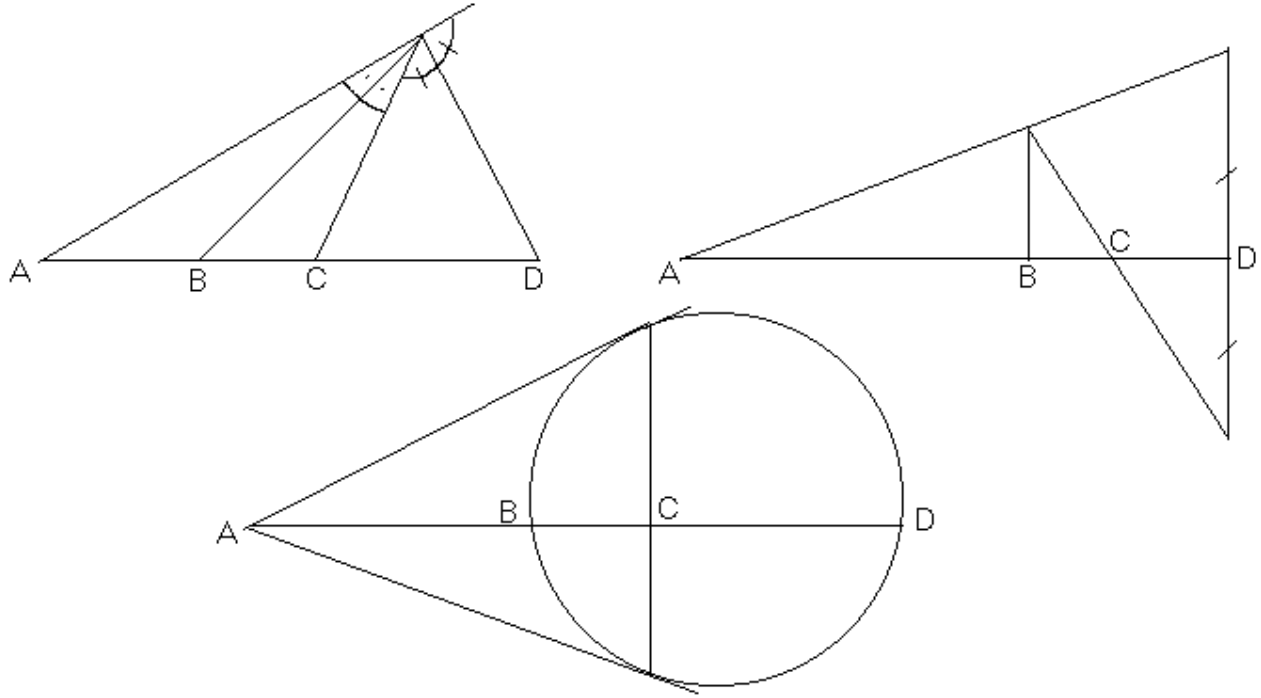
LEON BANKOFF TEOREMİ: Eğer A, B, C, D, E, F ve G bir düzgün yedigenin köşeleri ise bu taktirde $CD = H(AC, AD)/2$ dir. (Şekil 3)



Şekil 3 Yedigende Leon Bankoff harmonik ortalaması

Harmonik ortalama klasik bir cebir probleminde de karşımıza çıkar:Eğer A dan B ye V_1 hızıyla gidilir ve B den A ya V_2 hızıyla geri dönülürse bu yolculuktaki ortalama hız ne olur?Cevap V_1 ve V_2 nin harmonik ortalamasıdır.

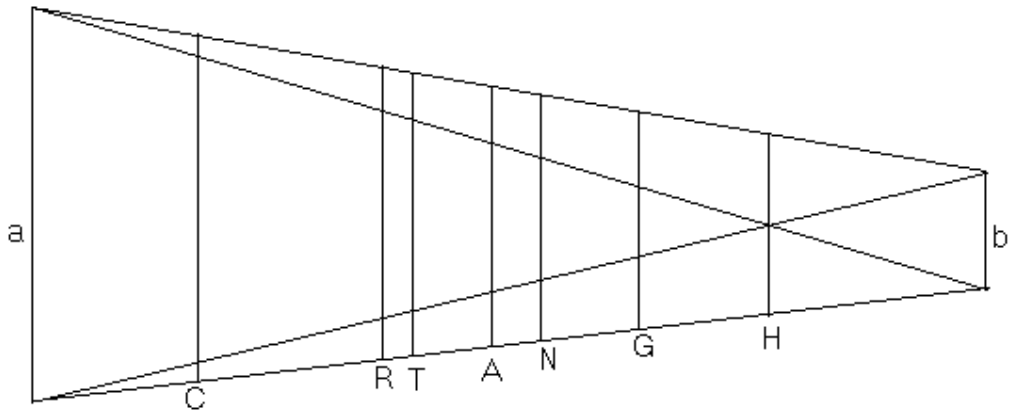
Şekil 4 deki her diagramda AB ve AD nin harmonik ortalaması AC dir.



Şekil 4 Harmonik ortalamanın üç görünümü

Yamuktaki Ortalamalar:Alt ve üst taban uzunlukları sırasıyla a ve b olan bir yamuk şekil 5 te gösterilmiştir.Birçok ortalama alt veya üst tabana paralel bir doğru parçasıyla ifade edilebilir.Buna göre:

- 1)Harmonik ortalama $H(a,b)$ yamuğun köşegenlerinin kesim noktasından geçer.
- 2)Geometrik ortalama $G(a,b)$ yamuğu iki benzer yamuğa böler.
- 3)Heronian ortalama $N(a,b)$ aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasında olup aritmetik ortalamadan bir birim,geometrik ortalamadan iki birim uzaklıktadır.
- 4)Aritmetik ortalama yamuğun paralel olmayan kenarlarını iki eşit parçaya böler.
- 5)Sentrodial ortalama $T(a,b)$ yamuğun ağırlık merkezinden geçer.
- 6)Karesel ortalama $R(a,b)$ yamuğun alanını iki eşit alana böler.
- 7)Aritmetik ortalamanın solunda harmonik ortalama yer almaktayken bir o kadar sağında kontra harmonik ortalama yer alır



Şekil 5 Yamuktaki ortalamalar

Yazımızı konuyla ilgili bir soruyla bitirelim.

$$1/\sin(\pi/7)=1/\sin(2\pi/7)+1/\sin(3\pi/7)$$

olduğunu gösteriniz.

Alper Çay