

# SİMEDYAN

Lokman Gökçe & H. İbrahim Ayana

Güncelleme: 18 Eylül 2025



# Önsöz

Geometrinin zarif konularından biri olan simedyan ve uygulamalarını kapsamlı bir şekilde ele alan bu notları, başta matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler olmak üzere, tüm geometri meraklılarına sunmaktan mutluluk duyarız.

Bu çalışmada, teorik bilgileri adım adım inşa ederken, her seviyeden okuyucunun keyifle üzerinde düşünebileceği olimpiyat düzeyinde problemlerle konuyu pekiştirmeyi hedefledik. Dokümanı hazırlarken, literatürde rastlamadığımız ve özgün olduğunu düşündüğümüz bazı problemler ile çözümlerine de yer vererek içeriği zenginleştirmeye özen gösterdik. Yararlandığımız tüm kıymetli eserleri ve yazarları ise kaynakça bölümünde belirttik.

Her türlü soru ve geri bildiriminiz, bu notların gelecekteki sürümlerini daha da iyileştirmemiz için bize yol gösterecektir.

Faydalı olması dileğiyle,

*Lokman Gökçe, İstanbul*

*H. İbrahim Ayana, Aksaray*

*www.geomania.org*

*30 Ağustos 2025*



# Simedyan

Bu ders notumuzda üçgen geometrisinin en zarif ve güçlü kavramlarından biri olan simedyanı inceleyeceğiz. Simedyan, özel bir cevian türüdür ve üçgenin birçok ilginç noktası ve özelliği ile doğrudan ilişkilidir.

**Tanım:** Bir  $ABC$  üçgeninde herhangi bir köşeden (örneğin  $A$  köşesinden) karşı kenardaki bir noktaya birleştiren doğru parçasına *cevian* denir [1].

Bu terim, Ceva Teoremi'ne adını veren matematikçiden gelmektedir. Köşeden çıkan temel cevianları hatırlayalım: kenarortay, açıortay ve yükseklik. Simedyanı tanımlamak için kenarortay ve açıortaydan faydalanacağız.

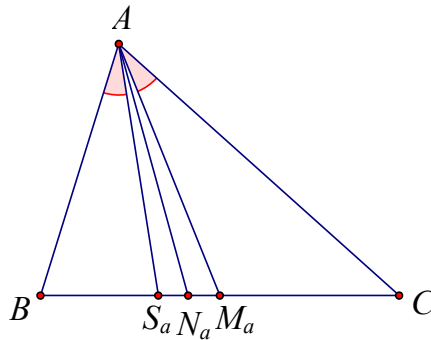
**Tanım:** Bir  $ABC$  üçgeninde,  $A$  köşesinden çıkan simedyan ( $AS_a$ ), aynı köşeye ait kenarortayın ( $AM_a$ ), o köşenin iç açıortayına ( $AN_a$ ) göre yansıması (simetriği) olan cevianıdır.

Bu tanım, geometride izogonal eşlenik olarak bilinen daha genel bir kavram üzerine kuruludur.

**Tanım:** Bir köşedeki açıortaya göre birbirinin simetriği olan iki doğruya (veya ışına) o köşeye göre *izogonal eşlenik doğrular* (veya *ışınlar*) denir.

Bu durumda simedyanın tanımı kısaca şöyle de ifade edebiliriz: Simedyan, kenarortayın izogonal eşleniğidir.

Bu yansıma özelliğinin doğrudan bir sonucu olarak, simedyanın komşu kenarlardan biriyle yaptığı açı, kenarortayın diğer komşu kenarla yaptığı açıya eşittir.



Şekil A: Simedyanın tanımı

A Şekil'i inceleyelim.  $[AS_a]$  simedyan ve  $[AM_a]$  kenarortay olmak üzere:

$$\angle BAS_a = \angle CAM_a.$$

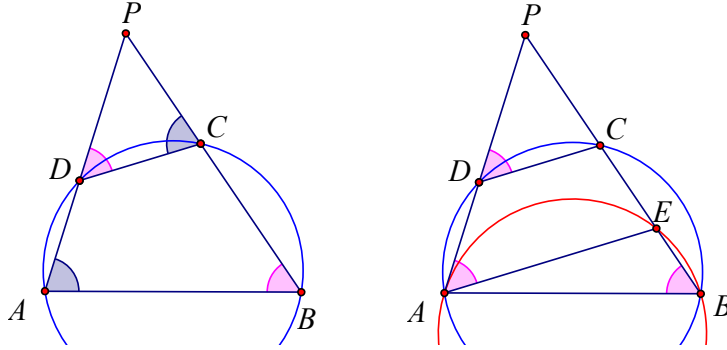
Bu açı eşitliği, simedyan içeren birçok problemin çözümünde kilit rol oynar. Her köşe için bir simedyan tanımlanabilir ( $AS_a, BS_b, CS_c$ ). Bu üç simedyanın tek bir noktada kesiştiğini ileride göreceğiz ve bu noktaya *Simedyan Noktası* ( *Lemoine Noktası* veya *Grebe Noktası*) diyeceğiz.

Şimdi de simedyan kavramı içinde önemli bir yeri olan antiparalel doğruların tanımını verelim.

**Tanım:** Düzlemde birbirinden farklı  $d_1, d_2, k_1, k_2$  doğruları için  $k_1 \cap d_1 = A, k_1 \cap d_2 = B, k_2 \cap d_1 = C, k_2 \cap d_2 = D$  olsun.  $ABCD$  bir kirişler dörtgeni ise  $k_1, k_2$  doğrularına  $d_1, d_2$  doğrularına göre *antiparalel doğrular* denir. Tanımın simetrisinden dolayı  $d_1$  ve  $d_2$  doğruları da,  $k_1, k_2$  doğrularına göre antiparalel olur.

Çoğu zaman  $d_1 \cap d_2 = P$  gibi bir kesişim noktası yardımıyla  $\angle APB$  referans açısı (veya  $APB$  referans üçgeni) oluşturulur.  $ABCD$  kirişler dörtgeni olmak üzere, bu halde  $AB$  ve  $CD$  (yani  $k_1$  ve  $k_2$ ) *antiparalel doğrular* olarak isimlendirilir. (Bkz. B Şekil)

Bu ikinci tanımda,  $d_1 \parallel d_2$  olursa, antiparalellik tanımlanamıyor gibi aklınıza gelebilir. Ancak projektif geometri fikriyle  $d_1 \cap d_2 = P_\infty$  biçiminde sonsuzdaki bir noktayı referans açısının köşesi olarak düşünebiliriz. Bu senaryoda,  $ABCD$  kirişler dörtgeni aslında bir ikizkenar yamuk olacaktır.



Şekil B: Antiparalel doğrular

B Şekil'de  $\angle APB$  referans açısına göre antiparalel olan  $AB$  ve  $CD$  doğrularını görüyoruz.  $DC'$ 'ye paralel olan her doğru  $AB'$ 'ye antiparalel olmaya devam edecektir. Burada  $AE \parallel CD$  doğrusunu çizelim. Aynı  $A$  noktasından geçen  $AB$  ve  $AE$  doğrularının antiparalel olması için koşul  $\angle PAE = \angle ABP$  olmasıdır. Bunu,  $D \rightarrow A$  ve  $C \rightarrow E$  olarak yorumlayabiliriz. Bu halde  $ABCD$  kirişler dörtgeninin çevrel çemberi de  $ABE$  üçgeninin çevrel çemberine dönüşecektir.  $AE$  ve  $AB$  antiparalel doğrular iken  $AP$  doğrusu,  $ABE$  üçgeninin çevrel çemberine teğet olur.

Şimdi, simedyanın ne olduğunu anladıktan sonra, onun en temel ve en çok kullanılan özelliğini bir giriş problemi olarak ele alalım. Simedyanın karşı kenarı hangi oranda böldüğü sorusu, onun geometrideki önemini ortaya koyan ilk adımdır. Bu özellik, matematikçi Jakob Steiner'e atfedildiği için literatürde sıklıkla *Steiner Lemması* olarak da geçer.

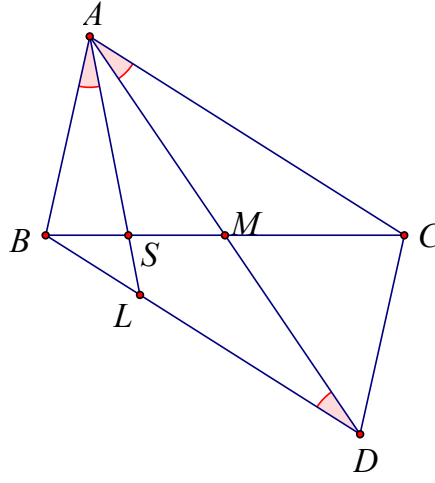
1. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $A$  köşesinden çıkan simedyan  $[AS]$ , karşı kenar olan  $[BC]$ 'yi  $S$  noktasında kesmektedir. Üçgenin kenar uzunlukları  $|AC| = b$  ve  $|AB| = c$  olduğuna göre,  $S$  noktasının  $[BC]$  kenarını

$$\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{c^2}{b^2}$$

oranında böldüğünü ispatlayınız.

(Steiner Lemması)

**Çözüm [H. İbrahim Ayana]:** Problem sinüs teoremi yardımıyla da ispatlanabilir. Burada zarif bir sentetik çözüm sunacağız. Öncelikle  $[BC]$  kenarının orta noktası  $M$  olsun.  $|AM| = |MD|$  olacak şekilde  $[AM]$  ışını üzerinden  $D$  noktası alalım.  $M$ , hem  $[AD]$ 'nin hem de  $[BC]$ 'nin orta noktası olduğundan,  $ACDB$  bir paralelkenardır.  $AD$  doğrusunun  $BD$  ile kesişimi  $L$  noktası olsun.



Şekil 1: Steiner Lemması

Paralellikten dolayı  $\angle BDA = \angle DAC = \angle BAS$  olur. Böylece  $ABD \sim LBA$  olup

$$\frac{|BL|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BD|}$$

yazılır.  $|AB|^2 = |BL| \cdot |BD|$  elde edilir.  $BL \parallel AC$  olduğundan  $BLS \sim CAS$  olup

$$\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|BL|}{|AC|}$$

bulunur.  $|BD| = |AC|$  olduğundan, bu eşitliklerden

$$\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{c^2}{b^2}$$

sonucuna ulaşırız.

İlk problemde bir simedyanın karşı kenarı nasıl böldüğünü gördük. Şimdi ise üçgenin üç simedyanının da özel bir ilişkiye sahip olduğunu göstereceğiz. Bu problem, üçgen geometrisindeki en önemli özel noktalardan birinin varlığını ispatlamamızı istiyor.

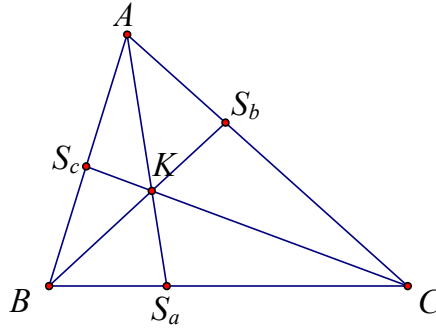
2. Bir  $ABC$  üçgeninde, üç simedyan olan  $AS_a$ ,  $BS_b$  ve  $CS_c$ 'nin tek bir noktada kesiştiğini (noktadaş olduğunu) ispatlayınız. Genellikle  $K$  ile gösterilen bu noktadaşlık noktası, *simedyan noktası*, *Lemoine noktası* veya *Grebe noktası* olarak bilinir.

**Çözüm:** Bu ispatta, Steiner lemmasını doğrudan kullanacağız. Ceva Teoremi'nin karşıtını kullanarak bir ispat sunacağız.

Bir  $ABC$  üçgeninde  $S_a, S_b, S_c$  sırasıyla  $[BC], [CA], [AB]$  kenarları üzerindeki simedyan ayakları olsun. Eğer bu noktalar

$$\frac{|BS_a|}{|S_aC|} \cdot \frac{|CS_b|}{|S_bA|} \cdot \frac{|AS_c|}{|S_cB|} = 1$$

eşitliğini sağlıyorsa,  $AS_a, BS_b, CS_c$  simedyanları tek bir noktada kesişir (noktadaştır).



Şekil 2: Simedyan Noktası

Amacımız, simedyanların bu eşitliği sağladığını göstermektir. Bunun için ders notumuzdaki ilk problem olan Steiner Lemması'nın sonucunu kullanacağız. Steiner Lemması'na göre,  $A$  köşesinden çıkan  $AS_a$  simedyanı,  $BC$  kenarını komşu kenarların kareleri oranında böler:

$$\frac{|BS_a|}{|S_aC|} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Aynı özelliği  $B$  ve  $C$  köşelerinden çıkan simedyanlar için de yazabiliriz:

$$\frac{|CS_b|}{|S_bA|} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{ve} \quad \frac{|AS_c|}{|S_cB|} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Şimdi bu üç oranı Ceva Teoremi'nin denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{|BS_a|}{|S_aC|} \cdot \frac{|CS_b|}{|S_bA|} \cdot \frac{|AS_c|}{|S_cB|} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Oranların çarpımı 1'e eşit olduğu için, Ceva Teoremi'nin karşıtı gereğince  $AS_a, BS_b, CS_c$  simedyanları tek bir noktada kesişir. Böylece Simedyan noktasının (Lemoine Noktası) varlığını ispatlamış olduk.

3.  $ABC$  üçgeninde  $[AS]$  bir simedyana ve  $K$  üçgenin simedyana noktası olsun.  $\frac{|AK|}{|KS|} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**  $C'$ 'den geçen simedyana  $[CL]$  olsun.  $\frac{|AK|}{|KS|}$  oranını bulmak için Menelaüs teoreminden faydalanabiliriz.  $ABS$  üçgeninin  $C, K, L$  keseni için

$$\frac{|SC|}{|CB|} \cdot \frac{|BL|}{|LA|} \cdot \frac{|AK|}{|KS|} = 1$$

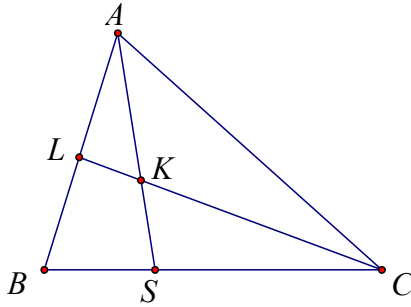
olur. Steiner lemmasından dolayı

$$\frac{|BL|}{|LA|} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{ve} \quad \frac{|CB|}{|SC|} = 1 + \frac{|BS|}{|CS|} = 1 + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2}$$

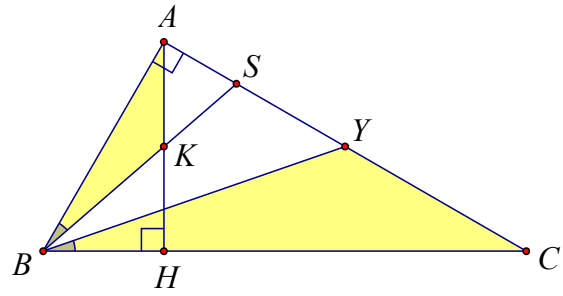
bulunur. Bu değerleri Menelaüs eşitliğinde yazarsak

$$\frac{|AK|}{|KS|} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

sonucuna ulaşırız.



Şekil 3: Simedyanda oran



Şekil 4: Dik üçgende simedyana

4. Dik üçgende simedyana noktası, hipotenüse inilen yüksekliğin orta noktasıdır, gösteriniz.

**Çözüm 1:**  $ABC$  üçgeninde dik açı  $\angle A$  olsun.  $[AH]$  yükseklik,  $[BS]$  simedyana ve  $[BY]$  kenarortay olsun.  $AH \cap BS = K$  diyelim. Simedyananın tanımından  $\angle ABS = \angle CBS$  yazarız. Öte yandan  $ABC \sim HBA$  benzerliği vardır. Ayrıca  $\angle ABK = \angle CBY$  olduğundan bu benzer dik üçgenlerde  $BY$  ve  $BK$  doğrularının aynı görevi üstlendiğini fark etmeliyiz. Yani  $ABC$  dik üçgeninde  $[BY]$  kenarortay ise,  $HBA$  dik üçgeninde de  $[BK]$  kenarortay olur.

Bu aşamada, bu kenarortay gözlemini yapmakta zorlanan ve cebirsel eşitlikler yazmayı tercih eden okuyucular için daha fazla açıklama verebiliriz.  $\angle BAK = \angle ACB$  olduğundan  $ABK \sim CBY$ 'dir.  $\angle KBH = \angle CBY$  olduğundan  $KBH \sim YBA$ 'dır.

$$\frac{|AK|}{|CY|} = \frac{|BK|}{|BY|} \quad \text{ve} \quad \frac{|KH|}{|AY|} = \frac{|BK|}{|BY|}$$

yazılır.  $|AY| = |CY|$  olduğundan bu eşitliklerden  $|AK| = |KH|$  elde ederiz.

Benzer şekilde  $ABC$  üçgeninde  $C$  köşesinden çizilen simedyan da  $[AH]$  yüksekliğinin orta noktası olan  $K$ 'dan geçecektir. Dolayısıyla  $K$  noktası,  $ABC$  üçgeninin simedyan noktası olur.

**Çözüm 2:**  $ABC$  dik üçgeninde,  $[AH]$  yüksekliğinin de aynı zamanda bir simedyan olması gerektiğini anlıyoruz. Bunu görmenin kolay bir yolu da şöyledir:  $[BC]$  hipotenüsünün orta noktası  $M$  olsun. Thales teoreminin sonucu olarak  $\angle MAC = \angle MCA = \angle BAH$  olur. Bu açı eşitlikleri ile  $[AH]$ 'nın bir simedyan olduğunu anlarız.  $[BS]$  simedyanı  $[AH]$ 'yı  $K$  noktasında kessin. Yani  $K$ , simedyan noktasıdır. 3. Problem'den dolayı

$$\frac{|AK|}{|KH|} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

yazarız. Ayrıca dik üçgende  $a^2 = b^2 + c^2$  olduğundan  $|AK| = |KH|$  elde edilir.

5. İlk olarak, bir  $ABC$  üçgeninde  $AS_a$  simedyan doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktanın, üçgenin  $AB$  ve  $AC$  kenar doğrularına olan uzaklıklarının, bu kenarların uzunluklarıyla doğru orantılı olduğunu ispatlayınız.

Ardından, bu özelliği kullanarak,  $K$  noktasının  $ABC$  üçgeninin simedyan noktası olması durumunda,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz. Burada  $x, y, z$ ,  $K$  noktasının sırasıyla  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$  ve  $|AB| = c$  uzunluklarına sahip kenarlara olan dik uzaklıklarıdır.

(1. Grebe Teoremi)

**Çözüm 1:**  $AS_a$  simedyan doğrusu üzerinde alınan ( $A$ 'dan farklı) keyfi bir  $P$  noktasından  $AC$ ,  $AB$  doğrularına inilen dikme ayakları sırasıyla  $D$ ,  $E$  olsun.  $S_a$  simedyan ayağından  $AC$ ,  $AB$  doğrularına inilen dikme ayakları da sırasıyla  $F$ ,  $G$  olsun. Benzer dik üçgenlerden dolayı

$$\frac{|PE|}{|S_aG|} = \frac{|AP|}{|AS_a|} = \frac{|PD|}{|S_aF|}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$|S_aG| = |BS_a| \sin \angle B \text{ ve } |S_aF| = |S_aC| \sin \angle C$$

olur. Sinüs teoreminden

$$\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

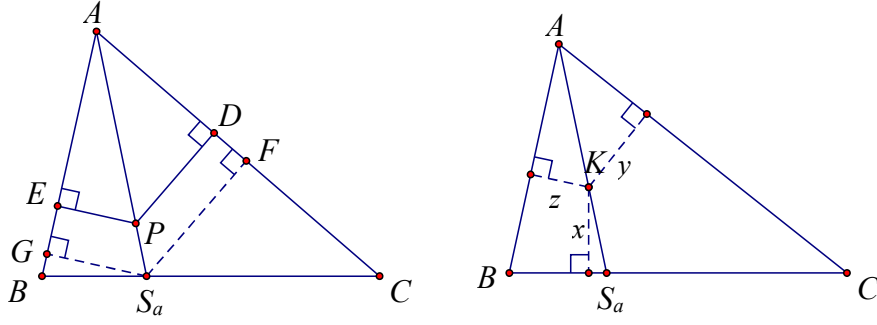
olur. 1. Problem'den dolayı

$$\frac{|BS_a|}{|CS_a|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

olur. Bu eşitliklerden,

$$\frac{|PE|}{|PD|} = \frac{|S_aG|}{|S_aF|} = \frac{|BS_a|}{|CS_a|} \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

sonucuna ulaşırız.



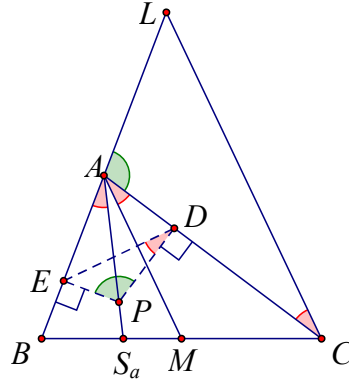
Şekil 5a: 1. Grebe Teoremi

Şimdi de  $K$  simedyan noktasından  $ABC$  üçgeninin  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  kenar doğrularına dikmeler çizelim. Bu dikmelerin uzunlukları sırasıyla  $x$ ,  $y$ ,  $z$  veriliyor. Problemimizin ilk kısmında ispatladığımız özellikten dolayı  $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$  ve  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  olur. Böylece

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

eşitliklerine ulaşırız.

**Çözüm 2 [H. İbrahim Ayana]:** Önceki çözümdeki harflendirmeleri kullanalım.



Şekil 5b: 1. Grebe Teoremi için farklı bir yol

[ $BA$  ışını üzerinden  $|AB| = |AL|$  olacak şekilde  $L$  noktası alalım.  $ABC$  üçgeninin [ $AM$ ] kenarortayını çizelim. Böylece orta taban özelliği ile  $AM \parallel LC$  olur. Dikmelerden dolayı  $AEPD$  bir kirişler dörtgenidir. Çevre açılar, simedyan ve paralellik ile açı takibi yaparsak

$$\angle PDE = \angle PAE = \angle MAC = \angle ACL$$

olur. Yine kirişler dörtgeninden  $\angle EPD = \angle CAL$  olur. Böylece  $EPD \sim LAC$  (açı-açı-açı) benzerliği vardır.

$$\frac{|PE|}{|PD|} = \frac{|AL|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

sonucuna ulaşırız.

6.  $ABC$  üçgeninin düzleminde alınan keyfi bir  $X$  noktası verilsin.  $X$  noktasının üçgenin  $BC, CA$  ve  $AB$  kenar doğrularına olan dik uzaklıkları sırasıyla  $x, y, z$  olmak üzere,

$$x^2 + y^2 + z^2$$

toplamını minimum yapan noktanın, üçgenin simedyan noktası olduğunu gösteriniz.

(2. Grebe Teoremi)

**Çözüm:**  $ABC$  üçgeninin kenar uzunlukları  $a, b, c$  ve alanı  $\Delta$  olmak üzere  $2\Delta = ax + by + cz$  yazabiliriz.  $X$  noktası üçgensel bölgenin dışında olursa  $2\Delta = -ax + by + cz$  v.b. eşitlikler yazabileceğimizi de aklımızda tutalım. Fakat bu türlü işaret değişimlerinin, çözümün genelliğini bozmayacağını gözlemleyelim. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$4\Delta^2 = (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

olup

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

elde edilir. Böylece  $x^2 + y^2 + z^2$  için bir alt sınır elde etmiş olduk. Şimdi bu alt sınır değerine nasıl erişebileceğimizi analiz edelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde, eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

oranısının olmasıdır. Bu ise 5. Problem'den dolayı, yalnızca  $X = K$  simedyan noktası iken eşitliğin sağlanacağını söyler. Yani

$$(x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**Uyarı:** Yukarıdaki çözüm tekniği ile  $x^2 + y^2 + z^2$  toplamının global minimum değerini elde etmiş olduk. Bu kısmı biraz daha irdeleyebiliriz. Yönlü uzunluklar kullanarak  $x, y, z$ 'nin negatif değerler alabilmesine de izin verelim. Böylece  $X$  değişken noktasının üçgenin dışında olabildiğini sağlamış oluyoruz.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

eşitliğinde  $a, b, c$  pozitif olduğundan  $x, y, z$ 'nin üçü birden negatif olabilir. Böyle bir durumda  $X$  noktası;  $BC$  doğrusunun  $A$ 'yı içermeyen tarafında,  $CA$  doğrusunun  $B$ 'yi içermeyen tarafında,  $AB$  doğrusunun  $C$ 'yi içermeyen tarafında olması gerekir. Bu ise boş kümedir. Yani  $X$  noktası  $ABC$  üçgeninin dışında iken bu global minimum değere erişilemez. Tek uygun çözüm  $X = K$  simedyan noktasıdır.

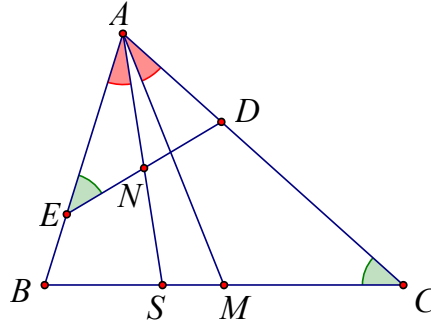
7. Bir üçgenin herhangi bir köşesinden çizilen simedyanın, o köşenin karşısındaki kenara antiparalel olan tüm doğru parçalarını ortaladığını (iki eşit parçaya böldüğünü) ispatlayınız.

**Çözüm:** Bir  $ABC$  üçgenini ve  $BC$  doğrusuna antiparalel olan bir  $\ell$  doğrusunu göz önüne alalım.  $\ell$  doğrusunun  $AC, AB$  kenar doğruları ve  $AS$  simedyan doğrusu ile kesişim noktaları sırasıyla  $D, E, N$  olsun.  $ABC$  üçgeninin  $[AM]$  kenarortayını çizelim. Simedyanın tanımından  $\angle MAC = \angle SAB$  olur. Ayrıca antiparalellikten  $\angle AEN = \angle ACB$ 'dir. Böylece  $ABC \sim ADE$  benzer üçgenlerinde  $[AM]$  ve  $[AN]$  doğru parçalarının eş görevlere sahip olduğunu anlıyoruz. Yani  $|BM| = |CM|$  ise  $|EN| = |DN|$  olur.

**Uyarı:** Çözümde kullandığımız, benzer üçgenlerde eş görevli noktalar/doğru parçaları gibi kavramlar *eşlenik noktalar/eşlenik doğru parçaları* olarak isimlendirilir. Bu kısmın üzerinde düşünülmesi, kavramın anlaşılmasını oldukça kolaylaştıracaktır. Yine de kavramakta zorlanan okuyucular olabileceğini varsayarak biraz daha matematiksel açıklama verebiliriz.  $AEN \sim ACM$  ve  $ADE \sim ABC$  benzerliklerini kullanalım:

$$\frac{|EN|}{|CM|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BC|}$$

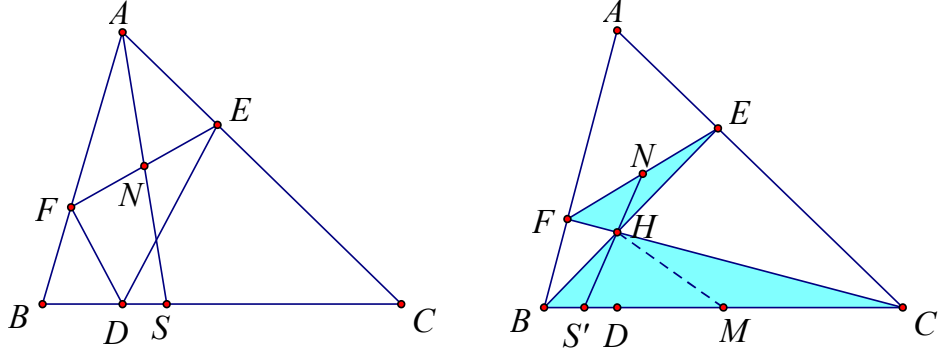
yazılır.  $|BC| = 2|CM|$  olduğundan  $|ED| = 2|EN|$  elde edilir. Buradan  $|EN| = |DN|$  bulunur.



Şekil 7a: Antiparalel doğrular ve simedyan

**Bazı Sonuçlar:** Bir  $ABC$  üçgeninin ortik üçgeni  $DEF$ , diklik merkezi  $H$  ve  $[EF]$ 'nin orta noktası  $N$  olsun.

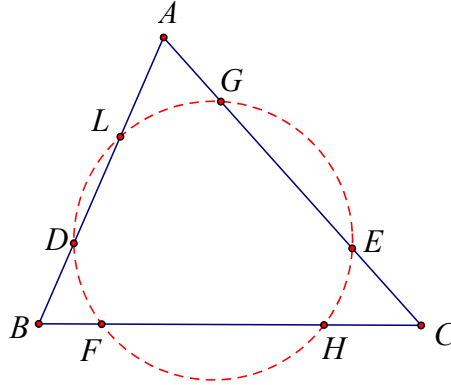
- Bir üçgenin bir kenarına antiparalel olan doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yeri, karşı köşeye ait simedyanıdır.
- $ABC$  üçgeninin simedyanları ortik üçgenin kenarlarını iki eş parçaya böler. Çünkü,  $EF$  ile  $BC$  antiparalel doğrular oluşturur.  $AS$  bir simedyan ise, 7. Problem'den dolayı  $AS$ ,  $[EF]$  antiparalelini iki eş parçaya ayırır.  $|EN| = |FN|$ 'dir. Benzer şekilde,  $B$ -simedyan  $[DF]$ 'yi ikiye böler,  $C$ -simedyan  $[DE]$ 'yi ikiye böler.
- $NH$  doğrusu  $BCH$  üçgeninin bir simedyanıdır. Çünkü  $BCH$  üçgenine göre  $BC$  ve  $EF$  antiparalel doğrulardır. 7. Problem'den dolayı  $[EF]$ 'nin orta noktası,  $BCH$  üçgeninin  $H$ -simedyan doğrusu üzerinde bulunur. Bu kısmı biraz daha irdelemek isteyen okuyucu için  $[BC]$ 'nin orta noktasına  $M$  ve  $NH \cap BC = S'$  diyelim.  $BCH \sim FEH$  benzer üçgenlerinde  $[HM]$  ve  $[HN]$  eşlenik kenarortaylar olduğundan  $\angle MHC = \angle NHE = \angle BHS'$  olur. Bu ise  $NH$  doğrusunun,  $BCH$  üçgeninin bir simedyanı olması demektir.



Şekil 7b: Antiparalel doğrular ve simedyan uygulamaları

Şimdi de, doğrudan simedyan kavramı ile ilgili olmasa da, sonraki problem çözümlerinde bize yardımcı olacak bir çember problemini sunalım.

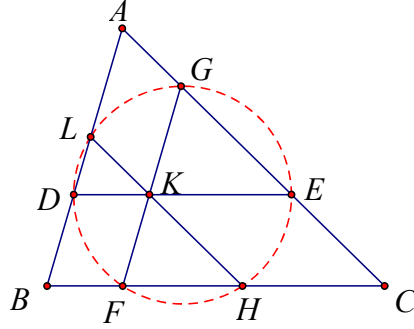
8.  $ABC$  üçgeninin  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  doğruları üzerinde ikişer nokta sırasıyla  $\{F, H\}$ ,  $\{E, G\}$ ,  $\{L, D\}$  olarak alınmış olsun.  $DEGL$ ,  $DFHL$ ,  $HFEG$  birer kirişler dörtgeni ise bu altı nokta çemberseldir.



Şekil 8: Altı noktanın çemberselliği

**Çözüm:**  $DEGL$ ,  $DFHL$ ,  $HFEG$  kirişler dörtgenlerinin çevrel çemberleri sırasıyla  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ve  $\omega_3$  olsun. Bu üç çemberden herhangi ikisi aynı ise, 6 nokta çemberseldir demektir. O halde üç çemberin de farklı olduğunu varsayalım.  $\omega_1 \cap \omega_2 = \{L, D\}$  olduğundan, bu iki çemberin kuvvet eksenini  $AB$ 'dir.  $\omega_2 \cap \omega_3 = \{F, H\}$  olduğundan, bu iki çemberin kuvvet eksenini  $BC$ 'dir.  $\omega_1 \cap \omega_3 = \{G, E\}$  olduğundan, bu iki çemberin kuvvet eksenini  $AC$ 'dir. Üç çemberin kuvvet merkezi teoremine göre, ikişerli olarak kesişen üç kuvvet eksenini, kuvvet merkezi denilen bir noktada kesişmelidir. Fakat burada  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  kuvvet eksenleri  $ABC$  üçgeninin oluşturur ve üçü birden aynı noktadan geçmez. Bir çelişki oluşur. Demek ki  $\{F, H, E, G, L, D\}$  noktaları çemberseldir.

9.  $K$  simedyan noktasından geçen ve  $ABC$  üçgeninin kenarlarına paralel olan  $DE, FG, HL$  doğrularını çizelim. Bu paralel doğruların  $ABC$  üçgeninin kenarlarını kestiği noktalar, *birinci Lemoine çemberi* olarak bilinen bir çember üzerinde bulunur.



Şekil 9: 1. Lemoine çemberi

- (a)  $D, F, H, E, G, L$  noktalarının çembersel olduğunu ispatlayınız.  
 (b)  $\frac{|BF|}{c^2} = \frac{|FH|}{a^2} = \frac{|HC|}{b^2}$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**

(a) 9-Şekil'de  $ALKG$  bir paralelkenardır. Dolayısıyla  $[AK]$  köşegeni  $[LG]$ 'yi ortalar. Üstelik  $AK$  bir simedyan doğrusudur. 7. Problem'den dolayı,  $\angle BAC$  açısı için  $LG$  ile  $BC$  antiparalel doğrulardır.  $BC \parallel DE$  olduğundan  $\angle DEA = \angle BCA = \angle ALG$  olup  $DEGL$  bir kirişler dörtgenidir. diyelim. Benzer şekilde  $DFHL, HFEG$  birer kirişler dörtgeni olur. Şimdi 8. Problem'den dolayı  $\{F, H, E, G, L, D\}$  noktaları çemberseldir. Böylece *birinci Lemoine Çemberi*'nin varlığını göstermiş olduk.

(b)<sup>1</sup> Bir  $XYZ$  üçgeninin alanını  $|XYZ|$  ile gösterelim. Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları ile tabanları orantılıdır.  $DE \parallel BC$  olduğundan,

$$\frac{|FBD|}{|BF|} = \frac{|KFH|}{|FH|} = \frac{|HCE|}{|HC|} \quad (1)$$

yazabiliriz. antiparalel doğrulardan dolayı  $FBD \sim ABC \sim HEC$  benzerliklerini yazabiliriz. Ayrıca paralel doğrulardan dolayı  $KFH \sim ABC$  olur. Buna göre

$$\frac{|FBD|}{|ABC|} = \frac{|HC|^2}{c^2}, \quad \frac{|HEC|}{|ABC|} = \frac{|HE|^2}{b^2}, \quad \frac{|KFH|}{|ABC|} = \frac{|FH|^2}{a^2} \quad (2)$$

olur.  $|ABC| = S$  dersek, (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\frac{|BF|}{c^2} = \frac{|FH|}{a^2} = \frac{|HC|}{b^2}$$

sonucuna ulaşırız.

<sup>1</sup>Bu kısımda [2] kaynağında verilen çözümü sunuyoruz.

10. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $A$  köşesinden çıkan simedyan üzerinde kesişen ve sırasıyla  $AB$  ile  $AC$  kenarlarına antiparalel olan doğru parçaları eşit uzunluktadır. Ayrıca, simedyan noktasından geçen üç antiparalel doğru parçasının hepsi eşit uzunluktadır.

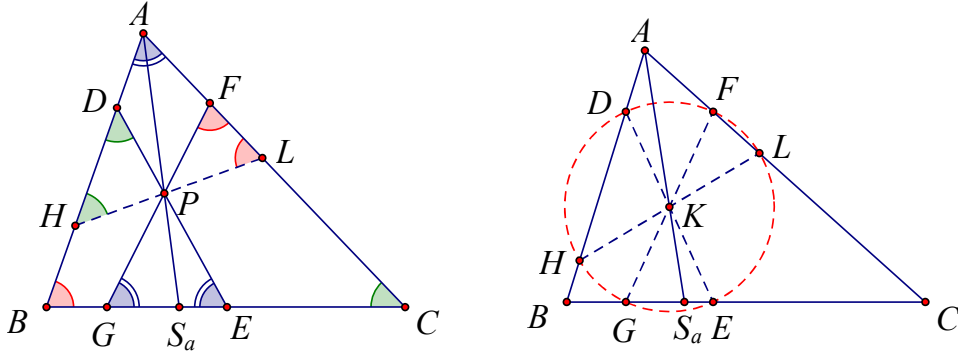
**Çözüm:**  $[AS_a]$  bir simedyan olsun. Şekildeki gibi  $P$  noktasında kesişen  $DE$ ,  $GF$  antiparalellerini çizelim. Ayrıca  $P$ 'den geçen ve  $BC$ 'ye antiparalel olan  $HL$  doğrusunu da çizelim. 7. Premlem'den dolayı  $|HP| = |PL|$ 'dir.  $ADEC$ ,  $AFGB$ ,  $BHLC$  birer kirişler dörtgeni olduğundan  $\angle AHL = \angle C = \angle ADE$  ve  $\angle CFG = \angle B = \angle ALH$  olur. Böylece  $|PD| = |PH|$  ve  $|PL| = |PF|$  olup

$$|PH| = |PD| = |PF| = |PL|$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\angle CGF = \angle A = \angle DEB$  olup

$$|PG| = |PE|$$

elde edilir. Bu eşitliklerden  $|DE| = |FG|$  sonucuna ulaşılır.



Şekil 10: 2. Lemoine çemberi

Eğer  $ABC$  üçgeninin kenarlarına antiparalel olan  $DE$ ,  $FG$ ,  $HL$  doğruları  $K$  simedyan noktasından geçiyorsa, bu halde  $|DE| = |FG| = |HL|$  elde ederiz.

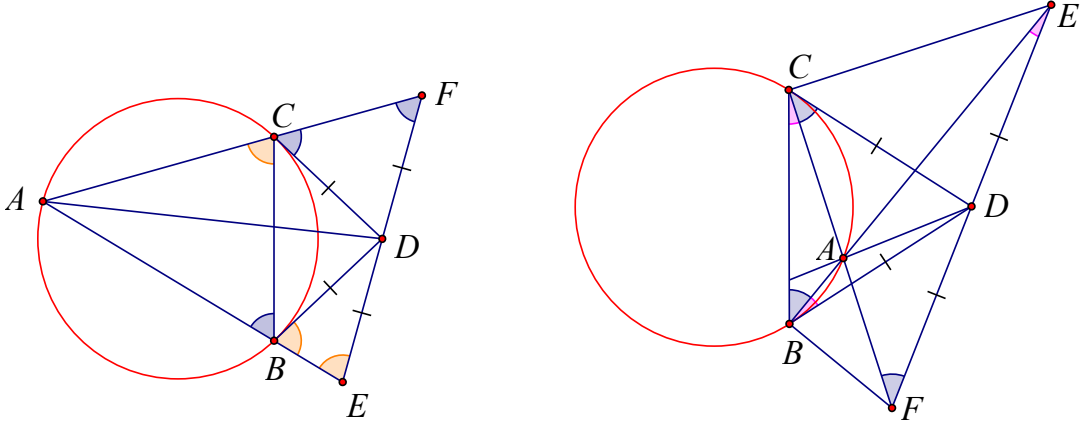
**Sonuç:** Eğer  $ABC$  üçgeninin kenarlarına antiparalel olan  $[DE]$ ,  $[FG]$ ,  $[HL]$  doğruları  $K$  simedyan noktasından geçiyorsa,  $K$  noktası bu doğru parçalarının orta noktası olur. Yani

$$|KD| = |KE| = |KF| = |KG| = |KH| = |KL|$$

eşitlikleri vardır. Böylece bu üç antiparalel doğru parçasının uç noktaları bir çember üzerindedir. Bu çembere *ikinci Lemoine çemberi* denir.

11.  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin  $B$  ve  $C$  noktalarındaki teğetleri  $D$  noktasında kesişsin.  $AD$  doğrusunun  $ABC$  üçgeninin bir simedyanı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $D$  noktasından geçen ve  $ABC$  üçgenine göre  $BC$  kenarına antiparalel olan  $EF$  doğrusunu Şekil 11a ve 11b'deki gibi çizelim. Yani  $BCFE$  bir kirişler dörtgenidir.



Şekil 11a: Dar açılı üçgende simedyan inşası

Şekil 11b: Geniş açılı üçgende simedyan inşası

Açı takibi ile

$$\angle FCD = \angle ABC = \angle CFE \quad \text{ve} \quad \angle EBD = \angle ACB = \angle BED$$

olup  $|DE| = |DB| = |DC| = |DF|$  elde edilir.  $AEF$  üçgeninde  $[AD]$  kenarortay ve  $BC$  ile  $EF$  antiparalel doğrulardır. 7. Problem'den dolayı  $AD$  doğrusu  $ABC$  üçgeninin simedyanı olur.

Şimdi, harmonik dörtgende köşegen-simedyan ilişkisine bakalım.

**Tanım:**  $ABCD$  kirişler dörtgeninde,  $B$  ve  $D$  noktalarından çizilen teğetler ve  $AC$  doğrusu aynı noktadan geçiyorsa,  $ABCD$ 'ye *harmonik dörtgen* denir.

12.  $ABCD$  kirişler dörtgeni veriliyor.  $[BD]$  köşegeninin orta noktası  $M$  ve  $AC \cap BD = E$  olsun.  $\angle BAE = \angle DAM$  ise  $\angle BCE = \angle DCM$ , yani  $AC$  doğrusu  $ABD$  üçgeninde simedyan ise,  $AC$  doğrusunun  $BCD$  üçgeninde de simedyan olur, ispatlayınız.

**Çözüm:** 11. Problem'deki simedyan inşası yöntemini göz önüne alalım.  $ABD$  ve  $BCD$  üçgenleri aynı çevrel çembere sahiptir.  $B$  ve  $D$  noktalarından bu çembere çizilen teğetler  $P$  noktasında kesişsin. O halde  $AP$  doğrusu  $ABD$  üçgeninde simedyanıdır,  $CP$  doğrusu da  $BCD$  üçgeninde simedyanıdır.  $A, E, C$  doğrusaldır.  $AC$ ,  $ABD$  üçgeninde simedyan ise  $A, E, C, P$  doğrusal olup  $AC$ ,  $BCD$  üçgeninin de simedyanı olur.

**Bazı Sonuçlar:**<sup>2</sup> 12. Problem'deki  $ABCD$  dörtgeninin bir harmonik dörtgen olduğunu anlıyoruz. Harmonik dörtgen farklı yollarla da tanımlanabilmektedir. Örneğin,  $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$  biçiminde, karşılıklı kenarların çarpımı eşit olan kirişler dörtgenine *harmonik dörtgen* denir. Bu tanımlar birbirine denktir. Yani birinden hareket ederek diğerini ispat edebiliriz.  $ABCD$  kirişler dörtgeninde  $AC$ ,  $ABD$  üçgeninin bir simedyanı olsun. Çevrel çembere  $B, D$  noktalarından çizilen teğetler  $P$  noktasında kesişsin.

- 12a Şekil'e bakalım. Teğet-kiriş açısı ve çevre açısı eşitliklerinden  $\angle PDC = \angle PAD$  ve  $\angle PBC =$

<sup>2</sup>Son iki sonuç, H. İbrahim Ayana tarafından elde edilmiştir.

$\angle PAB$  olduğundan  $PDC \sim PAD$  ve  $PBC \sim PAB$  benzerliklerini yazabiliriz. Buna göre,

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

olup  $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$  sonucuna ulaşırız.

- 12b Şekil'i göz önüne alalım.  $[DB]$  köşegeninin orta noktası  $M$  olsun.  $MEC$  üçgeninin çevrel çemberinin  $ABCD$  kirişler dörtgeninin çevrel çemberine eşit olduğunu gösterelim. 12. Problem'e göre,  $AC$  doğrusu  $ABD$  üçgeninin  $A$ 'dan geçen simedyanı olduğundan,  $AC$  aynı zamanda  $BCD$  üçgeninin de  $C$ 'den geçen simedyanıdır. Simedyan tanımı ve çevre açı eşitliklerinden

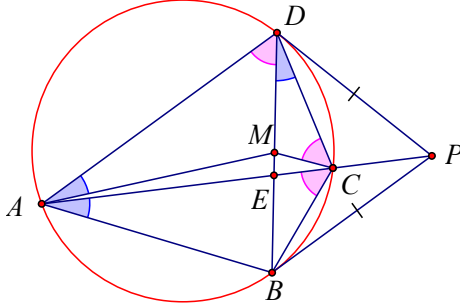
$$\angle DAM = \angle BAC = \angle BDC = x \quad \text{ve} \quad \angle DCM = \angle BCA = \angle BDA = y$$

olduğundan  $\angle ADC = \angle CME = x+y$  bulunur. Bu açı eşitliği bize,  $ACD$  ve  $CME$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin  $E$  noktasında teğet olduğunu söyler. Bu kısmı biraz açabiliriz.  $ACD$  üçgeninin çevrel çemberine  $C$  noktasında teğet olan  $\ell$  doğrusu üzerinde 12b Şekil'deki gibi bir  $T$  noktası alalım. Teğet kiriş açılarından  $\angle TCA = \angle ADC$ 'dir. O halde  $\angle TCA = \angle CME$  olup  $\ell$  doğrusunun  $CME$  üçgeninin çevrel çemberine  $C$ 'de teğet olduğunu anlarız. Her iki çevrel çember de  $\ell$  doğrusuna  $C$ 'de teğet olduğu için, çemberler de birbirine teğettir.

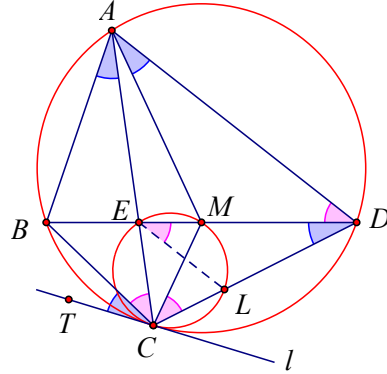
- 12b Şekil'de  $CEM$  üçgeninin çevrel çemberi  $CD$  doğrusunu  $C$  ve  $D$  noktalarında kessin.  $BCD$  üçgeninde  $[CM]$  simedyanından ve  $EMLC$ ,  $ABCD$  kirişler dörtgenlerindeki çevre açılardan

$$\angle MEL = \angle MCL = \angle BCA = \angle BDA$$

olur. Böylece  $EL \parallel AD$  sonucunu elde ederiz.



Şekil 12a: Harmonik dörtgende simedyan



Şekil 12b: Simedyan ve teğet çemberler

13.  $ABC$  üçgeninin  $B$  ve  $C$  köşelerinden geçen bir çember  $AC$ ,  $AB$  kenarlarını sırasıyla  $D$ ,  $E$  noktalarında kesiyor.  $[BC]$  ve  $[DE]$  doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla  $M$ ,  $N$ 'dir.  $\angle BAC$ 'nin açıortayı  $MN$  doğrusunu  $P$  noktasında kesiyor.

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

olduğunu gösteriniz.

(H. İbrahim Ayana)

**Çözüm:**  $\angle BAC$  referans açısı için  $BC$  ve  $DE$  antiparalel doğrulardır. 7. Problem'den dolayı,  $ABC$  üçgeninde  $AM$  kenarortay doğrusu olduğundan  $AN$  simedyan doğrusu olur. O halde

$$\angle MAB = \angle CAN \quad \text{ve} \quad \angle MAP = \angle NAP$$

eşitliklerini yazabiliriz.  $AMP$  üçgeninde  $[AP]$  iç açıortay olduğundan

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|AM|}{|AN|}$$

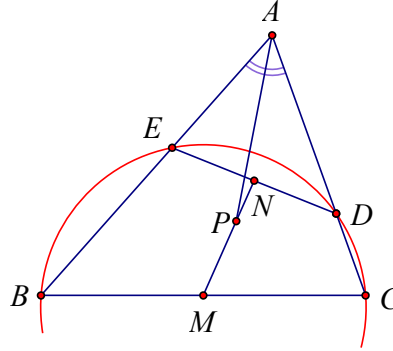
olur. Ayrıca  $ABC \sim ADE$  benzer üçgenlerinde  $[AM]$  ve  $[AN]$  eşlenik (eş görevli) kenarortaylar olup, bunların oranı da üçgenlerin benzerlik oranına eşittir. O halde

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

olup bu eşitliklerden

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

sonucuna ulaşırız.



Şekil 13: Bir simedyan-açıortay uygulaması

14.  $ABC_bC_a$ ,  $BCA_cA_b$ ,  $CAB_aB_c$  kareleri  $ABC$  üçgeninin dışına doğru çiziliyor.  $C_aC_b \cap B_aB_c = A'$ ,  $C_aC_b \cap A_bA_c = B'$ ,  $A_bA_c \cap B_aB_c = C'$  olsun.  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  doğrularının  $ABC$  üçgeninin simedyan noktasında kesiştiğini ispatlayınız.

**Çözüm:** Öncelikle  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$ ,  $CA \parallel C'A'$  olduğundan dolayı  $ABC$  ve  $A'B'C'$  üçgenlerinin homotetik olduğunu söylemeliyiz. Dolayısıyla, homotetin temel bir özelliği olarak,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  doğruları homoteti merkezi olarak isimlendirilen bir noktada kesişirler. Bu noktayı  $K$  ile gösterelim.  $ABC$  üçgeninin kenar uzunlukları  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$  olsun.  $K$  noktasının bu kenarlara olan uzaklıklarına sırasıyla  $x$ ,  $y$ ,  $z$  diyelim. Bu halde  $K$  noktasının  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$  doğrularına olan uzaklıkları sırasıyla  $x + a$ ,  $y + b$ ,  $z + c$  olur.  $KBC \sim KB'C'$  ve  $KCA \sim KC'A'$  olduğunu not edelim. Benzer üçgenlerde yükseklikler oranı, benzerlik oranına eşittir. Buna göre,

$$\frac{x}{x+a} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \quad \text{ve} \quad \frac{y}{y+b} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

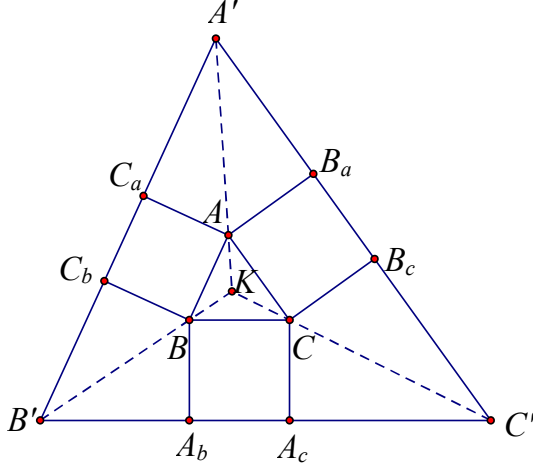
olur. Ayrıca  $ABC \sim A'B'C'$  olduğundan  $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  eşitliği vardır. Böylece

$$\frac{x}{x+a} = \frac{y}{y+b} \quad \text{veya} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

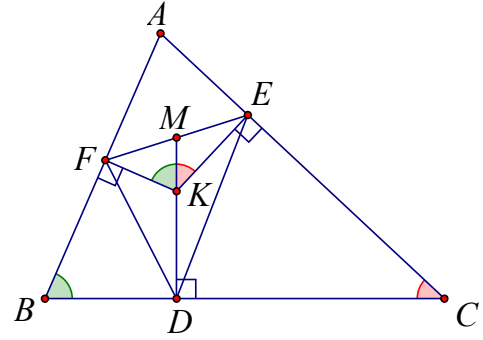
elde ederiz. Benzer şekilde  $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$  olup

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

elde ederiz. 5. Problem'den dolayı, bu eşitliklerin simedyan noktasını karakterize ettiğini biliyoruz. Yani  $K$ ,  $ABC$  üçgeninin (ayrıca  $A'B'C'$  üçgeninin) simedyan noktasıdır.



Şekil 14: Dış karelerle simedyan inşaatı



Şekil 15: Simedyanın pedal üçgeni

15. Bir  $ABC$  üçgenin simedyan noktası  $K$  olsun.  $K$ 'ya göre pedal üçgeni de  $DEF$  olsun.  $DEF$  üçgeninin ağırlık merkezinin  $K$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $K$  noktasından  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  doğrularına inilen dikme ayakları  $D$ ,  $E$ ,  $F$  olmak üzere  $DK \cap EF = M$  diyelim.  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle ACB = \beta$  olsun.  $DFFB$  ve  $DKEC$  birer kirişler dörtgeni olup  $\angle FKM = \alpha$ ,  $\angle EKM = \beta$  olur.  $EFK$  üçgeninde sinüs teoreminin bir sonucu olarak (oran lemması)

$$\frac{|FM|}{|ME|} = \frac{|KF| \cdot \sin \alpha}{|KE| \cdot \sin \beta}$$

yazılabilir. Ayrıca  $ABC$  üçgeninde sinüs teoreminden

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

yazılır. Öte yandan, 5. Problem'den

$$\frac{|KF|}{|AB|} = \frac{|KE|}{|AC|}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliklerden  $|FM| = |ME|$  elde edilir. Yani  $DK$ ,  $DEF$  üçgeninin bir kenarortayıdır. Benzer şekilde diğer kenarortaylar da  $EK$ ,  $FK$  doğruları olur. Böylelikle  $K$  noktası  $DEF$  üçgeninin ağırlık merkezi olur.

16.  $ABC$  üçgeninin  $[AB]$  ve  $[AC]$  kenarları üzerine, üçgenin dışına doğru  $BADE$  ve  $CAFG$  kareleri çiziliyor.  $DAF$  üçgeninin çevrel merkezi  $O$  olmak üzere  $OA \cap BC = S$  olsun.

$$\frac{\text{Alan}(BADE)}{\text{Alan}(CAFG)} = \frac{|BS|}{|CS|}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1 [Lokman Gökçe]:**  $O$  noktasından  $[AD]$  ve  $[AF]$  kirislerine inen dikme ayakları sırasıyla  $H, L$  olsun.  $H, L$  orta noktalar olduğundan  $|AB| = 2|AH|$  ve  $|AC| = 2|AL|$ 'dir.  $OH \parallel AB$  ve  $OL \parallel AC$  olduğundan  $\angle HOA = \angle BAS$ ,  $\angle LOA = \angle CAS$  olur.  $B$  ve  $C$  noktalarından  $OA$  doğrusuna inilen dikme ayakları sırasıyla  $T$  ve  $R$  olsun. Böylece  $OHA \sim ATB$ ,  $OLA \sim ARC$  benzerliklerini yazabiliriz.

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|AH|}{|BT|} \quad \text{ve} \quad \frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|CR|}$$

olup

$$\frac{|BT|}{|CR|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

bulunur. Ayrıca  $BTS \sim CRS$  benzerliğinden

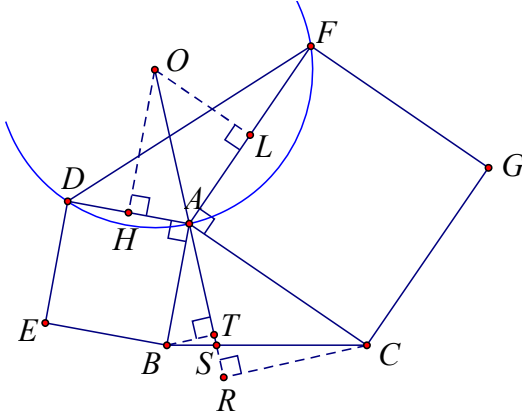
$$\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|BT|}{|CR|}$$

olur. Böylece

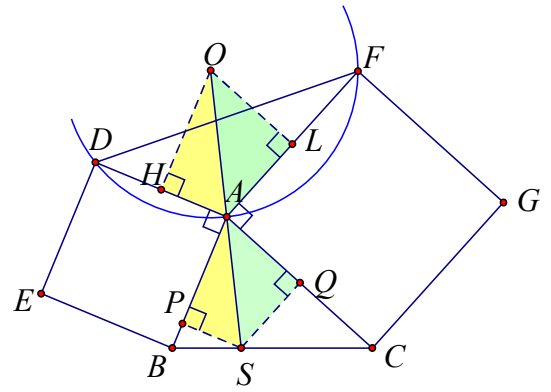
$$\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{\text{Alan}(BADE)}{\text{Alan}(CAFG)}$$

sonucuna ulaşırız.

**Not:** Bu çözüm içinde simedyan terimini kullanmadığımızı dikkat edelim. 1. Problem'den dolayı  $\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$  eşitliği ile,  $OA$  doğrusunun  $ABC$  üçgeninin bir simedyanı olduğunu anlarız.



Şekil 16a: Simedyan inşası



Şekil 16b: Simedyan inşası

**Çözüm 2 [H. İbrahim Ayana]:** Şekil 16b'deki gibi  $S$  noktasından  $AB, AC$  doğrularına dikmeler inerek  $OAH \sim ASP$  ve  $OAL \sim ASQ$  benzer üçgenlerini oluşturalım.

$$\frac{|AH|}{|SP|} = \frac{|OA|}{|AS|} = \frac{|AL|}{|SQ|}$$

ve  $|AB| = 2|AH|$ ,  $|AC| = 2|AL|$  olduğundan  $\frac{|AB|}{|SP|} = \frac{|AC|}{|SQ|}$  elde edilir. 5. Problem'den dolayı  $AS$ ,  $ABC$  üçgeninin bir simedyanı olur. 1. Problem'den dolayı  $\frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$  eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\frac{\text{Alan}(BADE)}{\text{Alan}(CAFG)} = \frac{|BS|}{|CS|}$$

sonucuna ulaşılır.

17.  $ABC$  üçgeninde  $[AS]$  simedyanını çap kabul eden çember,  $AC$  ve  $AB$  doğrularını sırasıyla ( $A$ 'dan farklı)  $D$ ,  $E$  noktalarında kesiyor.  $D$ 'den  $BC$ 'ye inilen dikme ayağı  $G$  olsun.  $DG \cap ES = F$  ise  $|ES| = |SF|$  olduğunu gösteriniz.

(H. İbrahim Ayana)

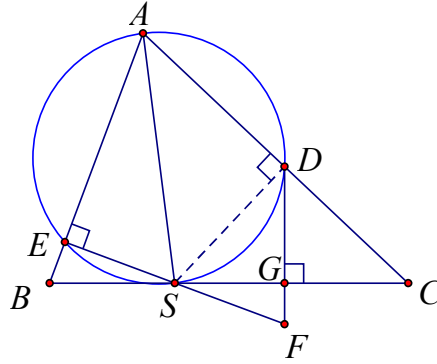
**Çözüm:**  $[AS]$  çap olduğundan  $SE \perp AB$  ve  $SD \perp AC$ 'dir. 5. Problem'den

$$\frac{|SE|}{|SD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

olur. Dik üçgenlerde açı takibi ile  $\angle SFD = \angle B$  ve  $\angle SDF = \angle C$  buluruz. Böylece  $ABC \sim SFD$  olup

$$\frac{|SF|}{|SD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

yazılır. Bu eşitliklerden  $|SE| = |SF|$  elde ederiz.



Şekil 17

18. Bir  $ABC$  üçgeninde  $AC = BC$ 'dir.  $ABC$  üçgeninin içinde,  $\angle PAB = \angle PBC$  olacak şekilde bir  $P$  noktası alınmıştır.  $M$  noktası,  $[AB]$  kenarının orta noktasıdır.

$$\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$$

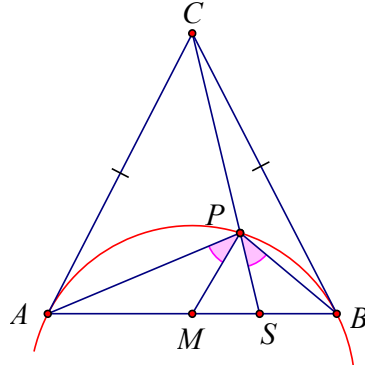
olduğunu kanıtlayınız.

(2000 Polonya, Final Turu)

**Çözüm 1:** 11. Problem'deki simedyan inşası yapısını tanıdığımız zaman bu problemi kolayca çözebiliriz. Öncelikle  $ABC$  ikizkenar üçgeninde  $\angle CAB = \angle CBA$  olduğundan  $\angle CAP = \angle ABP$  buluruz. Bu açı eşitlikleri bize,  $APB$  üçgeninin çevrel çemberinin  $A$  ve  $B$  noktalarındaki teğetlerinin  $AC$  ve  $BC$  doğruları olduğunu söyler.  $CP \cap AB = S$  olsun. Bahsettiğimiz simedyan inşası yönünden dolayı  $PS$  doğrusu  $APB$  üçgeninde bir simedyan olur. Simedyanın tanımından dolayı  $\angle BPS = \angle APM$  yazılır. Böylece

$$\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$$

eşitliğine ulaşırız.



Şekil 18: 2000 Polonya

**Not:** Bu problemde, simedyan yapısını tanıyamayan okuyucu için ikinci bir çözüm yolu sunabiliriz. Aşağıdaki çözümümüzde, simedyan inşası tekniklerinin kullanıldığına, ama simedyan teriminin kullanılmadığına dikkat ediniz.

**Çözüm 2:**  $C$  noktasından geçen ve  $\angle APB$  açısına göre  $AB$ 'ye anti paralel olan doğru çizilir. Bu doğrunun  $AP$  ve  $BP$  doğruları ile kesişimleri sırasıyla  $D$ ,  $E$  olmak üzere  $ABDE$  kirişler dörtgeni çizilir.

$$\angle CAP = \angle ABP = \angle ADC \text{ ve } \angle CBP = \angle BAP = \angle BED$$

olup  $|CD| = |CA| = |CB| = |CE|$  elde edilir. Böylece  $[PC]$ ,  $EPD$  üçgeninin kenarortayı olur.  $ABP \sim EPD$  olduğundan  $P$ 'den geçen eşlenik kenarortayların oluşturduğu açılar arasında  $\angle APM = \angle EPC$  eşitliği oluşur. ters açılardan  $\angle EPC = \angle BPS$  olduğundan

$$\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$$

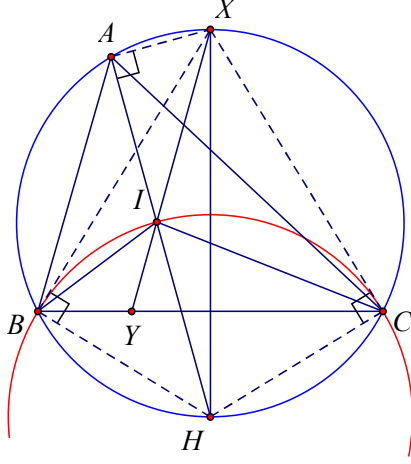
buluruz.

19. Bir  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  olarak verilsin. Üçgenin çevrel çemberi üzerinde,  $A$  noktasını içeren  $\widehat{BC}$  yayının orta noktası olacak şekilde  $X$  noktası alınıyor.  $XI \cap BC = Y$  olduğuna göre,  $IY$  doğrusunun  $BIC$  üçgeninin  $I$  köşesine ait simedyanı olduğunu ispatlayınız.

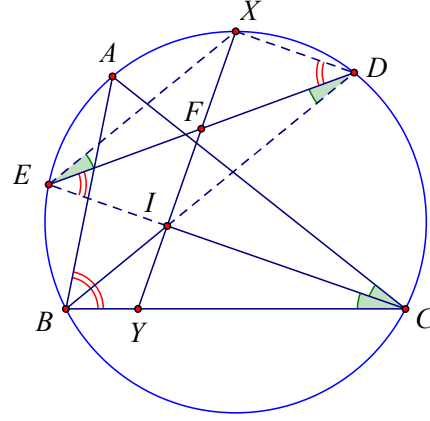
**Çözüm 1 [H. İbrahim Ayana]:**  $AI$  doğrusu,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberini  $H$  noktasında kessin. Geometride iyi bilinen bir özellik olan iç merkez lemması gereği,  $|HB| = |HI| = |HC|$  eşitliği sağlanır ve dolayısıyla  $H$ ,  $BIC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.  $[XH]$  çevrel çemberin çapı olduğundan

$$\angle HBX = \angle HCY = \angle HAX = 90^\circ$$

eşitlikleri vardır. Bu bize,  $BX$  ve  $CX$  doğrularının  $BIC$  üçgeninin sırasıyla  $B$  ve  $C$  noktalarındaki teğetleri olduğunu söyler. 18. Problem'den veya daha temel olarak 11. Problem'den dolayı  $IY$ ,  $BIC$  üçgeninin  $I$  köşesinde ait simedyan doğrusu olur.



Şekil 19a



Şekil 19b

**Çözüm 2 [Lokman Gökçe]:**  $[BI$  ve  $[CI$  ışınları çevrel çemberi sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktalarında kessin. (Şekil 19b.)  $X$ ,  $\widehat{BAC}$  yayının orta noktası olduğundan

$$\widehat{BEX} = \widehat{CDX} = \angle ABC + \angle ACB$$

olur.  $BCDE$  kirişler dörtgeninden

$$\angle EDB = \angle ECB = \angle EAB \quad \text{ve} \quad \angle DEC = \angle DBC = \angle DBA$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$2\angle XED = \widehat{XD} = \widehat{CDX} - \widehat{DC} = \angle ABC + \angle ACB - \angle ABC = \angle ACB$$

olup  $\angle XED = \angle EDB$  elde edilir. O halde  $EX \parallel ID$  olur. Benzer şekilde  $DX \parallel IE$  olur. Böylece  $EIDX$  bir paralelkenar olup köşegenler birbirini ortalar.  $XI \cap DE = F$  olmak üzere  $|EF| = |FD|$ 'dir.  $IBC$  üçgeni için  $BC$  ve  $DE$  antiparalel doğrulardır. 7. Problem'den dolayı  $[DE]$  antiparalelini ikiye bölen  $XY$  doğrusu,  $BIC$  üçgeninin bir simedyanı olur.

20.  $ABC$  üçgeninde  $B$  ve  $C$  noktalarından  $\angle A$  açısının iç açıortayına indirilen dikmeler, açıortayı sırasıyla  $P$  ve  $Q$  noktalarında kesmektedir.  $P$  noktasından  $AB$ 'ye paralel çizilen doğru ile  $Q$  noktasından  $AC$ 'ye paralel çizilen doğru  $R$  noktasında kesişiyor.  $AR$  doğrusunun,  $A$  köşesinden çıkan simedyan olduğunu kanıtlayınız [3].

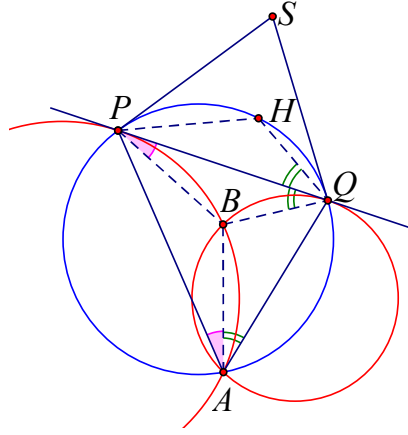
**Çözüm:**  $BP$  doğrusu  $AC$  kenar doğrusunu  $X$  noktasında kesecek şekilde uzatılırsa,  $ABP \cong APX$  eş üçgenler olur (çünkü  $AP$  hem yükseklik hem açıortaydır). Bu da  $P$ 'nin,  $[BX]$  doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir. Bu durumda,  $BCX$  üçgeninde, ( $[BC]$ 'nin orta noktası  $A'$  olmak üzere)  $[PA']$  doğru parçası iki kenarın orta noktalarını birleştirir ve dolayısıyla  $PA \parallel CX$  olur.  $QR$  doğrusu da  $AC$ 'ye (yani  $CX$ 'e) paralel olduğundan, aynı zamanda  $PA' \parallel RQ$  olur. Benzer şekilde,  $QA' \parallel RP$  olduğu gösterilebilir. Karşılıklı kenarları paralel olduğundan,  $PRQA'$  bir paralelkenardır.



**Çözüm:** 11. Problem'den dolayı,  $S$  noktasının tanımı,  $AS$  doğrusunu  $APQ$  üçgeninin  $A$  köşesine ait simedyanı yapar.  $A, S, H$  noktalarının doğrusal olduğunu göstermek için,  $AH$  doğrusunun da aynı simedyan olduğunu ispatlamak yeterlidir. Öncelikle açı takibi ile  $\angle BPQ = \angle BAP$  ve  $\angle BQP = \angle BAQ$  olduğundan  $\angle PAQ + \angle PBQ = 180^\circ$  olduğu bulunur.  $H$  noktası,  $B$ 'nin yansıması olduğundan  $\angle PHQ = \angle PBQ$ 'dur. Bu iki eşitlikten  $\angle PAQ + \angle PHQ = 180^\circ$  sonucu çıkar ki bu da  $AQHP$  dörtgeninin çembersel olduğunu gösterir. Bu çembersellik ve yansıma özelliği kullanılarak şu açı zinciri yazılabilir:

$$\angle HAP = \angle HQP = \angle BQP = \angle BAQ.$$

O halde  $\angle HAP = \angle BAQ$  bulunur. Kuvvet eksenini olan  $AB$  doğrusu, ortak teğet  $[PQ]$ 'yu ortaladığından,  $AM$  ( $M$ ,  $[PQ]$ 'nin orta nokta olmak üzere)  $APQ$  üçgeninin kenarortayıdır. Elde ettiğimiz  $\angle HAP = \angle BAQ$  eşitliği,  $AH$  doğrusunun, kenarortay  $AM$ 'nin izogonal eşleniği olduğunu kanıtlar. Bu ise  $AH$ 'nin simedyan olmasının tanımıdır.  $AS$  ve  $AH$  doğruları  $APQ$  üçgeninin aynı simedyanı olduğundan çakışıkır. Dolayısıyla  $A, S, H$  noktaları doğrusaldır.



Şekil 22: 2001 Vietnam

23.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$  kenarlarına sırasıyla  $D$ ,  $E$ ,  $F$  noktalarında teğettir.  $E$  noktasından geçen  $AB$ 'ye paralel olan doğru  $DF$ 'yi  $Q$  noktasında kessin.  $D$  noktasından geçen  $AB$ 'ye paralel olan doğru  $EF$ 'yi  $T$  noktasında kessin.  $CF$ ,  $DE$ ,  $QT$  doğrularının aynı noktadan geçtiğini ispatlayınız.

(1997 MOP)

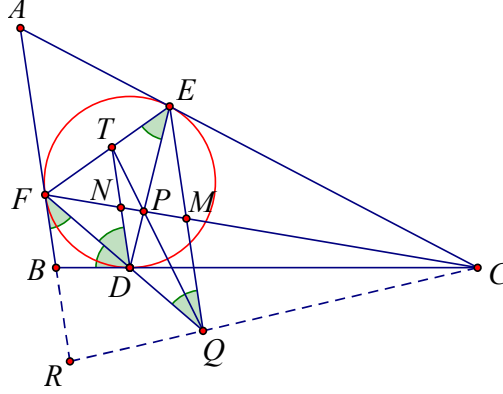
**Çözüm 1[Lokman Gökçe]:**  $ED \cap QT = P$ ,  $FP \cap EQ = M$ ,  $FP \cap TD = N$  olsun. İyi bilinen bir özellik olarak,  $TD \parallel EQ$  iken  $[TD]$ 'nin orta noktası  $N$ ,  $[EQ]$ 'nin orta noktası  $M$  olur. Bunu Ceva teoremi ile gösterebiliriz.

$$\frac{|FE|}{|ET|} \cdot \frac{|TN|}{|ND|} \cdot \frac{|DQ|}{|QF|} = 1$$

ve orantı teoreminden  $\frac{|FE|}{|ET|} = \frac{|QF|}{|DQ|}$  olduğundan  $|TN| = |ND|$ 'dir. Benzer şekilde  $|EM| = |MQ|$  olduğu gösterilebilir. O halde  $F, N, P, M$  doğrusaldır.  $DEF$  üçgeninin çevrel çemberinin  $D$  ve  $E$  noktalarındaki teğetleri (yani  $BC$  ve  $AC$  doğruları)  $C$  noktasında kesişir. 11. Problem'den dolayı  $CF$ ,  $DEF$  üçgeninin bir simedyanıdır. Bu simedyanın  $[EQ]$  doğru parçasını ikiye böldüğünü göstermek istiyoruz. 7. Problem'den dolayı,  $ED$  ve  $EQ$  doğrularının  $\angle DEF$  referans açısına göre antiparalel olduğunu göstermek yeterlidir. Parallellik ve çemberde eşit açılar ile

$$\angle EQD = \angle TDF = \angle DFB = \angle FED$$

olur.  $\angle EQD = \angle FED$  eşitliği bize  $ED$  ile  $EQ$ 'nun antiparalel olduğunu verir. Dolayısıyla  $CF$ ,  $EQ$ 'nun orta noktası olan  $M$ 'den geçer. Diğer bir ifadeyle  $CF$ ,  $DE$ ,  $QT$  doğruları  $P$  noktasından geçer.



Şekil 23: 1997 MOP

**Çözüm 2 [H. İbrahim Ayana]:** İlk çözümde olduğu gibi  $P$ ,  $M$ ,  $N$  noktalarını tanımlayarak  $F$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $M$  noktalarının doğrusal olduğunu kullanacağız. Çözümün bundan sonraki aşamasında simedyanı kullanmayacağız.  $|BF| = |DB|$ ,  $|AE| = |AF|$ ,  $|EC| = |CD|$  eşitliklerini biliyoruz.  $CQ \cap AB = R$  olsun.  $EQ \parallel AR$  olduğundan

$$\frac{|RQ|}{|QC|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

oranısı yazılır.  $BRC$  üçgeninin  $F$ ,  $D$ ,  $Q$  keseni için Menelaüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{|BF|}{|FR|} \cdot \frac{|RQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} = 1$$

olur. Bu iki eşitlikten  $|AF| = |FR|$  elde edilir. O halde  $CF$  doğrusu  $CEQ \sim CAR$  benzer üçgenlerinde aynı görevi üstlendiği için  $|EM| = |MQ|$  bulunur. Sonuç olarak,  $CF$ ,  $DE$  ve  $QT$  doğruları  $P$  noktasından geçer.

24.  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi olan  $\omega$ 'ya  $B$  ve  $C$  noktalarında çizilen teğetler  $P$  noktasında kesişiyor.  $[BC]$  kenarının orta noktası  $D$  olmak üzere,  $D$  merkezli ve  $|DA|$  yarıçaplı  $\Gamma$  çemberi,  $AB$  ve  $AC$  kenarlarını sırasıyla  $E$  ve  $F$  noktalarında kesiyor. ( $|XYZ|$  ile bir  $XYZ$  üçgeninin alanını gösterelim.) Buna göre,

$$|ABC| = |BEP| + |CFP|$$

olduğunu gösteriniz.

(H. İbrahim Ayana & Lokman Gökçe)

**Çözüm:** 11. Problem'den dolayı  $AP$ ,  $ABC$  üçgenininde bir simedyanıdır.  $\Gamma$  çemberinden ve simedyan tanımından

$$\angle DEA = \angle DAE = \angle PAE \quad \text{ve} \quad \angle DFA = \angle DAF = \angle PAB$$

eşitliklerini yazabiliriz. Ayrıca  $\omega$  çemberinde teğet-kiriş açılardan

$$\angle PBE = \angle ACB \quad \text{ve} \quad \angle PCF = \angle ABC$$

elde edilir. Bu açı eşitliklerine göre  $APB \sim FCD$  olup

$$\frac{|AB|}{|FC|} = \frac{|BP|}{|CD|}$$

orantısı yazılır.  $|BP| = |CP|$  ve  $\angle FCP = \angle ABC$  olduğundan

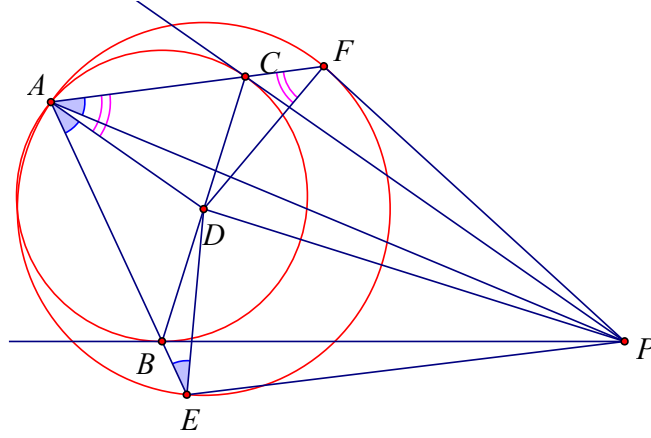
$$|CF| \cdot |CP| \cdot \sin \angle FCP = |AB| \cdot |BD| \cdot \sin \angle ABC$$

olup  $|ABD| = |CFP|$  elde edilir.

Benzer fikirle  $APC \sim EBD$  benzerliği kullanılarak  $|ACD| = |BEP|$  alan eşitliği yazılır. Böylelikle,

$$|ABC| = |BEP| + |CFP|$$

sonucuna ulaşılır.



Şekil 24: Bir Simedyan-alan uygulaması

### Bazı Sonuçlar:

- Bu çözüme göre  $|BEP| = |CFP|$  eşitliğine de ulaşırız. Bu eşitliği göstermenin doğrudan bir yolunu daha sunabiliriz. Açı takibiyle,  $CP$  ve  $DF$  doğruları arasındaki bir açı ile  $BP$  ve  $ED$  doğruları arasındaki bir açının eşit olduğu görülebilir.  $\Gamma$  çemberinden  $|DF| = |DE|$ 'dir. Ayrıca  $|PC| = |PB|$  olduğundan

$$|CP| \cdot |DF| \cdot \sin(\angle CP, DF) = |BP| \cdot |DE| \cdot \sin(\angle BP, DE)$$

olup  $|CFPD| = |BDPE|$  elde edilir. Eş üçgenlerden  $|PDC| = |PDB|$  olur. Bu alan eşitliklerinin farkından  $|CFP| = |BEP|$  bulunur.

- Ayrıca  $|AC| \cdot |CF| = |AB| \cdot |BE|$  eşitliği de vardır. Bunu göstermenin kolay bir yolu şöyledir:  $|DB| = |DC|$  olduğundan  $B$  ve  $C$  noktalarının  $\Gamma$  çemberine göre kuvvetleri eşittir. Dolayısıyla

$$|AC| \cdot |CF| = |AB| \cdot |BE|$$

elde edilir.

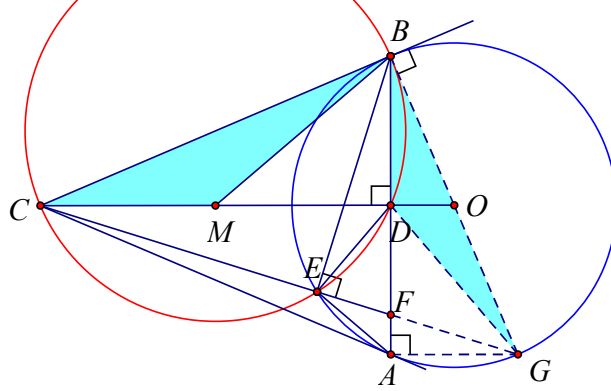
25.  $O$  merkezli çemberin dışındaki bir  $C$  noktasından çizilen teğetler çembere  $A$  ve  $B$  noktalarında teğettirler.  $AB$ 'nin orta noktası  $D$  olmak üzere,  $BDC$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $O$  merkezli çember  $E$ 'de kesişmektedirler. Buna göre,  $BE$ 'nin  $BCD$  üçgeninin simedyanı olduğunu ispatlayınız.

(H. İbrahim Ayana)

**Çözüm 1 [Lokman Gökçe]:**  $CE$  doğrusu,  $AB$ 'yi  $F$  noktasında ve  $O$  merkezli çemberi ikinci kez  $G$  noktasında kessin.  $[CD]$ 'nin orta noktası  $M$  olsun. Çemberde aynı yayı gören açılardan  $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$  olup  $\angle GAB = \angle GEB = 90^\circ$  yazılır. O halde  $[BG]$  çap olup,  $O$  noktası  $[BG]$  üzerindedir. 12. Problem'den dolayı  $CG$  doğrusu hem  $AEB$  üçgeninde hem de  $AGB$  üçgeninde bir simedyanıdır. Teğet kiriş açısı ve çevre açısı eşitliği ile birlikte

$$\angle ABE = \angle AGE = \angle BGD$$

olur.  $BCO$  dik üçgen olduğundan  $\angle DBO = \angle BCD$ 'dir. Öte yandan,  $BCD \sim GBA$  benzer üçgenlerinde  $[BM]$  ve  $[GD]$  eşlenik (eş görevli) kenarortaylar olduğundan  $BCM \sim GBD$  olur. Buradan  $\angle CBM = \angle BGD$  yazılır. Bu açı eşitliklerinden  $\angle CBM = \angle ABE$  elde edilir. Sonuç olarak  $BE$ ,  $BCD$  üçgeninde bir simedyanıdır.



Şekil 25

**Çözüm 2 [H. İbrahim Ayana]:**  $CEDB$  kirişler dörtgeni olduğundan  $\angle BCE = \angle IDA$  olur. Teğet-kiriş açısı ve çevre açısı ilişkisinden  $\angle CBE = \angle BAE$  olur. Bu durumda,  $CBE \sim \triangle DAE$  elde ederiz. Benzerlik oranını yazarsak:

$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|DE|}.$$

Buradan  $|BC| \cdot |DE| = |EC| \cdot |AD|$  veya  $|BC| \cdot |DE| = |EC| \cdot |BD|$  bulunur. Bu eşitlik bize  $BCDE$  dörtgeninin harmonik dörtgen olduğunu gösterir. 12. Problem'den dolayı  $BE$ ,  $BCD$  üçgeninin simedyanıdır.

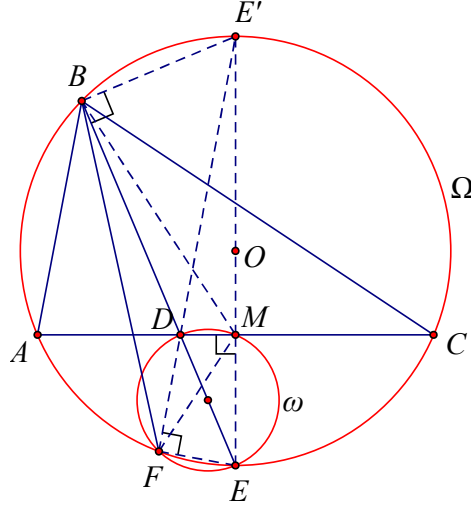
26. Bir  $ABC$  üçgeni ve bu üçgenin  $BD$  iç açıortayı verilsin ( $D \in AC$ ).  $BD$  doğrusu,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $\Omega$ 'yı  $B$  ve  $E$  noktalarında kesmektedir. Çapı  $[DE]$  olan  $\omega$  çemberi,  $\Omega$  çemberini tekrar  $F$  noktasında kesmektedir.  $BF$ 'nin  $ABC$  üçgeninin simedyanı olduğunu kanıtlayınız.

(2009 Rusya)

**Çözüm [Lokman Gökçe]:**  $E$  noktası,  $\Omega$  çemberinde  $AC$  yayının orta noktasıdır.  $[AC]$  kenarının orta noktası  $M$ ,  $\Omega$  çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $E, M, O$  doğrusal ve  $OE \perp AC$  olduğu iyi bilinen özelliklerdir.  $[EE']$ ,  $\Omega$  çemberinin bir çapı olsun.  $\angle EFE' = 90^\circ$  ve  $\angle EBE' = 90^\circ$  olur. Böylece  $\angle EFD = \angle EFE'$  olup  $F, D, E'$  noktalarının doğrusal olduğu anlaşılır.  $\omega$  çemberinde  $[DE]$  çap olduğundan  $\angle EFD = 90^\circ$ 'dir. Ayrıca  $\angle DME = 90^\circ$  olduğundan  $M$  noktası  $\omega$  çemberi üzerindedir. Ayrıca  $\angle DBE' = \angle DME' = 90^\circ$  olduğundan  $DME'B$  bir kirişler dörtgenidir. Çemberlerde çevre açı eşitliklerinden

$$\angle DBM = \angle DE'M = \angle FE'E = \angle FBE$$

olup  $\angle DBM = \angle FBE$  elde edilir. Yani  $BF$ ,  $ABC$  üçgeninin bir simedyanıdır.



Şekil 26: 2009 Rusya

**Bir Sonuç:**  $D$  noktası,  $BMF$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir. Bunu görmek için çemberde çevre açı eşitliklerinden yararlanabiliriz.

$$\angle BMD = \angle BE'D = \angle BE'F = \angle BEF = \angle FMD$$

olup  $\angle BMD = \angle FMD$  bulunur. Ayrıca 26. Problem'den,  $\angle DBM = \angle FBE$  olduğunu biliyoruz. Böylece  $D$  noktası  $BMF$  üçgeninde iç açıortayların kesim noktasıdır.

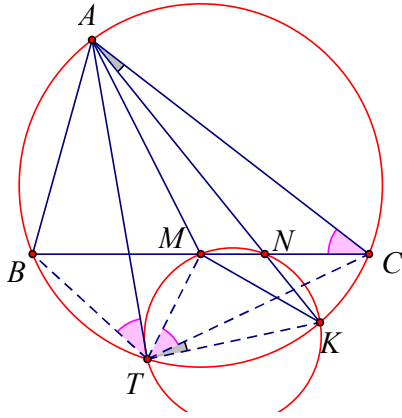
27.  $\Gamma$  çevrel çemberine sahip  $ABC$  üçgeninde  $[BC]$  kenarının orta noktası  $M$ 'dir.  $[BC]$  kenarı üzerinden keyfi bir  $N$  noktası alınıyor.  $AN$  doğrusu  $\Gamma$  çemberini  $A$  ve  $K$  noktalarında kesiyor.  $MNK$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $\Gamma$  çemberi  $T$  ve  $K$  noktalarında kesişiyor.  $AT$  doğrusunun  $ABC$  üçgeninde bir simedyan olduğunu ispatlayınız.

(H. İbrahim Ayana & Kerem Karaman)

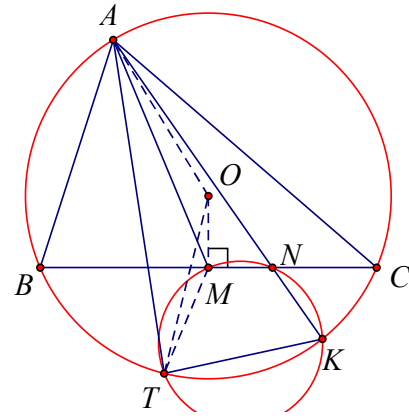
**Çözüm:**  $\Gamma$  çemberinde çevre açılarından  $\angle KAN = \angle KTC = x$  ve  $\angle ACB = \angle ATB = y$  yazabiliriz.  $\angle ANM = x + y$  olur.  $MNKT$  kirişler dörtgeninden  $\angle KTM = \angle ANM = x + y$ 'dir. Böylece

$$\angle CTM = \angle KTM - \angle KTC = (x + y) - x = y$$

olup  $\angle CTM = \angle ATB$  elde edilir. O halde  $TA$  doğrusu  $BCT$  üçgeninde bir simedyanıdır. 12. Problem'den dolayı  $TA$  doğrusu  $ABC$  üçgeninin de bir simedyanı olur.



Şekil 27a



Şekil 27b

**Bazı Sonuçlar:**<sup>3</sup> 27b Şekil'de  $\Gamma$  çemberinin merkezi  $O$  olsun.

- $A, O, M, T$  noktalarının çemberselliğini gösterelim.  $OM \perp BC$ 'dir.  $\angle AOT = 2\angle AKT = 2\alpha$  diyebiliriz.  $TKNM$  kirişler dörtgeninden  $\angle BMT = \angle NKT = \alpha$  olduğundan  $\angle OMT = 90^\circ + \alpha$  bulunur.  $AOT$  ikizkenar üçgeninde  $\angle TAO = \angle ATO = 90^\circ - \alpha$  olur.  $\angle OMT + \angle TAO = 180^\circ$  olduğundan  $A, O, M, T$  noktalarının çembersel olduğunu anlarız.
- $AM$  doğrusu  $\Gamma$  çemberini  $A$  ve  $L$  noktalarında kessin.  $|MT| = |ML|$  eşitliği vardır. Bunun için önce açı takibi ile  $\angle AMB = \angle BMT$  olduğu gösterilebilir. Sonra  $\widehat{BT} = \widehat{CL}$  eşitliğinden  $TL \parallel BC$  bulunur. Buradan  $|MT| = |ML|$  eşitliğine ulaşırız.

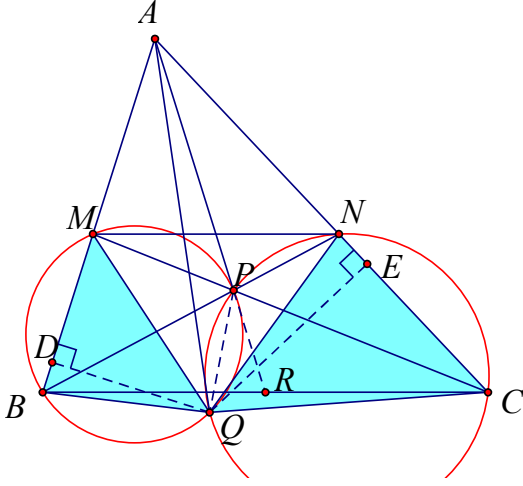
28.  $ABC$  üçgeninin  $BC$  kenar doğrusuna paralel olan ve  $AB$ 'yi  $M$  noktasında,  $AC$ 'yi ise  $N$  noktasında kesen bir  $MN$  doğrusu alalım.  $BN$  ve  $CM$  doğruları  $P$  noktasında kesişsin.  $BMP$  ve  $CNP$  üçgenlerinin çevrel çemberleri, birbirinden farklı iki nokta olan  $P$  ve  $Q$ 'da kesiştiğine göre,  $\angle CAP = \angle BAQ$  olduğunu ispatlayınız.

<sup>3</sup>Bu sonuçlar, H. İbrahim Ayana tarafından gözlemlenmiştir.

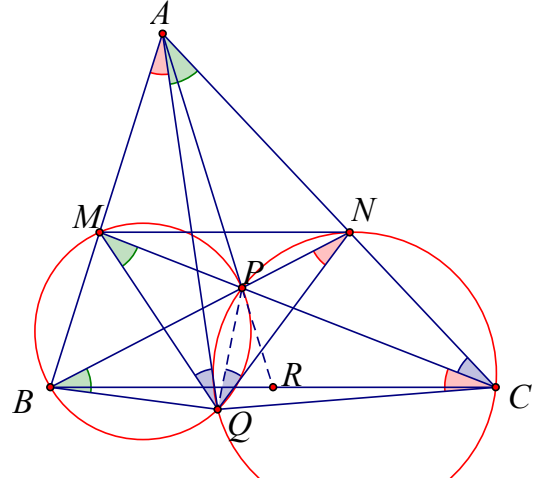
**Çözüm 1:**<sup>4</sup> Öncelikle  $AP \cap BC = R$  diyelim. İyi bilinen bir özellik olarak  $R$ ,  $[BC]$ 'nin orta noktasıdır. Bunu göstereyim. Ceva teoreminden  $\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BR|}{|RC|} \cdot \frac{|CN|}{|NE|} = 1$ 'dir.  $MN \parallel BC$  verildiğinden  $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NC|}$  orantısı vardır. Bunu Ceva eşitliğinde yazarsak  $|BR| = |RC|$  elde ederiz.  $Q$  noktasından  $AB$ ,  $AC$  doğrularına inen dikme ayakları sırasıyla  $D$  ve  $E$  olsun.  $BQPM$  ve  $QPNC$  birer kirişler dörtgeni olduğundan  $\angle BQM = \angle BPM = \angle CPN = \angle CQN$  ve  $\angle MBQ = \angle QPC = \angle QNC$  açı eşitliklerini buluruz. Dolayısıyla  $QBM \sim QNC$  (açı-açı-açı) benzerliği vardır. Benzer üçgenlerin yükseklikleri oranı benzerlik oranına eşit olduğundan  $\frac{|QD|}{|QE|} = \frac{|BM|}{|CN|}$  olur.  $MN \parallel BC$  olduğundan  $\frac{|BM|}{|CN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$  yazılır. Böylece

$$\frac{|QD|}{|QE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

elde edilir. 5. Problem'den dolayı  $AQ$ ,  $ABC$  üçgeninin bir simedyanı olur.  $[AR]$  kenarortay olduğundan  $\angle CAP = \angle BAQ$  sonucuna ulaşırız.



Şekil 28a: Simedyan uygulaması



Şekil 28b: Steiner-Miquel uygulaması

**Çözüm 2 [Ahmet Çetin]:** Önceki çözümden,  $ABC$  üçgeninde  $AP$ 'nin bir kenarortay olduğunu biliyoruz. Şekil 28b'yi takip edelim.  $BMPQ$  ve  $CNPQ$  birer kirişler dörtgeni olduğundan

$$\angle NCQ = \angle QPB = \angle QMB$$

olup  $ACQM$  bir kirişler dörtgenidir. Benzer şekilde  $ANQB$  de kirişler dörtgenidir. Bu çembersellikleri şöyle de açıklayabiliriz:  $AB$ ,  $AC$ ,  $BN$ ,  $CM$  doğrularının oluşturduğu tam dörtgende Steiner-Miquel teoremine göre  $BPM$ ,  $CNP$ ,  $BAN$ ,  $CAM$  üçgenlerinin çevrel çemberleri aynı noktadan ( $Q$  Miquel noktasından) geçer. Bu kirişler dörtgenlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \angle QAC &= \angle QMC \\ \angle PQN &= \angle ACM = \angle AQM \end{aligned}$$

<sup>4</sup>[4] kaynağında sunulan çözüm paylaşılmıştır.

açı eşitliklerini yazabiliriz. Böylece  $QMP \sim QAN$  buluruz.  $MN \parallel BC$  olduğundan  $AMN \sim ABC$  ve  $PMN \sim PCB$  elde ederiz. Bu benzerliklerden

$$\frac{|QA|}{|QM|} = \frac{|AN|}{|MP|} \quad \text{ve} \quad \frac{|CA|}{|AN|} = \frac{|CB|}{|MN|} = \frac{|CP|}{|MP|}$$

olur. Bu oranlardan

$$\frac{|QA|}{|QM|} = \frac{|CA|}{|CP|}$$

elde ederiz. Bu bize  $MQA \sim PCA$  (kenar-açı-kenar) benzerliğini verir.  $\angle CAP = \angle BAQ$  olur.

29.  $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$  koşulunu sağlayan bir  $ABCD$  kirişler dörtgeni verilsin.  $ABCD$ 'nin köşegenleri  $E$  noktasında kesişmektedir.  $[AB]$  kenarı üzerinde  $\angle APD = \angle BPC$  olacak şekilde bir  $P$  noktası alınsın.  $PE$  doğrusunun  $[CD]$  kenarını ortaladığını gösteriniz.

(2019 USAMO)

**Çözüm 1:**<sup>5</sup> Öncelikle, verilen  $\angle APD = \angle BPC$  açı eşitliğini sağlayan  $P$  noktasının biricik olduğunu gösterelim.  $P$  noktasını  $A$ 'ya doğru yaklaştırırken  $\angle APD$  büyürken  $\angle BPC$  küçülür.  $P$ 'yi  $B$ 'ye doğru yaklaştırırken bu defa  $\angle APD$  küçülürken  $\angle BPC$  büyür. Dolayısıyla, tek değişkenli sürekli iki fonksiyondan biri artarken diğeri azalıyor, kesişim noktası (eşit oldukları nokta) varsa bu nokta bir tanedir. Bu gerçeği geometrik olarak da gösterebiliriz.  $C$  noktasının  $AB$  doğrusuna göre yansıması  $C'$  olsun.  $\angle BPC' = \angle BPC = \angle DPA$  olduğundan  $C', P, D$  noktaları doğrusal olur. Yani  $P$  noktasının yeri  $C'D$  ve  $AB$  doğrularının kesişimi olur. Çözümün bundan sonraki aşamasında, bu biricik  $P$  noktasının yeri için çok iyi bir tahmin yapacağız. Çözümün en beklenmedik ve hayal etmesi zorlu kısmı bu aşaması olabilir.  $[AB]$  kenarı üzerinde bir  $P'$  noktasını  $|AP'| \cdot |AB| = |AD|^2$  ve  $|BP'| \cdot |AB| = |BC|^2$  eşitliklerini sağlayacak şekilde alalım. Bize verilen  $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$  eşitliğinden dolayı böyle bir  $P'$  noktası seçebileceğimizi anlıyoruz. Dolayısıyla bu yeni eşitlikler  $BP'C \sim BCA$  ve  $DAB \sim P'AD$  (kenar-açı-kenar) benzerliklerini üretir. Benzer üçgenlerdeki eş açılardan ve kirişler dörtgeninde çevre açılardan

$$\angle AP'D = \angle ADB = \angle ACB = \angle BP'C$$

elde ederiz.  $\angle AP'D = \angle BP'C$  yalnız bir noktada sağlanıyor. Bu nedenle  $P' = P$  olmalıdır.

$$\angle APD = \angle ADB = \angle ACB = \angle BPC$$

yazabiliriz.  $ADE \sim BCE$  olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|BE|} &\implies \frac{|AD|^2}{|BC|^2} = \frac{|AE|^2}{|BE|^2} \\ &\implies \frac{|AP| \cdot |AB|}{|BP| \cdot |AB|} = \frac{|AE|^2}{|BE|^2} \\ &\implies \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AE|^2}{|BE|^2} \end{aligned}$$

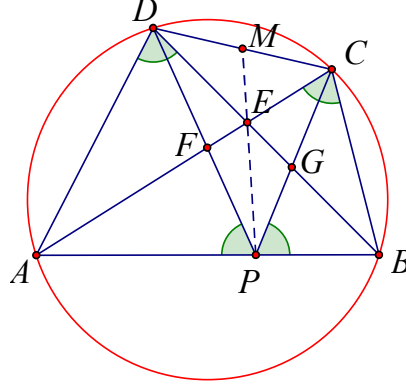
elde ederiz. Bu ise 1. Problem'den dolayı  $AEP$  üçgeninde  $EP$  doğrusunun simedyan olduğunu gösterir.  $AEF$  üçgenine göre  $AB$  ve  $CD$  doğruları antiparalel olduğundan 7. Problem'den dolayı  $EP$  simedyan doğrusu  $[CD]$  kenarını iki eş parçaya böler.

<sup>5</sup>[5] kaynağında sunulan çözümlere daha detaylı açıklamalar vererek ve hafif değişiklikler yaparak paylaştık.

**Çözüm 2:** Önceki çözümde olduğu gibi

$$\angle APD = \angle ADB = \angle ACB = \angle BPC$$

açı eşitliklerini yazalım.  $AC \cap DP = F$  ve  $BD \cap CP = G$  olsun.



Şekil 29: 2019 USAMO

Bu halde  $APGD$  ve  $BCFP$  birer kirişler dörtgeni olur. Buradan

$$180^\circ - \angle AFB = \angle BFC = \angle BPC = \angle DPA = \angle DGA = 180^\circ - \angle AGB$$

olup  $\angle AFB = \angle AGB$  elde edilir.  $AFGB$  bir kirişler dörtgeni olup  $FG \parallel CD$  bulunur.  $\frac{|DF|}{|FP|} = \frac{|GC|}{|PG|}$  eşitliği vardır.  $PE \cap CD = M$  olmak üzere  $CDP$  üçgeninde Ceva teoremi uygulanırsa

$$\frac{|CM|}{|MD|} \cdot \frac{|DF|}{|FP|} \cdot \frac{|PG|}{|GC|} = 1$$

olup  $|CM| = |MD|$  elde edilir.

## Ek A

# Kaynakça

- [1] H. S. M. Coxeter ve S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1967.
- [2] Ion Patrascu ve Florentin Smarandache. *Complements to Classic Topics of Circles Geometry*. Brussels: Pons Editions, 2016.
- [3] Ross Honsberger. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. New Mathematical Library 37. The Mathematical Association of America, 1995.
- [4] Alexander Bogomolny. *Symmedian and Antiparallel*. Eriřim Tarihi: 4 Eylül 2025. URL: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/symmedians.shtml> (eriřim tarihi 04/09/2025).
- [5] Evan Chen. *Problems*. Eriřim Tarihi: 4 Eylül 2025. URL: <https://web.evanchen.cc/problems.html> (eriřim tarihi 04/09/2025).
- [6] Roger A. Johnson. *Advanced Euclidean Geometry*. İlk olarak 1929'da Houghton Mifflin tarafından 'Modern Geometry' adıyla yayımlanmıştır. New York: Dover Publications, 1960.