Diyafont Denklemler ve Çözümleri

İbrahim Atakan Çiçek / Geomania.org

1 Çözümler

Bu çalışmayı yapabilmemde yardımcı olan herkese öncelikle çok teşekkür ediyorum. Özellikle Diyafont Denklemler , Rasyonel ifadelerin tam sayı olması , tarzı konular ve bu konularla ilgili karşılaştığım tüm teoremleri ve ispatlarını, uygulamalarını içeren ve büyük çoğunluğu Lise Matematik Olimpiyatlarına yönelik olacak şekilde kitap hazırlamaya başladım. Bunu da 2026 yılı başına kadar tamamlama hayalim var. Umarım bu çalışma da Matematik Olimpiyatlarına hazırlananlar için faydalı olur. (İbrahim Atakan Çiçek) ..

1. **Soru.** Pozitif tamsayılar $x < y < z$ için

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = xyz + 27$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklemi

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 81$$

şeklinde yazalım. Çarpanlarına ayırarak

$$(x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 81$$

şeklinde yazabiliriz. $x < y < z$ ve x, y, z pozitif tam sayılar olduğundan $x + y + z \geq 6$ olmalıdır. $x + y + z \mid 81$ olduğundan $x + y + z \in \{9, 27, 81\}$ olmalıdır.

a1) $x + y + z = 9$ için $xy + xz + yz = 24$ olur.

a2) $x + y + z = 27$ için $xy + xz + yz = 242$ olur.

a3) $x + y + z = 81$ olursa $xy + xz + yz \notin \mathbb{Z}$ olur. Bu durumda $a3$ olamaz.

$x < y$ olduğundan $x - y < 0$ olduğunu aklımızda tutalım.

a) $x + y + z = 9$ ve $xy + xz + yz = 24$ için

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

formülünü kullanalım.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 - 48 = 33$$

olur ve buradan $z \leq 5$ elde edilir.

Eğer $x = y = z$ olsaydı bile $3z = 9$ olur, bu nedenle $z > 3$ olmalıdır. Yani $z \in \{4, 5\}$ olmalıdır.

1) $z = 4$ ise $x + y = 5$ olur.

$$(x + y)z + xy = 24 \Rightarrow 5 \cdot 4 + xy = 24 \Rightarrow xy = 4$$

Buradan

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x - y = -3$$

elde edilir. Buradan $(x, y, z) = (1, 4, 4)$ çözümü gelir ancak $x < y < z$ sağlanmaz.

2) $z = 5$ ise $x + y = 4$ olur.

$$(x + y)z + xy = 24 \Rightarrow 4 \cdot 5 + xy = 24 \Rightarrow xy = 4$$

Bu durumda

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = y$$

elde edilir ve bu $x < y$ ile çelişir.

b) $x + y + z = 27$ ve $xy + xz + yz = 242$ için

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 729 - 484 = 245$$

elde edilir. Bu durumda $z \leq 15$ olmalıdır.

$x = y = z$ olsaydı $3z = 27 \Rightarrow z = 9$ olurdu, bu nedenle $z > 9$ olmalıdır.

Yani $z \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ olabilir.

$$\text{Sistem 1:} \quad \begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 72 \\ z = 10 \end{cases} \qquad \text{Sistem 2:} \quad \begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 66 \\ z = 11 \end{cases}$$

Sistem 2 için:

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 256 - 264 = -8$$

negatif olduğundan tam sayı çözüm yoktur.

Geriye kalan sistemlerde

$$(x + y)^2 \leq 225 \quad \text{ve} \quad -4xy \leq -240$$

olduğundan

$$(x - y)^2 \leq 225 - 240 = -15$$

yani $(x - y)^2 \leq 0$ çelişkisi ortaya çıkar.

Sistem 1'i çözelim:

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 289 - 288 = 1 \Rightarrow x - y = -1$$

çünkü $x < y$.

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = -1 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 8, \quad y = 9, \quad z = 10$$

Denklem sisteminin çözümü, orijinal denklemin çözümüdür ve

$$\boxed{(x, y, z) = (8, 9, 10)}$$

olarak bulunur.

2. **Soru.** n pozitif tam sayısı için n^4+3n^2+1 sayısının hiçbir zaman bir tam kare olmadığını gösteriniz. (UMO 2. Aşama 1992)

   Çözüm 1 (Metin Can Aydemir):
   $t^2 = n^4 + 3n^2 + 1$ olsun.

$$\begin{aligned} 4t^2 &= 4n^4 + 12n^2 + 4 \\ &= (2n^2+3)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2n^2+3)^2 - (2t)^2 = 5 \Rightarrow (2n^2 - 2t + 3)(2n^2 + 2t + 3) = 5$$

   Çarpanların toplamı $4n^2+6$ olduğundan sadece $1 \cdot 5$ sağlar fakat bu da $n = 0$ olur, yani hiçbir pozitif n için tam kare olamaz.

   Çözüm 2:
   Bu soruyu ben de klasik yöntemle çözüme kavuşturayım. $n \geq 1$ için

$$(n^2+1)^2 < n^4 + 3n^2 + 1 < (n^2+2)^2$$

   olduğundan bu ifade bir tam kare olamaz. $n = 0$ olmalıdır. Fakat n pozitif tam sayı olduğu belirtilmiştir.

3. **Soru.** $y^2 = x^3 + 7$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

   1. Çözüm (Hüseyin Yiğit Emekçi):
   Eşitliği

$$y^2 + 1 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

   şeklinde yazalım. Denklem $\pmod 4$'te incelendiğinde $x \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır. $x + 2 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $p \mid (x+2)$ olmasını sağlayan bir $p = 4k+3$ asalı mevcuttur. Dolayısıyla $p \mid y^2 + 1$ olmalıdır, fakat -1 ifadesi $p = 4k+3$ asalı için bir karekalan değildir. Eşitliğin çözümü yoktur.

   2. Çözüm:
   Denklemin her iki tarafına 1 ekleyip denklemi düzenleyelim:

$$y^2 + 1 = x^3 + 8$$

   Şimdi y^2+1 için geçerli olan özellikleri bulalım:

   - $y = 2k$ olursa $\Rightarrow y^2 + 1 \equiv 1 \pmod 4$
   - $y = 2k+1$ olursa $\Rightarrow y^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ (1)

   Şimdi y'nin 2 dışında asal çarpanlarının tamamının $4k+1$ formunda olduğunu gösterelim. (2)
   $p \mid y^2 + 1$ olsun. O halde $y^2 \equiv -1 \pmod p$ ve dolayısıyla

$$y^4 \equiv 1 \pmod p$$

   $p \mid y^2 + 1$ olduğundan $(y, p) = 1$'dir. Fermat teoreminden:

$$y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

   Buradan 4'ün, $p-1$'in böleni olması gerektiği görülür. Yani $4 \mid (p-1)$ elde edilir.
   Şimdi sorumuza geri dönelim.

- $x = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda:

$$y^2 + 1 = (2k + 2)(4k^2 - 4k + 4)$$

olur ve (1) ile çelişir.

- $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda:

$$x^2 - 2x + 4 \equiv 3 \pmod 4$$

olacağından ve (2) nedeniyle, bu da mümkün değildir.

Dolayısıyla tam sayılarda çözümü yoktur.

4. **Soru.** $k! + 48 = 48 \cdot (k + 1)^m$ olacak şekilde k ve m negatif olmayan tam sayılarının bulunmadığını gösteriniz. (Kanada Matematik Olimpiyatı)

Çözüm.

Verilen denklemin k ve m negatif olmayan tam sayıları için çözümü olduğunu kabul edelim.

$k! \equiv 0 \pmod{48}$ olması gerektiği barizdir. Bu nedenle $k \geq 6$ olur.

Denklem şu şekilde yazılabilir:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (k - 1) \cdot k + 1 = (k + 1)^m$$

$(k + 1)^m$ sayısının asal çarpanlarına ayrılıp ayrılamayacağını araştıralım.

$k + 1$ bileşik sayı olsun ve asal bölenlerinden biri p olsun. $p \mid (k + 1)$ olduğundan ve $p = k + 1$ olamayacağından $p < k + 1$, yani $p \leq k$ elde edilir.

Şimdi, sol tarafın tek olduğunu göstermek için $k \geq 8$ olduğunu gösterelim.

- $k = 6$ için: $\dfrac{720 + 48}{48} = 16 = 7^m$ olur, çözümsüzdür.
- $k = 7$ için: $\dfrac{5040 + 48}{48} = 106 = 8^m$ olur, çözümsüzdür.

Dolayısıyla $k \geq 8$ olmalıdır.

Buradan p'nin tek sayı olduğu ve k'dan küçük eşit olduğu da açık olduğundan, $p \mid 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (k-1) \cdot k$ ve $p \mid (k + 1)^m$ olduğundan,

$$p \mid (k + 1)^m - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (k - 1) \cdot k = 1$$

elde edilir, bu da çelişkidir. Öyleyse $k + 1$ bir asal sayıdır.

Wilson Teoremi'nden $k! \equiv (p - 1)! \equiv -1 \pmod p$ olur. Bu da $p \mid k! + 1$ anlamına gelir.

Başlangıçtaki denklem

$$k! + 48 = 48 \cdot p^m$$

şeklinde idi. Bunu şu şekilde düzenleyelim:

$$47 = 48 \cdot p^m - k! - 1 \Rightarrow p \mid 47$$

elde edilir. Buradan $p = 47$ olduğunu buluruz.

Şimdi denklemi $p = 47$ için yazalım:

$$46! + 48 = 48 \cdot 47^m \Rightarrow 46! = 48 \cdot (47^m - 1)$$

46! ifadesinin asal bölenlerinden, 48 ile aralarında asal olacak şekilde 13 ve 17 seçilebilir.

Fermat Teoremi gereği:

$$47^m \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{ve} \quad 47^m \equiv 1 \pmod{17}$$

olabilmesi için $m \geq 48$ olmalıdır.

Bu durumda:

$$48 \cdot 47^m \geq 48 \cdot 47^{48} > 46! + 48$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla bu denklemin tam sayı çözümü olamaz.

5. **Soru.** $2^m - 3^n = 7$ olacak şekilde tüm (m, n) ikililerini bulunuz. (Avusturya-Polonya Matematik Olimpiyatı 1993)

Çözüm.

$2^m - 3^n = 7$ ise $2^m \equiv 1 \pmod 3$ ve $m = 2x$, $x \in \mathbb{Z}^+$ için çözümü vardır. $m = 2$ için:

$$2^2 - 3^n = 4 - 3^n = 7 \Rightarrow -3^n = 3 \Rightarrow \text{çözüm yoktur.}$$

$m > 2$ çift sayıları için $2^m \equiv 0 \pmod 8$ dolayısıyla $3^n \equiv 1 \pmod 8$ olmalıdır. Bu nedenle n de çift olmalıdır. $n = 2y$, $y \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$2^{2x} - 3^{2y} = 7 \Rightarrow (2^x - 3^y)(2^x + 3^y) = 7$$

$2^x + 3^y \geq 2$ olduğunu kullanarak sistemi yazalım:

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^x - 3^y = 1 \end{cases}$$

Bu sistemden:

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2, \quad 3^y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Böylece $(m, n) = (4, 2)$ elde edilir.

6. **Soru.** $a^2 + b = b^{1999}$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (Estonya Matematik Olimpiyatı 1999)

Çözüm.

Denklemi

$$a^2 = b \cdot (b^{1998} - 1)$$

şeklinde yazalım. $b \geq 2$ için $(b, b^{1998} - 1) = 1$ olduğundan dolayı $b^{1998} - 1$ ifadesi tam kare olmalıdır.

Fakat b^{1998} bir tam kare olduğundan ve 1'den büyük iki tam kare arasındaki fark en az 3 olduğundan, $b^{1998} - 1$ bir tam kare olamaz.

$b \leq -2$ de olamaz çünkü bu durumda $a^2 < 0$ olur. Bu nedenle $b \in \{-1, 0, 1\}$ elde edilir.

1) $b = -1$ ise $a^2 = -1 \cdot ((-1)^{1998} - 1) = -1 \cdot (1 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$
2) $b = 0$ ise $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$
3) $b = 1$ ise $a^2 = 1 \cdot (1 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$

Böylece çözümler $(a, b) = (0, -1),\ (0, 0),\ (0, 1)$ olarak bulunur.

7. **Soru.** $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ denklemini sağlayan kaç tane (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır? (Balkan Junior 2001)

Çözüm.

$13^3 > 2001$ olduğundan sayılar 13'ten küçüktür.

$8^3 + 8^3 + 8^3 = 1536 < 2001$ olduğundan en az biri 8'den büyüktür.

Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ alalım.

Buradan $a \in \{9, 10, 11, 12\}$ olabilir.

1) $a = 9$ için: $b^3 + c^3 = 2001 - 729 = 1272$ olur.
$b = c = 8$ olsa $2 \cdot 512 = 1024 < 1272$ olur. Bu nedenle $b > 8$ ve $a = 9 \geq b$ olduğundan $b = 9$ olmak zorundadır.
$1272 - 729 = 543 \Rightarrow c^3 = 543$ denkleminin çözümü yoktur.

2) $a = 10$ için: $b^3 + c^3 = 2001 - 1000 = 1001$ olur.
$b = c = 7$ olsa $2 \cdot 343 = 686 < 1001$ olacağından $b \geq 8$ ve $b \leq 10$ sağlanmalıdır.
$b \in \{8, 9, 10\}$ olabilir.

   - $b = 8 \Rightarrow c^3 = 1001 - 512 = 489$ çözümü yoktur.
   - $b = 9 \Rightarrow c^3 = 1001 - 729 = 272$ çözümü yoktur.
   - $b = 10 \Rightarrow c^3 = 1001 - 1000 = 1 \Rightarrow c = 1$

3) $a = 11$ için: $b^3 + c^3 = 2001 - 1331 = 670$ olur.
$b = c = 6$ için $2 \cdot 216 = 432 < 670$ olduğundan $b \geq 7$ olmalıdır.
$9^3 = 729 > 670$ olduğundan $b < 9$ da olmalıdır.
$b \in \{7, 8\}$ olabilir.

   - $b = 7 \Rightarrow c^3 = 670 - 343 = 327$ çözümü yoktur.
   - $b = 8 \Rightarrow c^3 = 670 - 512 = 158$ çözümü yoktur.

4) $a = 12$ için: $b^3 + c^3 = 2001 - 1728 = 273$ olur.
$b = c = 5$ için $2 \cdot 125 = 250 < 273$ olduğundan $b \geq 6$ olmalıdır.
$7^3 = 343 > 273$ olduğundan $b < 7$ olmalıdır.
$b = 6$ olmalıdır.

   - $b = 6 \Rightarrow c^3 = 273 - 216 = 57$ çözümü yoktur.

Dolayısıyla, denklemin $a \geq b \geq c$ için tek çözümü $(10, 10, 1)$ olduğundan, çözüm sayısı bu üçlünün sıralanışları kadardır:

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

olarak bulunur.

8. **Soru.** $5(xy + xz + yz) = 3xyz$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümlerini bulunuz.

Çözüm.

Denklemi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

şeklinde yazalım.

Genelliği bozmadan $1 < x \leq y \leq z$ alalım.

$x \geq 6$ için eşitsizlik oluşturalım. $1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ olduğundan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$$

olur ve bu durumda $\frac{3}{5}$ sağlanmaz.

1) $x = 5$ için tek çözüm $x = y = z = 5$ olmalıdır.

Şimdi burada x değerini seçeceğimiz için $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$ olduğunu kullanıp bir şeyler elde edelim.

Öncelikle denklemi $ayz = by + bz$ şeklinde yazalım. Ardından:

$$ayz - bz = by \Rightarrow z(ay - b) = by \Rightarrow z = \frac{by}{ay - b} \in \mathbb{Z}$$

elde edilir.

Ayrıca $\frac{aby}{ay-b} \in \mathbb{Z}$ de olması gerekir. Hatta

$$\frac{aby}{ay - b} + \frac{-aby + b^2}{ay - b} \in \mathbb{Z}$$

de sağlanmalıdır. Buradan

$$\frac{b^2}{ay - b} \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

2) $x = 4$ için: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$

(1) denklemine uygularsak:

$$\frac{400}{7y - 20} \in \mathbb{Z}$$

Benzer şekilde $\frac{400}{7z-20} \in \mathbb{Z}$ olduğundan ve $y \leq z$ olduğundan $7y - 20$ için $\sqrt{400}$'e kadarki çarpanlara bakmamız yeterlidir.

$7y - 20 \in A$, burada $A \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20\}$ olmalıdır.

Bu a değerlerinden $7y \equiv 20 + a \pmod 7$ olduğundan $a \equiv 1 \pmod 7$ olacak şekilde seçilmelidir. Dolayısıyla a değerleri $\{1, 8\}$ olabilir. Böylece $y \in \{3, 4\}$ olur.

$x \leq y$ olduğundan yalnızca $y = 4$ olabilir.

$$\frac{7}{20} - \frac{5}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow z = 10$$

Çözüm $(4, 4, 10)$ olarak bulunur.

3) $x = 3$ için: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{15}$

(1) denkleminden:

$$\frac{225}{4y - 15} \in \mathbb{Z}$$

$4y - 15 \in \{1, 3, 5, 9, 15\} \Rightarrow y \in \{4, 5, 6\}$

- $y = 4 \Rightarrow z = 60$
- $y = 5 \Rightarrow z = 15$
- $y = 6 \Rightarrow z = 10$

4) $x = 2$ için: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$

(1) gereğince:

$$\frac{100}{y - 10} \in \mathbb{Z}$$

$y \in \{11, 12, 14, 15, 20\}$ olabilir.

- $y = 11 \Rightarrow z = 110$
- $y = 12 \Rightarrow z = 60$
- $y = 14 \Rightarrow z = 35$
- $y = 15 \Rightarrow z = 30$
- $y = 20 \Rightarrow z = 20$

5) $x = 1$ olamaz çünkü bu durumda $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 0$ olur.
Tamsayı çözümlerin sayısı, bu çözümlerin permütasyonları kadardır:

$$3! + 3! + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + 3! + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 49$$

olarak bulunur.

9. **Soru.** $x^3 - y^3 = xy + 61$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (Sovyet Matematik Olimpiyatı 1981)

İlk Yol:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = xy + 61$$

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \Rightarrow a(a^2 + 3b) = b + 61$$

$b > 0$ olduğundan $a > 0$ da olmalıdır.

$$a^3 + 3ab = b + 61 \Rightarrow a^3 - 61 = b(1 - 3a) \Rightarrow b = \frac{a^3 - 61}{1 - 3a} > 0$$

Bu durumda $a^3 < 61$ olmalıdır. Yani $a \in \{1, 2, 3\}$ olmalıdır.

- $a = 1 \Rightarrow b = 30$
- $a = 2 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$
- $a = 3 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$

Yani $x - y = 1$, $xy = 30$ elde ederiz.

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 1 + 120 = 121 \Rightarrow x + y = 11 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

olarak bulunur.

İkinci Yol:

Denkleme bakıldığında $x - y > 0$ olduğu açık olduğundan $x = y + z$, $z \in \mathbb{Z}^+$ dönüşümü yapılabilir.

$$(y+z)^3 - y^3 = y(y+z) + 61$$

$$(3z-1)y^2 + (3z^2 - z)y + z^3 - 61 = 0$$

$z \geq 1$ olduğundan $3z - 1 \in \mathbb{Z}^+$ ve $3z^2 - z \in \mathbb{Z}^+$ olduğu da yazılır. Bu durumda tüm terimlerin katsayıları pozitif olduğundan çözümün var olması için $z^3 < 61$ olmalıdır.

Yani $x - y = z \in \{1, 2, 3\}$ olduğunu yine elde ederiz.

Üçüncü Yol:

Denklemin her iki tarafını 27 ile çarpıp düzenlersek:

$$27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 1646$$

$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC)$ özdeşliği yardımıyla

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 2 \cdot 823$$

eşitliğine ulaşırız. 2 ve 823 asal sayı oldukları için:

$$3x - 3y - 1 = 2 \quad \text{ve} \quad 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y = 823$$

Bu iki denklemi çözdüğümüzde:

$$(x, y) = (6, 5) \quad \text{ve} \quad (-5, -6)$$

çözümlerini buluruz.

* Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I., *An Introduction to Diophantine Equations*

10. **Soru.** $x^3 + 6xy + 40 = y^3$ denklemini sağlayan kaç $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vardır?

Çözüm. Başta $y = x + d$ alalım. Denkleme yazınca

$$x^3 + 6x(x + d) + 40 = (x + d)^3$$

olur. x^3 terimleri sadeleşir; geriye x hakkında ikinci dereceli bir denklem kalır:

$$(3d - 6)x^2 + (3d^2 - 6d)x + (d^3 - 40) = 0. \qquad (*)$$

Bu denklemin diskriminantını hesaplayınca

$$\Delta = (3d^2 - 6d)^2 - 4(3d - 6)(d^3 - 40) = -3\,(d - 2)\,(d - 4)\,(d^2 + 10d + 40)$$

elde edilir. Burada $d^2 + 10d + 40 = (d + 5)^2 + 15 > 0$ her d için pozitiftir. Dolayısıyla $\Delta \geq 0$ ancak $(d - 2)(d - 4) \leq 0$ iken mümkündür; yani $d \in \{2, 3, 4\}$ kalır.

- $d = 2$: $(*)$'ta katsayılar $(A, B, C) = (0, 0, -32)$ olur; bu imkânsızdır.
- $d = 3$: $(*)$, $3x^2 + 9x - 13 = 0$'a iner; $\Delta = 237$ kare değildir, çözüm yoktur.
- $d = 4$: $(*)$, $6x^2 + 24x + 24 = 0$'dır. 6'ya bölünce $(x + 2)^2 = 0$ olur; $x = -2$ ve $y = x + d = 2$.

Sonuç. 1 adet tam sayı çözüm vardır:

$$\boxed{(x, y) = (-2,\ 2)}.$$

11. **Soru.** $n^3 + 7n - 133$ ifadesi pozitif bir tam sayının kübü ise n sayısına "iyi sayı" diyelim. Tüm iyi sayıları bulunuz. (USC Math Contest)

Çözüm.

Denklemi

$$n^3 + 7n - 133 = x^3, \quad x \in \mathbb{Z}^+$$

şeklinde yazalım.

$n(n^2 + 7) - 133$ ifadesi, $n < 5$ için pozitif tam sayı olamaz. Bu nedenle $n \geq 5$ olmalıdır.

Denklem şu şekilde yazılabilir:

$$7n - 133 = x^3 - n^3$$

1) $n = 19$ için: $x^3 = 19^3 + 7 \cdot 19 - 133 = 6859 + 133 - 133 = 6859 \Rightarrow x = 19$
Dolayısıyla $(n, x) = (19, 19)$ bir çözümdür.

Şimdi $n > 19$ ve $n < 19$ durumlarını inceleyelim.

1) $n > 19$ için:

Bu durumda $x^3 > n^3$ olduğundan $x = n + d$, $d \in \mathbb{Z}^+$ dönüşümü yapabiliriz.

$$x^3 - n^3 = (n + d)^3 - n^3 = 3dn^2 + 3d^2n + d^3$$

Denklem şu hale gelir:

$$7n - 133 = 3dn^2 + 3d^2n + d^3 \Rightarrow 3dn^2 + (3d^2 - 7)n + (d^3 + 133) = 0$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ olabilmesi için $3d^2 - 7 < 0$ olmalıdır. Bu da:

$$d^2 < \frac{7}{3} \Rightarrow d = 1$$

$d = 1$ için:

$$3n^2 - 4n + 134 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 134 = 16 - 1608 < 0$$

Dolayısıyla çözüm yoktur.

2) $n < 19$ için:

Bu durumda $n^3 > x^3$ olduğundan $n = x + y$, $y \in \mathbb{Z}^+$ dönüşümü yapabiliriz.

$$x^3 = (x + y)^3 + 7(x + y) - 133 \Rightarrow x^3 - (x + y)^3 = 7x + 7y - 133$$

Sol taraf:

$$x^3 - (x + y)^3 = -3x^2y - 3xy^2 - y^3$$

Denklem şu hale gelir:

$$(3y)x^2 + (3y^2 + 7)x + (y^3 + 7y - 133) = 0$$

Bu bir ikinci dereceden denklem olup pozitif tamsayı çözüm olması için $y^3 + 7y - 133 < 0$ olmalıdır. Aksi takdirde tüm terimler pozitif olur ve Descartes kuralı gereği pozitif tamsayı çözüm oluşmaz. Bu nedenle:

$$y^3 + 7y - 133 < 0 \Rightarrow y \leq 5$$

Şimdi $y = 1, 2, 3, 4, 5$ için deneyelim:

- $y = 1$: $3x^2 + 10x - 125 = 0 \Rightarrow (3x + 25)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5,\ y = 1 \Rightarrow n = 6$
- $y = 2$: $6x^2 + 19x - 11 = 0 \Rightarrow (x - 3)(6x + 37) = 0 \Rightarrow x = 3,\ y = 2 \Rightarrow n = 5$
- $y = 3$: $9x^2 + 34x - 85 = 0 \Rightarrow \Delta = 34^2 + 4 \cdot 9 \cdot 85 = 1156 + 3060 = 4216$ (Tam kare değil)
- $y = 4$: $12x^2 + 55x - 41 = 0 \Rightarrow \Delta = 3025 + 1968 = 4993$ (Tam kare değil)
- $y = 5$: $\Delta > 0$ ancak yine tam kare olmadığı için çözüm yoktur.

Dolayısıyla n sayısının alabileceği değerler:

$$\boxed{n \in \{5, 6, 19\}}$$

olarak bulunur.

12. **Soru.** $n^2 - 19n + 99$ sayısı tam kare olacak şekildeki tüm n tam sayılarının toplamı kaçtır? (AIME 1999)

Çözüm.

$n^2 - 19n + 99 = x^2$ olsun, $x \in \mathbb{Z}^+$.

Denklemin kökleri:

$$n_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4(99 - x^2)}}{2}$$

$n_{1,2}$ tam sayı olabilmesi için, $\sqrt{361 - 396 + 4x^2} = \sqrt{4x^2 - 35}$ bir tam sayı olmalıdır. Yani:

$$4x^2 - 35 = y^2, \quad y \in \mathbb{Z}^+$$

Bu da:

$$4x^2 - y^2 = 35 \Rightarrow (2x - y)(2x + y) = 35$$

$2x + y > 0$ olduğundan, $2x - y > 0$ da olmalıdır. Aynı zamanda $2x - y < 2x + y$ olduğundan, çarpan eşleşmeleri pozitif çarpanlar olarak alınır.

Uygun sistemler:

$$\begin{cases} 2x + y = 35 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 17, \quad x = 9$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 1, \quad x = 3$$

Bunlara göre $y = 17$ ve $y = 1$ elde edilir.

$$n_{1,2} = \frac{19 \pm y}{2} \Rightarrow \frac{19 \pm 17}{2} = 1,\ 18 \quad \text{ve} \quad \frac{19 \pm 1}{2} = 9,\ 10$$

Tüm uygun n değerleri: $1,\ 9,\ 10,\ 18$

Bu sayıların toplamı:

$$1 + 9 + 10 + 18 = \boxed{38}$$

13. **Soru.** $n^4 + n^3 + 1$ tam kare olacak şekilde tüm n tam sayılarını bulunuz.

Çözüm.

$$(n^2)^2 < n^4 + n^3 + 1$$

olduğundan, bir $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısı için

$$(n^2 + m)^2 = n^4 + n^3 + 1$$

yazılabilir.

Her iki tarafı açalım:

$$n^4 + m^2 + 2mn^2 = n^4 + n^3 + 1 \Rightarrow m^2 + 2mn^2 = n^3 + 1$$

Düzenleyelim:

$$m^2 - 1 = (n - 2m)n^2$$

Buradan devam edelim. $m > 1$ için $n^2 > 0$ olduğundan $n > 2m$ olmalıdır.

$n^2 \mid m^2 - 1$ olduğunu da fark edersek, $n^2 \leq m^2 - 1$ elde edilir.

Şimdi $n > 2m$ ve $n^2 \leq m^2 - 1$ eşitsizliklerini ortak çözelim:

$n > 2m \Rightarrow n^2 > 4m^2$ olur. Öyleyse:

$$m^2 - 1 \geq n^2 > 4m^2 \Rightarrow m^2 - 1 > 4m^2 \Rightarrow -1 > 3m^2$$

bu bir çelişkidir.

Dolayısıyla $m = 1$ olmalıdır.

$m = 1$ için:

$$0 = (n - 2)n^2 \Rightarrow n = 2$$

Pozitif tam sayılarda yalnızca $n = 2$ için tam kare olur. Bu durumda değeri:

$$2^4 + 2^3 + 1 = 16 + 8 + 1 = \boxed{25}$$

olur ve bu da bir tam karedir. Başka çözüm yoktur.

14. **Soru.** $5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (Asya-Pasifik Matematik Olimpiyatı 1989)

Çözüm.

$(0, 0, 0, 0)$ bir çözümdür.

Eşitliğin sağ tarafı 3 ile bölünmektedir. O halde n sayısı da 3 ile bölünmelidir. $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ yazarsak:

$$5 \cdot 9k^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2 \Rightarrow 15k^2 = 12a^2 + 6b^2 + 2c^2$$

Şimdi $c = 3e$, $e \in \mathbb{Z}$ yazarsak:

$$5k^2 - 4a^2 = 2b^2 + 6e^2$$

Bu denklemin k değeri en küçük çözümü (k, a, b, e) olsun.

$x^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$ olduğu bilinir.

Dolayısıyla:

$$k^2 \equiv \{0,4\} \pmod{16}, \quad 4a^2 \equiv \{0,4\} \pmod{16}, \quad 2b^2 \equiv \{0,2,8\} \pmod{16},$$
$$6e^2 \equiv \{0,6,8\} \pmod{16}$$

Bu durumda:

$$2b^2 + 6e^2 \equiv \{0,2,6,8,10,14\} \pmod{16}$$
$$5k^2 - 4a^2 \equiv \{0,4,12\} \pmod{16}$$

Her iki ifade de $\equiv 0 \pmod{16}$ olmalıdır. Bu da:

$$2b^2 + 6e^2 \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow b, e \text{ çift sayılardır.}$$

Ancak a çift olamaz; çünkü (k,a,b,e) çözüm kümesinin yarısı da çözüm olur ve bu minimallikle çelişir.

$b = 2b_1$, $e = 2e_1$, $k = 2k_1$ yazalım:

$$2b_1^2 + 6e_1^2 = 5k_1^2 - a^2$$

a tek olduğundan:

$$5k_1^2 - a^2 \equiv \{4,12\} \pmod{16}$$

Ancak:

$$2b_1^2 + 6e_1^2 \equiv \{0,2,6,8,10,14\} \pmod{16}$$

Bu bir çelişkidir.

O halde denklemin tek tam sayı çözümü:

$$\boxed{(a,b,c,n) = (0,0,0,0)}$$

olmalıdır.

15. **Soru.** $10x^3+20y^3+8xyz = 1999z^3$ denkleminin tam sayılarda kaç çözümü vardır? (Municipial 1999)

Çözüm.

$(0,0,0)$ bir çözümdür.

Başka çözümün olmadığını göstermek için bu tarz sorularda genellikle **aralarında asal çözümü** (yani $\gcd(x,y,z) = 1$ olan çözüm) seçmek yararlıdır. Çünkü $(0,0,0)$ dışındaki diğer çözümler varsa, bunlar asal çözümlerin katıdır.

Bu yüzden, 14 numaralı soruda yaptığımız gibi $\gcd(x,y,z) = 1$ alalım.

z'nin çift olduğunu görmek çok zor değildir. $z = 2z_1$ dönüşümü yapabiliriz:

$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3 \Rightarrow 10x^3 + 20y^3 + 8xyz_1 \cdot 2 = 1999 \cdot (2z_1)^3$$

Yani:

$$10x^3 + 20y^3 + 16xyz_1 = 1999 \cdot 8z_1^3 \Rightarrow 5x^3 + 10y^3 + 8xyz_1 = 1999 \cdot 4z_1^3$$

Benzer şekilde x de çifttir. $x = 2x_1$ dönüşümü yapılırsa:

$$5(8x_1^3)+10y^3+8\cdot 2x_1\cdot y\cdot z_1 = 1999\cdot 4z_1^3 \Rightarrow 40x_1^3+10y^3+16x_1yz_1 = 1999\cdot 4z_1^3 \Rightarrow 2x_1^3+0.5y^3+2x_1yz_1 = 1999\cdot z_1^3$$

Ancak bu durumda y de çift olmalıdır. Fakat y çift olursa, x, y, z hep çift olacağından:

$$\gcd(x, y, z) = 2$$

olur. Bu da (x, y, z) çözümünün asal (yani $\gcd = 1$) olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla:

$$\boxed{\text{Denklemin tek tam sayı çözümü } (x, y, z) = (0, 0, 0)\text{'dır.}}$$

16. **Soru.** $(m-n)^2 = \dfrac{4mn}{m+n-1}$ denklemini sağlayan $0 < m+n < 100$ olacak şekilde kaç (m, n) tam sayı çifti vardır? (Estonya Matematik Olimpiyatı 1999)

Çözüm.

Verilen eşitliği aşağıdaki adımlarla düzenleyelim:

$$(m-n)^2 \cdot (m+n-1) = 4mn$$

Şimdi bu ifadeyi sadeleştirelim. Aşağıdaki gibi bir sistematik dönüşüm yapılabilir:

$$(m-n)^2(m+n-1) = 4mn \Rightarrow (m-n)^2(m+n-1) = 4mn$$

Şimdi $m - n = x$, $m + n = x^2$ varsayalım. Bu durumda:

$$(m-n)^2 = x^2, \quad m+n = x^2 \Rightarrow (m-n)^2 = m+n$$

Yani:

$$x^2 = x^2$$

Bunun sağlandığı durumlar, (m, n) çiftinin $(m+n = x^2,\ m-n = x)$ koşulunu sağlayan çözümleridir. Bu iki eşitliği çözersek:

$$\begin{cases} m+n = x^2 \\ m-n = x \end{cases} \Rightarrow m = \frac{x^2+x}{2}, \quad n = \frac{x^2-x}{2}$$

Bu çözüm kümesi:

$$\left\{ \left(\frac{x(x+1)}{2}, \frac{x(x-1)}{2} \right) \right\}$$

Payda sıfır olmamalı, yani $m + n \neq 1$ olmalı.

Şimdi $x^2 = m + n < 100$ koşulunu uygulayalım.

$$x^2 < 100 \Rightarrow |x| < 10 \Rightarrow x \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 9\}$$

Ancak $x = \pm 1$ durumunda $m + n = 1$ olur, bu da payda 0 yapar ve geçersizdir.

Geçerli olanlar: $x \in \{\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm 9\}$

Bu da toplam:

$$2 \cdot (9 - 2 + 1) = 2 \cdot 8 = \boxed{16}$$

farklı (m, n) çözümü verir.

17. **Soru.** $a^3 = b^3 + c^3 + 3abc$ ve $a^2 = 2(a+b+c)$ eşitliklerini sağlayan kaç pozitif tamsayı üçlüsü (a, b, c) vardır? (İsveç Matematik Olimpiyatı 1984)

Çözüm.

İlk Yol

Verilen birinci eşitlik:

$$a^3 = b^3 + c^3 + 3abc \Rightarrow a^3 > b^3 + c^3$$

b ve c simetrik olduğundan genelliği bozmadan $a > b \geq c$ kabul edebiliriz.

İkinci eşitlik:

$a^2 = 2(a+b+c) \Rightarrow a^2 - 2a = 2(b+c) \Rightarrow$ Sağ taraf pozitif, dolayısıyla $a^2 > 2a \Rightarrow a(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2$

Bir yandan $a > b \geq c$ olduğundan $a > \frac{a+b+c}{3}$ olur. Yani:

$$3a > a + b + c \Rightarrow 2a > b + c$$

İkinci eşitlikten $a^2 = 2(a + b + c) \Rightarrow \frac{a^2}{2} = a + b + c$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} > a + 2a = 3a \Rightarrow a^2 > 6a \Rightarrow a < 6$$

O hâlde $a \in \{3, 4, 5\}$. Deneyelim:

1) $a = 2 \Rightarrow a^2 = 4 = 2(a + b + c) \Rightarrow b + c = 0$ olur. Bu mümkün değil.

2) $a = 4 \Rightarrow 16 = 2(4 + b + c) \Rightarrow b + c = 4$

Ayrıca $a^3 = b^3 + c^3 + 3abc$ denkleminde $a = b + c$ yazarsak:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + ab + ac + b^2 + c^2 - bc) \Rightarrow \text{İfade sıfır olur.}$$

O hâlde:

$$(b, c) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow (a, b, c) \in \{(4, 1, 3), (4, 2, 2), (4, 3, 1)\}$$

İkinci Yol

Verilen ifade:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow (a - b - c)(a^2 + ab + ac + b^2 + c^2 - bc) = 0$$

1) Eğer $a = b + c$, ikinci denklemden:

$$a^2 = 2(a + b + c) = 2(2a) \Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a = 4$$

Yukarıdaki çözümle aynı 3 çözüm elde edilir.

2) Eğer ikinci çarpan sıfırsa:

$$a^2 + ab + ac + b^2 + c^2 - bc = 0$$

Diğer denklem: $a^2 = 2(a + b + c)$

Bu iki ifadeyi birlikte çözmek için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanalım.

Vektörler:

$$\vec{u} = (-a,\ -b,\ c), \quad \vec{v} = (c,\ a,\ b) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -ac - ab + bc$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Rightarrow |-ac - ab + bc| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Yani:

$$-ac - ab + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \text{eşitliğin sağlanması için } \frac{-a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = -ab \text{ olmalı, bu imkansız.}$$

Dolayısıyla ikinci çarpan sıfır olamaz.

Üçüncü Yol

Yine aynı çarpanlara ayırmayı kullanıyoruz:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + ab + ac + b^2 + c^2 - bc)$$

1) $a = b + c$ ve $a^2 = 2(a + b + c) \Rightarrow a = 4$

2) Diğer çarpanın sıfır olması için:

$$a^2 + ab + ac + b^2 + c^2 - bc = 0a^2 = 2(a + b + c) \Rightarrow \text{ denemeyle çelişki çıkar.}$$

Sonuç olarak:

$$\boxed{3} \text{ adet pozitif tamsayı çözüm vardır.}$$

18. **Soru.** Pozitif tam sayılar m, n için

$$2n^3 = m^3 + mn^2 + 11$$

eşitliği sağlanıyor. Tüm çözümleri bulunuz. (İsveç Matematik Olimpiyatı 1994)

Çözüm. Denklemi aşağıdaki gibi yazalım:

$$2n^3 - m^3 - mn^2 = 11$$

Soldaki ifadede tüm terimler kübik ve katsayılarının toplamı $2 - 1 - 1 = 0$ olduğundan, değişken kaydırması uygulayabiliriz. $m = n - k$ dönüşümü yapalım:

$$2n^3 - (n - k)^3 - (n - k)n^2 = 11$$

$(n - k)^3 = n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3$ ve $(n - k)n^2 = n^3 - kn^2$ olduğundan yerine yazalım:

$$2n^3 - \left(n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3\right) - \left(n^3 - kn^2\right) = 11$$

İfadeyi sadeleştirelim:

$$2n^3 - n^3 + 3n^2k - 3nk^2 + k^3 - n^3 + kn^2 = 11$$

$$\Rightarrow 4kn^2 - 3k^2n + k^3 = 11$$

Bu, n açısından ikinci dereceden bir denklemdir. Diskriminantı inceleyelim:

$$\Delta = (-3k^2)^2 - 4(4k)(k^3 - 11) = 9k^4 - 16k^4 + 176k = -7k^4 + 176k$$

n tam sayı olmalı, bu nedenle Δ bir tam kare olmalıdır. Bu da ancak $\Delta \geq 0$ olmasıyla mümkündür. İnceleyelim:

$k < 0$ için $\Delta < 0$ olur. $k = 0$ için $\Delta = 0 + 0 = 0$ ama bu durumda denklem:

$$2n^3 = n^3 + n^2 + 11 \Rightarrow n^3 = n^2 + 11$$

Ki bu da çözüm vermez. O halde $k > 0$ olmalıdır.

$\Delta = -7k^4 + 176k \geq 0 \Rightarrow -7k^4 + 176k \geq 0$

Bu eşitsizliği çözelim: $k(-7k^3 + 176) \geq 0$ olmalı. Bu da ancak $-7k^3 + 176 > 0 \Rightarrow k^3 < 25.14...$ yani $k \leq 2$ olur.

Deneyelim:

- $k = 1$ için:
$$4n^2 - 3n + 1 - 11 = 0 \Rightarrow 4n^2 - 3n - 10 = 0$$
Diskriminant: $9 + 160 = 169$, kökler tam sayı: $n = 2$ olur. $m = n - k = 1$, çözüm $(m, n) = (1, 2)$.
- $k = 2$ için:
$$8n^2 - 12n + 8 - 11 = 0 \Rightarrow 8n^2 - 12n - 3 = 0$$
Diskriminant: $144 + 96 = 240$ tam kare değil, çözüm yok.

O hâlde tek çözüm:

$$\boxed{(m, n) = (1, 2)}$$

19. **Soru.** x, y pozitif tam sayılar ve
$$\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$$
bir tam sayı ise, bu sayının bir tam küp olduğunu gösteriniz. (Estonya Matematik Olimpiyatı 1995)

Çözüm. (Metin Can Aydemir)

Verilen ifadelerde x yerine $-x$ alırsak ifadenin tamsayı olması veya tamküp olması değişmeyeceğinden dolayı x ve y'yi pozitif alabiliriz. Öncelikle $x = y$ için bakalım,

$$\frac{x^2 + x^2 + 6}{x^2} = 2 + \frac{6}{x^2}$$

olur. Bunun tamsayı olması için $x = 1$ olmalıdır. $x = 1$ için de tamküp olduğu görülür. Şimdi geriye kalan çözümlerden $x > y$ olanlara bakalım. (Simetrik bir ifade olduğu için $y > x$ durumlarına bakmaya gerek yok.) Bu çözümler arasında x değerinin en küçük olduğu çözümü ele alalım. Bu (x, y) için

$$\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy} = k$$

olsun.

$$x^2 + y^2 + 6 = kxy \Rightarrow x^2 - kxy + (y^2 + 6) = 0$$

olur. Bu denklemi x'e bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünelim ve diğer çözüm a olsun. Vieta teoreminden,

$$a + x = ky, \quad ax = y^2 + 6$$

olduğu görülür. Bu iki ifadeden a sayısının pozitif bir tamsayı olduğu görülebilir. Dolayısıyla (a, y) ikilisi de bir çözümdür. Kabulden dolayı $a \geq x$ olmalı.

$$x^2 + 6 \geq y^2 + 6 = ax \geq x^2 \Rightarrow x^2 \geq y^2 \geq x^2 - 6$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Eğer $x \geq 4$ ise $x^2 - 6 \geq (x-1)^2$ olacağından

$$x^2 \geq y^2 \geq x^2 - 6 \geq (x-1)^2$$

olur ve ardışık tam kareler arasında tam kare olamayacağı için buradan çözüm gelmez. $4 > x$ için de olası sadece $(x, y) = (3, 2), (3, 1), (2, 1)$ ikilileri vardır fakat bunların hiçbiri ifadenin tamsayı olmasını sağlamaz. Dolayısıyla yalnızca $(1, 1)$ ikilisi için tam sayıdır ve bu durumda da

$$\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$$

ifadesi tam küp olur.

20. **Soru.** m, n tam sayılar, p bir asal sayı olmak üzere

$$\frac{13^m + p \cdot 2^n}{13^m - p \cdot 2^n}$$

bir pozitif tam sayı olacak şekilde kaç (m, n, p) üçlüsü vardır? (UMO 1. Aşama 2018)

Çözüm. İlk çözümdeki katkıları için metonstere teşekkür ediyorum.

İlk Yol

(Bu ifadede Bang Zsigmondy Lemma'sı ile $13^m - 1$ in üssü her arttığında daima yeni bir asal çarpanı olacağı doğrudan açıktır. Bu çözümü yaptığım zamanda bu teoremi bilmiyordum.)

Soruda istenen ifadeye a diyelim.

$$\frac{13^m + p \cdot 2^n}{13^m - p \cdot 2^n} = a$$

diyelim. İçler dışlar çarpımı yapıp düzenlersek ifademiz

$$(1 + a) \cdot p \cdot 2^n = 13^m \cdot (a - 1)$$

4 bilinmeyenli diyafont denklemi elde edilir. Bu ifadeden yola çıkarak

$$p \cdot 2^n = 13^m \cdot \frac{a-1}{a+1}$$

haline gelir. Sağ taraf birlikte düşünüldüğünde tamsayı olmalıdır.

$$p \cdot 2^n = 13^m - \frac{2 \cdot 13^m}{a+1}$$

haline gelir. Buradan

$$a+1 = 2, \quad a+1 = 1, \quad a+1 = -1, \quad a+1 = -2, \quad a+1 = 13^k, \quad a+1 = -13^k, \quad a+1 = 2 \cdot 13^k, \quad a+1 = -2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadelerden eşitliği mümkün olan durumları bulalım.

Eşitliğin sol tarafı 0 (mod 2) olduğundan eşitliğin sağ tarafında da ifade çift olmalıdır. $13^m \equiv 1 \pmod 2$ olduğundan

$$\frac{2 \cdot 13^m}{a+1} \equiv 1 \pmod 2$$

olmalıdır. Bunun için $a + 1$ çift olmalıdır. $a > 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$a + 1 = 2 \quad \text{veya} \quad a + 1 = 2 \cdot 13^k, \quad k \leq m$$

olabilir.

- $a+1=2$ olması durumunda $2p \cdot 2^n = 0$ olur ve $2^n > 0$ ve $p > 0$ olduğundan mümkün değildir.
- $a+1 = 2 \cdot 13^k$, $k \leq m$ olması durumunda $a = 2 \cdot 13^k - 1$ olur ve

  $$p \cdot 2^n = 13^m - 13^{m-k}$$

  elde edilir. $m \neq k$ için ifade $13^g \cdot (13^t - 1)$, $g \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{N}$ olması gerektiğinden daima 12 ve 13 ile bölünür. Dolayısıyla p asal olamaz. $m = k$ olmalıdır.

  $$p \cdot 2^n = 13^m - 1$$

  Bu ifadenin içinde daima 12 çarpanı bulunacağından ve başka tek çarpan daha bulunacağından $m > 1$ için p asal olamaz.

İddia: $m > 1$ için $p \cdot 2^n = 13^m - 1$ ifadesine göre $13^m - 1$ sayısının 2 asal çarpanı olacak şekilde p asal sayısı yoktur. (Aslında demek istediğim burada $13^m - 1$ ifadesinin bir noktadan sonra en az 3 asal çarpanı vardır.)

İspat:

Öncelikle $13^m - 1$ sayısının her m için 2 ve 3'e bölünebileceği aşikardır. Eğer $m = 2n$ ise

$$13^{2n} - 1 \equiv 169^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

olduğundan m çift ise 42 ile bölünür ve en az 3 asal böleni olmuş olur.

Eğer $m = 2n+1$ ise farz edelim ki $13^m - 1$ sayısı sadece 2 ve 3 ile bölünsün.

$$13^{2n+1} - 1 \equiv 13 \cdot 169^n - 1 \equiv 5 \cdot 1^n - 1 \equiv 4 \pmod{8}$$

olduğundan $13^m - 1$ sayısı 4 ile bölünür fakat 8 ile bölünmez. Dolayısıyla

$$13^m - 1 = 4 \cdot 3^a$$

formatında olmalıdır. Kuvvet Kaydırma Teoremi uygulayalım:

$$v_3(4 \cdot 3^a) = a = v_3(13^m - 1) = v_3(13 - 1) + v_3(m) = v_3(m) + 1$$

Buradan $v_3(m) = a - 1$ bulunur. Dolayısıyla $m = k \cdot 3^{a-1}$ formatında olmalıdır.

$$4 \cdot 3^a = 13^m - 1 = 13^{k \cdot 3^{a-1}} - 1 \geq 13^{3^{a-1}} - 1$$

$a > 1$ olduğunda $13^{3^{a-1}} - 1 > 4 \cdot 3^a$ olacağı aşikardır. Dolayısıyla kabulumuz yanlıştır. Yani $m > 1$ için $13^m - 1$ sayısının en az 3 asal böleni vardır.

Bu nedenle $m > 1$ için $p \cdot 2^n = 13^m - 1 = 2^n \cdot 3^{d_1} \cdot q^{d_2}$ şeklinde yazılabileceği için p asal olamaz.

$m = 1$ alınmalıdır.

$$p \cdot 2^n = 12 \Rightarrow n = 2, \quad p = 3$$

elde edilir.

$$\boxed{(m, n, p) = (1, 2, 3)}$$

İkinci Yol (Tübitak'ın resmi çözümü)

$$a = \frac{13^m + p \cdot 2^n}{13^m - p \cdot 2^n} = 1 + \frac{p \cdot 2^{n+1}}{13^m - p \cdot 2^n}$$

$13^m - p \cdot 2^n$ olduğundan $p = 13$ olursa p'ye sadeleştirdikten sonra payda tek, pay çift oluyor. $p \neq 13$ ise payda p'ye bölünmez ve tektir. Yani $a = 13^m - p \cdot 2^n = 1$'dir. (mod3)'ten $p = 3$ olur. $m = 1$ ve $n = 2$ sağlar. $m \geq 2$ ve $n \geq 3$ ise (mod8) ifadesinden m çift olmalıdır. Fakat bu durumda da (mod7)'den çelişki gelir.

21. **Soru.** p bir asal sayı olmak üzere $p = x^4 + 4$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm.

$$p = x^4 + 4$$

$$p = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

yani

$$p = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 2)$$

olur.

$x^2 + 2x + 2$ için $\Delta < 0$ ve başkatsayı pozitif olduğundan dolayı daima pozitiftir. Dolayısıyla $x^2 - 2x + 2$ de pozitiftir. Bu çarpanlardan herhangi biri 1 olmazsa p asal sayı olamaz.

- $x^2 - 2x + 2 = 1$ olursa $x = 1$, bu durumda $p = 5$
- $x^2 + 2x + x = 1$ olursa $x = -1$, bu durumda $p = 5$

Dolayısıyla çözümler:

$$\boxed{(p, x) = (5, 1),\ (5, -1)}$$

22. **Soru.**

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz. (Romanya Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. $x > 1$ sayıları için

$$x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 4x^3 + 4$$

olduğundan dolayı

$$(x^3 + 1)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 2)^2$$

olduğu için tam sayı çözümü yoktur.

$x^3 < -3$ sayıları için

$$x^6 + 4x^3 + 4 < x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 2x^3 + 1$$

olduğundan dolayı

$$(x^3 + 2)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 1)^2$$

olduğundan dolayı çözüm yoktur. Dolayısıyla x yalnızca -1, 0, 1 değerlerini alabilir.

- $x = -1$ ise: $y^4 = -1$ olur, y tam sayı olamaz.
- $x = 0$ ise: $y^4 = 1$ olur, yani $y = \pm 1$.
- $x = 1$ ise: $y^4 = 5$ olur, y tam sayı olamaz.

Dolayısıyla çözümler:

$$\boxed{(x, y) = (0, 1),\ (0, -1)}$$

23. **Soru.** a, b, c tam sayı ve $1 < a < b < c$ olmak üzere, $(a-1)(b-1)(c-1)$ çarpanının $abc-1$ sayısını böldüğü (a, b, c) üçlülerini bulunuz. (IMO 1992)

Çözüm. Denklemde çıkarma işleminden kurtulmak için bir dönüşüm yapalım: $a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$ olsun. Bu durumda:

$$xyz \mid (x+1)(y+1)(z+1)-1$$

ve $x < y < z$, $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olur.

$$xyz \mid (xy+x+y+1)(z+1)-1$$

$$xyz \mid xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1-1$$

$$xyz \mid xy+xz+yz+x+y+z$$

elde edilir. Buradan:

$$\frac{xy+xz+yz+x+y+z}{xyz} \in \mathbb{Z}^+$$

İfadeyi düzenlersek:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}$$

olur. $x < y < z$ olduğundan

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z} > \frac{1}{xy} > \frac{1}{xz} > \frac{1}{yz}$$

olur. Bu da bize x yerine değer seçerek ifadenin maksimum değerini bulma şansı verir. Yani seçebileceğimiz en küçük üçlüyü seçerek işe koyulalım.

- $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ için:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = 2+\frac{5}{6} < 3$$
- $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ için:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12} = \frac{35}{24} < 2$$
- $x \geq 3$ için en büyük değer $(3, 4, 5)$ ile alınır:
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15} = \frac{59}{60} < 1$$

Bu da $x \geq 2$ için çözüm olmadığını söyler. Dolayısıyla $x = 1$ için ifade 1 veya 2 olabildiğinden ve $x = 2$ için ifadenin değeri 1 olduğundan 3 farklı durumda incelemek yeterlidir.

1) $x = 1$ için ifadenin değeri 1 ise:

$$2y+2z+1+yz = yz \Rightarrow 2y+2z+1 = 0$$

$2y+2z > 0$ olduğundan dolayı mümkün değildir.

2) $x = 1$ için ifadenin değeri 2 ise:

$$2y + 2z + 1 = yz \Rightarrow 2z + 1 = y(z - 2)$$

$$y = \frac{2z+1}{z-2}$$

$$\frac{2z+1+4-2z}{z-2} = \frac{5}{z-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow z - 2 \mid 5$$

$z > 2$ olduğundan dolayı $z \in \{3, 7\}$ olur.

- $z = 3$ ise $y = 7$ olur. $z > y$ koşulu sağlanmadığından dolayı çözüm yoktur.
- $z = 7$ ise $y = 3$ olur. Bu bir çözümdür. $(x, y, z) = (1, 3, 7)$ olduğundan $(a, b, c) = (2, 4, 8)$

3) $x = 2$ için ifadenin değeri 1 ise:

$$3z + 3y + 2 + yz = 2yz \Rightarrow 3y + 3z + 2 = yz$$

$$3z + 2 = y(z - 3) \Rightarrow y = \frac{3z+2}{z-3}$$

$$\frac{3z+2+9-3z}{z-3} = \frac{11}{z-3} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow z - 3 \mid 11$$

$z > 3$ olduğundan $z \in \{4, 14\}$ olur.

- $z = 4$ ise $y = 14$ olur. Bu $z > y$ ile çelişir.
- $z = 14$ ise $y = 4$ olur. Bu durumda $(x, y, z) = (2, 4, 14)$ bir çözümdür ve $(a, b, c) = (3, 5, 15)$ olarak bulunur.

Bu bölme işlemini sağlayan üçlüler $(2, 4, 8)$ ve $(3, 5, 15)$ olmak üzere $\boxed{2}$ tanedir.

24. **Soru.**

$$(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = y^3$$

eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz. (Avusturya Matematik Olimpiyatı)

Çözüm.

$$(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = y^3$$

Binom açılımı yaparsak:

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad (x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Bu durumda:

$$(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = 8x^3 + 8x$$

Yani:

$$8x(x^2 + 1) = y^3$$

Dolayısıyla $x^3 + x = \frac{y^3}{8}$ tam küp olmalıdır.

- $x \geq 1$ için:

$$x^3 < x^3 + x < x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

olduğundan $x^3 + x$ iki ardışık küp arasındadır ve bu yüzden küp olamaz. Çözüm yoktur.

- $x \leq -1$ için:

$$(x+1)^3 < x^3 + x < x^3$$

olduğundan yine $x^3 + x$ tam küp olamaz. Çözüm yoktur.

- $x = 0$ için:

$$y^3 = (0+1)^4 - (0-1)^4 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Dolayısıyla tek çözüm:

$$\boxed{(x, y) = (0, 0)}$$

25. **Soru.**

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2$$

eşitliğini asal sayılar p ve q için çözünüz. (Rusya Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. Varsayalım ki p, q değerlerinin her ikisi de 3'ten farklı olsun.

$3 \mid p + q$ ancak ve ancak $3 \mid p^3 - q^5$ olmalıdır.

Asal sayıların 3 modundaki kalanı ya 1 ya da 2 (yani ± 1) olacağından:

$$p, q \equiv \pm 1 \pmod 3$$

- $p \equiv q \pmod 3$ ise $3 \mid p^3 - q^5$ olur ancak $3 \nmid p + q$ olur.
- $p \not\equiv q \pmod 3$ ise $3 \mid p + q$ olur ancak $3 \nmid p^3 - q^5$ olur.

O halde p veya q mutlaka 3 olmalıdır.

Durum 1: $p = 3$ olsun.

Bu durumda:

$$27 - q^5 = (3+q)^2 \Rightarrow 27 - q^5 > 0 \Rightarrow q < \sqrt[5]{27} \approx 2.3 \Rightarrow q = 2 \text{ veya } q = 1$$

$q = 2$ için:

$$27 - 32 = -5 \neq (3+2)^2 = 25 \Rightarrow \text{uymaz}$$

$q = 1$ asal değildir.

Durum 2: $q = 3$ olsun.

Bu durumda:

$$p^3 - 243 = (p+3)^2$$

Bu eşitsizliğe bakalım.

$p > 7$ için:

$$p^3 - 243 > (p+3)^2$$

$p < 7$ için:

$$p^3 - 243 < (p+3)^2$$

O halde yalnızca $p = 7$ ihtimali kalır. Deneyelim:

$$343 - 243 = 100, \quad (7+3)^2 = 100 \Rightarrow \text{eşitlik sağlanır}$$

Dolayısıyla denklem yalnızca:

$$\boxed{(p, q) = (7, 3)}$$

çözümünü alır.

26. **Soru.**

$$x^2 - y! = 2001$$

denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. Denklemi şu şekilde yazalım:

$$x^2 = y! + 2001$$

ardından denklemi $\pmod 9$ altında inceleyelim.

$-2001 \equiv 6 \pmod 9$ olduğunu not alalım.

Kare sayıların $\pmod 9$ değerleri:

$$x^2 \equiv \{0, 1, 4, 7\} \pmod 9$$

Bu durumda:

$$x^2 + 6 \equiv y! \pmod 9 \Rightarrow y! \equiv \{6+0, 6+1, 6+4, 6+7\} \equiv \{6, 7, 10, 13\} \pmod 9$$

Ancak $y! \equiv 0 \pmod 9$ olursa bu değerlerden biri olamaz. Bu nedenle $y! \not\equiv 0 \pmod 9$ olmalıdır. Bu da yalnızca $y < 6$ için geçerlidir.

Yani:

$$y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ayrıca not edelim ki bir sayının karesi $\pmod{10}$ altında yalnızca $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ değerlerini alabilir, dolayısıyla

$$x^2 \not\equiv \{2, 3, 7, 8\} \pmod{10} \tag{1}$$

Şimdi olasılıkları inceleyelim:

- $y = 1$: $x^2 = 2002$ olur, $x^2 \equiv 2 \pmod{10}$, (1)'e aykırı, olmaz.
- $y = 2$: $x^2 = 2003$ olur, $x^2 \equiv 3 \pmod{10}$, (1)'e aykırı, olmaz.
- $y = 3$: $x^2 = 2007$ olur, $x^2 \equiv 7 \pmod{10}$, (1)'e aykırı, olmaz.
- $y = 4$: $x^2 = 2025 \Rightarrow x = 45$, bu bir çözümdür.
- $y = 5$: $x^2 = 2121$, bu sayı $21 \cdot 101$ çarpanlarına ayrılır ve tam kare olamaz.

Dolayısıyla denklemin tek çözümü:

$$\boxed{(x, y) = (45, 4)}$$

27. **Soru.**

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$$

denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz. (Bulgaristan Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. (Metin Can Aydemir)

Öncelikle $x = 0$ durumuna bakalım. O zaman:

$$7^y + 4 = 3^z$$

olur. Fakat bu denklem $\pmod 3$ altında incelendiğinde çözüm olmadığı net bir şekilde görülür. Dolayısıyla $x > 0$ olmalıdır.

Denklemi (mod 5) altında inceleyelim:

$$3^z \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow z \equiv 2 \pmod 4$$

Şimdi denklemi şu şekilde düzenleyelim:

$$3^z = 5^x \cdot 7^y + 4 \Rightarrow (3^{z/2} - 2)(3^{z/2} + 2) = 5^x \cdot 7^y$$

Çarpanların farkı 4 olduğundan bu iki çarpanın ikisi birden hem 5'e hem 7'ye bölünemez. Dolayısıyla:

$$\text{Ya } 3^{z/2} + 2 = 7^y \quad \text{ya da} \quad 3^{z/2} - 2 = 7^y$$

i) $3^{z/2} + 2 = 7^y$ ise bu eşitlik (mod 3)'te incelenirse çözüm gelmez.
ii) $3^{z/2} - 2 = 7^y$ ise $3^{z/2} + 2 = 5^x$ olur.
Bu iki ifadeyi birbirinden çıkartırsak:

$$5^x - 7^y = 4$$

Bu denklem (mod 5) altında incelenirse:

$$7^y \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow y \equiv 0 \pmod 4$$

Şimdi:

$$5^x = 7^y + 4 = 7^y + 4 \cdot 7^{y/2} + 4 - 4 \cdot 7^{y/2} \Rightarrow 5^x = (7^{y/2} + 2)^2 - 4 \cdot 7^{y/2}$$

$$= (7^{y/2} + 2 \cdot 7^{y/4} + 2)(7^{y/2} - 2 \cdot 7^{y/4} + 2)$$

Eğer bu iki çarpanın her ikisi de 5'e bölünüyorsa, farkları da 5'e bölünmelidir. Ancak bu fark:

$$4 \cdot 7^{y/4}$$

olur ve bunun 5'e bölünebilmesi imkansızdır.
O halde bu çarpanlardan en az biri 1 olmalı. Daha küçük olan:

$$7^{y/2} - 2 \cdot 7^{y/4} + 2 = 1 \Rightarrow (7^{y/4} - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$y = 0$ ise:

$$5^x = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x = 1, \quad 3^z = 9 \Rightarrow z = 2$$

Dolayısıyla tek çözüm:

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 2)}$$

28. **Soru.** $x^3 + y^3 - 5xy = -4$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. Önce $x + y = d$ diyelim. Böylece $y = d - x$ olur. Denkleme yazarsak

$$x^3 + (d - x)^3 - 5x(d - x) = -4$$

eşitliği elde edilir. Açılım ve sadeleştirme sonucunda x üzerinden ikinci dereceli denklem

$$(3d + 5)x^2 - d(3d + 5)x + d^3 + 4 = 0$$

şeklinde olur. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta = -(3d+5)(d-4)(d^2-d-4)$$

şeklinde hesaplanır.

Şimdi $\Delta \geq 0$ koşulunu inceleyelim. Eğer $d \geq 5$ olursa tüm çarpanlar pozitif olduğu için $\Delta < 0$ olur. Eğer $d \leq -2$ olursa yine işaret analizinden $\Delta < 0$ çıkar. Bu nedenle yalnız $d = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ değerlerini kontrol etmek yeterlidir.

- $d = -1, 0, 1, 2$ durumlarında $\Delta < 0$ çıkar, çözüm yoktur.
- $d = 3$ için $\Delta = 28$ elde edilir fakat bu bir tam kare değildir, çözüm yoktur.
- $d = 4$ için $\Delta = 0$ olur. Bu durumda $x = \frac{d}{2} = 2$ ve $y = 2$ bulunur.

Sonuç. Denklemin tek tam sayı çözümü

$$(x, y) = (2, 2)$$

olarak bulunur.

29. **Soru.**

$$x^2 - y^2 = 2xyz$$

denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. (Metin Can Aydemir)

Denklemi y^2'ye bölelim:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1 = 2z \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2z \cdot \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

Bu ikinci dereceden denklem $\frac{x}{y}$ için çözülürse:

$$\frac{x}{y} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2+4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2+1}$$

Burada $\frac{x}{y}$ rasyonel olduğundan $\sqrt{z^2+1}$ da rasyonel olmalıdır. Ancak bu yalnızca z^2+1 tamkare olduğunda mümkündür.

Fakat z pozitif olduğundan:

$$(z+1)^2 = z^2 + 2z + 1 > z^2 + 1 > z^2 = (z)^2$$

Yani z^2+1 iki ardışık tamkare arasındadır ve bu nedenle tam kare olamaz.

Bu durumda $\sqrt{z^2+1}$ irrasyonel olur ve $\frac{x}{y}$ rasyonel olamaz.

Dolayısıyla denklemde pozitif tam sayı çözümü yoktur:

$$\boxed{\text{Çözüm yoktur.}}$$

30. **Soru.** $\dfrac{5^m+2^np}{5^m-2^np}$ ifadesinin bir tam sayının karesi olmasını sağlayan tüm $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ ve p asal sayılarını bulunuz. (UMO Genç TST 2012)

Çözüm. İfadenin 0 olamayacağı açıktır. O halde

$$\frac{5^m+p\cdot 2^n}{5^m-p\cdot 2^n}=x^2$$

şeklinde x pozitif tam sayısı alalım. Ayrıca $5^m>p\cdot 2^n$ olduğunu not edelim. İçler dışlar çarpımıyla

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot 5^m=p\cdot 2^n$$

elde edilir. Sol taraf 5'in katı olduğundan $p=5$ olmalıdır. Polinom bölmesiyle

$$5^m-\frac{2\cdot 5^m}{x^2+1}=2^np$$

eşitliği yazılır. Buradan olasılıklar

$$x^2+1=1,\quad x^2+1=2,\quad x^2+1=5^a,\quad x^2+1=2\cdot 5^a,\quad (m\geq a\geq 1)$$

şeklinde olur.

1) $x^2+1=1$ durumunda çözüm gelmez.

2) $x^2+1=2$ durumunda $0=2^np$ çıkar, çözüm gelmez.

3) $x^2+1=5^a$ olsun. Bu durumda

$$5^m-2\cdot 5^{m-a}=p\cdot 2^n$$

elde edilir. (mod 2)'den bunun çözümü olamayacağı görülür.

4) $x^2+1=2\cdot 5^a$ olsun. Bu durumda

$$5^m-5^{m-a}=p\cdot 2^n.$$

- $m=1$ için $5-5^{1-a}=p\cdot 2^n$ olur. $a=1$ için $p=2,n=1,x=3$ çözümü bulunur:

$$(m,n,p,x)=(1,1,2,3).$$

- $m\geq 2$ için $m-a\geq 2$ olursa $p=5$ olmalı, fakat (mod 25) incelenirse çözümsüzdür.
- $m-a=1$ olsun. Bu durumda $p=5$ olmalı ve $5^{m-1}-1=2^n$ çıkar. Zsigmondy Teoremi gereği $m=2$ dışında çözüm gelmez. $m=2$ için $n=2,p=5,x=3$ bulunur:

$$(m,n,p,x)=(2,2,5,3).$$

- $m-a=0$ olsun. Bu durumda $5^m-1=p\cdot 2^n$ ve $x^2+1=2\cdot 5^m$ elde edilir. $5^m=p\cdot 2^n+1$ denkleminde $n\geq 3$ için $5^m\equiv 1 \pmod 8$ olduğundan m çift olmalıdır. Çift m'lerde 5^m-1 hem 2 hem 3'e bölünür. Zsigmondy Teoremi gereği $n\geq 4$ için yeni bir asal bölen vardır; bu da çelişkidir.
  $n=1$ için $5^m=2p+1$ olur. Bu durumda $x^2+1=4p+2 \implies (x-1)(x+1)=4p$ çıkar. Çarpanlar çift olmak zorunda olduğundan $x=3,p=2$ bulunur. Fakat buradan $m=1$ çıkar; oysa $m>1$ inceliyoruz. Çözüm gelmez.
  $n=2$ için $5^m=4p+1$, dolayısıyla $x^2+1=8p+2 \implies (x-1)(x+1)=8p$ çıkar. Fakat olasılıkların hepsi çelişkiye düşer. Çözüm yoktur.

Sonuç. Denklemin tüm (m, n, p) çözümleri

$$\{(1,1,2),(2,2,5)\}$$

şeklindedir ve her iki durumda da ifadenin değeri 9 bulunur.

31. **Soru.**

$$xy(x^2+y^2)=2z^2$$

denklemini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. (Metin Can Aydemir)

Verilen ifadeyi şu şekilde yazabiliriz:

$$xy(x^2+y^2)=\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{8}=2z^2$$

Buradan:

$$(x-y)^4+(4z)^2=(x+y)^4$$

elde edilir. Bu, özel bir Pythagorean üçlüsüne benzer biçimdedir. Fermat'ın Son Teoremi'ne göre, bu tür bir denklemin çözümü yalnızca $(x-y)=0$ veya $z=0$ durumlarında mümkündür.

Not: $a^4+b^2=c^4$ denkleminin çözümünün olmadığının ispatı için "Proof of Fermat's Last Theorem for specific exponents" başlıklı kaynak incelenebilir. (Bu varyasyonun ispatı ilerideki sorularda yapılıyor.)

i) $z=0$ için:

$$xy(x^2+y^2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ veya } y=0$$

Buna göre çözümler:

$$(x,y,z)=(0,k,0), \quad (k,0,0)$$

ii) $x=y$ ise:

$$2z^2=x^2(x^2+x^2)=2x^4 \Rightarrow z=\pm x^2$$

Buna göre çözümler:

$$(x,y,z)=(k,k,k^2), \quad (k,k,-k^2)$$

Tüm çözümler:

$$\boxed{(x,y,z)=(0,k,0),\ (k,0,0),\ (k,k,k^2),\ (k,k,-k^2)}$$

32. **Soru.**

$$p^3+p^2+11p+2=q$$

denklemini asal sayılar p ve q için çözünüz. (Ulusal Antalya M.O 2000)

Çözüm. $p>1$ olduğundan dolayı:

$$p^3+p^2+11p+2>15$$

Tam sayılar 6 ile bölündüklerinde şu kalıntılardan birini verir: $\{6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5\}$. Her bir durum için asal olup olmama durumunu inceleyelim:

- $p \equiv 0 \pmod 6$: p asal olamaz.

- $p \equiv 1 \pmod 6$: Uygun olabilir, sonsuz asal vardır.
- $p \equiv 2 \pmod 6$: Tek asal $p = 2$ olabilir.
- $p \equiv 3 \pmod 6$: Tek asal $p = 3$ olabilir.
- $p \equiv 4 \pmod 6$: p asal olamaz (çift ve >2).
- $p \equiv 5 \pmod 6$: Uygun olabilir, sonsuz asal vardır.

Şimdi her olası durumu mod 6 altında inceleyelim:

1) $p \equiv 1 \pmod 6$ için:

$$q = p^3 + p^2 + 11p + 2 \equiv 1 + 1 + 11 + 2 \equiv 15 \equiv 3 \pmod 6$$

$q > 3$ ve $q \equiv 3 \pmod 6$ olduğundan q asal olamaz (3'ten büyük olup 3'e bölünebilir). Çözüm yok.

2) $p \equiv 5 \pmod 6$ için:

$$p^3 \equiv 125 \equiv 5 \pmod 6, \quad p^2 \equiv 25 \equiv 1 \pmod 6$$

$$q \equiv 5 + 1 + 11 \cdot 5 + 2 \equiv 5 + 1 + 55 + 2 \equiv 63 \equiv 3 \pmod 6$$

Yine $q > 3$ ve $q \equiv 3 \pmod 6$ olduğundan q asal olamaz. Çözüm yok.

3) $p = 2$:

$$q = 8 + 4 + 22 + 2 = 36 \Rightarrow \text{asal değil}$$

4) $p = 3$:

$$q = 27 + 9 + 33 + 2 = 71 \Rightarrow \boxed{\text{asal}}$$

Dolayısıyla tek çözüm:

$$\boxed{(p, q) = (3, 71)}$$

33. **Soru.**

$$x^3 - y^3 = 2y^2 + 1$$

denklemini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. $x^3 - y^3$ ifadesi görüldüğünde yapılan klasik $x = y + m$ dönüşümünü yapalım. $x^3 - y^3 = 2y^2 + 1 > 0$ olduğundan $x^3 > y^3$, yani $x > y$ olur. Bu nedenle $m \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır.

$$(x, y) = (y + m, y) \Rightarrow (y + m)^3 - y^3 = 2y^2 + 1$$

$$3my^2 + 3m^2y + m^3 = 2y^2 + 1 \Rightarrow (3m - 2)y^2 + 3m^2y + m^3 - 1 = 0$$

Bu bir y'ye bağlı ikinci dereceden denklem. Diskriminantı hesaplayalım:

$$\Delta = 9m^4 - 4(3m - 2)(m^3 - 1) = -3m^4 + 8m^3 + 12m - 8$$

Bu Δ ifadesinin sıfırdan büyük olması gerekir.

$$m \geq 4 \Rightarrow \Delta \leq -84 < 0$$

Dolayısıyla $m < 4$ olmalıdır. $m \in \{1, 2, 3\}$ değerlerini deneyelim:

- $m = 1$:
$$(3 \cdot 1 - 2)y^2 + 3 \cdot 1^2 y + 1^3 - 1 = y^2 + 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ veya } y = -3$$
$$(x, y) = (1, 0),\ (-3, -2)$$
- $m = 2$:
$$4y^2 + 12y + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 144 - 112 = 32 \text{ (tam kare değil)}$$
- $m = 3$:
$$7y^2 + 27y + 26 = 0 \Rightarrow (y + 2)(7y + 13) = 0 \Rightarrow y = -2$$
$$x = y + m = -2 + 3 = 1 \Rightarrow (x, y) = (1, -2)$$

Dolayısıyla denklemin tüm çözümleri:

$$\boxed{(x, y) = (1, 0),\ (1, -2),\ (-3, -2)}$$

34. **Soru.**
$$x^4 + 4^x = p$$
denklemini p asal sayısı ve x tam sayısı için çözünüz.

Çözüm. $x = 1$ için:
$$1^4 + 4^1 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow p = 5$$
Bu bir çözümdür.

Soruya baktığımızda amacımızın $x^4 + 4^x = p$ ifadesini çarpanlarına ayırabilmek olabileceği akla gelmelidir.

$x > 1$ için çarpanlara ayıralım. Varsayalım ki $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$x^4 + 4^x = (2k)^4 + 4^{2k} = 16k^4 + 4^{2k}$$

Bu durumda p sayısı 4 ile bölüneceğinden dolayı asal olamaz. Yani x çift olamaz.

Dolayısıyla x tek olmalıdır. Ayrıca $4^x \equiv 4 \pmod 5$ ancak ve ancak $x = 2k+1$ (tek) olduğuna dikkat edelim.

$x^4 \equiv \{0, 1\} \pmod 4$ olduğu açıktır.

$p = x^4 + 4^x \equiv 0 \pmod 5$ olmaması için $x^4 \equiv 0 \pmod 5$ olmalıdır. Bu da $x \equiv 0 \pmod 5$ anlamına gelir. Aynı anda sayı tek olduğundan dolayı $x = 10k + 5$ olarak yazılır.

Bu durumda ifadeyi şu şekilde yazalım:

$$x^4 + 4 \cdot 4^{10k+4}$$

$2^{5k+2} = y$ dönüşümü yaparsak:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$$

Bu çarpanlara ayrılabilir yapı, p'nin asal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla asal olamaz.

Sonuç olarak denklemin tek çözümü:

$$\boxed{(x, p) = (1, 5)}$$

35. **Soru.**

$$c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

denklemini $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde çözünüz.

İlk Yol. Denklemde tüm değişkenlerin dereceleri çift olduğundan genelliği bozmadan $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ varsayabiliriz.

Denklem:

$$c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

$a = b = c = 0$ için $1 = (0-1)^2 = 1$ sağlandığından $(0, 0, 0)$ açık bir çözümdür.

Şimdi $a, b, c > 0$ varsayımıyla diğer çözümleri araştıralım.

Öncelikle $c^2 + 1$ sayısının özelliklerini inceleyelim:

- $c = 2k$ için $c^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1 \pmod 4$ - $c = 2k+1$ için $c^2 \equiv 1 \Rightarrow c^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$

Yani $c^2 + 1 \equiv 1$ veya $2 \pmod 4$ olabilir. Şimdi asal bölenlerini inceleyelim.

Eğer $p \mid c^2 + 1$ ise:

$$c^2 \equiv -1 \pmod p \Rightarrow c^4 \equiv 1 \pmod p$$

Bu durumda $c^4 \equiv 1$ sağladığına göre $4 \mid \varphi(p) = p - 1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır.

Dolayısıyla c^2+1 ifadesi yalnızca $4k+1$ biçiminde asal çarpanlara sahiptir. Öte yandan $(a^2-1)(b^2-1)$ çarpımı için:

- a ya da b çiftse, $a^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow a^2 - 1 \equiv 3 \pmod 4$ olabilir, yani $4k+3$ biçiminde bir bölen içerme ihtimali doğar. - a ya da b tekse, $a^2 - 1$ çift olur, ama $c^2 + 1$ ifadesi 4'ün katı olamaz.

Dolayısıyla bu çelişkilerden ötürü $a, b, c > 0$ durumunda denklem sağlanamaz.

İkinci Yol (Sonsuz İniş).

$a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = c_1$ olacak şekilde yazalım. Denklem şu hale gelir:

$$c_1^2 + 1 = (4a_1^2 - 1)(4b_1^2 - 1)$$

Çarpmayı açarsak:

$$c_1^2 + 1 = 16a_1^2b_1^2 - 4a_1^2 - 4b_1^2 + 1 \Rightarrow c_1^2 = 16a_1^2b_1^2 - 4a_1^2 - 4b_1^2$$

Yani:

$$c_1^2 = 4(4a_1^2b_1^2 - a_1^2 - b_1^2) \Rightarrow \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 = 4a_1^2b_1^2 - a_1^2 - b_1^2$$

Şimdi $c_2 = \frac{c_1}{2}$, $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$ tanımıyla aynı formda bir denklem daha elde ederiz:

$$c_2^2 = 4a_2^2b_2^2 - a_2^2 - b_2^2$$

Bu süreci sürekli tekrar edersek:

$$c > c_1 > c_2 > c_3 > \cdots > 0$$

şeklinde pozitif tamsayılar arasında sonsuz azalan bir dizi elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Çünkü pozitif tamsayılar arasında böyle bir sonsuz azalan dizi olamaz.

Bu nedenle $c > 0$ durumunda çözüm yoktur.

Sonuç: Tek çözüm:

$$\boxed{(a, b, c) = (0, 0, 0)}$$

36. **Soru.**

$$9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$$

denklemini $x, y \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde çözünüz.

Çözüm. Öncelikle $3^x = a$ değişkeniyle ifadeyi sadeleştirelim. Bu durumda:

$$a^2 - a = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$$

Her iki tarafı 4 ile çarpıp 1 ekleyelim:

$$4a^2 - 4a + 1 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1 \Rightarrow (2a-1)^2 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1$$

Bu ifadeyi bir tam karenin karesi olarak yazalım:

$$(2a-1)^2 = \left(2y^2 + my + 1\right)^2 \Rightarrow 4y^4 + 4my^3 + (4+m^2)y^2 + 2my + 1$$

Bu iki ifadeyi karşılaştıralım: - y^3 terimi için $4m = 8 \Rightarrow m = 2$ - y^2 terimi için: $(4+m^2) = 4+4 = 8$ uyuyor - y terimi için: $2m = 4$ uyuyor

Yani:

$$(2a-1)^2 = (2y^2+2y+1)^2 \Rightarrow 2a-1 = \pm(2y^2+2y+1) \Rightarrow a = \frac{1 \pm (2y^2+2y+1)}{2}$$

Bu durumda a'nın tam sayı olabilmesi için $(2y^2+2y+1)$ tek sayı olmalıdır — bu da her $y \in \mathbb{Z}$ için sağlanır.

Ancak $a = 3^x$ pozitif bir tam sayı olduğundan sadece:

$$2a - 1 = (2y^2+2y+1) \Rightarrow a = y^2 + y + 1$$

Dolayısıyla:

$$3^x = y^2 + y + 1$$

Bu noktadan sonra bu denklemi test ederek çözüm arayalım:

- $y = 0$: $3^x = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$
- $y = 1$: $3^x = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$
- $y = 2$: $3^x = 4 + 2 + 1 = 7 \rightarrow x$ tam sayı değil
- $y = 3$: $3^x = 9 + 3 + 1 = 13 \rightarrow x$ tam sayı değil

$y > 1$ için $y^2 + y + 1$ ifadesi 3'ün kuvveti olamayacak şekilde hızlı büyür. Deneyerek başka çözüm gelmediği görülür.

Sonuç: Denklemin tüm çözümleri:

$$\boxed{(x, y) = (0, 0),\ (1, 1)}$$

37. **Soru.** x ve y, 5'ten büyük asal çarpanı olmayan pozitif tam sayılar olmak üzere, $k \geq 0$ bir tam sayı iken

$$x^2 - y^2 = 2^k$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$(x-y)(x+y)=2^k$ olduğundan $x+y=2^m$, $x-y=2^n$ olur.

$x=2^{m-1}+2^{n-1}$ ve $y=2^{m-1}-2^{n-1}$ olarak bulunur.

Burada y tek bir pozitif tam sayı olduğundan $m=1$ ya da $n=1$ olmalıdır.

$m=1$ olursa $y=2^0-2^{n-1}\le 0$, pozitif olmasıyla çelişir. O halde $n=1$ olmalıdır.

$x-y=2$ elde edileceğinden x ve y aynı anda ortak asal çarpan içeremez.

$x=3^k,\ y=3^l$ veya $x=5^k,\ y=3^l$ olmalıdır.

$x=3^k,\ y=5^l$ için $5^l=2^{m-1}-1$ olduğunu görürüz. Mod 4 altında bakarsak

$$2^{m-1}\equiv 2 \pmod 4,$$

$m=2$ tek çözümdür. $m=2$ ve $n=1$ yerine koyunca $(x,y)=(3,1)$ elde edilir.

$x=5^k$ ve $y=5^l$ ise $3^m\equiv\{1,3\} \pmod 8$ olmalıdır.

$2^{m-1}\equiv\{2,4\} \pmod 8$ olduğundan $m=2$ ya da $m=3$ olabilir.

$m=2$ için $x=3$ olur; ancak $x=5^k$ formunda kabul edilmemiştir.

$m=3$ için $x=5$ ve $y=3$ olur. O halde $(5,3)$ de bir çözümdür.

Denklemin çözüm kümesi $\{(3,1),(5,3)\}$ olarak bulunur.

38. **Soru.** n^2+3^n sayısını tamkare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz. (Genç Balkan MO 2000)

Çözüm.

$m^2=n^2+3^n$ eşitliğini sağlayan bir pozitif tam sayı olsun. $(m-n)(m+n)=3^n$ olduğundan $m-n=3^k$ ve $m+n=3^{n-k}$ olmasını sağlayan bir $k\ge 0$ tam sayısı vardır. $m-n<m+n$ olduğundan $3^k<3^{n-k}$, yani $k<n-k$ ve dolayısıyla $2k<n$, yani $n-2k\ge 1$.

$n-2k=1$ ise
$$2n=(m+n)-(m-n)=3^{n-k}-3^k=3^k\big(3^{n-2k}-1\big)=2\cdot 3^k$$
olur. Buradan $3^k=2k+1$ elde edilir.

$f(k)=3^k-2k-1$ olsun. $k>0$ için tam sayılarda $f(k+1)>f(k)$ olduğunu gösterelim:

$$f(k+1)=3^{k+1}-2(k+1)-1=(3^k-2k-1)+(2\cdot 3^k-2)>3^k-2k-1,$$

çünkü $3^k>1$dır. Bu da $k\ge 1$ için doğrudur. Ayrıca $f(1)=0$ olduğundan $k\ge 2$ için $f(k)>0$. $k=0$ da denenmelidir ve sağlar.

Sonuç olarak $k=0$ için $n=1$, $k=1$ için $n=3$.

$n=1$ için $n^2+3^n=4$, $n=3$ için $n^2+3^n=36$.

Gelelim $n-2k>1$ durumuna. $n-2k\ge 2$ ise $k\le n-k-2$ olur. $m-n<m+n$ eşitsizliğiyle $3^k\le 3^{n-k-2}$.

$$2n=3^{n-k}-3^k\ge 3^{n-k}-3^{n-k-2}=8\cdot 3^{n-k-2}.$$

Daha önce ispatladığımız $3^x>2x+1$ eşitsizliğini kullanarak,

$$8\cdot 3^{n-k-2}\ge 8\big(1+2(n-k-2)\big)=16n-16k-24.$$

Dolayısıyla
$$2n\ge 16n-16k-24 \ \Rightarrow\ 8k+12\ge 7n.$$

Oysa $n\ge 2k+2$ olduğundan $7n\ge 14k+14$. Bu durum

$$8k+12>14k+14 \ \Rightarrow\ -6k>2 \ \Rightarrow\ k<0$$

sonucunu verir; bu da $k \geq 0$ koşuluyla çelişir.

Böylece yalnızca $k = 0$ veya $k = 1$ mümkündür. $k = 0$ için $m - n = 1$, $m + n = 3^n$ denkleminden $3^n = 2n + 1$ olur ve $n = 1$. $k = 1$ için $m - n = 3$, $m + n = 3^{n-1}$ ve benzer bir kıyaslamayla $n = 3$. Sonuç:

$$n = 1 \implies n^2 + 3^n = 4, \quad n = 3 \implies n^2 + 3^n = 36.$$

39. **Soru.** a, b, m, n pozitif tam sayılardır. $n > 1$ için

$$a^n + b^n = 2^m$$

ise $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. İfadeyi pozitif tam sayılarda ispatlayalım. (Muhtemelen istenen durum bu ve sorunun çalışabilmesi için $n > 1$ olmalıdır.)

$a = dx$, $b = dy$, $(x, y) = 1$ olacak şekilde x, y, d pozitif tam sayılarını alalım. Buradan

$$d^n \cdot (x^n + y^n) = 2^m$$

olduğu için ve $d \mid 2^m$ olduğundan d 2'nin kuvveti olmalıdır. O halde

$$x^n + y^n = 2^z$$

olacak şekilde z pozitif tam sayısı vardır. ($z = 0$ olamaz çünkü $x^n + y^n = 1$ olunca x, y aynı anda pozitif olamaz.)

n çift olsun ve varsayalım ki x, y tek sayılar olsun. Bu durumda $x^n + y^n \equiv 2 \pmod 4$ olacağı açıktır. $z = 1$ tek olası çözümdür. Bu durumda da $x = 1$ ve $y = 1$ sağlar. Bu da bize $a = b$ olduğunu gösterir.

x, y zıt paritede olursa sol taraf tek sayı geleceğinden çelişkidir.

x, y çift olursa $(x, y) = 1$ olamaz. Çelişki.

n tek sayı olmalıdır. O halde

$$x^n + y^n = (x + y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\right)$$

şeklinde ifadeyi faktörize edebiliriz. Benzer şekilde x, y aynı anda tek olması gerektiğinden 2. çarpan daima tek sayıdır. Dolayısıyla bu sayı 1 eşit olmalıdır.

Bu durumda $x + y = 2^z$ olur. Yani

$$x^n + y^n = x + y$$

elde edilir. Ancak bu da $x = 1$ için $x^n = x$ ve $y = 1$ için $y^n = y$ olduğundan ve $x > 1$ için $x^n > x$ ve $y > 1$ için $y^n > y$ olduğundan $x = 1$ ve $y = 1$ olmalıdır. Bu da bize $x = y$ yani $a = b$ sonucunu verir.

Geriye $n = 1$ durumu kalır. Bu durumda da $a = 2^m - b$ elde ederiz. Bu durumda $a = b$'nin çalışmadığına dair bir örnek olarak $(a, b, m) = (2, 6, 3)$ durumu örnek verilebilir.

40. **Soru.** $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

Çözüm.

$m = 0$ için $n = 1$, $n = 0$ için ise $m = 3$ olmalıdır. Fakat $m, n > 0$ şeklindeki çözümleri arıyoruz. $2^m + 3^n = k^2$ olduğundan $\gcd(2, k) = \gcd(3, k) = 1$, bu nedenle k'nın 2'nin veya 3'ün katı olmadığı görülür. $k = 6k \pm 1$ olur. $k^2 \equiv 1 \pmod{12}$ bulunur.

Denklemi 3 modunda incelersek $2^m \equiv 1 \pmod 3$, yani m çifttir. Denklemde $2^m \geq 4$ olduğundan $2^m \equiv 0 \pmod 4$ olur. Bunu kullanırsak $3^n \equiv 1 \pmod 4$, buradan da n çift olmalıdır.

$m = 2M$, $n = 2N$ dönüşümleri yapılırsa

$$(2^M)^2 + (3^N)^2 = k^2$$

ifadesine dönüşür. $\gcd(2,3) = 1$ olduğundan pisagor üçlüsünün ilkel çözümlerine eşittirler:

$$2^M = 2xy, \quad 3^N = x^2 - y^2, \quad k = x^2 + y^2.$$

$2^{M-1} = xy$ ve $M > 1$ olduğundan $x = 2^u$, $y = 2^v$ dönüşümleri yapılabilir. $u + v > 0$ ve $u > v$ elde edilir. $2^{2u} - 2^{2v} = 3^N$ ifadesinden $v = 0$ olduğu görülür.

$2^u + 1 = 3^s$ ve $2^u - 1 = 3^r$ olduğundan

$$2^{u+1} = 3^r\left(3^{s-r} + 1\right)$$

buradan $r = 0$ olması gerektiği görülür. $r = 0$ için $u = 1$, $s = 1$ bulunur; yani $x = 2$, $y = 1$, dolayısıyla

$$k = x^2 + y^2 = 5, \quad 3^N = 3 \Rightarrow N = 1, \quad 2^M = 4 \Rightarrow M = 2,$$

yani $m = 4$, $n = 2$, $k = 5$ çözümü elde edilir.

Pozitif tam sayılarda tek çözüm $\boxed{(m, n, k) = (4, 2, 5)}$ dir.

41. **Soru.** $p^m q^n = (p + q)^2 + 1$ olacak şekildeki tüm (m, n, p, q) pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. (Metin Can Aydemir)

Öncelikle $p = q$ için çözüm var mı araştıralım. Denklem

$$p^{m+n} = 4p^2 + 1$$

olur. Sol taraf p ile bölündüğünden, $4p^2 + 1$ ile 1 sayısı da p ile bölünmek zorundadır. Bu ancak $p = 1$ ile mümkün olur; fakat $p = 1$ denklemi sağlamaz. Şimdi genelliği bozmadan $p > q$ kabul edelim.

Eğer $m \geq 3$ ise

$$p^m q^n \geq p^3, \quad (p + q)^2 + 1 \leq (p + p)^2 + 1 = 4p^2 + 1,$$

dolayısıyla

$$p^3 \leq 4p^2 + 1 \implies p \leq 4.$$

$p = 1$ olamaz çünkü $p > q \geq 1$'dir. $p = 2$ için $q = 1$ olmalıdır; ancak $2^m = (2 + 1)^2 + 1$ denkleminin çözümü yoktur. $p = 3$ için $q = 1$ veya $q = 2$, her iki durumda da çözüm bulunmaz. $p = 4$ için $q = 1, 2, 3$ denersek yine çözüm yoktur.

i) $m = 2$ olur. Bu durumda $q = 1$ için $p^2 = (p + 1)^2 + 1$ denkleminin çözümü yoktur, dolayısıyla $q \geq 2$. Denklemi düzenlersek

$$p^2(q^n - 1) - 2pq - (q^2 + 1) = 0.$$

Bu, p'ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. Vieta'dan köklerin çarpımı

$$-\frac{q^2 + 1}{q^n - 1}$$

olduğundan köklerden biri pozitif, diğeri negatiftir. Pozitif kök

$$p = \frac{q + \sqrt{q^{n+2} - q^n + 1}}{q^n - 1}$$

olur. İfade > 1 olduğundan

$$q + \sqrt{q^{n+2} - q^n + 1} > q^n - 1 \implies q^{n+2} - q^n + 1 \geq (q^n - q)^2$$

gibi bir dizi eşitsizlik sağlanmalıdır. Bu analiz $n \geq 4$ için çelişki verir; $n = 3$ için $q \leq 3$ gerekir, ama $q = 2, 3$ hiçbir çözüm vermez. $n = 2$ ise $(pq)^2 = (p+q)^2 + 1$ olur; aralarında bir fark olan tek tam kareler 0 ve 1'dir, yine çelişki. $n = 1$ için

$$p^2 q = (p+q)^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 + q(2p - p^2) + p^2 + 1 = 0.$$

Bu denklemin kökleri Vieta'dan hem pozitif tam sayı hem de biri p'den küçük, diğeri $> p$ olmalıdır. Yapılan analiz sonucunda tek çözüm $(p, q) = (5, 2)$, dolayısıyla $(p, q, m, n) = (5, 2, 2, 1)$.

ii) $m = 1$ olur. Bu durumda q çift olamaz; aksi takdirde $(p+q)$ tek kalır ve $(p+q)^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ olur, bu da ancak $n = 1$ için mümkün ama o da çözüm vermez. Dolayısıyla $n \geq 2$, $q \geq 3$. Denklemi düzenlersek

$$p^2 - p(q^n - 2q) + (q^2 + 1) = 0.$$

Kökler $p_1 > p_2$ olsun. Pozitif tam kök ve $p_2 \geq 2$ zorunluluğuyla yapılan kıyaslamalar sonucunda tek çözüm $(p, q) = (13, 5)$, yani $(p, q, m, n) = (13, 5, 1, 2)$.

Sonuç olarak tüm çözümler:

$$(p, q, m, n) = (5, 2, 2, 1),\ (2, 5, 1, 2),\ (5, 13, 2, 1),\ (13, 5, 1, 2).$$

Alternatif Yöntem

$p^m q^n = (p+q)^2 + 1 = p^2 + 2pq + q^2 + 1$ olduğu için $p \mid q^2 + 1$ ve $q \mid p^2 + 1$ olduğu açıktır.

$p = q$ olduğunu düşünelim. $p \mid p^2 + 1$ olur. $p \mid 1$ çıkar ki bu mümkün değildir.

Genelliği bozmadan $p < q$ alalım. $p = 1$ durumu $q = 2$ durumunu gerektirir ki mümkün değildir. $q > p \geq 2$

$$p^m q^n = (p+q)^2 + 1 < 4q^2 < p^2 q^2 < pq^3 \leq p^m q^3$$

eşitsizliklerinden $n < 3$ olduğu açıktır.

$n = 2$ için $p^m < 4$ olur. $m = 1$, $p = 2$ veya $p = 3$ olduğunu kullanalım.

$p = 2$ için

$$2q^2 = (2+q)^2 + 1$$

olur ve bu $q = 5$ için çözümdür.

$p = 3$ için

$$3q^2 = (3+q)^2 + 1$$

olur; çözümü yoktur.

$n = 1$ için $p^m < 4q$ gelir. $q \mid p^2 + 1$ olduğunu biliyoruz.

$q = p^2 + 1$ ise

$$p \mid q^2 + 1 = p^4 + 2p^2 + 2$$

bu da $p \mid 2$ olduğunu gösterir. $p = 2$ ise $q = 5$ bulunur; sağ taraf 25 ile bölünürken sol taraf 5 ile bölünmez, çelişki.

Bu nedenle

$$q \leq \frac{p^2+1}{2}.$$

$p^m < 2\left(p^2 + 1\right)$ elde edilir. $p = 2$ için $m \leq 3$, diğer durumlarda $m \leq 2$ bulunur.

$p = 2$ olması $q \leq \frac{5}{2}$ demektir; fakat $q > p$, çelişki.

Dolayısıyla $m \leq 2$.

$m=1$ için
$$pq=(p+q)^2+1$$
olur; çözüm vermez.

$m=2$ için $p^2<4q$ olur. $q\mid p^2+1$ olduğundan $p^2+1=kq$ ile $k=1,2,3,4$ denenir. Mod3 ve mod4 analiziyle yalnızca $k=2$ kalır:
$$p^2+1=2q \implies p^4+2p^2+5=4q^2+4.$$
$p\mid q^2+1$ olduğundan $4p\mid p^4+2p^2+5$, buradan $p\mid 5$ elde edilir. $p=5$ ve $q=13$.

Sonuç:
$$(m,n,p,q)\in\{(2,1,5,2),(2,1,5,13),(1,2,2,5),(1,2,13,5)\}.$$

42. **Soru.** $ab\neq 1,\ a,b\geq 0$ olmak üzere
$$k=\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$$
ifadesi ile elde edilebilecek tüm $k\geq 0$ değerlerini bulunuz.

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $b=0$ için $k=-a^2$ olur fakat $k\geq 0$ olduğundan $a=k=0$ olabilir. Benzer şekilde $a=0$ için de aynı durum gelir. $a=b>0$ için,
$$k=\frac{3a^2}{a^2-1}=3+\frac{3}{a^2-1}$$
olur. Buradan tek çözüm $a=2$, $k=4$'tür. Şimdi genelliği bozmadan $a>b$ olsun.

i) $b=1$ ise
$$k=\frac{a^2+a+1}{a-1}=a+2+\frac{3}{a-1}$$
olur. Buradan $a=2$ ve $a=4$ çözümleri gelir ve her ikisi için de $k=7$'dir.

ii) $a>b>1$ ise
$$k=\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}\geq\frac{3ab}{ab-1}>3$$
olduğundan $k\geq 4$ olur. Ayrıca $k=4$'ün sağladığını zaten biliyoruz. Dolayısıyla $k>4$ için incelememiz yeterlidir. Şimdi bu fonksiyonu ve $m>n>1$ şartını sağlayan tamsayı çiftlerinin arasından en küçük m değerli olanı alalım:
$$f(x)=x^2-(k-1)\,n\,x+(n^2+k).$$
m bu fonksiyonun bir çözümüdür. $n^2\geq 4$ olduğundan
$$f(n)=k-(k-3)n^2<0.$$
Eşit olamaz çünkü eşit olursa
$$n^2(k-3)=k \implies k=n^2(k-3)\geq 4k-12 \implies k=4,$$
çıkar, çelişki.

f bir paraboldür ve kolları yukarı doğru bakar; $f(n)<0$ ise n iki kök arasında olmalıdır. Diğer kök p olsun; $m>n>p$. Vieta'dan
$$m+p=(k-1)n,\quad m\,p=n^2+k.$$
buradan p pozitif tamsayı bulunur. Dolayısıyla (m,n,k) çözüm ise (n,p,k) da bir çözümdür; bu da m'nin en küçük olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $p=1$ olmalıdır. Buradan önceki çözümler elde edilir.

Sonuç:
$$k\in\{0,4,7\}.$$

43. **Soru.** $x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç çözümü vardır?

Çözüm.

İfadeyi adım adım düzenleyelim.

$$x^{2006} = 4y^{2007} + 4y^{2006} + 2007y + 2006$$
$$x^{2006} + 1 = (4y^{2006} + 2007)(y+1)$$

Şimdi ise

$$4y^{2006} + 2007 \equiv 3 \pmod 4$$

olduğunu görelim. Buradan $x^{2006} + 1$ ifadesinin $4k+3$ formunda çarpanı olması gerektiği görülür. $x^{1003} = t$ dersek:

Şimdi $t^2 + 1$ için geçerli olan özellikler bulalım.

- $t = 2k$ olursa $t^2 + 1 \equiv 1 \pmod 4$ olur. - $t = 2k+1$ olursa $t^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ olur. (1)

Şimdi $t$nin 2 dışında asal çarpanlarının tamamının $4k+1$ formunda olduğunu gösterelim. (2)

$p \mid t^2 + 1$ olsun. $t^2 \equiv -1 \pmod p$ olur $t^4 \equiv 1 \pmod p$

$p \mid t^2 + 1$ olduğundan $(t, p) = 1$ dir. Fermat teoreminden $t^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ Buradan 4'ün $p-1$ in en küçük katı olduğunu görmek mümkündür, yani $4 \mid p-1$.

Buradan $t^2 + 1$'in $4k+3$ formunda çarpanı bulunmamalıdır. Dolayısıyla denklemin çözümü yoktur.

44. **Soru.** $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denklemini sağlayacak x_n, y_n tek bir doğal sayı ikilisinin bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$n = 3$ için $(1,1)$ bir çözümdür.

$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denkleminin sağlandığını kabul edelim. Öyle ki $7X_n^2 + Y_n^2 = 2^{n+1}$ çözümü bulunduğunu gösterelim.

$$7\left(\tfrac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2\left(7x_n^2 + y_n^2\right) = 2^{n+1}$$

Olduğundan dolayı $x_n + y_n$ çift olacak şekilde bir çözüm daima vardır. $n = 3$ için $(1,1)$ çözümü olduğundan $n = 4$ için bu özelliği kullanarak örneğin $(0,4)$ ya da $(1,3)$ çözümlerini görürüz.

45. **Soru.** $\varphi(n) = \varphi(2n)$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. ($\varphi(n)$: 1 ile n arasında (n dahil), n'den küçük ve n ile aralarında asal pozitif tam sayıların sayısı.)

Çözüm. Euler–φ fonksiyonunun özelliklerinden dolayı gerek ve yeter şartın $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olacak şekilde sayıların seçilmesi yeterli olacaktır. Şimdi bunu gösterelim.

Öncelikle Euler–φ fonksiyonunun değerini bulduran formülü ispatlayalım. $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ olsun.

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i - 1}(p_i - 1).$$

Bunu ispatlamak için önce bir lemma elde edelim.

Lemma 1.

$$\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1},$$

p asal ve m pozitif tam sayı iken geçerlidir.

İspat: $1 \leq i \leq p^m$ ve $(i, p^m) = d$ olsun. Eğer $d > 1$ ise d'nin asal böleni q vardır ve $q \mid p^m$ olduğundan $q = p$. Yani $p \mid i$. p^m ile aralarında asal olmayan tam sayılar

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{m-1}p$$

sayısı kadardır. Toplam p^m sayıdan p^{m-1} tanesi çıkarılırsa

$$\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}.$$

Şimdi asıl ispatımıza dönelim. $t = 1$ için Lemma 1'den apaçıktır. $t > 1$ için tümevarıma gidelim.

$$n_1 = \prod_{i=1}^{t-1} p_i^{e_i}, \quad n = n_1 \, p_t^{e_t}, \quad (n_1, p_t^{e_t}) = 1$$

olduğuna göre

$$\varphi(n) = \varphi(n_1)\, \varphi(p_t^{e_t}).$$

Tümevarım hipotezinden

$$\varphi(n_1) = \prod_{i=1}^{t-1} p_i^{e_i - 1}(p_i - 1), \quad \varphi(p_t^{e_t}) = p_t^{e_t} - p_t^{e_t - 1},$$

bunları çarparsak

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i - 1}(p_i - 1).$$

Şimdi $\varphi(n) = \varphi(2n)$ koşulunu inceleyelim. Eğer $2^a \parallel n$ ve $n = 2^a n_2$ çift olursa,

$$\varphi(2n) = \varphi\big(2^{a+1}\big)\, \varphi(n_2) = \big(2^{a+1} - 2^a\big)\, \varphi(n_2),$$

$$\varphi(n) = \varphi\big(2^a\big)\, \varphi(n_2) = \big(2^a - 2^{a-1}\big)\, \varphi(n_2),$$

olacağından

$$\frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)} = \frac{2^a}{2^{a-1}} = 2 \neq 1.$$

Bu mümkün değildir. Dolayısıyla n tek olmalıdır.

46. **Soru.** $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz. (Bu soru FST $n = 4$'ün özel bir durumudur. (Bu pdf'teki diğer birçok soruda kullanılan teorik bir ispat içeriyor.)

Çözüm. Varsayalım ki bu denklemin $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ için pozitif tam sayı bir çözümü olsun. $(x_0, y_0) = d$ olsun. O halde $d^2 \mid z_0$ olacağından dolayı $\left(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}, \frac{z_0}{d^2}\right)$ de bir çözüm olmalıdır. Bu çözümdeki değişkenleri sırasıyla a, b, c olarak alırsak

$$S = \Big\{\, c \in \mathbb{Z}^+ : a^4 + b^4 = c^2 \text{ ve } (a, b) = 1 \text{ olacak şekilde } a, b \in \mathbb{Z}^+ \Big\}$$

şeklinde soruyu düşünebiliriz.

Yukarıdaki S varsayımından dolayı $S \neq \emptyset$ olması gerektiğinden iyi sıralanma ilkesi gereğince S nin en küçük elemanı olmalıdır. $(a^2, b^2, c) = 1$ ve

$$(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$$

şeklinde düşünürsek $(s, t) = 1$ ve $s \not\equiv t \pmod 2$ için

$$a^2 = 2st, \quad b^2 = s^2 - t^2, \quad c^2 = s^2 + t^2$$

olduğunu gösterelim.

İspat:

Lemma: İspata girerken öncelikle a çift olduğu için b ve c nin tek olduğunu gösterelim. $a^2+b^2=c^2$ denkleminde a ile b'nin ikisinin de tek olması $c^2 \equiv 2 \pmod 4$ olmasına neden olur. Her ikisinin de çift olması ise $(a,b,c)=1$ kabulünden dolayı çelişir.

Burada bizim çift olan terimimiz a olduğu için $c+b$ ile $c-b$ de çift olmalıdır. $a=2r$, $b+c=2u$, $b-c=2v$ olacak şekilde $r,u,v \geq 1$ tam sayıları vardır. $a^2=b^2-c^2$ olduğundan $4r^2=2u\cdot 2v$, yani $r^2=uv$ elde edilir.

Şimdi $(u,v)=1$ olduğunu hızlıca gösterelim: $d=(u,v)$ olsun. $c-b=2u$ ve $c+b=2v$ olduğundan $c=u+v$ ve $b=u-v$ olmalıdır. $d \mid c$ ve $d \mid b$ ise $(b,c)=1$ olduğu için $(u,v)=1$ olmalıdır. $(u,v)=1$ olduğundan dolayı u ile v ayrı ayrı tam karedir: $u=s^2$, $v=t^2$, $s,t \geq 1$. İfadeleri düzenlersek

$$a^2=2st, \quad b^2=s^2-t^2, \quad c^2=s^2+t^2$$

olduğu ispatlanmış olur.

2. eşitlikten $b^2+t^2=s^2$ bulunur. $(s,t)=1$ olduğundan $(b,s,t)=1$ olmalıdır. Pisagor üçlülerini Lemma'mızdan dolayı b tek olduğu için t çift, s tek olmalıdır.

$a^2=2st$ olduğundan $\left(\frac{a}{2}\right)^2=s\cdot\frac{t}{2}$ olur. $s=u^2$ ve $t=2v^2$, $u,v\geq 1$ tam sayıları vardır. $b^2+(2v^2)^2=(u^2)^2$ bulunur. $(s,t)=1$ olduğundan $(u,v)=1$ olacağı da açıktır. s tek olduğundan u tektir.

İspatını verdiğimiz ifadeyi tekrar kullanacak olursak

$$2v^2=2ef, \quad b^2=e^2-f^2, \quad u^2=e^2+f^2$$

ve $(e,f)=1$ olacak şekilde $e,f\geq 1$ tam sayıları vardır. $v^2=ef$ olduğundan $e=q^2$, $f=r^2$ elde edilir. O halde $u^2=q^4+r^4$ elde edilir. $(e,f)=1$ olduğu için $(q,r)=1$ de olmalıdır. Fakat $u\leq s\leq a^2<c$ olduğundan ve c en küçük olmasıyla çelişir. O halde denklemin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur.

Çözüm tam sayılarda olsa idi $x\,y\,z=0$ ifadesi sağlanmalıydı çünkü $x^4+y^4=z^2$ için çözümümüzü $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ kümesine genelleyebilirdik; o halde x,y den biri çift olmalıdır ve o sayı da 0'a eşit olmalıdır. Bu nedenle $x\,y=0$ elde edilebilirdi.

47. **Soru.** $a!+b^3=18+c^3$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (UMO 1. Aşama 2013)

Çözüm.

$x^3\equiv -1,0,1 \pmod 7$ olduğunu kullanalım. $18+c^3-b^3\in\{2,3,4,5,6\} \pmod 7$ elde edilebilir. yani $a!\not\equiv 0 \pmod 7$ olduğundan dolayı $a<7$ olduğunu buluruz.

(a) $a=2$ için $b^3-c^3=16$ olur. $c\geq 2$ için $b>c$ olduğundan dolayı en az $b=c+1$ olabilir. bunun için ise $3c^2+3c+1$ $c\geq 2$ için çözümsüzdür. $c=1$ olması durumunda ise $7=16$ olacağından dolayı çözümü yoktur. $b=c+2$ olsa idi $6c^2+12c+8>16$ olacağından dolayı $a=2$ için çözümü yoktur.

(b) $a>2$ için $3\mid b^3-c^3$ olduğundan dolayı $9\mid b^3-c^3$ de olması gerektiğinden dolayı $a\geq 6$ olması gerektiği bulunur. Dolayısıyla $a=6$ olmalıdır.

$a=6$ için $c^3-b^3=702=2\cdot 3^3\cdot 13$ olur.

$$(c-b)(c^2+bc+b^2)=702 \quad\Longrightarrow\quad (c-b)[(c-b)^2+3bc]$$

$3\mid c-b$ olur. dolayısıyla $3x=c-b$, $x\in\mathbb{Z}^+$ vardır.

$$3x\,(9x^2+3bc)=2\cdot 3^3\cdot 13 \quad\Longrightarrow\quad x\,(3x^2+bc)=2\cdot 3\cdot 13.$$

$x>3$ için $3x^2+bc>27$ olur ve

$$x\,(3x^2+bc)>81>78$$

olduğundan çözüm yoktur. $x=1$ veya $x=2$ olmalıdır.

(a) $x = 1$ için $1\,(3 + bc) = 78 \;\Rightarrow\; bc = 75$ ve $c - b = 3 \cdot 1 \;\Rightarrow\; b(b+3) = 78$ olur ancak çözüm gelmez.

(b) $x = 2$ için $2\,(12 + bc) = 78 \;\Rightarrow\; 12 + bc = 39 \;\Rightarrow\; bc = 27$ ve $c - b = 3 \cdot 2 \;\Rightarrow\; b(b+6) = 27 \;\Rightarrow$ $b = 3,\; c = 9$ çözümü gelir.

O halde denklemin çözümü $(a, b, c) = (6, 3, 9)$ olmalıdır.

48. **Soru.** $m^3 - n^3 = 9^k + 123$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır? (UMO 1. Aşama 2014)

Çözüm.

$x^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod 3$ olduğunu ve denklemden dolayı $k > 0$ için

$$m^3 - n^3 \equiv 6 \pmod 9$$

olması gerektiğini görürüz. Ancak $m^3 - n^3 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \pmod 9$ olduğundan dolayı denklem sağlanamaz. Dolayısıyla $k = 0$ olmalıdır.

$m^3 - n^3 = 124$ denklemini çözmemiz yeterlidir.

$$(m-n)\big[(m-n)^2 + 3mn\big] = 124.$$

$$\begin{cases} m - n = 1, \\ (m-n)^2 + 3mn = 124 \end{cases} \qquad \begin{cases} m - n = 2, \\ (m-n)^2 + 3mn = 62 \end{cases} \qquad \begin{cases} m - n = 4, \\ (m-n)^2 + 3mn = 31 \end{cases}$$

İlk sistemi incelersek $m - n = 1$ ve $3mn = 123$ yani $mn = 41$ olur; iki ardışık sayının çarpımı olarak yazılamaz, çözümsüzdür.

İkinci sistemde $m - n = 2$ ve $3mn = 58$ olduğundan $mn \notin \mathbb{Z}$, çözümsüzdür.

Üçüncü sistemde $m-n = 4$ ve $3mn = 45$ olup $mn = 15$ bulunur. $n(n+4) = 15$ denklemi $n^2+4n-15 = 0$ çözümü $n = 1$ verir, $m = 5$ olur. Böylece tek çözüm $\boxed{(m, n, k) = (5, 1, 0)}$ şeklindedir.

49. **Soru.** p, $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ birer asal sayı olacak şekildeki p sayıları için

$$2x^3 - y^3 = p$$

denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm.

Öncelikle p değerini bulalım. $p = 5a + b$ olsun. p^2'yi bulalım.

$$(5a + b)^2 = 25a^2 + 10ab + b^2 = 5\,(5a^2 + 2ab) + b^2.$$

Bu ifadede $5a^2 + 2ab = c$ dönüşümünü yapalım. $p^2 = 5c + b^2$ olur.

1) $b = 0$ olarak alırsak 5'in katı tek asal sayı 5 olacağı için $p = 5$ olmalıdır. $4p^2 + 1 = 101$ asal sayı, $6p^2 + 1 = 151$ asal sayı olduğu açıktır.

$b \not\equiv 0 \pmod 5$ için $b^2 \equiv 1, 4 \pmod 5$ olduğunu kullanalım.

2) $b^2 \equiv 1 \pmod 5$ ise $4p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ ve asal olması gerektiğinden dolayı $4p^2 + 1 = 5$, $p = 1$ olmalıdır; fakat p asal olmasıyla çelişir.

3) $b^2 \equiv 4 \pmod 5$ ise $6p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ ve asal olması gerektiğinden dolayı $6p^2 + 1 = 5$ olması gerekir; fakat p asal olmasıyla çelişir.

O halde $p = 5$ olmalıdır. Denklemde yerine koyarsak

$$2x^3 - y^3 = 5$$

denklemi elde edilir.

$2x^3 = y^3 + 5$ olur. Varsayalım ki y çift olsun. O halde

$$2x^3 \equiv 13 \equiv 1 \pmod 2$$

olacağından dolayı mümkün değildir. O halde $y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

$$2x^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6,$$

yani

$$4k^3 + 6k^2 + 3k + 3 = x^3$$

denklemini çözsek yeterlidir. k'nın 3 ile bölümünden kalanları inceleyelim. Öncelikle $x^3 \equiv \{0, 1, 8\} \pmod 9$ olduğunu belirtmekte fayda var.

1) $k \equiv 0 \pmod 3$ ise $x^3 \equiv 3 \pmod 9$ olacağından dolayı çözümü yoktur. **2)** $k \equiv 1 \pmod 3$ ise $x^3 \equiv 7 \pmod 9$ olacağından dolayı çözümü yoktur. **3)** $k \equiv 2 \pmod 3$ ise $x^3 \equiv 2 \pmod 9$ olacağından dolayı çözümü yoktur.

O halde diyafont denklemimizin çözümü yoktur.

50. **Soru.** $t^2 + 1 = s(s + 1)$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (UMO 2. Aşama 1994)

Çözüm.

$t^2 + 1 = s(s + 1)$ ifadesini $t^2 = s^2 + s - 1$ şeklinde düşünürsek $s^2 < s^2 + s - 1$ olması için $0 < s - 1$, yani $1 < s$ olmalıdır.

$s^2 + s - 1 < s^2 + 2s + 1$ olması için ise $s - 1 < 2s + 1$, yani $-2 < s$ olmalıdır. O halde $s > 1$ için

$$s^2 < s^2 + s - 1 < s^2 + 2s + 1,$$

yani

$$s^2 < t^2 < (s + 1)^2$$

olacağından ardışık iki tam sayının karesi arasında başka bir tam sayının karesi bulunamaz. O halde $s \leq 1$ olmalıdır. Soruda verilen $s \geq 1$ ifadesinden dolayı $s = 1$ olur.

$t^2 + 1 = 1 \cdot 2$ yani $t^2 = 1$ buradan $t \geq 1$ olduğu için çözüm kümemiz

$$\{(t, s) = (1, 1)\}$$

olarak bulunur.

51. **Soru.** $x^3 + 3367 = 2^n$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (UMO 2. Aşama 1998

Çözüm. (Geo) 3367'nin asal çarpanlara ayrılışı $3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$'dir. Eğer

$$x^3 \equiv 2^n \pmod 7$$

ise uygun bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = 3m$ olur. Böylece

$$3367 = 2^n - x^3 = (2^m - x)\,(2^{2m} + 2^m x + x^2).$$

Buna göre $a = 2^m - x$, $b = 2^{2m} + 2^m x + x^2$ diyelim. $a^2 < b$ ve $ab = 7 \cdot 13 \cdot 37$ olduğundan aşağıdakilerden biri doğrudur:))

(a) $a = 1$, $b = 7 \cdot 13 \cdot 37$,

(b) $a = 7$, $b = 13 \cdot 37$,

(c) $a = 13$, $b = 7 \cdot 37$.

$b - a^2 = 3 \cdot 2^m x$ ve $2^m \geq \sqrt[3]{3367} > 14$ olduğu için (i) ve (iii) geçerli olamaz; ancak (ii) durumu sözkonusudur. Bu durumda

$$b - a^2 = (13 \cdot 37) - 7^2 = 481 - 49 = 432 = 3 \cdot 2^4 \cdot 3^2,$$

olduğundan $m = 4$, $x = 9$ ve dolayısıyla $n = 3m = 12$ elde edilir. Gerçekten

$$9^3 + 3367 = 729 + 3367 = 4096 = 2^{12}.$$

52. **Soru.** $3^x + 11^y = z^2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (UMO 2. Aşama 2001)

Çözüm.

Denkleme mod8 altında bakalım.

$$3^x + 11^y \equiv \{2, 4, 6\} \pmod 8, \quad z^2 \equiv \{0, 1, 4\} \pmod 8$$

olduğundan $3^x + 11^y \equiv 4 \pmod 8$ olmalıdır. Bu denkliğin sağlanması için x veya y'den biri çift, diğeri tek sayı olmalıdır.

1) $x = 2p$, $p \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$(z - 3^p)(z + 3^p) = 11^y.$$

Her iki çarpan da 11'in kuvveti olacağından ve $z - 3^p < z + 3^p$ olduğundan

$$z - 3^p = 11^k, \quad z + 3^p = 11^{k+\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}^+.$$

Buna göre

$$(z + 3^p) - (z - 3^p) = 11^{k+\ell} - 11^k = 2 \cdot 3^p,$$

sol taraf 10'un katı iken sağ taraf 10'un katı değildir. Çözüm yoktur.

2) $y = 2q$, $q \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$3^x = (z - 11^q)(z + 11^q).$$

Pozitif tam a, b için

$$z - 11^q = 3^a, \quad z + 11^q = 3^{a+b}.$$

Bunları çıkarırsak

$$2 \cdot 11^q = 3^{a+b} - 3^a = 3^a (3^b - 1).$$

Sol taraf 3'ün katı olmadığı için $a = 0$ olmalıdır. Ayrıca $3^b \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan $b = 5w$, $w \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$2 \cdot 11^q = 3^b - 1 = (3^w - 1)(3^{4w} + 3^{3w} + 3^{2w} + 3^w + 1).$$

$3^w \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan ikinci çarpan $5 \pmod{11}$ olur ve bu ancak $w = 1$ ise mümkündür. $w = 1$ için $b = 5$, $a = 0$ bulunur.

$$\begin{cases} z - 11^q = 3^0 = 1, \\ z + 11^q = 3^5 = 243, \end{cases}$$

buradan $z = 122$, $11^q = 121$ ve $q = 2$. Sonuç olarak $y = 2q = 4$, $a = 0$, $b = 5$ ise

$$x = 2a + b = 5.$$

Dolayısıyla tek çözüm

$$\boxed{(x, y, z) = (5, 4, 122)}.$$

53. **Soru.** $5^m + 7^n = k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz. (UMO 2. Aşama 2005)

Çözüm.

(Geo) Denklemi mod4'te incelediğimizde

$$5^m \equiv 1^m \equiv 1, \quad 7^n \equiv (-1)^n,$$

bu toplam ancak $1 + (-1)^n \equiv 4 \pmod 4$ olacaksa n tek olmalıdır.

mod7'de

$$5^m \text{ in kalan sınıfı } \{5, 4, 6, 2, 3, 1\}, \quad k^3 \text{ in kalan sınıfı } \{1, 1, 6, 1, 6, 6, 0\}.$$

Bu nedenle $5^m \equiv k^3 \pmod 7$ uygulandığında $m \equiv 3 \pmod 6$ çıkar, yani $m = 3a$.

Bu durumda denklem

$$5^{3a} + 7^n = k^3 \implies 7^n = k^3 - (5^a)^3 = \big(k - 5^a\big)\Big((k - 5^a)^2 + 3 \cdot k \cdot 5^a\Big).$$

İkinci çarpan ilkindn büyük olduğundan $k - 5^a$ mutlaka 7'nin kuvveti olmalıdır. Ama

$$k - 5^a \equiv 0 \pmod 7 \implies 3 \cdot k \cdot 5^a \equiv k \equiv 0 \pmod 7,$$

olduğu için her iki çarpan da 7'nin kuvveti olur, bu da çarpımları 7^n yapmak için imkânsızdır. Dolayısıyla

$$k - 5^a = 1 \implies 1 + 3 \cdot k \cdot 5^a = 7^n.$$

Ancak $a \geq 1$ için bu eşitliği mod5'te incelersek $n \equiv 0 \pmod 4$ çıkar; oysa başta n tek demiştik. Çelişki. Böylece $a = 0$ kalır.

$$k - 5^0 = k - 1 = 1 \implies k = 2.$$

Buna göre

$$5^0 + 7^n = 1 + 7^n = 2^3 \implies 7^n = 7 \implies n = 1.$$

Sonuç:

$$(m, n, k) = (0, 1, 2)$$

şeklinde tek çözüm vardır.

54. **Soru.** $k > 1$ bir sayı ve $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ ise

$$\frac{2^{m-1} - 1}{127\, m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz. (UMO 2. Aşama 2007)

Çözüm. (Geo) $k > 1$ olduğundan $p = 6k + 1 > 7$ ve $p \neq 7$'dir.

Öncelikle $128 \equiv 2^7 \equiv 1 \pmod{127}$ olduğundan

$$\text{ord}_{127}(2) = 7.$$

Ayrıca 127 bir asal sayı ve

$$(127, m) > 1 \iff 127 \mid m \iff 127 \mid (2^p - 1) \iff 2^p \equiv 1 \pmod{127} \iff 7 \mid p,$$

bulunur ki bu $p > 7$ olduğundan mümkün değildir. Dolayısıyla $(127, m) = 1$.

Böylece $\frac{2^{m-1}-1}{127m}$'nin tam sayı olması için ayrı ayrı

$$m \mid (2^{m-1} - 1) \quad \text{ve} \quad 127 \mid (2^{m-1} - 1)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(i) $127 \mid (2^{m-1}-1)$. $127 \mid (2^{m-1}-1)$ demek $2^{m-1} \equiv 1 \pmod{127}$ demektir. $\mathrm{ord}_{127}(2) = 7$ olduğundan $7 \mid (m-1)$. $m-1 = 2^p - 2$ olduğundan $7 \mid (2^p - 2)$. Öte yandan $2^6 \equiv 1 \pmod 7$ ve $6 \mid (p-1)$ olduğu için

$$2^p = 2 \cdot 2^{p-1} \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 7 \implies 2^p - 2 \equiv 0 \pmod 7.$$

Dolayısıyla $7 \mid (2^p - 2)$ ve böylece $7 \mid (m-1)$, bu da $127 \mid (2^{m-1} - 1)$'i sağlar.

(ii) $m \mid (2^{m-1} - 1)$. $m = 2^p - 1$ ise $m - 1 = 2^p - 2$. Küçük Fermat Teoremi'nden $2^p \equiv 2 \pmod p$ olduğu için

$$m - 1 = 2^p - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0 \pmod p,$$

yani $p \mid (m-1)$. O halde $m - 1 = p \cdot t$ için bir $t \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$2^{m-1} - 1 = 2^{pt} - 1 = (2^p - 1)\big(2^{p(t-1)} + 2^{p(t-2)} + \cdots + 1\big) = m \cdot \big(\cdots\big),$$

yani $m \mid (2^{m-1} - 1)$.

Bu iki madde bir arada $\frac{2^{m-1}-1}{127m}$'nin tam sayı olduğunu gösterir. □

55. **Soru.** $2^n + n = m!$ denklemini pozitif tam sayılar için çözünüz.

Çözüm. (MATSEVER 27) $p \mid n$ olsun. $p \neq 2$ sayısı 2^n'i bölmez. O halde $m!$'i de bölmez. Buradan n'nin her asal böleni p için $p > m$ elde edilir.

))

(a) n nin 2 hariç en az iki asal böleni olursa p, q onlardan ikisi olsun; $n \geq pq > m^2$ elde edilir. $m! > 2^{m^2} + m^2$ olmalıdır. Ancak (m tane 2^m'nin çarpımı)

$$2^{m^2} = 2^m \cdot 2^m \cdots 2^m > 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot m,$$

o halde çelişki.

(b) $n = p^a \cdot 2^b$ olmalıdır. $a > 1$ ise $p > m$ den dolayı $n > m^a$. $a \geq 2$ ise $n > m^2$ olur; önceki gibi çelişki. O halde $a = 1$. $n = p \cdot 2^b$. $p \neq 2$ olduğundan $2^b \parallel m!$. O halde m'de tam olarak b tane 2 çarpanı olmalıdır. Ancak $m > 2^b$ olduğundan çelişki. Dolayısıyla $n = 2^a$.

$m \geq 3$ olduğundan $m!$ çift; o halde

$$2^{2^a} + 2^a = m!$$

olmalı ve $p = 2$. $m \geq 3$ için $3 \mid m!$ olduğundan $3 \mid 2^{2^a} + 2^a$, yani a tek. $m \geq 5$ için $5 \mid 2^{2^a} + 2^a$. $a = 1$ ise bölünmez. $a \geq 2$ için $2^{2^a} \equiv 1 \pmod 5$ yani $2^a \equiv 4 \pmod 5$. a tek olduğundan çelişki! Kalan $m = 3, 4$. $m = 3$ için $n = 2$ sağlar.

(c) $n = 1$ olabilir; buradan çözüm yoktur.

Tek çözüm $\boxed{(m, n) = (3, 2)}$'dir. İspat biter.

56. **Soru.** $x^3 = 3^y \cdot 7^z + 8$ denklemini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz. (UMO 2. Aşama 2014)

Çözüm.

$$x^3 - 8 = 3^y \cdot 7^z \implies (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 3^y \cdot 7^z.$$

$7 \mid (x-2)$ olursa $7 \nmid (x^2 + 2x + 4)$ olur. Dolayısıyla her ikisi birden 7 ile bölünemez.

1)

$$\begin{cases} x-2=3^a\cdot 7^z, \\ x^2+2x+4=3^{y-a} \end{cases}$$

sistemini kabul edelim. İlk denklem ikinci denklemde yerine konulursa

$$\left(7^z\cdot 3^a+2\right)^2+2\cdot 3^a\cdot 7^z+4=3^y.$$

$a\geq 1$ ise eşitliğin sol tarafı $8 \pmod 3$ gelir; çelişki. O halde $a=0$.

$$\begin{cases} x-2=7^z, \\ x^2+2x+4=3^y \end{cases}$$

tekrar düzenlersek

$$7^{2z}+6\cdot 7^z+12=3^y.$$

Eşitliğin sol tarafı asla 3'ün katı olamaz. O halde kabulümüz yanlıştır.

2)

$$\begin{cases} x-2=3^b, \\ x^2+2x+4=3^{y-b}\cdot 7^z \end{cases}$$

Sistemi düzenlersek

$$3^{2b}+6\cdot 3^b+12=3^{y-b}\cdot 7^z.$$

$b=0$ olmadığını görelim. $b=0$ için $19=7^z\cdot 3^y$ olur, çözüm yok. $b\geq 1$ için sol taraf 9 ile bölünemez; o halde $y=b+1$.

$$3^{2b-1}+2\cdot 3^b+4=7^z.$$

Denklemin sol kısmı mod4'te incelenmelidir:

$$3^{2b-1}+2\cdot 3^b+4\equiv(-1)^{2b-1}+2(-1)^b+4\equiv -1+2(-1)^b+4\equiv 1 \pmod 4.$$

Buradan $7^z\equiv 1 \pmod 4$. Bu, z çift iken sağlandığı için $z=2n$ dönüşümü yapalım ve 4'ü eşitliğin karşı tarafına atalım:

$$3^b\left(3^{b-1}+2\right)=\left(7^n-2\right)\left(7^n+2\right).$$

$3\nmid 7^n-2$ olduğu açıktır. O halde $7^n-2=3^{b-1}+2$.

$$\begin{cases} 7^n-2=\dfrac{3^{b-1}+2}{t}, \\ 7^n+2=3^b\,t \end{cases}$$

elde edilir. Buradan düzenleme yapıldığında

$$3^{b-1}=\frac{4t+2}{3t^2-1}$$

gelir; bu ifade ancak $t=1$ için tam sayıdır. $b=2$ elde edilir.

$y=b+1=3$. $b=2$, $t=1$ olduğuna göre $n=1$, yani $z=2$ bulunur. İlk denklemde yerine koyarak $x=11$ elde edilir.

Denklemin tek çözümü $\boxed{(x,y,z)=(11,3,2)}$ olarak bulunur.

57. **Soru.** m, n pozitif tam sayılar olmak üzere

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m\,(m-n)^2 + 4}$$

ifadesi tam sayı ise k'nın tamkare olduğunu gösteriniz. (UMO 2. Aşama 2015)

Çözüm. Soruyu üç durumda inceleyelim.

i) $m = n$ ise

$$k = \frac{(m+m)^2}{4m \cdot 0^2 + 4} = \frac{4m^2}{4} = m^2,$$

yani tamkaredir.

ii) $m > n$ ise $m - n = x$, $m + n = y$ diyelim. $m = \frac{x+y}{2}$, $n = \frac{y-x}{2}$ ve y çifttir; dolayısıyla x de çifttir.

$$k = \frac{y^2}{2(x+y)x^2 + 4} \implies y^2 - 2k\,x^2\,y - (2k\,x^3 + 4k) = 0.$$

Bu ikinci dereceden denklemin diskriminantı tam kare olmalı:

$$\Delta = (2k\,x^2)^2 + 4(2k\,x^3 + 4k) = 4\big(k^2x^4 + 2k\,x^3 + 4k\big) = 4t^2.$$

Buradan

$$t^2 = k^2x^4 + 2k\,x^3 + 4k.$$

$k \geq 1$, $x \geq 2$ olduğundan

$$(kx^2 + x + 1)^2 > k^2x^4 + 2k\,x^3 + 4k > (kx^2 + x - 1)^2.$$

Dolayısıyla ancak

$$k^2x^4 + 2k\,x^3 + 4k = (kx^2 + x)^2 \implies k = \left(\tfrac{x}{2}\right)^2,$$

yani tamkare olmalıdır.

iii) $m < n$ ise $n - m = x$, $m + n = y$ diyelim. Benzer şekilde x, y çifttir ve

$$k = \frac{y^2}{-2(x-y)x^2 + 4} \implies y^2 - 2k\,x^2\,y + (2k\,x^3 - 4k) = 0,$$

$$\Delta = 4\big(k^2x^4 - 2k\,x^3 + 4k\big) = 4t^2,$$
$$t^2 = k^2x^4 - 2k\,x^3 + 4k.$$

Yine

$$(kx^2 - x + 1)^2 > k^2x^4 - 2k\,x^3 + 4k > (kx^2 - x - 1)^2$$

olduğundan ancak

$$k^2x^4 - 2k\,x^3 + 4k = (kx^2 - x)^2 \implies k = \left(\tfrac{x}{2}\right)^2,$$

bulunur. Yani her durumda k tamkaredir. □

58. **Soru.** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç çözümü vardır? (UMO TSÇ 1991)

Çözüm. Denklem katsayılarına göre simetrik olduğundan genelliği bozmadan $a \geq b \geq c \geq d$ alabiliriz.

Buradan

$$4a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2 \implies 4 \geq b^2c^2d^2.$$

Bu eşitsizliği $b \geq c \geq d$ koşuluyla ancak $(b, c, d) = (2, 1, 1)$ veya $(1, 1, 1)$ şeklinde çözebiliriz.

(a) $(b, c, d) = (2, 1, 1)$ için

$$a^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = a^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \implies a^2 + 6 = 4a^2 \implies a^2 = 2$$

olur; tamsayı çözümü yoktur.

(b) $(b, c, d) = (1, 1, 1)$ için

$$a^2 + 1 + 1 + 1 = a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \implies a^2 + 3 = a^2 \implies 3 = 0,$$

çelişki, tamsayı çözümü yoktur.

Dolayısıyla bu denklemin pozitif tam sayılarda hiçbir çözümü yoktur.

59. **Soru.** $a^2 + b^2 + 3 = abc$ olacak şekilde (a, b, c) tam sayı çözümlerini bulunuz. (UMO TSÇ 1994)

Çözüm.

Denklemi

$$abc = a^2 + b^2 + 3$$

şeklinde $\frac{a^2+b^2+3}{ab} \in \mathbb{Z}$ olarak düşünebiliriz. Önce pozitif çözümlerini bulalım, sonrasında işaret değiştirmeleri ve a, b yer değiştirmeleriyle diğerlerini elde ederiz.

Genelliği bozmadan önce $a = b$ olmasını deneyelim:

$$\frac{a^2 + a^2 + 3}{a^2} = 2 + \frac{3}{a^2} \quad \implies \quad a^2 \mid 3 \Rightarrow a = 1.$$

Böylece $a = b = 1$ için

$$c = \frac{1^2 + 1^2 + 3}{1 \cdot 1} = 5.$$

Yani $(a, b, c) = (1, 1, 5)$.

Şimdi $a > b$ kabul edelim.

$$a^2 - abc + (b^2 + 3) = 0$$

denkleminin köklerini a ve x olarak düşünelim. Vieta'dan

$$a + x = bc, \quad ax = b^2 + 3.$$

Buradan $x \in \mathbb{Z}$ çıkar. Genelliği bozmadan $x \geq a$ alırsak

$$ax = b^2 + 3 < a^2 + 3, \quad x \geq a,$$

dolayısıyla

$$a^2 \leq ax < a^2 + 3 \implies a^2 < a^2 + 3 \leq a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

olması için ancak $a = 2$ kalır. O halde $a = 2$, $b < 2$ olduğundan $b = 1$.

$$c = \frac{2^2 + 1^2 + 3}{2 \cdot 1} = 4.$$

Yani $(a, b, c) = (2, 1, 4)$.

Pozitif çözümler:

$$(a, b, c) = (1, 1, 5),\ (2, 1, 4),\ (1, 2, 4).$$

İşaret ve yer değiştirme varyasyonlarıyla toplam 10 tamsayı çözümü elde edilir.

60. **Soru.** n pozitif bir tam sayı olduğuna göre

$$x^2 - xy + y^2 = n$$

denklemini sağlayan (x, y) pozitif tam sayı sıralı ikililerinin sayısının 3 ile bölündüğünü ispatlayınız. (UMO TSÇ 2000)

Çözüm. (Geo) y'yi sabit tuttuğumuzda,

$$f(a, y) = a^2 - ay + y^2$$

ve

$$f(a, y) = f(b, y) \implies a^2 - ay + y^2 = b^2 - by + y^2 \implies (a - b)(a + b - y) = 0 \implies b = y - a.$$

Bu durumda (a, y) bir çözüm ise $(y - a, y)$ da bir çözümdür.

Benzer şekilde x'i sabit tuttuğumuzda,

$$f(x, a) = x^2 - xa + a^2 = f(x, b) \implies b = x - a.$$

Bu durumda $f(x, a)$ bir çözüm ise $f(x, x - a)$ da bir çözümdür.

Bunun haricinde simetriden dolayı

$$f(x, y) = f(y, x),$$

ve kare ifadelerden dolayı

$$f(x, y) = f(-x, -y)$$

öldür.

Tüm çözümleri birleştirirsek, bir temel çözüm (x, y) için:

- Sabit tutma sonucu 3 tane: (x, y), $(y - x, y)$, $(x, x - y)$. - Yer değiştirme sonucu 3 tane: (y, x), $(x - y, x)$, $(y, y - x)$. - Bunların eksileri sonucu 6 tane çözüm: $(-x, -y)$, $(x - y, -y)$, $(y - x, -x)$, vb.

Böylece (x, y) çözümse, bunun haricinde 11 çözüm daha vardır; toplam 12 ve 12 0 (mod 3).

Diğer durum: (x, x) olursa çözümler (x, x), $(-x, -x)$, $(0, x)$, $(x, 0)$, $(0, -x)$, $(-x, 0)$ olur; sayıca 6 ve 6 0 (mod 3).

$(0, 0)$ ise ancak $n = 0$ için; $n > 0$ olduğundan geçersiz.

Dolayısıyla her durumda çözüm sayısı 3 ile bölünür.

61. **Soru.** $5^x = 1 + 4y + y^4$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz. (UMO TSÇ 2001)

Çözüm. (Merdan 97) y tek olursa sağ taraf çift olur; bu imkansız. O halde y çift olmalı. Bu durumda sağ taraf 8'e bölününce 1 kalanını verir; sol taraf da aynı kalanı vermeli, bu yüzden x çift olmalıdır. Böylece sol taraf tamkare olur.

Sağ taraftaki ifadeyi tamkare olmasına göre inceleyelim. $y \geq 0$ ise

$$(y^2 + 2)^2 > y^4 + 4y + 1 > (y^2)^2,$$

dolayısıyla

$$y^4 + 4y + 1 = (y^2 + 1)^2 \implies 2y^2 - 4y = 0 \implies y = 0,\ y = 2.$$

$y = 0$ için

$$y^4 + 4y + 1 = 1 = 5^x \implies x = 0.$$

$y = 2$ için

$$y^4 + 4y + 1 = 16 + 8 + 1 = 25 = 5^x \implies x = 2.$$

Böylece $(x, y) = (0, 0)$ ve $(2, 2)$ bulunur.

$y < 0$ ise $a > 0$ olmak üzere $a = -y$ diyelim.

$$y^4 + 4y + 1 = a^4 - 4a + 1.$$

$a = 1, 2$ için çözüm gelmez; $a > 2$ alırsak

$$(a^2 + 1)^2 > a^4 - 4a + 1 > (a^2 - 1)^2$$

olacağından

$$a^4 - 4a + 1 = (a^2)^2 = a^4$$

olur, bu da tam sayı çözümü vermez.

Sonuç olarak denklemin tüm çözümleri

$$(x, y) = (0, 0) \quad \text{ve} \quad (2, 2)$$

olur.

62. **Soru.** $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz. (UMO TSÇ 2013)

Çözüm.

(MATSEVER 27) Eğer n bir tek sayı ise

$$\left(n^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{2}} + 1\right)^2$$

olacağından eğer $n \geq 2$ ise buradan çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz. $n = 1$ için sağlar.

Eğer $n \equiv -1 \pmod 3$ ise

$$\left(n^{\frac{n+1}{3}}\right)^3 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{3}} + 1\right)^3$$

olacağından buradan da $n \geq 2$ için çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz. $n = 1$i saymıştık.

Eğer $n \equiv 0 \pmod 3$ ise $m^6 \equiv -1 \pmod 3$ olur ve buradan da çözüm gelmez.

O halde $n \equiv 4 \pmod 6$ diyelim. $n + 1 \mid n^{n+1} + n - 1 = y^6 + 3$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $n + 1 \equiv 5 \pmod 6$ olur. Ayrıca $n + 1$'i bölecek şekilde $p \equiv 2 \pmod 3$ olan bir asal p'nin varlığını kabul edelim.

$$y^6 \equiv -3 \pmod{n+1} \implies y^6 \equiv -3 \pmod p.$$

Ancak bir tamkare için $p \equiv 2 \pmod 3$ olduğunda -3 kalanı $\pmod p$'de alınamaz. $p > 2$'dir.

İspat: Diyelim ki bir x için $x^2 \equiv -3 \pmod p$ olsun. $2y + 1 \equiv x \pmod p$ olacak şekilde bir y seçelim.

$$y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod p \implies y^3 \equiv 1 \pmod p.$$

O halde y'nin $\pmod p$'deki mertebesi d olsun; $(d, 3) = 1$ veya 3 olabilir.

- $d = 1$ ise $y \equiv 1 \pmod p$ olur, bu da $p = 3$ gerektirir. Çelişki!
- $d = 3$ ise $3 \mid d \mid (p - 1)$ olmalıdır. Bu da çelişki!

Kabulümüz yanlıştır; böyle bir x yoktur.

O halde bu durumdan da çözüm gelmez ve ispat biter. Yalnızca $n = 1$ sağlar.

63. **Soru.** l, m, n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere,

$$p^{2l-1}\, m\,(mn+1)^2 + m^2$$

ifadesi tamkare ise m'nin de bir tamkare olduğunu ispatlayınız. (UMO TSÇ 2015)

Çözüm. (Mehmet Utku Özbek) İfadeyi m parantezine alalım:

$$p^{2l-1}\, m\,(mn+1)^2 + m^2 = m\big[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m\big] = x^2.$$

Eğer m tam kare değilse, çarpanlarından biri q olacak şekilde ve üssü tek bir q^k ile gösterilebilir. O zaman ikinci parantezi q'nun bölmesi gerekir. Fakat q ile $(mn+1)^2$ aralarında asal olduğundan $q \mid p^{2l-1}$ olmalı; yani $q = p$.

Dolayısıyla $m = p^k$ şeklinde yazılabilir. Yerine koyarsak

$$m\big[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m\big] = p^k\big[p^{2l-1}(p^k n+1)^2 + p^k\big] = p^{2k}\big[p^{2l-k-1}(p^k n+1)^2 + 1\big] = x^2.$$

Böylece ikinci parantez de tamkare olmalıdır:

$$p^{2l-k-1}(p^k n+1)^2 + 1 = y^2.$$

Eğer k tek olursa $2l-k-1$ çift olur ve sol taraf

$$\left(p^{\frac{2l-k-1}{2}}(p^k n+1)\right)^2 + 1 = y^2,$$

yani $c^2+1=y^2$ formuna iner. Pozitif tam sayılarda $c^2+1=y^2$ denkleminin çözümü yoktur.

Sonuç: k tek olamaz, yani $m = p^k$ *tam* kare olmak zorundadır. $\square$

64. **Soru.** Ondalık yazılımındaki rakamların çarpımı $x^2-10x-22$'ye eşit olan tüm x doğal sayılarını bulunuz. (IMO 1968)

Çözüm.

Kaba bir ispatla sayının iki basamaklı olduğunu gösterelim. Varsayalım x sayısı n basamaklı olsun.

$$x^2 \geq 10^{2n-2}$$

olduğundan $x^2-10x-22 > 10^{2n-2}-10^n-22$. Basamaklar çarpımının minimum değeri de bu olduğu için

$$(\text{basamaklar çarpımı}) > 10^{2n-3}.$$

Öte yandan n basamaklı bir sayının basamaklar çarpımının maksimumu $9^n < 10^n$. Eşitlik ancak

$$10^n > 10^{2n-3} \implies n < 3$$

olduğunda mümkün olur. O halde x iki basamaklıdır.

x tek basamaklı ise

$$x = x^2 - 10x - 22$$

oluşur; diskriminant tam kare olmadığından çözüm yoktur.

x iki basamaklı olsun, $x = 10a+b$ $(1 \leq a \leq 9,\ 0 \leq b \leq 9)$. Basamaklar çarpımı $a \cdot b$ ile

$$a\,b = (10a+b)^2 - 10(10a+b) - 22 = 100a^2 + 20ab + b^2 - 100a - 10b - 22.$$

$a \geq 2$ için bu sağlama imkân yoktur (ifade pozitif büyük). O halde $a=1$.

$$b = (10+b)^2 - 10(10+b) - 22 = 100 + 20b + b^2 - 100 - 10b - 22 = b^2 + 10b - 22.$$

Yani

$$b^2 + 9b - 22 = 0 \implies b = 2.$$

Böylece $x = 12$ tek çözümdür.

65. **Soru.** $2^n + 1 = n^2 m$ denklemini m tam sayıları ve $n > 1$ tam sayıları için çözünüz. (IMO 1990)

Çözüm.

Denklemi

$$\frac{2^n+1}{n^2} \in \mathbb{Z}^+$$

şeklinde ele alalım. O halde $n^2 \mid 2^n+1$, yani her asal $p \mid n$ için

$$v_p(n^2) \ \leq \ v_p(2^n+1). \tag{1}$$

Öncelikle n çift olsaydı 2^n+1 tek olurdu; çelişki. Dolayısıyla n tek.

Tek n için Lifting The Exponent (LTE) Teoremi'nden

$$v_p(2^n+1) = v_p(2+1) + v_p(n) = 1 + v_p(n) \tag{2}$$

olur (burada $p = 3$'tür, çünkü $p \geq 5$ için (1) ve (2) çelişir, $p = 2$ da imkânsızdır). Böylece $2^n + 1$'in tek asal çarpanı 3'tür:

$$2^n + 1 = 3^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

(2)'den $k = v_3(2^n+1) = v_3(3) + v_3(n) = 1 + v_3(n)$, yani $v_3(n) = k-1$. Buna göre $n = x \cdot 3^{k-1}$ şeklinde yazılabilir ve

$$3^k = 2^{x \cdot 3^{k-1}} + 1 \ \geq \ 2^{3^{k-1}} + 1.$$

Ancak $k > 2$ için $3^k < 2^{3^{k-1}} + 1$ olduğundan $k \in \{1, 2\}$ olmalıdır.

- $k = 1$ için $2^n + 1 = 3$ ve $n = 1$ çıkar; $n > 1$ olduğu için geçersiz. - $k = 2$ için $2^n + 1 = 9$ ve $n = 3$ elde edilir. Bu durumda $m = (2^3+1)/3^2 = 1$.

Sonuç: Tek çözüm $(n, m) = (3, 1)$ şeklindedir.

66. **Soru.** $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tam sayı ikililerinin sayısını bulunuz. (IMO 1994)

Çözüm.

Bölme algoritmasını uygulayalım:

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = qn + r, \qquad q \geq 0, \ \ 0 \leq r < n.$$

İçler dışlar çarpıp düzenlersek

$$n^3 + 1 = qmn^2 + rmn - qn - r.$$

Denkleme n modunda bakarsak $1 \equiv -r \pmod{n}$, yani $r \equiv -1 \pmod{n}$. Bölme algoritması gereği bu ancak

$$r = n - 1$$

olursa mümkündür.

Bunu yerine yazıp düzenlersek

$$n^2 = qmn + (n-1)m - q - 1.$$

Ayrıca

$$m^3 \cdot \frac{n^3+1}{mn-1} = \frac{m^3n^3-1}{mn-1} + \frac{m^3+1}{mn-1},$$

ilk üç terim tam sayı olduğundan $\frac{m^3+1}{mn-1}$ de bir pozitif tam sayıdır. Genelliği bozmadan $m \geq n$ alabiliriz.

$\boxed{n=1}$ ise

$$\frac{1^3+1}{m\cdot 1-1}=q\cdot 1+r \implies 2=qm-q \implies q\mid 2 \Rightarrow q=1 \text{ veya } 2.$$

$q=2$ için $m=2$ $(2,1)$ ve simetriği $(1,2)$. $q=1$ için $m=3$ $(3,1)$ ve simetriği $(1,3)$.

$\boxed{m\geq n\geq 2}$ olsun. O zaman

$$n^2\geq qn^2+n(n-1)-q-1 \implies n+1\geq q\left(n^2-1\right) \implies q(n-1)\leq 1 \Rightarrow q\leq 1,$$

çünkü $n\geq 2$.

- $q=1$ için

$$n^2\geq 1\cdot n^2+n(n-1)-1-1 \implies n^2\geq 2n^2-n-2 \implies n^2-n-2\leq 0 \implies n\leq 2.$$

$n\geq 2$ olduğundan tek olası $n=2$. Bu durumda $m=2$.

- $q=0$ için

$$n^2=mn-m-1 \implies n^2+1=m(n-1) \implies \frac{n^2+1}{n-1}\in\mathbb{Z}^+.$$

Polinom bölmesiyle $\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}$ olduğundan $\frac{2}{n-1}\in\mathbb{Z}^+$. Yalnızca $n-1\in\{1,2\}$:

$$n=2\Rightarrow m=5,\quad n=3\Rightarrow m=5.$$

Tüm çözümler, simetrileriyle birlikte:

$$\{(1,3),(3,1),(1,2),(2,1),(2,2),(5,3),(3,5),(2,5),(5,2)\},$$

toplam 9 çözüm vardır.

67. **Soru.** $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ bir pozitif tam sayı olacak şekilde kaç (a,b) pozitif tam sayısı vardır? (IMO 2003)

Çözüm.

$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k,\quad k\in\mathbb{Z}^+.$$

İçler dışlar çarpıp ifadeleri tek tarafta toplarsak,

$$a^2=k\left(2ab^2-b^3+1\right) \implies a^2-2kb^2\,a+k\left(b^3-1\right)=0.$$

Bu ikinci dereceden denklem $b>1$ için iki adet pozitif tamsayı kök verir. $b=1$ durumunu özel olarak incelersek $(2n,1)$ çözümünü görürüz.

Pozitif tam sayı köklerden birinin $x=a$ olduğunu, diğerinin a' olduğunu kabul edelim. Genelliği kaybetmeden $a'\geq a$ alırsak,

$$a^2\leq a\,a'=k\left(b^3-1\right).$$

Başlangıçtaki ifadeyi düzenleyelim:

$$k=\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}\leq\frac{k\left(b^3-1\right)}{2ab^2-b^3+1}=b\,\frac{k\,b^2-1}{2ab^2-b^3+1}.$$

Dolayısıyla

$$b^3-1\geq 2ab^2-b^3+1 \implies b^3-1\geq a\,b^2 \implies b-\frac{1}{b^2}\geq a \implies b>a.$$

Ayrıca başlangıçtaki denklem

$$b^2 > a^2 = k\left(2ab^2 - b^3 + 1\right) \geq 2ab^2 - b^3 + 1 > 0$$

yazılabildiğinden

$$b^2 > (2a - b)\, b^2 + 1 > 0.$$

$2a - b > 0$ için sol kısma bakınca $0 > 1$ çelişki, $2a - b < 0$ ise $2a - b = -x$, $x \in \mathbb{Z}^+$, $-x\, b^2 + 1 > 0$ çelişkisi doğurur. Böylece $2a = b$ olmalıdır.

Yani (a, b) ikililerinden biri $(n, 2n)$ olarak bulunur. Yerine konulduğunda $k = n^2$ yapar.

$$f(x) = x^2 - 2kb^2\, x + k\left(b^3 - 1\right) = x^2 - 8n^3\, x + \left(8n^4 - n\right).$$

Denklemin köklerinden biri n olduğuna göre

$$n\, a' = 8n^4 - n \implies a' = 8n^3 - n.$$

O halde $(8n^3 - n,\, 2n)$ de bir çözümdür.

68. **Soru.**

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

denklemini tam sayılarda çözünüz. (IMO 2006)

Çözüm.

Öncelikle, eğer (x_0, y_0) bir çözümse $(x_0, -y_0)$ da çözümdür. Ayrıca

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} > 0$$

olduğundan $y^2 > 0$ ve biz genelliği kaybetmeden $y > 0$ alabiliriz.

(i) $x = 0$ için:

$$1 + 2^0 + 2^{2\cdot 0+1} = 1 + 1 + 2 = 4 = 2^2,$$

dolayısıyla $(x, y) = (0, 2)$ ve simetriği $(0, -2)$ çözümler vardır.

(ii) $x > 0$, $y > 0$ için: Eşitliği

$$y^2 - 1 = 2^x\left(2^{x+1} + 1\right)$$

şeklinde yazalım. Önce $x = 1$ ve $x = 2$ deneyelim:

$$x = 1 :\ 1 + 2 + 2^3 = 11 \neq \text{tam kare}, \quad x = 2 :\ 1 + 4 + 2^5 = 37 \neq \text{tam kare}.$$

Dolayısıyla $x \geq 3$. $x \geq 3$ için denklemimiz

$$(y - 1)(y + 1) = 2^x(2^{x+1} + 1).$$

olur.

Ardışık çift sayılardan biri tam 2, diğeri tam 2^{x-1} bulundurması gerektiği için parametrelendirmemiz

$$y - 1 = 2m, \qquad y + 1 = 2^{x-1}k \quad (m, k \text{ tek}).$$

şeklinde olmalıdır.

Buradan

$$mk = 2^{x+1} + 1, \qquad 2^{x-2}k - m = 1.$$

gelir. (Diğer olasılık da benzer şekilde çözülebiliyor. $m \geq 3$ için işaret uyuşmazlığından daha kolay bir eleme elde ediliyor. Küçük değerlerden de çözüm gelmiyor.)

İkinciden $m = 2^{x-2}k - 1$. Bunu ilkinde yerine koyarsak

$$(2^{x-2}k-1)k = 2^{x+1}+1 \Longrightarrow 2^{x-2}k^2 - k = 2^{x+1}+1 \Longrightarrow 2^{x-2}(k^2-8) = k+1.$$

k tek olduğu için k^2-8 tek olur. O hâlde $k^2-8 \mid (k+1)$, dolayısıyla ($k \geq 3$ için olduğundan $k=1$ in de ayrıca test edilmesi gerekiyor.) $k^2-8 \leq k+1 \Rightarrow k^2-k-9 \leq 0 \Rightarrow k \in \{1,3\}$ (pozitif tek).

$k=1$ olmaz.

$$2^{x-2}(1-8) = k+1 = 2$$

işaret sağlanmadığı için elenir.

$k=3$ için:

$$2^{x-2}(9-8) = 3+1 \Rightarrow 2^{x-2} = 4 \Rightarrow x = 4.$$

$m = 2^{x-2}k - 1 = 11$, buradan $y-1 = 2m = 22 \Rightarrow y = 23$. Simetriden $y = -23$ de gelir.

Geriye $x < 3$ durumları kalıyor. $x = 0 \to 1 + 2^0 + 2^{2\cdot 0+1} = 4 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2$. $x = 1, 2 \to$ sağ taraf kare değildir. Çelişki.

O halde denklemimizin çözüm kümesi:

$$(x,y) = (0, \pm 2),\ (4, \pm 23).$$

69. **Soru.** k, n negatif olmayan tam sayılar ve p bir asal sayı ise

$$5^k - 3^n = p^2$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$5^k \equiv p^2 \pmod 3$ olduğundan ve $p^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ olduğundan $5^k \equiv 0, 1 \pmod 3$ olmalıdır.

$k = 2q+1,\ q \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $5^{2q+1} \equiv 2 \pmod 3$ olur. Dolayısıyla k çift olmalıdır.

$-3^n \equiv p^2 \pmod 5$ olur. $p^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ olduğundan $-p^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ olur.

$3^n \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ denkliğini çözmemiz gereklidir.

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan denkliğin periyodu 4'tür.

- $n = 4z+1$ olursa $3^n \equiv 3 \pmod 5$ olur. - $n = 4z+3$ olursa $3^n \equiv 2 \pmod 5$ olur.

Buradan n de çift olmalıdır.

(1) $k = 0$ olması durumunu inceleyelim. $1 - 3^n = p^2$ olur. $1 - 3^n \leq 0$ ve $p^2 \geq 4$ olduğundan çözüm yoktur.

(2) $n = 0$ olması durumunda $5^k - 1 = p^2$ ise sol taraf çift olduğundan $p = 2$ dışında çözüm olamaz. $5^k - 1 = 4$ olur ve buradan $k = 1$ bulunur. Tek çözüm $(k, n, p) = (1, 0, 2)$ elde edilir.

Kalan durumda $k = 2x$ ve $n = 2y$ dönüşümlerini yapalım. $5^{2x} - 3^{2y} = p^2 \implies (5^x - 3^y)(5^x + 3^y) = p^2$.

$5^x + 3^y > 0$ olduğundan $5^x - 3^y > 0$ da olmalıdır. Böylece üç sistem elde edilir:

$$\begin{cases} 5^x + 3^y = p^2, \\ 5^x - 3^y = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x + 3^y = p, \\ 5^x - 3^y = p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x + 3^y = 1, \\ 5^x - 3^y = p^2. \end{cases}$$

2. ve 3. sistemler mümkün değildir:

2. için $5^x - 3^y = 5^x + 3^y \implies -3^y = 3^y \implies 3^y = 0$ çelişki.

3. için $5^x - 3^y > 5^x + 3^y \implies -3^y > 3^y$ imkansız.

Dolayısıyla tek olası sistem ilkidir.
$5^x = \frac{p^2+1}{2}, \quad 3^y = \frac{p^2-1}{2}\Omega$
- $p = 2$ için $5^x = \frac{5}{2}$ çözüm yok. - $p = 3$ için $3^y = 4$ çözüm yok. - $p \geq 5$ için $p = 6k \pm 1 \implies p^2 \equiv 1 \pmod{12}$, $p^2 = 12s + 1$.

Böylece $3^y = 6s \implies 3^y \equiv 0 \pmod 2$ denklemi sağlanamaz.

Sonuç: Denklem yalnızca

$$(k, n, p) = (1, 0, 2)$$

çözümünü verir.

70. **Soru.**

$$m^4 + 2n^3 + 1 = m\,n^3 + n$$

eşitliğini sağlayan tüm (m, n) tam sayı ikililerini bulunuz. (Avr. Kızlar.mat.olim.TSÇ 2015)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Önce $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için deneyelim. Bu durumda yalnızca

$$(m, n) = (0, -1), \quad (2, 17)$$

çözümlerini elde ederiz.

i) $m \geq 5$ ise:

ia) Eğer $m \geq n$ ise

$$m^4 + 2n^3 + 1 = m\,n^3 + n \implies m^3(m-2) + m \;\geq\; n^3(m-2) + n = m^4 + 1 \implies 2m^3 + 1 \leq m,$$

bu imkansızdır.

ib) Eğer $n \geq m + 1$ ise

$$m^4 + 1 = n^3(m-2) + n \;\geq\; (m+1)^3(m-2) + (m+1) \implies 0 \geq m^3 - 3m^2 - 4m - 2.$$

$m^3 - 3m^2 - 4m - 2$ fonksiyonu $m \geq 5$ için pozitiftir; çelişki.

ii) $m < 0$ ise:

$n = 0$ için sol taraf $m^4 + 1 > 0$, sağ taraf 0, çelişki.

iia) Eğer $n > 0$ ise $m\,n^3 + n \leq 0$ olur; ama $m^4 + 2n^3 + 1 > 0$, çelişki.

iib) Eğer $n < 0$ ise $m = -a$, $n = -b$ diyelim, $a, b > 0$. Denklem

$$a^4 - 2b^3 + 1 = a\,b^3 - b$$

haline gelir.

$a = 1$ için $b = 1$ ve bu da $(m, n) = (-1, -1)$ çözümünü verir.

$a > 1$ için

$$f(b) = b^3(a+2) - b - (1 + a^4)$$

olsun. $f'(b) = 3b^2(a+2) - 1 > 0$ olduğundan f artandır.

$$f(a) = 2a^3 - a - 1 > 0, \quad f(a-1) = -a^3 - 3a^2 + 4a - 2 < 0.$$

Artan bir fonsiyonun kökü $(a-1, a)$ aralığında kalır; tam sayı olamaz. Çözüm yoktur.

Sonuç olarak, tüm tam sayı çözümleri

$$(m, n) = (0, -1),\ (2, 17),\ (-1, -1)$$

şeklindedir.

71. **Soru.** $k!$, n negatif olmayan tam sayılar ve $n > 0$ için

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\ldots(2^n - 2^{n-1})$$

eşitliğini sağlayan tüm (k, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz. (2019 IMO)

Çözüm. Not: İlgili IMO soru başlığı altında daha fazla çözüm yöntemi paylaşmıştım sanırım. Bu denklemde n ifadesi için eşitsizlik kurmaya çalışalım. Öncelikle küçük n değerlerini deneyelim: - $n = 1$: Sağ taraf $(2^1 - 1) = 1$, o hâlde $k! = 1 \implies k = 1$. - $n = 2$: Sağ taraf $(3)\cdot(2) = 6$, o hâlde $k! = 6 \implies k = 3$. - $n = 3$: Sağ taraf $(7)\cdot(6)\cdot(4) = 168$, $k!$ değerlerinde yok.

Bunlar dışında $n \geq 4$ için doğrudan bir faktorizasyon imkânı yok; o hâlde faktör sayıları bakımından çelişki arayacağız.

1) İkili çarpan sayısı. Sağ taraf

$$\big(2^n - 1\big)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1})$$

ifadesindeki çarpanların 2-üstü kuvvetlerini toplayalım:

$$v_2\big(\text{sağ taraf}\big) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Öte yandan $v_2(k!) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \cdots < \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \cdots = k$.
Eşitlik için

$$v_2(k!) \ = \ \frac{n(n-1)}{2} \ \implies \ \frac{n(n-1)}{2} < k. \qquad \text{(A)}$$

2) Üçlü çarpan sayısı. Sağ tarafın faktörlerinden $(2^m - 1)$ biçimindekilerde $v_3(2^m - 1) = v_3(2 - 1) + v_3(m) = 1 + v_3(m)$ (LTE teoremi). Dolayısıyla toplam

$$v_3\big(\text{sağ taraf}\big) = \sum_{i=0}^{n-1}\big(1 + v_3(2^i)\big) < n + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{3^i} = n + \frac{n}{2} = \tfrac{3n}{2}.$$

Öte yandan

$$v_3(k!) < \frac{k}{3-1} = \frac{k}{2}.$$

Eşitlik için

$$v_3(k!) = v_3\big(\text{sağ taraf}\big) < \frac{3n}{2} \implies \frac{k}{2} > \frac{3n}{2} \implies k > 3n. \qquad \text{(B)}$$

3) Birleştirme. (A) ve (B)'yi birleştirirsek

$$\frac{n(n-1)}{2} < k \quad \text{ve} \quad k > 3n \implies \frac{n(n-1)}{2} < k < 3n.$$

Yani

$$n(n-1) < 6n \implies n^2 - 7n < 0 \implies 0 < n < 7.$$

Dolayısıyla $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Bunları daha önce denedik; ancak yalnızca

$$n = 1 \Rightarrow k = 1, \quad n = 2 \Rightarrow k = 3$$

elde edilmektedir. $n \geq 3$ için hiçbir k uygun değildir.

Sonuç: Denklemin tek çözümleri

$$(k, n) = (1, 1) \quad \text{ve} \quad (3, 2).$$

72. **Soru.** $7n^2 = m^3 + 15m$ denkleminin tam sayılarda kaç çözümü vardır? (İSBO 2019 Ortaokul)

Çözüm. (Lokman Gökçe) $(0,0)$ çözümü açıktır; bundan sonra $m > 0$ kabul edilsin.Denklem

$$7n^2 = m^3 + 15m$$

olduğundan, önce 7'ye göre inceleriz:

$$m^3 + 15m \equiv 0 \pmod 7 \implies m \equiv 0 \pmod 7,$$

yani $m = 7k$. Buna göre

$$n^2 = k\,(49k^2 + 15).$$

Burada

$$d = \gcd\big(k, 49k^2 + 15\big) \in \{1, 3, 5, 15\}.$$

1) $d = 1$:

$$49k^2 + 15 = z^2 \implies \begin{cases} z - 7k = 1, \\ z + 7k = 15, \end{cases}$$

z'den çözülürse $k = 1$, dolayısıyla $m = 7$. Bu durumda $(7, \pm 8)$ olmak üzere 2 çözüm elde edilir.

2) $d = 3$: $k = 3t$ yazılırsa $147t^2 + 15 \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan tam kare olamaz. Çelişki.

3) $d = 5$: $k = 5t$ yazılırsa $245t^2 + 3 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan tam kare olamaz. Çelişki.

4) $d = 15$: $k = 15t$ yazılırsa

$$735t^2 + 1 = z^2 \implies z^2 - 735t^2 = 1,$$

bir Pell denklemi; temel pozitif çözümden iki çözüm elde edilir.

Sonuç olarak, $(0,0)$ ile birlikte toplam $\boxed{5}$ tam sayı çözümü vardır.

73. **Soru.** $a > 1$ ve $b > 1$ tam sayıları için

$$a^{b^2} = b^a$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Bu soruyu $a > b$ olup olmamasına göre iki parçada inceleyelim.

1) $1 \leq a \leq b$ **durumu.**

Eşitliği $(a^b)^b = b^a$ şeklinde yazalım. $a \leq b$ olduğundan $a^b \leq b$ olması gerekir. $f(b) = a^b - b$ fonksiyonuna bakalım:

$$f'(b) = a^b \ln a - 1.$$

$b > a > e$ için $\ln a > 1$ ve $a^b > 1$ olduğu için $f'(b) > 0$. Örneğin $b = 3$ alırsak $a^3 - 3 > 0$ için $a > \sqrt[3]{3}$, yani $a \geq 2$ yeterli. Sonuçta $f(b)$ artandır, bu nedenle ancak $a \leq e$ durumu kalır; yani $a = 1$ veya $a = 2$.

- $a = 1$ ise $1^{b^2} = b^1$ olur, ancak $b > 1$ için $1 = b$ çelişki, dolayısıyla $b = 1$. Bu durumda $(a, b) = (1, 1)$.
- $a = 2$ ise $2^{b^2} = b^2$. $t = b^2$ diyelim, $2^t = t$. $g(t) = 2^t - t$, $g'(t) = 2^t \ln 2 - 1 > 0$ için $t \geq 2$. $g(1) = 1 > 0$, dolayısıyla $2^t > t$ her $t > 1$ için, çözüm yok.

2) $b > a \geq 1$ **durumu.**

Eşitlikten

$$a^{b^2} = (a^b)^b = b^a \implies a > b^2.$$

Yani $\frac{a}{b^2} > 1$. $a = k\,b^2$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ diyelim, böylece $k \geq 2$. Yerine koyunca

$$(k\,b^2)^{b^2} = b^{k\,b^2} \implies k^{b^2} = b^{k-2} \implies k = b^{\frac{k-2}{b^2}}.$$

Sağdaki ifadenin tam sayı olması için $\frac{k-2}{b^2}$ tam olmalıdır, yani $k - 2 = b^2\ell$. Ancak asal üs ilişkileriyle kontrol edince yalnızca küçük k değerleri kalır:

- $k = 3$ için $3 = b^{3-2} = b$, bu da $b = 3$, dolayısıyla $a = 3 \cdot 3^2 = 27$. Çözüm: $(a, b) = (27, 3)$.
- $k = 4$ için $4 = b^{4-2} = b^2$, bu da $b = 2$, dolayısıyla $a = 4 \cdot 2^2 = 16$. Çözüm: $(a, b) = (16, 2)$.

$k \geq 5$ için benzer sayısal kıyaslamalarla $b^{k-2} > k$ çıkar; çelişki.

Sonuç olarak denklem aşağıdaki üç çözümü verir:

$$\boxed{(a, b) = (1, 1),\ (27, 3),\ (16, 2).}$$

74. **Soru.** $2^x = 3^y + 5$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (IMO 1959–1966 LongList)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için denersek

$$(x, y) = (3, 1),\ (5, 3)$$

çözümlerini elde ederiz.

$x \geq 6$ için

$$3^y + 5 \equiv 0 \pmod{64}$$

olduğundan $y \equiv 11 \pmod{16}$ olmalıdır. Bu durumda

$$2^x \equiv 3^{16k+11} + 5 \equiv 3^{11} + 5 \equiv 12 \pmod{17}$$

elde ederiz. Yani

$$2^x \equiv 12 \pmod{17},$$

fakat hiçbir x tam sayısı için bu kongruans sağlanmaz.

Dolayısıyla denklem yalnızca

$$\boxed{(x, y) = (3, 1),\ (5, 3)}$$

çözümlerine sahiptir.

75. **Soru.** $x^2 + y^2 = (x - y)^3$ diyafont denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz. (IMO 1971 LongList)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Öncelikle $x = y$ alırsak

$$x^2 + x^2 = 0^3 \implies 2x^2 = 0 \implies x = 0,$$

bu durumda $(x, y) = (0, 0)$ elde edilir.

Şimdi $x \neq y$ için $x > y$ diyelim ve $k = x - y > 0$ tanımlayalım. O halde

$$(y + k)^2 + y^2 = k^3$$

denklik eşdeğer olarak

$$2y^2 + 2ky + k^2 - k^3 = 0$$

den

$$(2y + k)^2 = k^2(2k - 1).$$

Sağ tarafın tam kare olması için $2k - 1$ tam kare olmalıdır. $2k - 1 = (2t + 1)^2$ yazalım. Buradan

$$k = 2t^2 + 2t + 1,$$

ve yerine koyunca

$$(2y + k)^2 = k^2(2t + 1)^2 \implies 2y + k = \pm k\,(2t + 1).$$

Buna göre iki durum vardır:

1) $2y + k = k\,(2t + 1)$ ise

$$y = 2t^3 + 2t^2 + t,$$

x= y + k= $2t^3 + 4t^2 + 3t + 1$.

2) $2y + k = -k\,(2t + 1)$ ise

$$y = -2t^3 - 4t^2 - 3t - 1,$$

x= y + k= -2t^3 $- 2t^2 - t$.

Sonuç olarak tüm tam sayı çözümler:

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2t^3 + 4t^2 + 3t + 1,\ 2t^3 + 2t^2 + t), \quad (-2t^3 - 2t^2 - t,\ -2t^3 - 4t^2 - 3t - 1),$$

, $t \in \mathbb{Z}$.

76. **Soru.** $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (IMO 1972 LongList)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $x = 0$ için

$$y^4 = 1 \implies y = \pm 1.$$

$x > 0$ olduğunda

$$(x + 1)^4 > x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^4 > x^4$$

olduğundan tam dördüncü kuvvet ara değer vermeyeceği için çözüm yoktur.

$x = -1$ için

$$1 + (-1) + 1 - 1 + 1 = 1 = y^4 \implies y = \pm 1.$$

$x < -1$ iken $x = -a$ ve $a > 1$ yazılırsa

$$y^4 = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1,$$

bu ifade $(a - 1)^4 < y^4 < a^4$ aralığında kaldığından yine tam dördüncü kuvvet olamaz.

Sonuç olarak tüm tam sayı çözümler:

$$(x, y) = (0, 1),\ (0, -1),\ (-1, 1),\ (-1, -1).$$

77. **Soru.** $p^3 + m\,(p + 2) = m^2 + p + 1$ denklemini p asal sayıları ve m pozitif tam sayıları için çözünüz. (AOPS)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Denklemi p modunda incelersek

$$p^3 + mp + 2m \equiv m^2 + p + 1 \pmod{p} \implies (m - 1)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Bundan $m = pk + 1$ alınır ($m = 1$ için çözüm olmadığından $k > 0$).

Yerine yazarsak

$$p^3 + (pk + 1)(p + 2) = (pk + 1)^2 + p + 1 \implies p = k^2 - k.$$

Buna göre p çifttir. $p = 2$ alınca $k = 2$ bulunur ve $m = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Tek çözüm:

$$(m, p) = (5, 2).$$

78. **Soru.** $2a^4 - 2a^2 = b^2 - 1$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. ($AOPS$)

78) Çözüm: (İbrahim Atakan Çiçek) Genellikle bu tarz baş katsayısı tamkareye benzetilemeyen 4. dereceden denklem soruları oldukça zor yöntemler sayesinde çözümlenebiliyor. Ancak bu soruda gizli bir pisagor parametrizasyonu saklı olduğu için bu sorunun biraz daha erişilebilir olduğunu görüyoruz.

$a = 0, 1, 2$ durumlarını özel olarak inceleyelim. $b = 0$ denklemi sağlamadığı açıktır. Genelliği bozmadan $b > 0$ alalım. $a = 0$ için $b = 1$ olur. $a = 1$ için $b = 1$, $a = 2$ için ise $b = 5$ olur. $a = 0$'ı özel incelediğimiz için genelliği bozmadan $a > 0$ alabiliriz; negatif çözümler permütasyonları olacaktır.

$$2a^4 - 2a^2 + 1 = b^2$$
$$(a^2)^2 + (a^2 - 1)^2 = b^2$$

olur. $x^2 + y^2 = z^2$ tarzı pisagor üçlülerinin tam sayı çözümlerini kullanalım.

Bu üçlüler $k.(m^2 - n^2)$, $k.2mn$ ve $k.(m^2 + n^2)$ dir. $a > 1$ için $a^2 - 1$ ve $a^2 > 0$ olduğundan ve k'nın negatif olması aslında pozitif olduğu çözümlerde bulunan m ve n değerlerinin $n, -m$ veya $-m, n$ şeklinde yer değiştirmesine neden olduğundan dolayı genelliği bozmadan $k > 0$, $m > n > 0$ alabiliriz. O halde elimizdeki iki olası denklem sistemi oluşacak. Ayrıca bu iki x, y'ye karşılık gelen ifadelerin farkının 1 olmasından dolayı sadece ilkel çözümler yani $k = 1$ durumunu incelemek yeterlidir.

1)

$$a^2 = m^2 - n^2$$
$$a^2 - 1 = 2mn$$

olur. $m - n = s > 0$ dönüşümü yaparsak, birinci denklem

$$a^2 = (s + n)^2 - n^2 = s^2 + 2sn = s.(s + 2n)$$

olur. Bu da bize $(s, s + 2n) = (s, 2n) = 1$ olduğunu ispatlarsa s'in tamkare olduğunu verir.

İkinci denklemi düzenlersek

$$2sn + s^2 - 1 = 2.(s + n).n = 2sn + 2n^2$$

den $s^2 - 2n^2 = 1$ elde ederiz. Bu denkleme bakarsak s tektir, yani $s = s_0^2$, $s_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dönüşümü yapmamızı sağlar. Buradan

$$(s_0^2 - 1)(s_0^2 + 1) = 2n^2$$

elderiz. s tek olduğu için sol taraftaki her iki çarpan da 2 ile bölünür; bu da bize n'in çift olduğunu yani $n = 2n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seçimi verir. $(s_0^2 - 1, s_0^2 + 1) = 2$ olduğundan

$$(s_0^2 - 1)(s_0^2 + 1) = 8n_0^2$$

olur. Yani sol taraftaki çarpanlardan biri $s_0^2 - 1 = 4w^2$, $s_0^2 + 1 = 2v^2$ veya $s_0^2 - 1 = 2w^2$, $s_0^2 + 1 = 4v^2$ olacak şekilde $v, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bulunur.

$s_0^2 - 1 = 4w^2$ denkleminde iki kare farkını 1'e eşitleme yoluyla çözersek ve değişkenimizi yukarıda yerine koyarsak $s = 1$ olduğunu buluruz. $s^2 - 2n^2 = 1$ den dolayı $n = 0$, yani $m = 1$ olur; bu da $a = 1$'e gider fakat biz en başta $a > 1$ kabulüyle başlamıştık. Diğer $s_0^2 + 1 = 4v^2$ durumundan ise hiç çözüm gelmez.

2)

$$a^2 = 2mn$$
$$a^2 - 1 = m^2 - n^2$$

olur. $(m, n) = 1$ olduğu için $m = p^2$, $n = 2q^2$ veya $m = 2p^2$, $n = q^2$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bulunur.

A) $m = p^2$, $n = 2q^2$ için denklemimiz

$$a^2 - 1 = p^4 - 4q^4$$

olur. Buradan

$$(p^2 + 2q^2)^2 = 1 + 2p^4$$

olur. $p^2 + 2q^2 = f$, $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ yazılırsa denklem

$$f^2 - 1 = 2p^4$$

olur. Burada $f = 2g + 1$, $p = 2h$ dönüşümleri yaparsak

$$g.(g + 1) = 8h^4$$

olur. $(g, g + 1) = 1$ olduğundan

a) $g + 1 = 8t^4$, $g = v^4$ olacak şekilde $t, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ için

$$v^4 - 8t^4 = -1$$

modüler aritmetikle $v^4 \equiv 3 \pmod 4$ olur; çelişki.

b) O halde $g + 1 = t^4$, $g = 8v^4$ şeklinde alınır; bu da

$$t^4 - 8v^4 = 1$$

$$(t^2 - 1)(t^2 + 1) = 8v^4$$

verir. Bu denklemi yukarıda s_0, n_0 için çözdüğümüzde tek negatif olmayan çözüm $(1, 0)$ bulmuştuk. $t = 1$ ise $g = 0$, $f = 1$, $p = 0$, $q^2 = 1/2$ çelişki; çözüm yok.

B) $m = 2p^2$, $n = q^2$ için denklem

$$4p^2q^2 - 1 = 4p^4 - q^4$$

olur. Yazarsak

$$(2p^2 + q^2)^2 = 8p^4 + 1$$

Bu denklemin pozitif tam sayılardaki tek çözümü $o = 3$, $p = 1$'dir (99) numaralı soruda ispatlanmıştır. Negatif olmayan diğer çözüm $p = 0$, $o = 1$ ikilisidir; bu da $q = 1$, $m = 0$ verir, çelişki. $p = 1$, $o = 3$ için $q = 1$, $m = 2$, $n = 1$, ve $a^2 = 4$ olduğundan $a = 2$; en başta deneme ile bulduğumuz çözüm.

Bu denklemin tüm (a, b) çözümleri $(0, 1), (1, 1), (2, 5)$ ve permütasyonlarıdır. İspat biter.

79. **Soru.** $ab + ac + bc = 1$ eşitliğini sağlayan tamsayı a, b, c için

$$(a^2 + 1)\,(b^2 + 1)\,(c^2 + 1) \;=\; 3^x - 5^y$$

eşitliğini sağlayan tam sayılar x, y ne olabilir ve bu koşulu sağlayan kaç (a, b, c) üçlüsü vardır?

1. yol: 79)

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1,$$

$$(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2\,abc\,(a + b + c),$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Bunları birleştirerek

$$(a + b + c - abc)^2 = 3^x - 5^y$$

deriz. $a + b + c - abc = p$ alınır. Böylece

$$p^2 = 3^x - 5^y.$$

$p^2 \equiv \{0, 1, 4\} \pmod 5 \equiv 3^x \pmod 5$ olduğundan x çift olmalı: $x = 2t$. İki kare farkı formuna göre

$$(p - 3^t)(p + 3^t) = -5^y.$$

" $p+3^t \le 0$" varsayımını eleyince $p+3^t>0$ kalır ve

$$\begin{cases} p+3^t = 5^g, \\ p-3^t = -5^{\,y-g}, \end{cases}$$

$g \in \mathbb{N}$. Düzenlersek

$$2 \cdot 3^t = 5^g + 5^{y-g}.$$

Sağ taraf 5'e bölünemez, öyleyse $g=0$ veya $y=g$.

1) $g=0$ için $2\,3^t = 5^y+1$. Lifting The ExponentLEMMA uygulandığında $t>1$ çelişki verir. - (a) $t=0$ için $y=0$ ve $p=0$, mümkün değil çünkü $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 1$. - (b) $t=1$ için $y=1$ ve $p=-2$.

2) $y=g$ için - (a) $t=0$ yine önceki (a) ile çelişki. - (b) $t=1$ için $y=1$ ve $p=2$.

Buna göre iki sistem elde ederiz:

$$\begin{cases} ab+ac+bc=1, \\ abc-(a+b+c)=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} ab+ac+bc=1, \\ abc-(a+b+c)=-2. \end{cases}$$

$c = \dfrac{1-ab}{a+b}$ yazıp yerine koyunca

$$\frac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{a+b} = \pm 2$$

olarak sadeleşir ve

$$(ab)^2 + (a \pm 1)^2 + (b \pm 1)^2 = 1$$

denklikleri üzerinde çözümleyince

$$(a,b,c) \in \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(-1,-1,0),(-1,0,-1),(0,-1,-1)\}.$$

Bu durumda toplam $\boxed{6}$ çözüm elde edilir.

2. yol: Bu soruda

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

ifadesinin $ab+ac+bc=1$ yardımıyla tam kareye tamamlanabileceğini gösterelim. Açarsak:

$$a^2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2+b^2+c^2+1 = (abc)^2+(ab+ac+bc)^2-2\,abc\,(a+b+c)+(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)+1$$

Yani

$$(abc-(a+b+c))^2$$

olur.

Dolayısıyla

$$3^x - 5^y = k^2,$$

k tam sayı ve $k \neq 0$. Üs tarafını mod4'te inceleyelim:

$$3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod 4.$$

Eğer x tek ise $3^x - 5^y \equiv 2 \pmod 4$ olur; çelişki. Öyleyse $x=2m$. İki kare farkı uygulayalım:

$$3^{2m} - k^2 = (3^m-k)(3^m+k) = 5^y.$$

Buradan $3^m-k=5^p$, $3^m+k=5^q$ $(p<q)$. Toplarsak

$$5^p + 5^q = 2 \cdot 3^m.$$

$p, q > 0$ ise sağ taraf 5'e bölünür, çelişki; öyleyse $p = 0$:

$$3^m - k = 1, \qquad 3^m + k = 5^y.$$

Bunlar toplandığında

$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^m.$$

Şimdi mod3'te bakarak y tek olduğunu ve Bang Zsigmondy Lemmasını uygulayarak tek istisna $y = 1$ olduğunu görürüz. Sonuçta $m = 1$ (yani $x = 2$) ve

$$abc - (a + b + c) = \pm 2.$$

Eski $ab + ac + bc = 1$ ile birlikte

$$(a + b)(a + c)(b + c) = (a + b + c)(ab + ac + bc) - abc = \pm 2$$

denkleminden yalnızca

$$(a, b, c) \in \{(1, 1, 0), (-1, -1, 0)\}$$

ve permütasyonları elde edilir. Böylece yine toplam 6 çözüm bulunur.

İspat biter.

80. **Soru.** $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = n^2 + 4xy$ eşitliğini tam sayılarda çözüm sayısı kaçtır?

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Verilen ifadeyi düzenlersek

$$n^2 = (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) - 4xy = (x + 1)^2(y - 1)^2.$$

Bundan

$$n = \pm\,(x + 1)(y - 1).$$

Dolayısıyla, n'yi bölen her $a \in \mathbb{Z}$ için iki ayrı çözüm:

$$(x, y) = \left(a - 1,\ \frac{n}{a} + 1\right) \quad \text{ve} \quad (x, y) = \left(a - 1,\ -\frac{n}{a} + 1\right)$$

elde edilir. Bu çözümler çakışık olamaz, çünkü aksi halde $1/a = 0$ olması gerekirdi.

Her bölen a için tam olarak 2 çözüm olduğundan, toplam çözüm sayısı, n'nin pozitif ve negatif bölenlerinin toplam sayısının 2 katıdır.

81. **Soru.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{n}$ eşitliğinin pozitif tam sayılarda kaç çözümü vardır?

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Denklemden

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad xy = n(x + y) \quad \Longrightarrow \quad (x - n)(y - n) = n^2.$$

Pozitif tam sayılarda $x > n$ ve $y > n$ olduğundan $(x - n), (y - n) > 0$ ve n^2'nin her pozitif böleni a için

$$(x - n) = a, \quad (y - n) = \frac{n^2}{a}$$

ir çözüm verir. Dolayısıyla

$$(x, y) = \left(n + a,\ n + \frac{n^2}{a}\right),$$

burada a n^2'nin pozitif bölenidir.

Sonuçta, denklem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

'in pozitif tam sayı çözümlerinin sayısı, n^2'nin pozitif bölen sayısına eşittir.

82. **Soru.** $(xy-9)^2 = x^2+y^2$ denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz. (Hindistan Olimpiyat sorusundan uyarlanmıştır.)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Denklem simetrik olduğundan genelliği bozmadan $x \geq y$ alalım. O halde

$$2x^2 \geq x^2+y^2 = (xy-9)^2 \implies 0 \geq x^2(y^2-2) - 18xy + 81$$

aynı zamanda

$$0 \geq x^2(y^2-2) - 18x^2 + 81.$$

Eğer $y \geq 5$ ise

$$0 \geq x^2(y^2-20) + 81 \geq 5x^2 + 81 > 0,$$

çelişki; dolayısıyla $y \leq 4$ olmalıdır.

(a) $y=0$ ise $81 = x^2$, bu da $(x,y)=(9,0)$.

(b) $y=1$ ise $(x-9)^2 = x^2+1$, $x = 40/9$; tam sayı çözümü yok.

(c) $y=2$ ise $(2x-9)^2 = x^2+4$, $3x^2-36x+77=0$; tam sayı çözümü yok.

(d) $y=3$ ise $(3x-9)^2 = x^2+9$, $4x^2-27x+36=0$; tam sayı çözümü yok.

(e) $y=4$ ise $(4x-9)^2 = x^2+16$, $15x^2-72x+65=0$; tam sayı çözümü yok.

Sonuç olarak, negatif olmayan tam sayı çözümler:

$$(x,y) = (9,0) \quad \text{ve} \quad (0,9).$$

83. **Soru.** $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$ denklemini tam sayılarda çözünüz. (Polonya Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Denklemi açalım:

$$x^2y + xy^2 - x^2 - y^2 = xy(x+y) - (x^2+y^2) = 1.$$

Ayrıca $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ olduğundan

$$xy(x+y) - \left((x+y)^2 - 2xy\right) = 1 \quad \implies \quad xy\,(x+y+2) = (x+y)^2+1.$$

Şimdi $a = xy$ ve $b = x+y$ diyelim. O halde

$$a(b+2) = b^2+1 \quad \implies \quad a = \frac{b^2+1}{b+2} = b-2+\frac{5}{b+2}.$$

$b+2$ çarpanının 5'i bölmesi gerek, dolayısıyla

$$b+2 \in \{\pm 1, \pm 5\} \implies b \in \{-3,-1,3,-7\}.$$

Bu b değerlerine karşılık gelen $a = (b^2+1)/(b+2)$ değerleri:

$$(b,a) = (-3,-10),\ (-1,2),\ (3,2),\ (-7,-10).$$

Şimdi her çifti $x+y=b$, $xy=a$ denklem sisteminde çözelim:
- $(b,a) = (-3,-10)$ için $t^2+3t-10=0$; kökler $t=2,\ -5$. Çözümler: $(x,y) = (-5,2),(2,-5)$.
- $(b,a) = (-1,2)$ için $t^2+t+2=0$; tam sayı kök yok.
- $(b,a) = (3,2)$ için $t^2-3t+2=0$; kökler $t=1,\ 2$. Çözümler: $(x,y)=(1,2),(2,1)$.
- $(b,a) = (-7,-10)$ için $t^2+7t-10=0$; diskriminant 89 kare değil.

Sonuç olarak tüm tam sayı çözümler:

$$\boxed{(x,y) = (-5,2),\ (2,-5),\ (1,2),\ (2,1)}.$$

84. **Soru.** $x^4+4=p\,y^4$ eşitliğini tam sayılarda çözümlü yapan tüm p asallarını bulunuz. (Ion Cucurezeanu)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Öncelikle x'in tek sayı olması gerektiğini gösterelim. Aksini varsayalım, $x=2m$ olsun. Denklem

$$16m^4+4=p\,y^4$$

şeklinde olur. Sol taraf 4 ile bölünür; sağ tarafın da 4 ile bölünebilmesi için $p=2$ ve y çift olmalıdır. Fakat $y=2n$ alınca

$$16m^4+4=16p\,n^4$$

ve sol taraf 16 ile, sağ taraf ise ancak $p\neq 1$ ise bölünür; çelişki. Böylece x tek.

Şimdi ifade çarpanlarına ayıralım:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=p\,y^4.$$

x tek olduğundan $x^2\pm 2x+2$ ifadeleri aralarında asaldır. O halde iki asal çarpanlı yapıdan biri

$$x^2+2x+2=p\,a^4,\quad x^2-2x+2=b^4,$$

ve diğeri

$$x^2+2x+2=a^4,\quad x^2-2x+2=p\,b^4.$$

i) $x^2+2x+2=p\,a^4$, $x^2-2x+2=b^4$.

$$(x-1)^2+1=b^4 \implies (b^2-x+1)(b^2+x-1)=1$$

Bu yalnızca $x=1$ ile mümkündür. $x=1$ iken ilk denklem $p\,y^4=5$, dolayısıyla $p=5$.

ii) $x^2+2x+2=a^4$, $x^2-2x+2=p\,b^4$.

$$(x+1)^2+1=a^4 \implies (a^2+x+1)(a^2-x-1)=1$$

Bu yalnızca $x=-1$ ile mümkündür. $x=-1$ iken $p\,y^4=5$ veren tek $p=5$.

Her iki durumda da $p=5$ bulunur.

Sonuç olarak, denklem tam sayılarda ancak $\boxed{p=5}$ asalıyla çözümlüdür.

85. **Soru.** $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=5n-4$ ve $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}+\cdots+\dfrac{1}{k_n}=1$ eşitliğini pozitif tam sayılar için çözünüz. (Putnam Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Verilen eşitlikleri Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğinde kullanırsak (terimler pozitif olduğundan uygulanabilir):

$$\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n}\geq\frac{n}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\cdots+\dfrac{1}{k_n}}\Rightarrow\frac{5n-4}{n}\geq n\Rightarrow 0\geq n^2-5n+4$$

n^2-5n+4 bir parabol olduğundan ve başkatsayısı pozitif olduğundan negatif değer alabilmesi için n sayısı, $x^2-5x+4=0$ denkleminin köklerinin arasında olmalıdır. Bu denklemin kökleri $x=1$ ve $x=4$ olduğundan $n\in[1,4]$ olmalıdır. $n=1$ ve $n=4$ için eşitlik durumu sağlandığından terimler birbirine eşit olmalıdır.

i) $n=1$ için $k_1=1$ olur. $(n,k_1)=(1,1)$ çözümü gelir.

ii) $n=4$ için terimlerin eşit olması gerektiğini belirtmiştik. $k_1=k_2=k_3=k_4$ için $k_1+k_2+k_3+k_4=16$ olduğundan $(n,k_1,k_2,k_3,k_4)=(4,4,4,4,4)$ çözümü gelir.

iii) $n = 2$ ise $k_1 + k_2 = 6$ ve $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{k_1 + k_2}{k_1k_2} = \dfrac{6}{k_1k_2} = 1$ olduğundan $k_1k_2 = 6$ elde edilir. Bu iki denklemin tamsayı çözümü yoktur.

iv) $n = 3$ ise $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ ve $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} = 1$ denklemleri elde edilir.

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{k_1k_2k_3} = 1 \Rightarrow k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 = k_1k_2k_3$$

$k_3 = 11 - k_1 - k_2$ dersek:

$$k_1k_2 + (11 - k_1 - k_2)(k_1 + k_2) = k_1k_2(11 - k_1 - k_2)$$

$k_1k_2 = a$ ve $k_1 + k_2 = b$ için:

$$a + (11 - b)b = a(11 - b) \Rightarrow a = \frac{b^2 - 11b}{b - 10} = b - 1 - \frac{10}{b - 10}$$

Buradan olası pozitif b değerlerini bulabiliriz: $b = 5, 8, 9, 11, 12, 15, 20$ bulunur.

Bu değerler için a değerlerini de hesaplayabiliriz:

$$(a, b) = (6, 5),\ (12, 8),\ (18, 9),\ (0, 11),\ (6, 12),\ (12, 15),\ (18, 20)$$

Bunlardan sadece $(a, b) = (6, 5),\ (12, 8),\ (18, 9)$ için k_1 ve k_2 pozitif tamsayıları bulunabilir. Bu (a, b) ikilileri için:

$$(k_1, k_2, k_3) = (2, 3, 6) \text{ ve permütasyonları bulunur.}$$

Sonuç: Tüm çözümler:

$$\boxed{(x, y) = (1, 1),\quad (3, 2, 3, 6),\quad (3, 2, 6, 3),\quad (3, 3, 2, 6),\quad (3, 3, 6, 2),\quad (3, 6, 2, 3),\quad (3, 6, 3, 2),\quad (4, 4, 4, 4, 4)}$$

86. **Soru.** $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) = 2$ denklemini pozitif tam sayılar için çözünüz. (İngiltere Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Öncelikle x, y, z sayılarının farklı olduğu durumu inceleyelim. Genelliği bozmadan $x < y < z$ alalım.

(a) $x = 1$ için

$$\frac{y+1}{y}\frac{z+1}{z} = 1,$$

fakat her iki çarpan da > 1 olduğundan çözüm yok.

(b) $x = 2$ için

$$\frac{y+1}{y}\frac{z+1}{z} = \frac{4}{3}.$$

Burada $\frac{y+1}{y} > \frac{z+1}{z}$ olduğundan

$$(\tfrac{y+1}{y})^2 > \tfrac{4}{3},$$

ki bu da $y \leq 6$ demektir. Deneme ile

$$(x, y, z) = (2, 6, 7),\ (2, 5, 9),\ (2, 4, 15)$$

çözümlerini buluruz.

(c) $x = 3$ için

$$\frac{y+1}{y}\frac{z+1}{z} = \tfrac{3}{2}.$$

Benzer şekilde

$$(\tfrac{y+1}{y})^2 > \tfrac{3}{2} \Rightarrow y \leq 4.$$

$y > x$ olduğundan $y = 4$ ve

$$(x, y, z) = (3, 4, 5)$$

çözümü elde edilir.

(d) $x > 3$ ise $y > 4$, $z > 5$ ve

$$(1 + \tfrac{1}{x})(1 + \tfrac{1}{y})(1 + \tfrac{1}{z}) < (1 + \tfrac{1}{3})(1 + \tfrac{1}{4})(1 + \tfrac{1}{5}) = 2$$

çelişki oluşturur.

Eğer x, y, z'den en az ikisi eşitse, genelliği bozmadan $y = z$ alalım. O halde

$$(1 + \tfrac{1}{x})\,(1 + \tfrac{1}{y})^2 = 2.$$

$\gcd(x, x+1) = \gcd(y, y+1) = 1$ olduğundan

$$\frac{x+1}{y^2},\ \frac{(y+1)^2}{x}$$

ifadeileri tam sayı olmalı ve çarpımları 2 olduğundan iki durum vardır:

(a) $\frac{x+1}{y^2} = 1$, $\frac{(y+1)^2}{x} = 2$ ise

$$y^2 = x + 1, \quad y^2 + 2y + 1 = 2x$$

sisteminden $y = 3$, dolayısıyla

$$(x, y, z) = (8, 3, 3)$$

.

(b) $\frac{x+1}{y^2} = 2$, $\frac{(y+1)^2}{x} = 1$ ise tamsayı çözüm yok.

Sonuç olarak tüm çözümler:

$$\boxed{(x, y, z) = (2, 6, 7),\ (2, 5, 9),\ (2, 4, 15),\ (3, 4, 5),\ (8, 3, 3)}$$

dan permütasyonlarıdır.

Bu soru için Metin Can Aydemir'in yaptığı genelleme Geomania.org sitesinde "Sayılar Teorisi" altında "Çarpımları Tamsayı Olan Rasyonel Sayılar" başlığında mevcuttur.

87. **Soru.** Tüm tam sayılar n için

$$(x + y + z)^2 = n\,x\,y\,z$$

pozitif tam sayılarda çözümlü olsun. (American Mathematical Reformulation)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Genelliği bozmadan $x \geq y \geq z > 0$ alalım ve bu koşulu sağlayan pozitif tam sayı üçlüleri arasında toplamı en küçük olan (x, y, z)'i seçelim. Denklemi x açısından ikinci derece denklem olarak yazalım:

$$x^2 - x(nyz - 2y - 2z) + (y + z)^2 = 0.$$

Diğer köküne a diyelim. Vieta'ya göre

$$x + a = nyz - 2y - 2z,\ \ xa = (y + z)^2.$$

Bu eşitlikler $a > 0$ tamsayı ve $a \geq x$ olduğunu, aksi takdirde (a, y, z) toplamı daha küçük bir çözüm olurdu, gösterir. Ayrıca

$$(y+z)^2 = ax \geq x^2 \implies y+z \geq x,$$

ve

$$(y+z)^2 = ax \geq a\frac{(y+z)}{2} \implies 2(y+z) \geq a.$$

Bunlardan

$$3(y+z) \geq x + a = nyz - 2y - 2z$$

elde edilir. Düzenleyince

$$0 \geq n\,y\,z - 5y - 5z \implies 25 \geq (ny-5)(nz-5).$$

Eğer $n > 10$, o halde $ny - 5 > 5$, $nz - 5 > 5$ olur ve çelişki doğar. Dolayısıyla $n \leq 10$.

i) $n = 10$ için $25 \geq (10y-5)(10z-5) \geq 25$ olmalı, bu da $y = z = 1$ gerektirir. O zaman

$$(x+2)^2 = 10x \implies x^2 - 6x + 4 = 0$$

tamsayı çözüm yok.

ii) $n = 7$ için $y, z \geq 2$ olursa $(7y-5)(7z-5) \geq 81$ olur; çelişki. $z = 1$ alalım, $25 \geq 2(7y-5)$ ve $y \leq 2.5$, yani $y = 1$ veya 2 denenir. - $y = 1:\ (x+2)^2 = 7x$; tam sayı çözümü yok. - $y = 2:\ (x+3)^2 = 14x$; tam sayı çözümü yok.

Sonuçta $n = 7, 10$ için çözüm yoktur; diğer $1 \leq n \leq 9$, $n \neq 7$ değerleri için örnekler buluruz:

$$(n,x,y,z) = (1,9,9,9), (2,8,4,4), (3,3,3,3), (4,4,2,2), (5,5,4,1), (6,3,2,1), (8,2,1,1), (9,1,1,1).$$

Dolayısıyla denklem pozitif tam sayılarda çözümlü olabilmesi için $\boxed{n \in \{1,2,3,4,5,6,8,9\}}$.

88. **Soru.** $x^2 + 84x + 2008 = y^2$ eşitliğini sağlayan pozitif tam sayılar x, y için $x + y$ kaçtır? (AIME)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Öncelikle tamamlayarak kareyi elde edelim:

$$y^2 = x^2 + 84x + 2008 = (x+42)^2 + 244.$$

Böylece

$$(y-x-42)(y+x+42) = 244 = 2^2 \cdot 61.$$

Ayrıca

$$(y-x-42) + (y+x+42) = 2y$$

olduğundan iki çarpan da aynı paritede olmalıdır; çarpımları çift olduğundan ikisi de çift alınır. Büyüğü küçükten büyük olduğuna göre

$$y + x + 42 = 122, \quad y - x - 42 = 2.$$

Bu iki denklemi çözersek

$$y = 62, \quad x = 18.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{x + y = 80}.$$

89. **Soru.** A,B,C rakamlar olmak üzere

$$(100A + 10B + C)\,(A + B + C) = 2005$$

eşitliğini sağlayan A değeri kaçtır? (AMC 12A, 2005)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Önce $A = 0$ durumunu inceleyelim. Denklem

$$(10B + C)(B + C) = 2005$$

hâline gelir.

$$(10B + C)(B + C) \leq (10 \cdot 9 + 9)(9 + 9) = 1782 < 2005,$$

bu nedenle $A = 0$ için çözüm yoktur.

A, B, C rakam olduğuna göre $A \neq 0$ ise $\overline{ABC}$ üç basamaklı bir sayıdır. 2005'in asal çarpanlarını yazarsak

$$2005 = 5 \times 401,$$

dolayısıyla $\overline{ABC}$ bu sayıların bir böleni olmalıdır:

$$1, 5, 401, 2005$$

değerleri arasından yalnızca 401 üç basamaklıdır. O halde $\overline{ABC} = 401$ ve

$$A + B + C = 4 + 0 + 1 = 5,$$

ki $(100 \cdot 401)(5) = 2005$ doğrular. Sonuç:

$$\boxed{A = 4}.$$

90. **Soru.** $71p + 1$ bir doğal sayının tam karesi olacak şekildeki tüm p asallarını bulunuz. (Purple Comet MS 2011)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $x \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x^2 = 71p + 1$$

olsun. Bu denklem eşdeğer olarak

$$x^2 - 1 = 71p \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 71p$$

şeklinde yazılabilir.

$x + 1 > x - 1$ ve 71 asal olduğundan, $(x - 1, x + 1)$ ikilisi $(1, 71p)$, $(71, p)$ ya da $(p, 71)$ olabilir.

- **1. Durum:** $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$, bu durumda $x + 1 = 3 \Rightarrow 71p = 1 \cdot 3 = 3$ olur. Bu mümkün değildir.
- **2. Durum:** $x - 1 = 71 \Rightarrow x = 72 \Rightarrow x + 1 = 73 \Rightarrow p = 73$ olur. Bu uygundur çünkü:

  $$71 \cdot 73 + 1 = 5183 + 1 = 5184 = 72^2$$

- **3. Durum:** $x - 1 = p = 69 \Rightarrow x = 70 \Rightarrow x + 1 = 71$, ancak 69 asal değildir. Bu durumda uygun değildir.

Sonuç: Koşulu sağlayan tek asal sayı $\boxed{p = 73}$'tür.

91. **Soru.** p, q, r asal sayılar olmak üzere

$$pqr = 7(p + q + r)$$

eşitliği veriliyor. Buna göre $p + q + r$ kaçtır?

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Sağ taraf 7 ile bölünebildiği için sol taraf da 7 ile bölünmelidir. Bu nedenle asal çarpanlardan en az biri 7 olmalıdır. Genelliği bozmadan $r = 7$ alalım.

$$pqr = 7(p+q+r) \Rightarrow pq \cdot 7 = 7(p+q+7)$$

Her iki tarafı 7'ye bölelim:

$$pq = p+q+7$$

Bu ifadeyi yeniden düzenleyelim:

$$pq - p - q + 1 = 8 \Rightarrow (p-1)(q-1) = 8$$

Şimdi 8'in pozitif bölen çiftlerini inceleyelim: $(1,8), (2,4), (4,2), (8,1)$. Bu durumlara göre:

- $(p-1, q-1) = (1,8) \Rightarrow (p,q) = (2,9)$: 9 asal değildir.
- $(p-1, q-1) = (2,4) \Rightarrow (p,q) = (3,5)$: Uygun.
- $(p-1, q-1) = (4,2) \Rightarrow (p,q) = (5,3)$: Uygun.
- $(p-1, q-1) = (8,1) \Rightarrow (p,q) = (9,2)$: 9 asal değildir.

Uygun olan ikililer $(p,q) = (3,5)$ ve $(5,3)$ olup $r = 7$ olduğundan:

$$p+q+r = 3+5+7 = \boxed{15}$$

Sonuç: $\boxed{p+q+r = 15}$

92. **Soru.** $n-76$ ve $n+76$ aynı anda bir pozitif sayının kübü olacak şekildeki n tam sayılarını bulunuz. (Purple Comet HS 2004)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $n - 76 = a^3$ ve $n + 76 = b^3$ olarak tanımlayalım. Bu durumda:

$$b^3 - a^3 = (n+76) - (n-76) = 152$$

Küp farkı formülüyle:

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2+ab+b^2) = 152$$

Faktörizasyon: $152 = 2^3 \cdot 19$

İfadede $b-a$ çarpan olduğundan bu çarpan çift olmalıdır (çünkü $b^3 - a^3$ çift). Ayrıca:

$$a^2+ab+b^2 = (b-a)^2 + 3ab > (b-a)^2$$

Bu durumu sağlayan küçük bölen kombinasyonlarını deneyelim.

- **Durum 1:** $(b-a, a^2+ab+b^2) = (2, 76)$
  $b = a+2$ yazarsak:

  $$a^2+a(a+2)+(a+2)^2 = 76 \Rightarrow a^2+a^2+2a+a^2+4a+4 = 76 \Rightarrow 3a^2+6a+4 = 76 \Rightarrow 3a^2+6a-72 = 0$$

  $$\Rightarrow a^2+2a-24 = 0 \Rightarrow (a+6)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 4$$
  Bu durumda $b = 6$, $n = a^3 + 76 = 64 + 76 = \boxed{140}$
- **Durum 2:** $(b-a, a^2+ab+b^2) = (4, 38)$
  $b = a+4$ yazarsak:

  $$a^2+a(a+4)+(a+4)^2 = 38 \Rightarrow a^2+a^2+4a+a^2+8a+16 = 38 \Rightarrow 3a^2+12a+16 = 38 \Rightarrow 3a^2+12a-22 = 0$$

  Diskriminant $144 + 264 = 408$ kare sayı değildir, bu durumda tamsayı çözüm gelmez.

Sonuç: Şartı sağlayan tek tam sayı:

$$\boxed{n = 140}$$

93. **Soru.** a ve b pozitif tam sayıları için

$$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right)\right) = 0$$

eşitliğini sağlayan tüm $a+b$ değerlerinin toplamı kaçtır? (AIME I 2013)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) İlk olarak, $\log_k(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 1$ olduğundan:

$$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right)\right) = 0 \Rightarrow \log_{2^a}\left(\log_{2^b} 2^{1000}\right) = 1$$

Yine, $\log_k(x) = 1$ ancak ve ancak $x = k$ olduğundan:

$$\log_{2^b} 2^{1000} = 2^a$$

Şimdi, üs değişimi kuralı uygulanır:

$$\log_{2^b} 2^{1000} = \frac{1000}{b} \Rightarrow \frac{1000}{b} = 2^a \Rightarrow b = \frac{1000}{2^a}$$

Buradan 2^a sayısı 1000'in böleni olmalıdır. $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ olduğundan $2^a = 1, 2, 4, 8$ olabilir.

Ancak $a \geq 1$ ve a pozitif tam sayı olduğundan geçerli 2^a değerleri: $2, 4, 8$

- $2^a = 2 \Rightarrow a = 1,\ b = \frac{1000}{2} = 500 \Rightarrow a + b = 501$
- $2^a = 4 \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{1000}{4} = 250 \Rightarrow a + b = 252$
- $2^a = 8 \Rightarrow a = 3,\ b = \frac{1000}{8} = 125 \Rightarrow a + b = 128$

Sonuç: Geçerli (a, b) çiftleri: $(1, 500)$, $(2, 250)$, $(3, 125)$
$a + b$ toplamları: $501 + 252 + 128 = \boxed{881}$

94. **Soru.** $4^y - 615 = x^2$ eşitliğini sağlayan (x, y) ikililerini bulunuz. (American Math League 2005–2006)

Çözüm. Öncelikle şu görülebilir ki $y < 5$ ise denklemin sol tarafı negatif olmaktadır. Dolayısıyla negatif y değerleri için çözüm yoktur. Ayrıca (x, y) bir çözümse $(-x, y)$ de bir çözüm olacağından genelliği bozmadan x'i pozitif alabiliriz. ($x = 0$ için denklemin çözümü olmadığı barizdir.)

$$4^y - 615 = x^2 \Rightarrow 4^y - x^2 = (2^y - x)(2^y + x) = 615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$$

$2^y - x + 2^y + x = 2^{y+1}$ olduğundan 615'in çarpanları arasından toplamı 2'nin kuvveti olan ve çarpımları 615 olan ikilileri bulmalıyız. Çarpımları 615 olan tüm ikililer:

$$(1, 615), \quad (3, 205), \quad (5, 123), \quad (15, 41)$$

Bunlardan toplamı 2'nin kuvveti olan sadece $(5, 123)$ ikilisidir. Dolayısıyla:

$$2^y - x = 5, \quad 2^y + x = 123$$

Bu iki denklemden $(x, y) = (59, 6)$ bulunur. Başta da belirttiğimiz gibi $(x, y) = (59, 6)$ çözümse $(x, y) = (-59, 6)$ da bir çözümdür.

Sonuç: Tüm çözümler:

$$\boxed{(x, y) = (59, 6),\ (-59, 6)}$$

95. **Soru.** $2(x^2+y^2)+x+y=5xy$ denkleminin tüm (x,y) tam sayı ikililerini bulunuz. (Awesome Math Test A)

Çözüm. Bu tarz sorularda doğrudan diskriminant x cinsi 2. derece denklem formunda yazıldığında tam kare olmalıdır ve dolayısıyla negatif olmamalıdır benzeri çözüm yöntemi de çözüme direkt ulaştırabilir. (Bu çözümü yazmadım.)

(Metin Can Aydemir) Verilen denklemi düzenleyelim:

$$2(x^2+y^2)+x+y=5xy \Rightarrow 2(x+y)^2+x+y=9xy$$

$x+y=a$ ve $xy=b$ diyelim. Böylece:

$$2a^2+a=9b \Rightarrow b=\frac{2a^2+a}{9}$$

Ayrıca köklerin reel olması için:

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-4b\in\mathbb{Z}^2$$

Yukarıdaki ifadeyi yerine koyarsak:

$$a^2-4b=a^2-\frac{8a^2+4a}{9}=\frac{9a^2-8a^2-4a}{9}=\frac{a^2-4a}{9}\Rightarrow\frac{a^2-4a}{9}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a^2-4a \text{ kare olmalı.}$$

$a^2-4a=t^2$ yazarsak:

$$a^2-4a+4=t^2+4\Rightarrow(a-2)^2-t^2=4\Rightarrow(a-2-t)(a-2+t)=4$$

Soldaki çarpanların paritesinin aynı olduğu görülebilir. Çarpan çiftlerini deneyelim: $(\pm2,\pm2)$
Bunlardan $(a-2-t,a-2+t)=(-2,-2)\Rightarrow a=0$
ve $(2,2)\Rightarrow a=4$ elde edilir.

Bu a değerleri için $b=\dfrac{2a^2+a}{9}$ hesaplayalım:

$$a=0\Rightarrow b=0,\quad a=4\Rightarrow b=\frac{2\cdot16+4}{9}=\frac{36}{9}=4$$

$(x+y=a,xy=b)$ ikilileri:

$$(a,b)=(0,0)\Rightarrow(x,y)=(0,0),\quad(a,b)=(4,4)\Rightarrow x=y=2$$

Sonuç: Tüm tam sayı çözümler: $\boxed{(x,y)=(0,0),\ (2,2)}$

96. **Soru.** $x^3+y^3=z^3$ denkleminin tam sayılardaki genel çözümünü bulunuz. (FST $n=3$ ispatı merak edenler için)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) $x^3=1$ denkleminin karmaşık sayılarda üç tane çözümü vardır. Bunlar, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere 1, ω ve ω^2'dir ve $\omega^2+\omega+1=0$ sağlanır. Biz $x^3+y^3=z^3$ denkleminin tamsayılardan daha büyük bir küme olan

$$\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

kümesinde çözümlerine bakacağız. [Buradaki](https://geomania.org/forum/index.php?topic=7528) gönderide $\mathbb{Z}[\omega]$'nin birim veya 0 olmayan her elemanının tek şekilde çarpanlarına ayrılabildiğini göstermiştik ($\mathbb{Z}[\omega]$'de birim elemanlar $1, -1, \omega, -\omega, 1+\omega, -1-\omega$'dır).

$x^3 + y^3 = z^3$ denkleminde eğer EBOB$(x, y, z) = d$ ise herhangi bir (x, y, z) çözümü için

$$\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$$

de çözüm olacağından genelliği bozmadan EBOB$(x, y, z) = 1$ kabul edebiliriz. Tüm çözümleri bulmak için elde edeceğimiz ilkel çözümleri d ile çarpmamız yeterli olacaktır. Bu denklem için x, y, z'nin aralarında asal olması ikişerli olarak da aralarında asal olması demektir. Şimdi x ve y'nin $\mathbb{Z}[\omega]$'de aralarında asal olup olmadığını kontrol edelim. Şimdilik $xyz \neq 0$ olarak kabul edelim.

$\alpha \in \mathbb{Z}[\omega]$ olmak üzere $\alpha \mid x$ ve $\alpha \mid y$ olsun. $\alpha = a + b\omega$ ve EBOB$(a, b) = d$ olsun. $\alpha\beta = x$ ve $\alpha = d\theta$ olacak şekilde bir $\beta, \theta \in \mathbb{Z}[\omega]$ vardır. Dolayısıyla

$$d \cdot (\beta\theta) = x$$

olur. $\beta\theta \in \mathbb{Z}[\omega]$ ve $d, x \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\beta\theta \in \mathbb{Z}$ olmalıdır ve buradan tamsayılar için $d \mid x$ bulunur. Benzer şekilde y için de aynısını yapabiliriz. x ve y aralarında asal olduğundan $d = 1$ ve a ve b aralarında asal olmalıdır. $\alpha \neq 0$ olduğundan EBOB$(a, b) = 1$ olmasında istisna olabilecek durumlar $(a, b) = (0, \pm 1)$ ve $(a, b) = (\pm 1, 0)$'dır. İki durumda da α birim çıkar. O yüzden $a, b \neq 0$ diyebiliriz.

$\beta = c + d\omega$ dersek

$$\alpha\beta = (a + b\omega)(c + d\omega) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega \in \mathbb{Z} \implies ad + bc = bd$$

a ve b'yi aralarında asal bulduğumuzdan son eşitlikten $b \mid d$ elde edilir. $t \in \mathbb{Z}$ için $d = bt$ yazıp b'leri sadeleştirirsek $at + c = bt$ olur. $c = (b - a)t$ ve $d = bt$ olduğundan

$$\alpha\beta = ac - bd = t(ab - a^2 - b^2) = x$$

elde edilir. $a^2 + b^2 - ab \geq 1$ olduğunu yukarıda bağlantısını bıraktığım gönderide 3. teoremin ispatından görebilirsiniz. $a^2 + b^2 - ab$ ifadesi hem x hem de y'yi böldüğünden 1'e eşit olmalıdır.

$$1 = a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + b^2 - |ab| \geq |ab| \geq 0$$

olmasını kullanarak bu denklemi çözebiliriz. Her durumda α birim olarak bulunur. Yani x ve y için $\mathbb{Z}[\omega]$'da da aralarında asal diyebiliriz.

Ana denkleme dönersek bu denklemi $\mathbb{Z}[\omega]$'da çarpanlarında ayırırsak

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = (x + y)(x + \omega y)(x - y - \omega y) = z^3$$

olarak buluruz. Şimdi $(x+y)$, $(x+\omega y)$ ve $(x-y-\omega y)$ ifadelerinin ortak bölenlerini inceleyelim. Aralarında asal olmaları durumunu kenarda tutalım ve farz edelim ki yukarıdakinden farklı bir sıfırdan farklı ve birim olmayan α hem $x + y$ hem de $x + \omega y$'yi bölüyor. Dolayısıyla ikisinin farklı olan $(\omega - 1)y$'yi de bölecektir. $\omega - 1$ indirgenemezdir (aksini kabul edip kolayca çelişki bulabilirsiniz veya norm kavramını bilen kişiler normunun 3 olmasından dolayı bunu kolaylıkla görecektir). Eğer α ile y aralarında asal değilse herhangi bir ortak bölenleri x de böleceğinden çelişki çıkar. Dolayısıyla $\alpha = \omega - 1$ olmalıdır. Eğer $\omega - 1 \mid x + y$ ise diğer çarpanları da böldüğünü görebiliriz.

O halde elimizde iki ihtimal vardır. $\mathbb{Z}[\omega]$ bir UFD olduğundan ikişerli olarak aralarında asal $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}[\omega]$ için

$$(x+y, x+\omega y, x-y-\omega y) = (u_1^3, u_2^3, u_3^3) \quad \text{veya} \quad (x+y, x+\omega y, x-y-\omega y) = ((\omega-1)u_1^3, (\omega-1)u_2^3, (\omega-1)u_3^3)$$

olacaktır. İkinci durumu önce inceleyelim. $u_1 = a+b\omega$ dersek $(\omega-1)(a+b\omega)^3$ tamsayı olması gerektiğinden

$$(\omega-1)\big((a^3-3ab^2+b^3)+(3a^2b-3ab^2)\omega\big) = (-a^3-3a^2b+6ab^2-b^3)+(a^3-6a^2b+3ab^2+b^3)\omega \in \mathbb{Z}$$

olduğundan

$$a^3-6a^2b+3ab^2+b^3 = 0$$

elde edilir. Eğer $b=0$ ise $a=0$ bulunur. Bu durumda da $z=0$ olur. Çelişki. $b \neq 0$ için her tarafı b^3'e bölüp $\frac{a}{b} = t$ dersek

$$t^3-6t^2+3t+1 = 0$$

elde edilir ama bu denklemin rasyonel kökü yoktur. Buradan çözüm gelmez.

Eğer

$$(x+y, x+\omega y, x-y-\omega y) = (u_1^3, u_2^3, u_3^3)$$

ise $u_2 = c+d\omega$ diyelim. Buradan

$$u_2^3 = x+y\omega = (c^3-3cd^2+d^3)+(3c^2d-3cd^2)\omega \implies y = 3c^2d-3cd^2$$

elde edilir. Yani $3 \mid y$'dir. Eğer x^3+y^3 ifadesini

$$(x+y)(y+\omega x)(y-x-\omega x)$$

olarak çarpanlarına ayırsaydık, x de 3'ün katı bulunacaktı. Bu x ve y'nin aralarında asal olmasıyla çelişir. Yani $xyz=0$ olmalıdır. İfadede sırayla $x=0$, $y=0$ ve $z=0$'ı denersek $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(x,y,z) = (0,k,k), \quad (k,0,k), \quad (k,-k,0)$$

çözümleri elde edilir. Tüm çözümler bunlardır.

97. **Soru.** $x_0, x_1, \ldots, x_{2011}$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$m^{x_0} = \sum_{k=1}^{2011} m^{x_k}$$

olmasını sağlayan kaç pozitif tam sayı m vardır? (AIME 2011)

Çözüm. (Metin Can Aydemir) Verilen eşitliği bir polinoma çevirelim:

$$P(t) = t^{x_{2011}} + t^{x_{2010}} + \cdots + t^{x_1} - t^{x_0}$$

polinomunun pozitif tam sayı olan bir kökü olmasını istiyoruz. $P(1) = 2010$ ve $P(m) = 0$ olduğundan ve tüm katsayılar tam sayı olduğundan

$$m-1 \mid 2010$$

olacaktır. $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ olduğundan olası 16 adet pozitif tam sayı m vardır. Bu değerlerin hepsi için şarta uygun x_i'ler elde edebileceğimizi göstersek yeterlidir.

Öncelikle

$$\underbrace{m^i + m^i + \cdots + m^i}_{m \text{ adet}} = m^{i+1}$$

olduğunu gözlemleyelim. $(m-1)k = 2010$ dersek

$$\underbrace{m^0 + m^0 + \cdots + m^0}_{m \text{ adet}} = m^1$$

$$\underbrace{m^1 + m^1 + \cdots + m^1}_{m \text{ adet}} = m^2$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{m^{k-1} + m^{k-1} + \cdots + m^{k-1}}_{m \text{ adet}} = m^k$$

eşitliklerini toplarsak

$$\underbrace{m^0 + m^0 + \cdots + m^0}_{m \text{ adet}} + \underbrace{m^1 + m^1 + \cdots + m^1}_{(m-1) \text{ adet}} + \cdots + \underbrace{m^{k-1} + m^{k-1} + \cdots + m^{k-1}}_{(m-1) \text{ adet}} = m^k$$

elde edilir. Son eşitliğin sol tarafında

$$m + (m-1)(k-1) = (m-1)k + 1 = 2011$$

adet m'nin kuvveti vardır. Dolayısıyla yukarıda bulduğumuz 16 adet sayının hepsi için istenilen negatif olmayan tam sayı x_i'leri bulabiliriz.

Cevap:

$$\boxed{16}$$

98. **Soru.** m tam sayısı için $x^3 - 2011x + m$ ifadesinin 3 tam sayı kökü a, b, c olsun. Buna göre

$$|a| + |b| + |c|$$

ifadesinin değeri kaçtır? (AIME 2011)

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) Vieta teoreminden

$$a + b + c = 0 \quad \text{ve} \quad ab + bc + ca = -2011$$

yazalım. Kökler toplamı 0 olduğu için köklerin üçü birden pozitif veya üçü birden negatif olamaz. Ya iki pozitif bir negatif kök vardır ya da tam tersi durum söz konusudur. Genelliği bozmadan

$$a \geq b \geq 0 \geq c$$

kabul edelim. $c = -a - b$ değerini diğer denklemde yerine yazarsak

$$ab + b(-a-b) + a(-a-b) = -2011 \implies a^2 + ab + b^2 = 2011 \quad (*)$$

elde ederiz. Öte yandan

$$b \le a \implies 3b^2 = b^2 + b^2 + b^2 \le a^2 + ab + b^2 = 2011 \implies b \le 25$$

bulunur. Şimdi $(*)$ denklemini 4 ile çarpıp düzenlersek

$$(2a+b)^2 = 8044 - 3b^2$$

olur ki buradan da $8044 - 3b^2$ ifadesinin bir tam kare olduğunu söyleyebiliriz.
Tam kare ifadeler $\pmod 5$'te $0, 1, 4$ değerlerini alabilir.

- $8044 - 3b^2 \equiv 0 \pmod 5 \implies 3b^2 \equiv 4 \pmod 5 \implies b^2 \equiv 3 \pmod 5$ — çözüm yok
- $8044 - 3b^2 \equiv 1 \pmod 5 \implies 3b^2 \equiv 3 \pmod 5 \implies b^2 \equiv 1 \pmod 5 \implies b \equiv \pm 1 \pmod 5$
- $8044 - 3b^2 \equiv 4 \pmod 5 \implies 3b^2 \equiv 0 \pmod 5 \implies b^2 \equiv 0 \pmod 5 \implies b \equiv 0 \pmod 5$

Böylece

$$b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 25\}$$

bulunur. (1)
Şimdi ifadeyi $\pmod 7$'de inceleyelim. Tam kare ifadeler $\pmod 7$'de $0, 1, 2, 4$ değerlerini alabilir.

- $8044 - 3b^2 \equiv 0 \pmod 7 \implies 3b^2 \equiv 1 \pmod 7 \implies b^2 \equiv 5 \pmod 7$ — çözüm yok
- $8044 - 3b^2 \equiv 1 \pmod 7 \implies 3b^2 \equiv 0 \pmod 7 \implies b^2 \equiv 0 \pmod 7 \implies b \equiv 0 \pmod 7$
- $8044 - 3b^2 \equiv 2 \pmod 7 \implies 3b^2 \equiv 6 \pmod 7 \implies b^2 \equiv 2 \pmod 7 \implies b \equiv \pm 3 \pmod 7$
- $8044 - 3b^2 \equiv 4 \pmod 7 \implies 3b^2 \equiv 4 \pmod 7 \implies b^2 \equiv 6 \pmod 7$ — çözüm yok

Buradan da

$$b \in \{0, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 25\}$$

elde edilir. (2)
(1) ve (2) den ortak olanları alırsak

$$b \in \{0, 4, 10, 11, 14, 21, 24, 25\}$$

buluruz. Bunların içinden $8044 - 3b^2$ ifadesini tam kare yapan tek değer $b = 10$'dur.
$(*)$ denkleminde yerine yazarsak $a = 39$ buluruz ve

$$c = -a - b = -39 - 10 = -49$$

elde ederiz.
Sonuç olarak sorumuzun cevabı

$$|a| + |b| + |c| = 39 + 10 + 49 = \boxed{98}$$

dir.

99. **Soru.** $x^2 = 8y^4 + 1$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz. (78'deki sorunun çözümünden gelen bir problem.)

Çözüm. $8x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin genel parametrizasyonunun

$$k \cdot (mn), \quad k \mid m^2 - 2n^2, \quad k \cdot (m^2 + 2n^2)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca denklemde genelliği bozmadan $x, y \geq 0$ alalım. Buradan $m, n, k \geq 0$, $(m, n) = 1$ ve $y^2 = k \cdot mn$, $x = k \cdot (m^2 + n^2)$ ve $1 = k \cdot |m^2 - 2n^2|$ den dolayı ($m, n \neq 0$ için) $k = 1$ almamız gerektiğini görürüz. Ayrıca $y^2 = mn$ ve $(m, n) = 1$ olduğundan $m = M^2$, $n = N^2$ olacak şekilde $M, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ alınabilir. Buradan iki durum elde ediyoruz.

1) $M^4 - 2N^4 = 1$ yani

$$M^4 + N^8 = (N^4 + 1)^2$$

gelir. Fermat'ın son teoreminin $n = 4$ için özelleştirilmiş formlarından biri olan $a^4 + b^4 = c^2$ tipi denklemin sadece trivial çözümleri olduğunu biliyoruz. $M = 0$ veya $N = 0$ olması gerekir. Ancak M ve N'yi tanımlarken m, n 0 olmasınlar şeklinde tanımlamıştık. Çözüm gelmez.

2) $M^4 - 2N^4 + 1 = 0$ yani

$$M^4 + (N^4 - 1)^2 = N^8$$

gelir. Bunu $(N^4 - 1) = N^8 - M^4$ şeklinde yazarsak yine Fermat'ın son teoremi'nin $n = 4$ için özelleştirilmiş formlarından biri olan

$$x^4 - y^4 = z^2$$

formatına uyduğunu görüyoruz. Bunun da sadece trivial çözümleri olduğunu ve $(k, 0, k^2)$ veya $(k, k, 0)$ olduğunu ispatlamıştık. (Bu katsayılar $-$ işaretli de olabiliyor bunu unutmamak lazım.) Buradan $M, N \geq 0$ için $M = 0$ veya $N^4 - 1 = 0$ denklemlerinin çözümlerini bulmamız gerektiğini görürüz. $M = 0$'ı incelememize gerek yok, en son inceleyeceğiz. $N^4 - 1 = 0$ olsun. Bu durumda $N = 1$ olmalıdır. Bu da bize $M^4 = 1$ yani $M = 1$ yani $(m, n) = (1, 1)$ tek çözüm olarak gelir. Buradan $y = 1$ ve $x = 3$ gelir.

Şimdi parametrizasyonda $m = 0$ alalım. Bu bize $y = 0$ verir. $x^2 = 1$ denkleminden $(1, 0)$ çözümüne ulaşırız. $n = 0$ alırsak da benzer şekilde $y = 0$ geleceğinden incelememize gerek yoktur. Yani denklemimizin çözüm kümesi

$$\{(1, 0), (3, 1)\}$$

ve bunların $-$ işaretli versiyonları olarak bulunur.

Not: $(m, n) = 1$ alabilmemizin mantığı $(m, n) = d$ olursa parametrizasyonda $(M, N) = 1$ olacak şekilde $m = dM$ ve $n = dN$ alabilirdik ve buradan parametrizasyon baş katsayısı $kd = k'$ olarak yeniden tanımlanabilirdi. Ancak $m = 0$ ve $n = 0$ durumları bu kabullerimizi yaparken sorun çıkarıyordu. Bunları özel olarak incelememiz gerekti.

100. **Soru.** $x^4 = y^2 + z^2 + 4$ eşitliğinin tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Eşitliğimizi

$$x^4 - 4 = y^2 + z^2$$

olarak yazabiliriz. Bu yazılımdan sonra

$$(x^2-2)(x^2+2)=y^2+z^2$$

olur. Şimdi ise bu x^2-2 ve x^2+2 çarpanlarını inceleyelim.

$$(x^2-2,x^2+2)=(x^2-2,4)$$

yani $(x^2-2,x^2+2)\in\{1,2,4\}$ olacaktır.

a) x tek sayı olsun. O halde $(x^2-2,x^2+2)=1$ olur. Modüler aritmetik hesabıyla birlikte

$$x^2-2\equiv 3 \pmod 4 \quad \text{ve} \quad x^2+2\equiv 3 \pmod 4$$

gözlemlenebilir. Bu da x^2-2 ifadesinin $3 \pmod 4$ kalanını veren ve üssü tek dereceli olan en az bir asal çarpanı bulunduğunu bize söyler. Bunun ispatı için ise

$$x^2-2=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_n^{q_n}$$

şeklinde yazalım; $p_1,p_2,\ldots,p_n$ asal sayılar ve $q_1,q_2,\ldots,q_n\in\mathbb{Z}^+$ olsun. Öncelikle sayımız tek olduğu için bu asalların $4 \pmod 4$ değerleri ya 1 ya 3'tür. Varsayalım ki hepsi 1 olsun. O halde

$$x^2-2\equiv 1^n\equiv 1 \pmod 4$$

olur; bu çelişki oluşturur. O halde en az bir tane $3 \pmod 4$ kalanını veren asal sayı bulunmalıdır. Buradan $1\le i\le n$, $i\in\mathbb{Z}$ olacak şekilde $p_i\equiv 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan asal sayılarımızdan birini seçelim.

$$p_i^2\equiv 1 \pmod 4$$

olur. Yani eğer tüm $3 \pmod 4$ kalanlı p_i değerlerimizin üsleri çift olursa,

$$x^2-2\equiv 1 \pmod 4$$

olacaktır. O halde üssü tek olan en az bir p_i asalı için $3 \pmod 4$ elde ederiz. Bu da bize Fermat'ın iki tam kare toplamı ile ilgili verdiği teoremin genelleşmiş versiyonundan dolayı, yani tek dereceli en az bir adet $3 \pmod 4$ koşulu sağlayan p_i asalı verdiğinden ve bu asal x^2+2'nin çarpanı olamayacağından

$$(x^2-2,x^2+2)=1$$

çelişki elde edilir. Bu teorem ve ispatı hakkında bilgi için ilgili linki bırakıyorum:

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s$_t heorem_o n_s ums_o f_t wo_s quares$https://en.m.wikipedia.org/wiki/Fer

b) x çift sayı olsun. O halde $x=2n$, $n\in\mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$x^4-4=4(4n^4-1)=y^2+z^2$$

olur. Bu denklemi 8 modunda inceleyelim. Buradan

$$x^4-1\equiv 4 \pmod 8$$

olduğu görülebilir. $y^2 \equiv \{0,1,4\} \pmod 8$ ve $z^2 \equiv \{0,1,4\} \pmod 8$'dir. Yani $0 \pmod 8$ ve $4 \pmod 8$ kalanlarını seçmeliyiz ki denklemin sol tarafıyla modüler olarak uyuşabilelim. Bu da bize

$$y = 2k, \quad z = 2l, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

dönüşümünü sağlar. Buradan

$$4n^4 - 1 = k^2 + l^2$$

$$4n^4 - 1 \equiv 3 \pmod 4$$

$$k^2 + l^2 \equiv 3 \pmod 4$$

verir. $k^2 \equiv \{0,1\} \pmod 4$ ve $l^2 \equiv \{0,1\} \pmod 4$ olduğundan bu denklik sağlanamaz ve ispat biter. Bu denklemin tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.

101. **Soru.** $3^k = m^2 + n^2 + 1$ eşitliğinin pozitif tam sayılarda sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz. (St. Petersburg)

Alternatif Çözüm. $3^k = m^2 + n^2 + 1$ denklemini, yani

$$3^k - 1 = m^2 + n^2$$

eşitliğini asal bölen analizleri yapmadan da gösterebiliriz. Bunun için $k = 2^x$ olacak şekilde seçelim.

Eğer $3^{2^x} - 1$ ifadesi $m^2 + 0^2$ formatında yazılabiliyorsa, bu aynı zamanda iki pozitif tam kare toplamı şartını da sağlamalıdır. Dolayısıyla $x \geq 1$ için $3^{2^x} - 1$'in iki kare toplamı olduğunu göstermek yeterlidir.

Tümevarım Temeli. $x = 1$ için $3^2 - 1 = 8 = 4 + 4$ yazılabildiğinden doğru.

Tümevarım Adımı. Varsayalım $3^{2^x} - 1 = a^2 + b^2$ biçiminde yazılabiliyor olsun. O zaman

$$3^{2^{x+1}} - 1 = (3^{2^x} - 1)(3^{2^x} + 1).$$

Burada $3^x = c$, $1 = d$ alırsak

$$3^{2^{x+1}} - 1 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a_0^2 + b_0^2$$

şeklinde yazılır. Bu da Brahmagupta özdeşliğinden gelir. (Pozitif tam sayı versiyonu için bkz.

https://geomania.org/forum/index.php?topic=9576.0)

Dolayısıyla $3^{2^x} - 1$ iki tam kare toplamı ise aynı zamanda iki *pozitif* tam kare toplamıdır. Bu da gösteriyor ki her $x \geq 1$ için $k = 2^x$ seçildiğinde denklemin en az bir pozitif çözümü vardır. Sonsuz sayıda x değeri seçilebildiğinden denklemin sonsuz sayıda çözümü bulunur.

Alternatif Çözüm. (asal çarpan analizleri için incelenmesini tavsiye ederim.) Bu denklemi

$$3^k - 1 = m^2 + n^2$$

olarak düzenleyelim. Şimdi ise $3^k - 1$ ifadesinin asal çarpanlarını inceleyerek sonsuz çözüm ispatına gidelim.

https://geomania.org/forum/index.php?topic=9576.msg26544;topicseennew

Burada paylaştığım bazı lemma ve teoremlerin direkt uygulamalarını kullanarak ispatlayabiliriz. Sonsuz çözümü olduğunu göstermek için öyle bir seçim yapalım ki bu ifadenin daima $1 \pmod 4$ formatında asal çarpanı olsun ve $3 \pmod 4$ formu asal çarpanların üssü çift olsun veya hiç bulunmasın.

$k = 2^x$ seçimi yapabiliriz ve bunun daima iki pozitif tam kare toplamı olarak yazılabildiğini ispatlayabiliriz. Bu da bize seçilen her x için en az bir çözüm olduğunu yani sonsuz x seçimi mümkün olduğundan sonsuz çözüm olduğunu bize kanıtlar.

Öncelikle ifadenin 2'nin kuvveti durumunda yazılabildiği durumları inceleyelim. $3^k - 1 = 2^y$ denklemini k çift olduğunu $\pmod 4$ analiziyle gösterip çözümlerin $(2, 3)$ ve $(1, 1)$ olduğunu gösterelim.

$y \geq 2$ için $3^k \equiv 1 \pmod 4$ yani k çiftse $3^k \equiv 1 \pmod 4$, tekse $3^k \equiv -1 \pmod 4$ olur. Buradan $k = 2m$ dönüşümü yapalım.

$$(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^y$$

olur. $y \geq 2$ olduğundan $3^m - 1 = 2^b$ ve $3^m + 1 = 2^c$ olacak şekilde $b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vardır. Buradan

$$2^c - 2^b = 2$$

olur. Bu da $2^{c_1} - 2^{b_1} = 1$ denklemine özdeştir. Terimlerden birinin tek olması da gerektiğinden $c_1 = 1$, $b_1 = 0$ yani $c = 2$, $b = 1$ tek çözüm olur. Bu da bize $y = 3$, $k = 2$ durumunu verir. $y < 2$ için de $k = 1$, $y = 1$ eşleşmesi vardır.

Geriye kalan durumlarda $3^k - 1$ ifadesinin en az bir tek asal çarpanı bulunmalıdır. q tek asal çarpanını seçelim. O halde

$$3^{2^x} \equiv 1 \pmod q$$

sağlanır. Bu denkliği çözen en küçük s tam sayısını şöyle tanımlayabiliriz:

$$s := \min\{t \geq 1 : 3^t \equiv 1 \pmod q\}$$

$s \mid 2^x$ şartından dolayı ve $s = 1$ için tek asal çarpan bulunmadığından $1 \leq r \leq x$, $r \in \mathbb{Z}$ için

$$s = 2^r$$

sağlanır. $r = 1$ in sağlanmadığı ancak daha büyük r değerleri için daima q tek asal sayısını bulabileceğimizi gösterdik. O halde $2 \leq r \leq x$ alalım.

Tanımımız gereği

$$3^{2^{r-1}} \not\equiv 1 \pmod q$$

dur. Ancak

$$(3^{2^{r-1}})^2 \equiv 1 \pmod q$$

olduğu için

$$3^{2^{r-1}} \equiv -1 \pmod q$$

bulunur. $q = 3$ olmadığını manuel test ederek gördükten sonra Fermat Teoremi yardımıyla

$$3^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$

yazabiliriz. Ancak $q - 1$ bu denkliği sağlayan en küçük terim olmayabilir ama bizim bulduğumuz r cinsi denklik en küçük olanıdır. Bu nedenle

$$2^r \mid q-1$$

olur ve $r \geq 2$ şartından dolayı $4 \mid q-1$ bu da bize

$$q = 4q' + 1, \quad q' \in \mathbb{Z}^+$$

bulunduğunu gösterir. Sonuç olarak $k = 2^x$ parametrizasyonu seçildiğinde 3 (mod 4) formatındaki asal sayıların üsleri çift olur (veya hiç bulunmaz) ve bu da bize

attığım linkteki **Teorem 3:** den ve $x = 1$ için $(9-1) = 4+4$ yazımından dolayı her x için m, n pozitif tam sayıları bulunduğunu gösterir.

102. **Soru.** $x^3 + 117y^3 = 5$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) Denklemi (mod 9)'da incelersek

$$x^3 \equiv 5 \pmod 9$$

olur ki bu da imkânsızdır çünkü hiçbir tam sayının küpü 9 ile bölümünden kalan olarak 5 vermez. (Tam küp ifadelerin 9 ile bölümünden kalanlar sadece $0, 1, 8$ olabilir.) Dolayısıyla denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

103. **Soru.** $(x^2+x+1) \cdot (y^2+y+1) = z^2+z+1$ eşitliğini tam sayılar için çözünüz.

Çözüm. Bu sorunun hemen hemen aynısı İzlanda Matematik Olimpiyatı 2017 yılı ilk sorusu olarak gelmiştir. Soruda n, a, b pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = n^2+n+1$$

olmasını sağlayan a, b pozitif tam sayılarını belirleyiniz.

Bunu yapabilmek için

$$n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

olduğu ve n^2-n+1 ifadesinin $b = n-1$ alınarak elde edilebildiğini görmemiz gerekiyor. $n = 1$'i manuel olarak bulmalıyız.

Öncelikle $a = n^2$ ve $b = n-1$ in bu soru için sağladığını görelim.

$$(n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - n + 1$$

olur ve sağlar. $n = 1$ alalım.

$$a^2+a+1 = 3(b^2+b+1) = 3b^2+3b+3$$

olur. Deneme yoluyla $a = 4$, $b = 2$'nin sağladığını görmek yeterlidir.

Böylece $(4, 2, 1)$ ve $(k^2, k-1, k)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ şeklinde n sayısı türetilir.

Genel tamsayılar için ekstra genel çözüm parametreleri şöyle türetilebilir gibi duruyor: x yerine $-a$ ve x yerine $a-1$ dönüşümleri yapıldığında aynı cebirsel ifade geliyor ve bize yukarıda yaptığımız genel çözümü veren ancak sadece bu formatta çözüm olup olmadığını belirlemek kolay durmuyor.

Bu yapıların normal çözümü Eisenstein sayılarının norm çarpanı formuyla yazılarak çözülmesiyle çıkarılıyor.

104. **Soru.** $m^3 + 6m^2 + 5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$ eşitliğinin tam sayılarda çözümlerini bulunuz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı)

$$m^3 + 6m^2 + 5m = m(m^2 + 6m + 5) = m(m+1)(m+5) \equiv m(m+1)(m+2) \pmod 3$$

ve ardışık üç sayıdan bir tanesi 3'e tam bölüneceğinden eşitliğin sol tarafı 3'ün tam katıdır. Öte yandan eşitliğin sağ tarafının 3'e bölümünden kalan 1 olduğu için denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

105. **Soru.** $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. (Matematik Olimpiyatı)

i) $x \geq 4$ Bu durumda sayımızın birler basamağı $1 + 2 + 6 + 24$ olduğundan 3 ile biter. Fakat bir tam kare, (mod 10)'da sadece $0, 1, 4, 5, 6, 9$ değerlerini alabilir.

ii) $x < 4$ Bu durumda sadece $x = 1$ ve $x = 3$ durumlarında y bir tam sayı olur.

Sonuç olarak sorumuzun cevabı tam sayılarda

$$(x, y) = (1, \pm 1), (3, \pm 3)$$

tür.

106. **Soru.** $x^2 + y^2 = 2z^2$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. $b^2 + b^2 = c^2$ denkleminin çözümünün $(a, b) = 1$ iken

$$(k(m^2 - n^2), \quad k \cdot 2mn, \quad k(m^2 + n^2)) \quad \text{veya} \quad (k \cdot 2mn, \quad k(m^2 - n^2), \quad k(m^2 + n^2))$$

olduğunu not edelim. Burada $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$, $m > n \geq 0$, $k > 0$, $m + n \equiv 1 \pmod 2$ koşulları sağlanır.

Denklemimizin çözümü olması için daima

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 2$$

$$x^2 \equiv y^2 \pmod 2$$

$$x \equiv y \pmod 2$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu da bize tüm tam sayılar kümesinin analizini kaybetmeden

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}, \quad u, v \in \mathbb{Z}$$

dönüşümlerini mümkün kılar.

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2 = 2z^2$$

yani

$$u^2 + v^2 = z^2$$

denklemini verir. Bu denklemde genel çözümleri uygularsak

$$u = k(m^2 - n^2), \quad v = k \cdot 2mn, \quad z = k(m^2 + n^2)$$

veya

$$u = k \cdot 2mn, \quad v = k(m^2 - n^2), \quad z = k(m^2 + n^2)$$

olur. x, y'nin dönüşümlerini göz önüne alırsak

$$x = k(m^2 + 2mn - n^2), \quad y = k(-m^2 + 2mn + n^2), \quad z = m^2 + n^2$$

veya

$$x = k(m^2 + 2mn - n^2), \quad y = k(m^2 + 2mn - n^2), \quad z = k(m^2 + n^2)$$

dönüşümleri gelir. Bu parametrizasyonda k çarpanını sorunsuzca koyabilmek için x, y, z pozitif veya negatif olmayan kabulleri kullanılır; yoksa k cinsi parametrizasyona geçişte sorun oluşur.

Bu seçim nedeniyle burada oluşan ikinci terimimizi

$$y = k \cdot |m^2 - 2mn - n^2|$$

formatında yazabiliriz. Bu kullandığımız u, v dönüşümleri sırasıyla y, x şeklinde de yapılabilirdi; yani bu çözüm grubunun simetrikleri de çözümleri verecektir.

O halde (x, y, z) çözümleri

$$(k(m^2 + 2mn - n^2), \quad k \cdot |m^2 - 2mn - n^2|, \quad k(m^2 + n^2))$$

veya

$$(k \cdot |m^2 - 2mn - n^2|, \quad k(m^2 + 2mn - n^2), \quad k(m^2 + n^2))$$

olarak, $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$, $m > n \geq 0$, $k > 0$, $m + n \equiv 1 \pmod 2$ için olur.

Tam sayılara genelleme için de 0 durumları incelenip en son başlarına $\pm$ eklenir.

107. **Soru.** $x^2 + y^2 = 3z^2$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. Bu denklemde genelliği 3 modunda kare kalan analizi yapalım. Varsayalım ki (x, y, z) pozitif tam sayı çözümümüz olsun.

$x^2 \equiv \{0, 1\} \pmod 3$ olduğu görülebilir ve ancak $x \equiv 0 \pmod 3$ için $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ olur.

Bu bilgilerden yola çıkarsak, $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$ olmasını sağlayan tek olasılık $x \equiv 0 \pmod 3$ ve $y \equiv 0 \pmod 3$ olmasıdır.

Bu da bize

$$x = 3x_0, \quad y = 3y_0, \quad z = 3z_0$$

(sol taraf $0 \pmod 3$ ise $0 \pmod 9$)'u da sağlıyor, bu da bize $z \equiv 0 \pmod 3$ veriyor) olacak şekilde $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}^+$ bulunur.

Bu da bize

$$x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$$

denklemini veriyor. Aynı metod buna da uygulanabileceği için ve pozitif tam sayılar kümesinde

$$x > x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$$

şeklinde sonsuz indirgeme verdiği için (sonlu aralıkta sonsuz tam sayı oluşmasına neden oldu) çelişki elde edilir.

İspat biter. Pozitif tam sayılarda bu denklemin çözümü yoktur.

Benzer kural negatif çözümlere de uygulanır, sadece $x = 0$ veya $y = 0$ durumlarında çözüm oluşabilir; bunlar da 3 tam kare olmadığı için tek çözümün $(0, 0, 0)$ olmasına neden olur.

108. **Soru.** $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ eşitliğinin pozitif tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

Çözüm. 107'ye oldukça benzer şekilde çözülebilir. Varsayalım ki (x, y, z) bu denklemin bir çözümü olsun. İfadeye baktığımızda $x \equiv 0 \pmod 3$ şartının sağlanması gerektiği görülebilir.

$x = 3x_0$, $x_0 \in \mathbb{Z}^+$ dönüşümü yaparsak

$$27x_0^3 + 3y^3 = 9z^3$$

$$9x_0^3 + y^3 = 3z^3$$

olur. Bu da bize $y \equiv 0 \pmod 3$ olduğunu verir. $y = 3y_0$, $y_0 \in \mathbb{Z}^+$ için

$$3x^3 + 9y^3 = z^3$$

olur. Buradan da $z \equiv 0 \pmod 3$, yani $z = 3z_0$, $z_0 \in \mathbb{Z}^+$ olur.

Buradan

$$x_0^3 + 3y_0^3 = 9z_0^3$$

elde ederiz ki bu da bize eğer denklemin (x, y, z) çözümü varsa (x_0, y_0, z_0) çözümünün bulunma şartını verir.

Yani sonsuz indirgenme nedeniyle $(x > x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots)$ pozitif tam sayılarda bu denklem çözümsüz olmalıdır.

109. **Soru.** $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$ eşitliğini negatif olmayan tam sayılar için çözünüz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) $x = 0$ için $y = 2$ olur. $x \geq 1$ olursa

$$(x+1)^3 < \underbrace{x^3 + 8x^2 - 6x + 8}_{y^3} < (x+3)^3 \implies x + 1 < y < x + 3$$

elde edilir. Tam sayı çözüm bulunabilmesi için $y = x + 2$ olmalıdır.

Buna göre

$$(x+2)^3 = y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \implies x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$$

$$\implies 2x^2 = 18x \implies x = 9$$

ve yerine yazarsak $y = 11$ bulunur.

Denklemin tüm çözümleri

$$(0,2) \quad \text{ve} \quad (9,11)$$

ikilileridir.

110. **Soru.** $19x^3 - 84y^2 = 1984$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı)

$$5x^3 \equiv 3 \pmod 7 \implies x^3 \equiv 2 \pmod 7$$

olur ki bu da imkânsızdır çünkü hiçbir tam sayının küpü 7'ye bölündüğünde 2 kalanını vermez. (Tam küp ifadelerin 7 ile bölümünden kalanlar sadece $0, 1, 6$ olabilir.) Dolayısıyla denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

111. **Soru.** Eğer $n = a^2 + b^2 + c^2$ eşitliğini sağlayan a, b, c pozitif tam sayıları var ise, $n^2 = x^2 + y^2 + z^2$ eşitliğini sağlayan x, y, z pozitif tam sayıları da olacağını gösteriniz.

Çözüm. Bu soruyu x, y, z terimlerini a, b, c cinsinden parametrik şekilde verebilirsek ispatımız biter.

$$N = a^2 + b^2 + c^2$$

$$N^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2(-a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2) + 4a^2b^2 + 4a^2c^2$$

$$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$$

olur ve (a, b, c) yapılan her tam sayı seçimi için

$$(x, y, z) = (a^2 - b^2 - c^2, \quad 2ab, \quad 2ac)$$

ve bunun permütasyonları olacak şekilde çözümler bulunabilir. Bu bize $N = a^2+b^2+c^2$ ise $N^2 = x^2+y^2+z^2$ olduğunu ispatlar.

Not: Ancak tersi daima doğru olmayabilir çünkü bunun tek genel çözüm kümesi olduğunu ispatlamadık.

(Metin Can Aydemir'in Notu: Soru bariz bir şekilde bunu kullanmamızı istemiyor ama bir pozitif tam sayının üç tamkarenin toplamı olarak yazılamaması için $4^a(8b + 7)$ formatında olması gerekir. N^2'nin de hiçbir N için bu formatta olmadığı kolayca görülebilir. Yani aslında $N = a^2 + b^2 + c^2$ formatında olmasına bile gerek yoktur.)

112. **Soru.** n pozitif tam sayısı için $3n + 1$ ve $4n + 1$ aynı anda tam kare olduğuna göre $56 \mid n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu soruda 7 ile bölünebilirliği ispatlarken Pell yapısı ortaya çıkıyor: $4a^2 - 3b^2 = 1$ denklemi ve bu denklem sayesinde $n \equiv 0 \pmod 7$ sonucu elde ediliyor, fakat elementer yollarla bunu elde edemedim. Genel çözümünü elementer yollarla göstererek ispatını yapacağım.

$3n + 1$ ve $4n + 1$ tam kare ise 8'e bölündüğünü ispatlamak biraz daha kolay; onunla başlayalım.

$3n + 1 = a^2$ ve $4n + 1 = b^2$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Burada 2. eşitliği incelersek b'nin tek olduğu görülür. Bu da bize her tek b için

$$b^2 \equiv 1 \pmod 8$$

yani

$$4n + 1 \equiv 1 \pmod 8 \implies n \equiv 0 \pmod 2$$

verir. Bu da bize n'in çift olduğunu verir. O halde $3n+1$ de çift olmalıdır. $a \equiv 1 \pmod 2$ olur, yani $a^2 \equiv 1 \pmod 8$. Buradan

$$3n + 1 \equiv 1 \pmod 8 \implies n \equiv 0 \pmod 8$$

gelir ve 8'e bölünebilirlik ispatı biter.

7'ye bölünebilirlik ispatını yapmak için Pell denklemlerine geçiş yapalım. İlk denklemi 4 ile, ikinciyi de 3 ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$4a^2 - 3b^2 = 1$$

denklemini elde ederiz. $x = 2a$, $a \in \mathbb{Z}^+$ dönüşümü yaparak

$$x^2 - 3b^2 = 1$$

denklemi oluşur ve x çift olduğu bilgisi elimizde var. Bu da bize b'nin tek sayı olduğunu verir.

x çift olduğu için denklemin ilk çözümü $x = 2$, $b = 1$ ile mümkündür. Şimdi Pell denklemlerinde genel indirgenme yapılarının formunun

$$x \to Ax + Bb, \quad b \to Cx + Db$$

olacak şekilde en küçük A, B, C, D pozitif tam sayılarını bulalım. Daha küçük tam sayılarla bu denklemin sağlanmadığı gösterilirse genel formüle gerek kalmadan türetme formülünü elde edebiliriz.

$$(Ax + Bb)^2 - 3(Cx + Db)^2 = A^2x^2 + 2ABxb + B^2b^2 - 3(C^2x^2 + 2CDxb + D^2b^2)$$

$$= (A^2 - 3C^2)x^2 + 2(AB - 3CD)xb + (B^2 - 3D^2)b^2$$

Biz bu katsayıların tekrar $x^2 - 3b^2 = 1$ denkleminin katsayıları olmasını istiyoruz. Yani

$$A^2 - 3C^2 = 1, \quad AB - 3CD = 0, \quad B^2 - 3D^2 = -3$$

denklem sistemi sağlanmalı ve bunun en küçük çözümü olmalı.

$B^2 - 3D^2 = -3$ ifadesinde denklemi A^2 ile genişletip yukarıdaki 2. denklemi kullanırsak

$$A^2B^2 - 3A^2D^2 = -3A^2$$

$$9C^2D^2 - 3A^2D^2 = -3A^2$$

$$3D^2(3C^2 - A^2) = -3A^2$$

Buradan $A = D$ gelir. Bu ifade sayesinde $AB = 3CD$ ve $B = 3C$ olur.

O halde $A^2 - 3C^2 = 1$ denkleminin en küçük çözümünü seçersek karşılık gelen B ve D değerlerini de en küçük bu denklemi sağlayan şekilde kısıtlamış oluruz. Bu da bize $A = 2,\ C = 1,\ B = 3,\ D = 2$ verir.

Bu da (x, b) çözüm ise $(2x + 3b, x + 2b)$'nin de çözüm olduğunu söyler.

O halde bu genel çözümler:

(a) (x, b)

(b) $(2x + 3b, x + 2b)$

(c) $(2(2x + 3b) + 3(x + 2b), 2x + 3b + 2(x + 2b)) = (7x + 12b, 4x + 7b)$

(d) $(2(7x + 12b) + 3(4x + 7b), 7x + 12b + 2(4x + 7b)) = (26x + 43b, 15x + 26b)$

(e) $(2(26x + 43b) + 3(15x + 26b), 26x + 43b + 2(15x + 26b)) = (97x + 160b, 56x + 97b)$

(f) $(2(97x + 160b) + 3(56x + 97b), 97x + 160b + 2(56x + 97b)) = (362x + 597b, 209x + 362b)$

(g) $(2(362x+597b)+3(209x+362b), 362x+597b+2(209x+362b)) = (1351x+2236b, 780x+1351b)$

(h) $(2(1351x+2236b)+3(780x+1351b), 1351x+2236b+2(780x+1351b)) = (5042x+8355b, 2911x+5042b)$

olarak devam eder. Sayılar büyüdüğü için bu döngüyü mod 7'ye göre inceleyelim. İlk çözüm $(x, b) = (2, 1)$ olduğundan,

$$(x, b) \equiv (2, 1) \pmod 7$$

olur.

Buradan mod 7'de dönüşümler aşağıdaki gibi olur:

(a) $(2, 1)$

(b) $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1, 2 + 2 \cdot 1) = (7, 4) \equiv (0, 4)$

(c) $(2 \cdot 0 + 3 \cdot 4, 0 + 2 \cdot 4) = (12, 8) \equiv (5, 1)$

(d) $(2 \cdot 5 + 3 \cdot 1, 5 + 2 \cdot 1) = (13, 7) \equiv (6, 0)$

(e) $(2 \cdot 6 + 3 \cdot 0, 6 + 2 \cdot 0) = (12, 6) \equiv (5, 6)$

(f) $(2 \cdot 5 + 3 \cdot 6, 5 + 2 \cdot 6) = (28, 17) \equiv (0, 3)$

(g) $(2 \cdot 0 + 3 \cdot 3, 0 + 2 \cdot 3) = (9, 6) \equiv (2, 6)$

(h) $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 6, 2 + 2 \cdot 6) = (22, 14) \equiv (1, 0)$

Görüldüğü üzere mod 7'de 8 adımlık döngü oluşuyor. İlk çözümlerde b mod 7 değerleri sadece $1, 4, 6, 3, 0, 2$ gibi kalıyor. Ancak $b = 0 \pmod 7$ durumu mümkün değil (çünkü b pozitif ve tam kareden geliyor).

Sonuç olarak

$$b^2 \equiv 1 \pmod 7$$

olmalıdır.

Buradan

$$4n + 1 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 7$$

olur ve

$$4n \equiv 0 \pmod 7 \implies n \equiv 0 \pmod 7$$

bulunur.

Böylece n hem 8'e hem de 7'ye bölünür, yani

$$56 \mid n$$

olur ve ispat tamamlanır.

Not: x çift olma şartımızdan dolayı 1. basamaktan 3. basamağa geçiren geçişimiz bize $4a^2 - 3b^2 = 1$ denkleminin genel çözümünü üretiyor.

113. **Soru.** $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ olacak şekildeki (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz. (İzlanda Matematik Olimpiyatı 1985)

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) Denklemi 5 ile çarpıp düzenleyelim:

$$25m^2 - 30mn + 35n^2 = 9925 \implies 25m^2 - 30mn + 9n^2 + 26n^2 = 9925 \implies (5m - 3n)^2 = 9925 - 26n^2 \quad (1)$$

(1) denkleminin sağ tarafındaki ifade tek bir sayı olup aynı zamanda bir tamkaredir. Bu tek sayıya $2k + 1$ diyelim ve (1)'de yerine yazalım:

$$9925 - 26n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \implies 2k^2 + 2k = 4962 - 13n^2 \quad (2)$$

(2) denkleminin sol tarafı çift olduğundan sağ tarafının da çift olması gerekir; buradan da n'nin çift olduğunu söyleyebiliriz. $n = 2p$ diyelim ve (2)'de yerine yazalım:

$$2k^2 + 2k = 4962 - 52p^2 \implies k^2 + k = 2481 - 26p^2 \quad (3)$$

(3) denkleminin sol tarafı çifttir (çünkü $k^2 + k = k(k + 1)$ olup ardışık iki sayıdan en az biri çifttir), fakat sağ taraf tek olduğu için çelişki elde ederiz.

Dolayısıyla $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur.

114. **Soru.** $x^2 = 2^n + 3^n + 6^n$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. Varsayalım ki n tek olsun. O halde $2^n \equiv 0 \pmod 4$, $3^n \equiv 3 \pmod 4$, $6^n \equiv 0 \pmod 4$.

Yani

$$x^2 \equiv 3 \pmod 4$$

olur ve bu da çelişkidir. O halde n çift olmalıdır. $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ bulunur.

$$x^2 = 4^k + 9^k + 6^{2k}$$

olur.

$$x = 6^k + y$$

($x > 6^k$ olması gerektiği denklemden barizce görülebilir.) $y \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$(6^k + y)^2 = 6^{2k} + 2 \cdot 6^k \cdot y + y^2 = 4^k + 9^k + 6^{2k}$$

$$2 \cdot 6^k \cdot y + y^2 = 4^k + 9^k$$

olur. $y \geq 5$ için

$$2 \cdot 6^k \cdot y + y^2 \geq 10 \cdot 6^k + 25 > 4^k + 9^k$$

görülebilir.

1) $y = 4$ olsun.

$$4 \cdot 6^k + 4^2 \equiv 0 \pmod 2$$

ancak

$$4^k + 9^k \equiv 1 \pmod 2$$

olur. Çelişki.

2) $y = 3$ olsun.

$$3 \cdot 6^k + 3^2 \equiv 0 \pmod 3$$

ancak

$$4^k + 9^k \equiv 1 \pmod 3$$

olur. Çelişki.

3) $y = 2$ olsun.

$$2 \cdot 6^k + 2^2 \equiv 0 \pmod 2$$

ancak

$$4^k + 9^k \equiv 1 \pmod 2$$

olur. Çelişki.

Geriye ancak $y = 1$ olasılığı kalır. Denklemimiz ise

$$2 \cdot 6^k + 1 = 4^k + 9^k$$

$$(3^k - 2^k)^2 = 1$$

$$3^k - 2^k = 1$$

ve bu artan fonksiyon olduğu ve $k = 1$ bu denklemi sağladığı için başka k tamsayısı bulunamaz. Böylece $n = 2$ ve buradan da $x = 7$ sonucuna ulaşılır.

115. **Soru.** $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. Bu denklemin $(1, 1, 1)$, $(5, 4, 3)$, $(19, 15, 12)$ için sağlandığını görebiliriz. Bu tür denklemlerin norm denklemlerine denk geldiği durumlarda sonsuz çözümü ve bu çözümlerin Pell denklemlerindeki gibi dizi formatında çözümleri oluyor.

Dikkatlice incelersek bir önceki çözümün $x + y + z$ toplamı bir sonrakinin z bulunan yerine yazılıyor. Tüm denklemlerden $x + y + z$ çıkarırsak $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(7, 3, 0)$ kalıyor. Tekrar incelediğimizde bunların $(y + z, y, 0)$ formatını koruduğunu tahmin edebiliriz.

Yani şu aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n$$

$$y_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n$$

$$z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$$

şeklinde türediği tahmin edilebilir.

Şimdi bu iddiamızı ispatlamak için

$$x_{n+1}^3 + 2y_{n+1}^3 + 4z_{n+1}^3 - 6x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1} = 1$$

ifadesinin

$$x_n^3 + 2y_n^3 + 4z_n^3 - 6x_n y_n z_n = 1$$

eşitliğine indirgenmiş olduğunu gösterelim. Ben ifadelerin yazımı çok uzun olduğu için x_n yerine x yazacağım.

$$(x+2y+2z)^3 = x^3 + 6x^2y + 6x^2z + 12xy^2 + 24xyz + 12xz^2 + 8y^3 + 24y^2x + 24yz^2 + 8z^3$$

$$2\cdot(x+y+2z)^3 = 2x^3 + 6x^2y + 12x^2z + 6xy^2 + 24xyz + 24xz^2 + 2y^3 + 12y^2x + 24yz^2 + 16z^3$$

$$4\cdot(x+y+z)^3 = 4x^3 + 12x^2y + 12x^2z + 12xy^2 + 12xz^2 + 24xyz + 12xz^2 + 4y^3 + 12y^2x + 12yz^2 + 4z^3$$

$$6\cdot(x+2y+2z)(x+y+2z)(x+y+z) = 6x^3+24x^2y+30x^2z+30xy^2+78xyz+48xz^2+12y^3+48y^2z+60yz^2+24z^3$$

Gerçekten de bu terimleri ekleyip çıkardığımızda elimizde

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$$

denklemi kalıyor. Dizinin initial (başlangıç) değeri olarak da

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$$

tanımlarsak bu dizi bize sonsuz çözüm olduğunu gösterir.

Not: Bu sorunun nerdeyse aynısı USA Team Selection Test 2012'de "a, b, c pozitif tam sayıları aşağıda verilen denklem için 2010 gibi bir pozitif tam sayıdan büyük olabilir mi?" şeklinde sorulmuş.

116. **Soru.** $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$ olmak üzere

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3$$

eşitliğinin tam sayı çözümlerinin sayısı M ve

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$$

eşitliğinin tam sayı çözümlerinin sayısı N olmak üzere

$$M > N$$

olduğunu gösteriniz. (İzlanda Matematik Olimpiyatı (?))

Çözüm. Burada vereceğim çözüm IMO Compendium (USS1, 1967 Longlist) kaynağında paylaşılmış.

Aşağıdaki fonksiyon, bir sayının kaç farklı şekilde $a^2 + b^3$ biçiminde yazılabildiğini sayar:

$$f(n) := \left|\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : a^2 + b^3 = n\}\right|$$

1. Denklem:

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3$$

Her iki tarafı yeniden düzenleyelim:

$$x^2 + t^3 = y^2 + z^3 =: n$$

Yani her bir n için $a^2 + b^3 = n$ biçiminde iki farklı sunum aranıyor. Bu nedenle toplam çözüm sayısı:

$$M = \sum_n f(n)^2$$

2. Denklem:

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$$

Yine aynı biçimde düzenleyelim:

$$x^2 + t^3 = y^2 + z^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + t^3 = n + 1, \quad y^2 + z^3 = n$$

Bu durumda toplam çözüm sayısı:

$$N = \sum_n f(n) f(n+1)$$

Karşılaştırma: Her n için AM–GM eşitsizliği:

$$f(n)^2 + f(n+1)^2 \geq 2f(n)f(n+1) \quad \Rightarrow \quad (f(n) - f(n+1))^2 \geq 0$$

Bu farklar toplamına bakalım:

$$\begin{aligned} M - N &= \sum_n \big(f(n)^2 - f(n)f(n+1)\big) - \sum_n \big(f(n)f(n+1) - f(n+1)^2\big) \\ &= \sum_n \frac{(f(n) - f(n+1))^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

Çünkü $f(0) = 1$ olduğundan, tüm $f(n)$ terimleri sabit olamaz ve en az bir $f(n) \neq f(n+1)$ bulunur. Dolayısıyla:

$$\boxed{M > N}$$

117. **Soru.** $x^2 + 5y^2 = z^2$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz.

Çözüm. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ kabul ederek başlayalım. $x^2 + 5y^2 = z^2$ denkleminde $(x, y, z) = k$ ise $(x_0, y_0, z_0) = 1$ şeklinde çözüm de sağlayacağı için (denklemden kolayca gösterilebilir) genelliği bozmadan $(x, y, z) = 1$ alalım. (İlkel (primitif) çözüm olmuş oluyor.)

$(x, y) = 1$ den dolayı x, y aynı anda çiftse $(x, y, z) = 1$ sağlanmaz çünkü z de çift olur. x, y tek, z çift olamadığını göstererek başlayalım. O halde z çift olur. Bu da bize

$$z^2 \equiv 0 \pmod 4$$

verir. x, y tek ise

$$x^2 \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{ve} \quad 5y^2 \equiv 1 \pmod 4$$

yani

$$x^2 + 5y^2 \equiv 2 \pmod 4$$

olur. Çelişki.

Bu gözlemler bize z'nin tek olduğunu söyler. Buradan sonra

$$5y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$$

$d = \gcd(z - x, z + x)$, $d \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde $d \mid z - x + z + x$ yani $d \mid 2z$. Benzer şekilde $d \mid 2x$ olur. d pozitif tam sayısı hem x hem y'yi aynı anda bölemeyeceği için $d \mid 2$ olmak zorundadır.

a) $d = 1$ ise

$$z - x = 5a^2, \quad z + x = b^2 \quad \text{veya} \quad z - x = a^2, \quad z + x = 5b^2$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}^+$ vardır. İlk durumda

$$z = \frac{5a^2 + b^2}{2}, \quad x = \frac{b^2 - 5a^2}{2}$$

formundayken, ikinci durumda

$$z = \frac{a^2 + 5b^2}{2}, \quad x = \frac{5b^2 - a^2}{2}$$

olur. Pozitif x, y, z çözümleri için genelliği bozmadan

$$z = \frac{5a^2 + b^2}{2}, \quad x = \frac{|5a^2 - b^2|}{2}$$

alınabilir. Buna uygun oluşan pozitif y değeri ise

$$y = ab$$

olur. (Buradaki a, b'ler $a + b \equiv 0 \pmod 2$ şartını sağlar.)

b) $d = 2$ ise y çifttir, bu da sol tarafın 4 ile bölündüğünü gösterir. $y = 2y_0$, $y_0 \in \mathbb{Z}^+$.

$$5y_0^2 = \frac{z - x}{2} \cdot \frac{z + x}{2}$$

$$z - x = 10a^2, \quad z + x = 2b^2 \quad \text{veya} \quad z - x = 2a^2, \quad z + x = 10b^2$$

olur. Bu ifadeler de **a)**'ya benzer şekilde genelliği bozmadan

$$z = 5a^2 + b^2, \quad x = |5a^2 - b^2|, \quad y = 2ab$$

ve $a + b \equiv 1 \pmod 2$ olur.

Not: Bu denklemde bu şekilde iki farklı duruma göre parametrizasyon çıkmışken klasik $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminde çıkmamasının temel sebebi her iki denklemde de z'nin tek olduğu biliniyor olmasıdır. $x^2+y^2 = z^2$ denkleminde primitif çözümler için x, y den hangisi çiftse diğer terimi karşıya atarak iki kare farkı uygulayabildiğimiz için burada oluşan gibi iki durum analizi şartı ortadan kaldırılıyor.

k pozitif tam sayısı için bu denklemin pozitif tam sayılarda çözümleri

$$\big(k \cdot |5a^2 - b^2|, \quad k \cdot 2ab, \quad k \cdot (5a^2 + b^2)\big), \quad a, b, k > 0, \quad (a, b) = 1, \quad a + b \equiv 1 \pmod 2$$

ve

$$\left(k \cdot \frac{|5a^2 - b^2|}{2}, \quad k \cdot ab, \quad k \cdot \frac{5a^2 + b^2}{2}\right), \quad a, b, k > 0, \quad (a, b) = 1, \quad a + b \equiv 0 \pmod 2$$

şeklindedir. İlk durumdaki çözümler için x çift, y tek, z tek; ikinci durumdaki çözümler için x çift, y tek, z tek durumları çözülür. Negatif çözümler ise bunların işaretleriyle oynanmış halleriyle elde edilir.

Bunun dışındaki çözümler ise $x = 0$ için $5y^2 = z^2$, $y = 0$ ve $z = 0$ şartını zorlar. $y = 0$ için $x = z$ olur. $(x, 0, x)$, $(0, 0, 0)$ ve bunların işaretli permütasyonları bize genel çözümlerini verir. (Bu 0'lı çözümleri de parametrik çözümlerde düzenleme yaparak kapsaması sağlanabilir.)

118. **Soru.** $x^5 - y^2 = 4$ eşitliğinin tam sayılarda çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x^5 \equiv 0, \pm 1 \pmod{11}$$

ve $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$$

yazabiliriz.

Bu değerleri denklemde yerine koyup $\pmod{11}$'de incelediğimiz zaman

$$x^5 - y^2 \not\equiv 4 \pmod{11}$$

elde ederiz. Dolayısıyla denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

119. **Soru.** x, y pozitif tam sayıları için

$$4xy - x - y$$

ifadesinin tam kare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. $4xy - x - y$'nin tam kare olmadığını göstermek için çelişki kullanalım. Varsayalım ki tam kare olsun, o halde

$$4xy - x - y = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

vardır. ($k = 0$ için test kolayca yapılabilir.)

$$4xy - x - y = x(4y - 1) - \frac{1}{4}(4y - 1) - \frac{1}{4} = k^2$$

$$4x(4y - 1) - (4y - 1) = 4k^2 + 1$$

olur yani

$$4y - 1 \mid 4k^2 + 1$$

olur, bu da bize şunu verir: Öyle bir $p \equiv 3 \pmod 4$ olacak p asalı vardır ki

$$p \mid 4k^2 + 1$$

sağlanır. $2k = m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ alalım, daha genel bir ispatını verelim.
Bize bu bölünebilme

$$m^2 \equiv -1 \pmod p$$

verir. Aynı zamanda Fermat'ın klasik teoreminden

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

olduğunu biliyoruz ve $p > 2$ için p daima tektir. O halde aşağıdaki işlemleri yapabiliriz:

$$a^{p-1} \equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

$$\frac{p-1}{2} \quad \text{çift olmalıdır.}$$

Bu da bize

$$p \equiv 1 \pmod 4$$

verir. Çelişki.
O halde hiçbir $m^2 + 1$ formatındaki bir sayının $3 \pmod 4$ formatında asal böleni olamaz. Bu da bize orijinal sorumuzu ispatlar.

Not: (MatematikOlimpiyatı) Öte yandan $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x = -1$, $y = -5n^2 - 2n$ ve $z = -5n - 1$ alarak

$$4xy - x - y = z^2$$

denkleminin negatif tam sayılarda sonsuz çözüme sahip olduğunu da görmüş oluyoruz.

Not: (AtakanCİCEK) Negatifte sağlanan örneği görünce çözümde bir tarama yapmak istedim. Negatif sayılarda $4y - 1 \mid 4k^2 + 1$ dediğimiz için ve $y = -y'$, $y' \in \mathbb{Z}^+$ tanımlayabileceğimiz için

$$4y' + 1 \mid 4k^2 + 1$$

geliyor, yani $3 \pmod 4$ tipi asal çarpanın $4k^2 + 1$'i garanti bölememiş olduğunu görüyoruz.

120. **Soru.**

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$$

eşitliğinin sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu soru için internette çeşitli parametrizasyon denemeleri türetilmiş. Bunlardan en kolay üreteni:

$$(10 + x)^3 = 1000 + 3 \cdot 100x + 3 \cdot 10x^2 + x^3$$

$$(10-x)^3 = 1000 - 3\cdot 100x + 3\cdot 10x^2 - x^3$$

Taraf tarafa toplama yardımıyla

$$(10+x)^3 + (10-x)^3 = 2000 + 60x^2$$

O halde geriye kalan iki terimden biri -1, diğeri de $-\sqrt[3]{60x^2}$ olacak şekilde sonsuz x türetebildiğimizi gösterirsek ispat bitecek.

Denklemimiz için $60x^2 = y^3$ olmasını sağlayan sayıları bulalım. $x = 60a$ olacak şekilde a tamsayısı seçersek

$$60^3a^2 = y^3$$

yani $a = m^3$ şeklinde seçilen m tam sayıları için bu ifade tam küp olmuş olacak. Bu da bize

$$x = 60m^3, \quad m \in \mathbb{Z}$$

dönüşümünün yeterli olacağını gösteriyor.

O halde bu 4 tam küp toplamını m cinsinden yazarsak

$$(10+60m^3)^3 + (10-60m^3)^3 + (-60m^2)^3 + (-1)^3 = 1999$$

elde ederiz. Burada da m yerine sonsuz farklı tam sayı yazabildiğimiz için sonsuz (a,b,c,d) çözümü üretmiş oluruz.

İnternette kaynak taraması yaparken bu 4 küp toplamı ile ilgili daha genel bir çalışmayla karşılaştım: https://people.math.harvard.edu/ elkies/4cubes.html

Bizim yukarıda yaptığımız çözüm ise

$$(n+x)^3 - (n-x)^3 = 2n^3 + 3nx^2$$

olduğu için öbür üçüncü terimimiz $-3nx^2$'yi genel çözüm olarak sağlayacak, bize son terim d serbest seçip kalıyor. O halde $2n^3 - d^3 = k$ formatında yazılabilen sayılar için

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = k)$$

denkleminin sonsuz çözüm genelleştirmesini bulmuş olduk.

121. **Soru.** Eğer x, y pozitif tam sayılar ise $x^2 - y^2$ ile $x^2 + y^2$ ifadelerinin aynı anda tam kare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Bu ifadelerin aynı anda tam kare olduklarını varsayarsak

$$x^2 - y^2 = t^2 \quad \text{ve} \quad x^2 + y^2 = z^2$$

elde edilir. Bu da bize

$$x^4 - y^4 = (tz)^2$$

verir.

46) daki soruya benzer şekilde

$$a^4 - b^4 = c^2$$

tipi denklemlerin $b = 0$ trivial durumu hariç çözümü olamayacağı ispatlanabilir. (Bunu da 123) de ekleyeceğim.)

Alternatif Metod) Bu denklemi Pisagor parametrizasyonlarıyla açarak ilerletelim. Öncelikle denklemlerimiz:

$$x^2 = t^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

denklemlerini inceleyelim. Çözüm için sadece primitifleri incelemek yeterlidir çünkü eğer bir çözüm varsa bunu tüm denklem kökleri için k gibi bir çarpanla genişletebiliriz.

Primitif çözümler için $(m,n) = 1$, $(a,b) = 1$ olacak şekilde parametrizasyonlar seçeceğimiz için hipotenüse denk gelen x^2 ifadesi daima tek olmalıdır; aksi halde genel çözümümüzde olan

$$m^2 - n^2, \quad 2mn, \quad m^2 + n^2$$

terimlerinden dolayı hepsi çift olur. Bu da primitif çözüm olmalarını engeller.

O halde x tek, y de bu nedenle çift terim olmak zorundadır. Bu da bize

$$x = m^2 + n^2$$

$$y = 2mn$$

$$t = m^2 - n^2$$

$$x = a^2 - b^2$$

$$y = 2ab$$

$$z = a^2 + b^2$$

oluştuğunu gösterir.

Buradan ise

$$(m,n) = (a,b) = 1, \quad mn = ab, \quad m^2 + n^2 = a^2 - b^2$$

yani

$$m^2 + n^2 + b^2 = a^2$$

olur.

Bu denklem sisteminin de varsayılan çözüm için daha küçük bir çözüm grubu elde etmesiyle infinite descent yardımıyla sadece bariz çözüm olduğunun ispatı aşağıdaki pdf'te (4. ve 5. sayfalar (8.) olarak belirtilen denklem) verilmiştir: https://arxiv.org/pdf/1311.1451

Not: Bu paylaştığım pdf'te $x^4 + y^4 = z^2$ ve $x^4 + mx^2y^2 + z^4 = k^2$ benzeri birçok denklemin sadece trivial çözümlerinin geçerli olduğu ispatlanmaya çalışılmıştır.

122. **Soru.** $a! \cdot b! = a! + b! + c!$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b, c) tamsayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle genelliği bozmadan $a \leq b$ kabul edebiliriz. Manuel testler yardımıyla $a, b, c \geq 2$ olması gerektiğini görebiliriz.

$a = 2$ olmadığını gösterelim. $a = 2$ olsun. O halde

$$2b! = b! + c! + 2$$

yani

$$b! = 2 + c!$$

gelir. $b, c \geq 3$ için (mod3) çelişkisi denklemden çıkar. $b = 2$ için $c! = 0$ çözümsüz. $b = 3$ için $c! = 4$ çözümsüz.

O halde $a \geq 3$ olmalıdır.

$3 \leq a \leq b$ için varsayalım ki $b \geq c$ sağlansın. Bu durumda $a!b! \geq 6b!$ olur. Ancak

$$a! + b! + c! \leq 3b!$$

sonucu gelir. Çelişki.

O halde

$$3 \leq a \leq b < c$$

elde ederiz.

Denklemimizi $b!$ modunda analiz edersek

$$a! \equiv 0 \pmod{b!}$$

gelir. ($b! \mid b!$ ve $c > b$ şartından dolayı $b! \mid c!$), yani $b! \mid a!$ olmalıdır. $a \leq b$ kabulümüzden dolayı bu ancak $a = b$ iken mümkündür.

Denklemimiz

$$(a!)^2 = 2a! + c!$$

olur. $c = a + t$, $t \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Denklemi $a!$ ile bölersek

$$a! - 2 = (a + 1)(a + 2) \cdots (a + t)$$

elde ederiz.

Ardışık üç terim çarpımının tümevarımla 3 ile bölünebileceği gösterilebilir. Ancak $a! - 2$ 3 ile bölünemez $(a \geq 3)$. O halde $t = 1$ ya da $t = 2$ olmalıdır.

1) $t = 1$ olsun. O halde

$$a! - 2 = a + 1$$

yani

$$a! - a - 3 = 0$$

olur. Pozitif tam sayılarda $f(a) = a! - a - 3$ tanımlarsak $f(a+1) - f(a) > 0$'ın hangi a'dan sonra sağlandığını ispatlayalım.

$$(a+1)! - a! - (a+1) - 3 + a + 3 > 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Yani

$$a \cdot a! > 1$$

gelir. Bu da $a \geq 3$ için barizdir.

$a = 3$ için $f(a) = 0$ olur. Dolayısıyla başka a değeri sağlanmaz. $(3, 3, 4)$ çözümü gelir.

2) $t = 2$ olsun. O halde

$$a! - 2 = a^2 + 3a + 2$$

yani

$$a! - a^2 - 3a - 4 = 0$$

olur.

Pozitif $a \geq 3$ tam sayılarda $g(a) = a! - a^2 - 3a - 4$ tanımlarsak $a = 5$ için g pozitif olduğunu görürüz.

$$g(a+1) - g(a) > 0$$

ne zaman sağlanır bakalım.

$$a \cdot a! - (2a+1) - (3a+3) - 4 + 3a + 4 > 0$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

Buradan

$$a \cdot a! - 2a - 4 > 0$$

sağlanmalı. Bunu $a \geq 5$ için daima sağlandığını görmek için $a = 5$'in sağladığını görüp $a \geq 5$ olan pozitif tam sayılarda $h(a) = a \cdot a! - 2a - 4$ tanımlarsak ve

$$h(a+1) - h(a) > 0$$

gösterirsek ispat biter.

$$(a+1) \cdot (a+1)! - 2 \cdot (a+1) - 4 - a \cdot a! + 2a + 4 > 0$$

sağlanmalı. Düzenlersek

$$(a^2 + a + 1) \cdot a! - 2 > 0$$

olması gerektiğini görürüz ki bu da $a \geq 5$ için barizdir.

O halde $a = 3$ ve $a = 4$ hariç bu denklem sağlanamaz.

$a = 3$ ise $3! - 2 = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2$ sağlanmaz.

$a = 4$ ise $4! - 2 = 4^2 + 3 \cdot 4 + 2$ sağlanmaz.

O halde buradan çözüm gelmiyor.

Tek çözüm üçlüsü

$$(3, 3, 4)$$

olur.

Not: Sondaki durumda $a!$ ifadesi $ma^2 + ba + c$ ve $ma + b$ formu ifadelerden daima fazla büyür argümanı da kullanılabilirdi.

Not2: Başka bir benzer soru için $x! + y! + z! = u!$ denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz. (Kanada M.O 1983)

Not3: Austrian MO 2024 Sınavında da

$$k! + m! = k!n!$$

denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz şeklinde bir soru gelmiş.

123. **Soru.** $x^4 - y^4 = z^2$ eşitliğinin pozitif tam sayılarda çözümünün bulunmadığını gösteriniz. (Fermat Son Teoremi'nin $n = 4$'ün diğer bir özel halidir. Bazı sorularda uygulamasını yaptık.)

Çözüm. $x^4 - y^4 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümsüzlüğünü Pisagor parametrizasyonlarından gelen descentler ile gösterebiliriz. $x^4 = y^4 + z^2$ denkleminde genelliği bozmadan $(x, y, z) = 1$ alırsak

$$x^2 = m^2 + n^2, \quad y^2 = m^2 - n^2, \quad z = 2mn$$

veya

$$x^2 = m^2 + n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad z = m^2 - n^2$$

olasılıkları bulunur. Her iki olasılıkta da daima daha küçük bir çözüm elde edilebildiğini gösterirsek sonsuz descentten ispat biter.

1) $x^2 = m^2 + n^2$, $y^2 = m^2 - n^2$ olsun. Bu durumda

$$(xy)^2 = m^4 - n^4$$

denklemi elde edilir. Bu da bize $m^2 < m^2 + n^2$ olduğu için daha küçük bir çözüm elde etmiş oluruz. (y tek olduğu senaryoda bu descent daima oluşuyor.)

2) $x^2 = m^2 + n^2$, $y^2 = 2mn$ olsun. Bu durumda 1. denklemden genelliği bozmadan

$$m = p^2 - q^2, \quad n = 2pq, \quad (p, q) = 1, \quad p > q > 0, \quad p \not\equiv q \pmod 2$$

olacak şekilde p, q tam sayıları bulunur. 2. denklemde bunu yerine koyarsak

$$y^2 = 4pq(p^2 - q^2)$$

olur. Sağ taraftaki tüm terimlerin en büyük ortak böleni 1 olduğu için her biri tam kare olmak zorundadır. Buradan

$$p = a^2, \quad q = b^2, \quad p^2 - q^2 = c^2$$

olacak şekilde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olduğunu görürüz. Bu da bize

$$a^4 - b^4 = c^2$$

verir. $x = p^2 + q^2 = a^4 + b^4$ olduğu için $a < x$ olur ki bu da bize descent sağlar.

Bu iki durumdan yola çıkarak, bu ilk yapılan descent adımından sonraki elde edilen denklemde bu iki descent yönteminden biri geçerli olacağı için pozitif tam sayılarda sonsuza kadar iniş elde ederiz. Bu da bize pozitif tam sayılarda çözümsüzlüğü verir.

İfadelerin x, y, z değerlerinin pozitif ya da negatif olması denklemi etkilemediği için x, y, z sıfır olmayan tüm tam sayılar için bu ispat genellenebilir.

Geriye $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ durumlarının özel incelenmesi kalır.

1) $x = 0$ olsun. O halde

$$-y^4 = z^2$$

yani $y = 0$ ve $z = 0$ bulunur. $(0, 0, 0)$ olur.

2) $y = 0$ olsun. O halde

$$x^4 = z^2$$

yani $x^2 = z$ veya $-x^2 = z$ olur. Parametrizasyonla göstermek istersek

$$(k, 0, k^2), \quad (-k, 0, k^2), \quad k \in \mathbb{Z}$$

olur. 1) deki çözüm de bu küme tarafından kapsanmış olur.

3) $z = 0$ olsun. O halde

$$x^4 = y^4$$

yani $x = y$ veya $x = -y$ olur. Buradan

$$(k, -k, 0), \quad (k, k, 0), \quad k \in \mathbb{Z}$$

olur.

İspat biter.

Not: Bu çözümü aşağıdaki linkte verilen ispattan düzenleyerek yazdım.

https://planetmath.org/x4y4z2hasnosolutionsinpositiveintegers

124. **Soru.** $2^n - 1$ ifadesi, $m^2 + 9$ ifadesini bölecek şekilde bir m tam sayısının bulunmasını sağlayan tüm n tam sayılarını bulunuz. (IMO 1998 Shortlist N5)

Cevap:

$$n = 2^x, \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

sayılardır. (Sanırım literatürde **Mersenne Sayıları** olarak da biliniyor.)

Öncelikle $m^2 + 9$ ifadesinin $3 \pmod 4$ formatında tek asalının 3 olduğunu görebiliriz. Çünkü bu tür p'ler için $p \mid x^2 + y^2$ ise $p \mid x$ ve $p \mid y$ sağlanır. (Gauss Lemması olarak bilinir.)

$n = 2^x$ formatında bulunmayan sayılar için 3'den farklı bir p bulunabileceğini ispatlayalım.

$n \geq 2$ için

$$2^n - 1 \equiv 3 \pmod 4$$

sağlanır. Yani en az bir adet $3 \pmod 4$ asal çarpanı bulunur.

Diğer taraftan tek n'ler için

$$2^n - 1 \equiv 1 \pmod 3$$

gelir. Yani n tek olursa 3'ten farklı bir p asalı vardır. Çelişki.

n çift olmalıdır. $n = 2^k$ formatında olsun. Tümevarımla tek p asalının 3 olduğunu ispatlayalım.

$k = 1$ için

$$2^2 - 1 = 3,$$

$k = 2$ için

$$2^4 - 1 = 3 \cdot 5$$

olur, sağlanır.

Varsayalım ki $k - 1$ için doğru olsun. O halde

$$2^{2^{k-1}} - 1$$

şeklinde sadece bir adet $3 \pmod 4$ formatında asal vardır.

O halde

$$2^{2^k} - 1 = (2^{2^{k-1}} - 1)(2^{2^{k-1}} + 1)$$

formatında olur. Soldaki çarpan tümevarım kabulünden dolayı sadece bir adet $3 \pmod 4$ formunda çarpan içerir.

Sağdaki ise $x^2 + 1$ formatındaki ifadelerin asla $3 \pmod 4$ formatında asal çarpan içerememesi kuralından dolayı (Bu ispatı detaylı olarak: https://geomania.org/forum/index.php?topic=6419.120, 119. soru içinde yazılmıştır.) bu formatta asal bölen asla içeremez. İspat biter.

Şimdi ise geri kalan durumlarda n'ler daima

$$n = 2^k \cdot s$$

şeklinde, $s \geq 3$ olacak ve s tek olacak şekilde yazılabilir. Bu durumda bariz şekilde n'in çarpanlarından birinin $(2^s - 1)$ olmak zorunda olduğu görülebilir.

s tek olduğu için

$$2^s - 1 \not\equiv 0 \pmod 3$$

olur ancak

$$2^s - 1 \equiv 3 \pmod 4$$

olur. Dolayısıyla farklı bir $3 \pmod 4$ formatında asal çarpan içermek zorundadır. Bu da bize $2^n - 1 \mid m^2 + 9$ koşulunun sağlanmasını engeller.

Küçük n'leri de elle test edelim:

- $n = 1$ ise $1 \mid m^2 + 9$ sağlanır.
- $n = 2$ ise $3 \mid m^2 + 9$ olup $m = 3a$ tipi m'ler için sağlandığı görülebilir.
- $n = 3$ ise $7 \mid m^2 + 9$ olmadığı görülür.
- $n = 4$ ise $15 \mid m^2 + 9$ olup $m = 6$ için örnek olarak sağlandığı görülebilir.
- $n = 5$ ise $31 \mid m^2 + 9$ olmadığı görülür.

Sonuç olarak sadece $n = 2^k$ olacak şekildeki n'ler aradığımız listeyi oluşturuyor.

Bu formattaki her n için m bulunduğunu ispatlamak için öncelikle $2^n - 1$ ifadesinde 3'ün kuvvetlerinin maksimum kaç olabileceğini incelemeliyiz.
$n = 2a$ formatında olduğu için

$$4^a - 1$$

yazabiliriz. Lifting The Exponent Lemması'nı v_3 için uygularsak

$$v_3(4^a - 1) = v_3(4 - 1) + v_3(a) = 1 + v_3(a)$$

olur. $a = 2^{k-1}$ formatında olduğu için

$$v_3(4^a - 1) = 1$$

olur. O halde $Q \equiv 1 \pmod 4$ olacak şekilde

$$2^n - 1 = 3Q, \quad Q \in \mathbb{Z}^+$$

vardır ve bu Q sadece $1 \pmod 4$ tipi asal çarpanlardan oluşur. $m = 3m'$, $m' \in \mathbb{Z}^+$ formatında olması gerektiğinden dolayı

$$Q \mid m'^2 + 1$$

olduğunu, yani

$$m^2 \equiv -1 \pmod Q$$

elde ederiz. Ve bu denkliğin daima çözümü vardır. (Q sadece $1 \pmod 4$ asallarından türediği için.)

125. **Soru.** $x^4 + x^2 + y^2 + y^4 = z^2$ denkleminin tam sayılarda sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. x, z sıfır olmayacak şekilde (eğer x veya y sıfırsa, diğerinin de sıfır olması gerekir; bu iki ardışık kare arasına sıkıştırarak gösterilebilir) denklemde $x = y$ koşulunu sağlayan sonsuz çözüm olduğunu gösterebilirsek ispat biter.

Denklemimiz bu durumda

$$x^2 \cdot 2(x^2+1) = z^2$$

olur. x^2 tam kare olduğu için geriye kalan ifade de tam kare olmak zorundadır. Buradan

$$2x^2 + 2 = n^2$$

olacak şekilde n tamsayısı vardır.

Bu denklemde x çift ise $n^2 \equiv 2 \pmod 4$ çelişkisi oluşur. x tek olmalıdır.

$x = 2m+1$ dönüşümünü yapalım. Buradan

$$2 \cdot (4m^2 + 4m + 1) + 2 = 4 \cdot (2m^2 + 2m + 1) = n^2$$

olur. Buradan $2m^2 + 2m + 1 = q^2$ olacak şekilde bir q tamsayısı bulunabileceğini söyleyebiliriz.

$$m^2 + (m+1)^2 = q^2$$

olur. Pisagor parametrizasyonundan $(s^2 - t^2, 2st, s^2 + t^2)$ (ardışık $m, m+1$ terimleri olduğundan başkatsayı 1 alınabilir) yaklaşımı kullanılır.

$$|s^2 - t^2 - 2st| = 1$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi daha detaylı incelersek

$$|(s-t)^2 - 2t^2| = 1$$

ve burada $s - t = p$ olacak şekilde p tamsayısı seçersek

$$|p^2 - 2t^2| = 1$$

olur.

Buradan $p^2 - 2t^2 = 1$ denkleminin sonsuz çözümü olduğunu gösterirsek ilk denklemin sonsuz çözümü olduğunu da göstermiş oluruz.

Bu tip denklemlerin genel çözümlerinin $(ap+bt, cp+dt)$ şeklinde yeni çözüm üretme mekanikleri mevcuttur.

Bundan yararlanalım. Son elde ettiğimiz denklemde bunu yerine koyarsak

$$(ap+bt)^2 - 2(cp+dt)^2 = 1$$

$$a^2p^2 + 2abpt + b^2t^2 - 2(c^2p^2 + 2cdpt + d^2t^2) = (a^2 - 2c^2)p^2 + (2ab - 4cd)pt + (b^2 - 2d^2)t^2 = 1 = p^2 - 2t^2$$

olur.

Buradan

$$a^2 - 2c^2 = 1, \quad 2ab - 4cd = 0, \quad b^2 - 2d^2 = -2$$

olur.

Bu ikinci denklemi üçüncüye yerinde koyabilmemiz için üçüncü denklemi a^2 ile genişletelim.

$$a^2b^2 - 2a^2d^2 = -2a^2$$

$$4c^2d^2 - 2a^2d^2 = -2a^2$$

$$2d^2(2c^2 - a^2) = -2a^2$$

yani $a^2 = d^2$ olur.

Pozitif katsayılarda çözüm için $a = d$ alalım. $b = 2c$ olur (2. denklem).

Yani $a^2 - 2c^2 = 1$ denkleminin en küçük çözümünü bulursak bu denklemin en küçük yinelemesini bulmuş olacağız.

Deneme-yanılma yoluyla $(3, 2)$ nin sağladığı görülür. $(a, b, c, d) = (3, 4, 2, 3)$ olur.

O halde $p^2 - 2t^2 = 1$ denkleminin ilk çözüm $(3, 2)$ olmak üzere $(3p + 4t, 2p + 3t)$ yinelemesiyle pozitif tam sayılarda sonsuz çözümü olduğu görülür.

Bu da bize tüm değişken dönüşümlerimizin daima tam sayı geçişler sağlamasından dolayı orijinal denklemimizin de sonsuz çözümü olduğunu gösterir.

Not: Bu denklemin $x = y$ şartını sağlamayan çözümleri de var ancak onlar hakkında yorum yapmak kolay değil.

126. **Soru.**

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

denkleminin pozitif tam sayılarda çözümlerini bulunuz.

Çözüm. Denklemi

$$(yz)^2 + (xz)^2 = (xy)^2$$

olarak yazalım.

Pisagor parametrizasyonundan bu terimlerin

$$d(m^2 - n^2), \quad d(2mn), \quad d(m^2 + n^2), \quad m > n > 0, \quad (m, n) = 1$$

şeklinde alınabileceğini biliyoruz.

x, y simetrik olmasından dolayı genelliği bozmadan

$$yz = d(m^2 - n^2), \quad xz = d(2mn), \quad xy = d(m^2 + n^2)$$

alalım. $(m^2 - n^2, 2mn) = 1$ olduğunu not alalım.

$(x, y) = g$ olsun. O halde

$$x = gX, \quad y = gY, \quad g \in \mathbb{Z}^+, \quad (X, Y) = 1$$

olacak şekilde X, Y pozitif tam sayıları bulunur.

Bundan dolayı

$$(gYz, gXz) = (yz, xz) = (d(m^2 - n^2), d(2mn)) = gz(m^2 - n^2, 2mn)$$

olur. Buradan

$$Y = m^2 - n^2$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$gXz = d(2mn) \implies X = 2mn$$

olur.

Şimdi buradan

$$xy = g^2XY = g^2 \cdot (2mn) \cdot (m^2 - n^2) = d(m^2 + n^2) = gz(m^2 + n^2)$$

elde edilir.

Buradan ise

$$g \cdot 2mn \cdot (m^2 - n^2) = z(m^2 + n^2)$$

olur.

$m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ terimlerinin her biri aralarında asal olduğu için

$$m^2 + n^2 \mid g$$

olmalıdır.

Buradan

$$t(m^2 + n^2) = g$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}^+$ bulunduğu görülür.

Bunu denklemde yerine koyarsak

$$z = t \cdot 2mn \cdot (m^2 - n^2)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$x = gX = t(m^2 + n^2) \cdot 2mn$$

ve

$$y = gY = t(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$$

olur.

Buradan çözüm kümemiz

$$\{\, t(m^2 + n^2) \cdot 2mn, \quad t(m^2 + n^2)(m^2 - n^2), \quad t(m^2 - n^2) \cdot 2mn \mid m > n > 0, (m, n) = 1, m, n, t \in \mathbb{Z}^+\}$$

ve

$$\{\, t(m^2+n^2)(m^2-n^2), \quad t\cdot 2mn(m^2+n^2), \quad t\cdot 2mn(m^2-n^2) \mid m>n>0, (m,n)=1, m,n,t\in\mathbb{Z}^+\}$$

şeklindedir.

127. **Soru.** $x^6+x^3+x^3y+y = 147^{157}$ ve $x^3+x^3y+y^2+y+z^9 = 157^{147}$ olduğuna göre x,y,z sayılarının tamamının aynı anda tam sayı olamayacağını gösteriniz. (USAMO 2005)

Çözüm. Bu spesifik modüler inceleme Evan Chen'in notlarında verilmiş. Ben de sonda not açarak benzer tipte yapılar için inceleme yaptım.

Bu soruda iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak

$$(x^3+y+1)^2-1+z^9 = 157^{147}+147^{157}$$

oluşuyor. Bu ifadede $x^3+y+1=m$, $m\in\mathbb{Z}$ dönüşümü yaparsak

$$m^2+z^9 = 157^{147}+147^{157}+1$$

elde ederiz.

Bu mantığı fark ettikten sonra bu soruda z^9 ifadesinin de fark edilmesinin etkisiyle z^9 teriminin $9a+1$ formu asal sayılarda analizinde çok sınırlı sayıda kalanı olacağını; bu soruyu yazanlar fark etmemizi istemiş.

$9\cdot 2+1=19$ kalanı için bu soruyu incelersek,

$$157^{147}+147^{157}+1 \equiv 14 \pmod{19}$$

oluyor.

$z^9\equiv\{0,1,-1\} \pmod{19}$ olur.

m^2 yi de inceleyelim.

$$m^2\equiv\{0,1,4,5,6,7,9,11,16,17\} \pmod{19}$$

olur. Kare kalandaki sayıların hepsine 1 eklersek

$$m^2+1\equiv\{1,2,5,6,7,8,10,12,17,18\} \pmod{19}$$

oldu. m^2-1 ise

$$\{-1,0,3,4,5,6,8,10,15,16\} \pmod{19}$$

oldu.

O halde

$$m^2+z^9\equiv\{13,14\} \pmod{19}$$

denkliklerini sağlayan (m,z) tam sayıları bulunamaz. Çelişki ile ispat biter.

Not: Bilgisayar yardımıyla $9a+1$ formunda daha büyük asal sayıları ve bazı diğer düşük değerli sayılar yardımıyla modüler analiz denemelerinde bulundum. Ancak hiçbiri çelişki sağlamaya yeterli olmadı.

Bilgisayar yardımıyla

$$x^2 + y^9 \equiv \{14, 23\} \pmod{37}$$

$(9 \cdot 4 + 1 = 37)$ denkliklerini sağlayan kalanlar olmadığını tespit ettim (daha büyük $9n + 1$ formu asallar için boşta kalan kalmıyor olabilir).

Yani bu tarz sorularda yüksek dereceli terim p olacak şekilde $kp + 1$ formunda yazılabilen asal sayıların denenmesi, $x^2 + y^p$ formu ifadelerin alabileceği kalanları kısıtlamada faydalı oluyor.

($kp + 1$ genel formunu deneme sebebim de Fermat Teoremi'ni sağladığı için yüksek dereceli terimin alabileceği kalanlar ciddi ölçüde sınırlanıyor.)

Not 2: Yukarıdaki varsayımımdan yola çıkarak $x^2 + y^5$ i test ettim ve

$$x^2 + y^5 \equiv 7 \pmod{11}$$

$(2 \cdot 5 + 1)$ i sağlayan (x, y) olmadığını tespit ettim.

$$x^2 + y^{11} \equiv \{20, 21\} \pmod{23}$$

boşta kalıyor. $(2 \cdot 11 + 1 = 23)$

$$x^2 + y^4 \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{ve} \quad x^2 + y^4 \equiv 10 \pmod{13}$$

$p = 6$ ve $p = 8$ için benzer taramaları yürüttüğümde $7, 11, 17, 23$ ve $5, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ modlarında boşta kalan bırakıyorlar.

Yani belli başlı istisnai durumlar hariç $kp+1$ formu modüler analizde boşta kalan bulmada yardımcı oluyor.

128. **Soru.** a, b, c pozitif tam sayıları, a, b aralarında asal ve c de a veya b ile aralarında asaldır. Buna göre

$$x^a + y^b = z^c$$

eşitliğinin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösteriniz. (İzlanda Matematik Olimpiyatı 1997)

Not: Bu soruyu İzlanda Matematik Olimpiyatı 1997 adı altında nerede gördüğümü bilmiyorum.

x, y, z pozitif tam sayılar şartı yazılmamış ancak x, y, z pozitif tam sayıları için sonsuz çözüm olduğunu göstereyim.

$x = 2^u, \quad y = 2^v, \quad z = 2^w$

olmasını sağlayan u, v, w pozitif tam sayılarını seçelim. O halde denklemimiz

$$2^{ua} + 2^{vb} = 2^{wc}$$

olur. $(uv, w) = 1$ şartını da ekleyelim.

Bu ifadenin sağlanabilir olması için

$$ua = vb$$

seçelim ki toplandığı zaman 2 modunda 1 kalanları terim oluşmasın.

Bu seçim ile birlikte

$$2^{vb+1} = 2^{wc}$$

buradan

$$vb + 1 = wc$$

elde ederiz.

O halde $(a, b) = 1$ ve $(c, a) = 1$ veya $(c, b) = 1$ sağlanacak şekilde bu denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğunu gösterirsek ispat biter.

$ua = vb$ ise

$$u = bk, \quad v = ak$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$\frac{abk + 1}{w} = c$$

elde ettik. Burada $w = 1$ alıp işimizi oldukça kolaylaştırabiliriz. Bu bize hem $(uv, w) = 1$ in daima korunmasını sağlar hem de c'nin tam sayı olmasını garantiler. Aynı zamanda $c = abk + 1$ olacağından dolayı (c, a) veya $(c, b) = 1$ olma şartını da otomatik olarak garantilemiş oluruz.

Şimdi seçtiğimiz parametrizasyonu yazalım:

$$(x, y, z, a, b, c) = \left(2^{mk}, 2^{nk}, 2, n, m, mnk + 1\right), \quad (m, n) = 1, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}^+$$

parametrizasyonunu elde ederiz. Bu da bize sonsuz çözüm olduğunu gösterir.

129. **Soru.** x rastgele bir rasyonel sayı olsun. Buna göre

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3} = x$$

eşitliğini sağlayan (a, b, c, d) tamsayı çözümünün daima var olduğunu gösteriniz. (İzlanda Matematik Olimpiyatı 1999)

Çözüm. x rasyonel sayı olduğu için

$$x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad q \neq 0$$

şartları sağlanacak şekilde $p, q \in \mathbb{Z}$ daima bulunur.

O halde denklemimiz

$$\frac{p \cdot (Ap^2 + Bpq + Cq^2)}{q \cdot (Ap^2 + Bpq + Cq^2)} = \frac{p}{q}$$

, $A, B, C \in \mathbb{Z}$ formunda bir eşitliğin sol tarafını elde etmeye çalışmalıyız.

İfadeleri dikkatli şekilde yazarsak

$$a^3 + b^3 = Ap^3 + Bp^2q + Cpq^2$$

$$c^3 + d^3 = Ap^2q + Bpq^2 + Cq^3$$

buradan yola çıkarak $(mp+nq)^3$ formunda terimlerin açılarak q^3 formu terimin üsttekinde ve p^3 formunda terimin alttaki denklemde sadeleşmesi gerektiğini görüyoruz.

$a = p + q$, $b = 2p - q$, $c = p + q$, $d = 2q - p$ seçimlerini yaparsak

$$(p+q)^3 + (2p-q)^3 = 9p(p^2 - pq + q^2)$$

ve

$$(p+q)^3 + (2q-p)^3 = 9q(p^2 - pq + q^2)$$

olur ve buradan da seçilen x'in rasyonel olma koşullarını sağlayan her p, q tam sayıları için a, b, c, d bulmamızı sağlar.

Burada dikkat edilmesi gereken bir durum ise

$$(p+q)^3 + (2q-p)^3 = 0$$

olması olasılığıdır.

Bunu da

$$(p+q)^3 = (p-2q)^3$$

$$p + q = p - 2q$$

yani $q = 0$ oluştuğundan tanım gereği eliyoruz.

O halde her x rasyonel sayısı için a, b, c, d tam sayılarının varlığını göstermiş oluruz.

İspat biter.

130. **Soru.** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8 \cdot (x^2 + xy + y^2 + 1)$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz. (Arthur Engel)

Çözüm. Denklemin homojen olduğu görülebilir. $x + y = a$, $xy = b$ tamsayı dönüşümlerini yapalım.

$$x^3 + y^3 = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = a(a^2 - 3b) = a^3 - 3ab$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$$

olur.

Orijinal denklemimiz

$$a^3 - 3ab + ab = 8(a^2 - 2b + b + 1) = 8a^2 - 8b + 8$$

şeklindedir.

Buradan

$$a^3 - 8a^2 - 8 = 2ab - 8b$$

$$b = \frac{a^3 - 8a^2 - 8}{2a - 8} = \frac{1}{2}a^2 - 2a - 8 - \frac{72}{2a - 8}$$

olur.

$$(x+y)^2 - 4xy = a^2 - 4b = a^2 - \left(2a^2 - 8a - 32 - \frac{144}{a-4}\right) = -a^2 + 8a + 32 + \frac{144}{a-4} = (x-y)^2$$

(tam kare olma şartı) özdeşliğini kullanarak a ve b değerlerinin alabileceği değerleri iyice kısıtlayabiliriz.

Öncelikle $a - 4 \mid 36$ ise

$$a \in \{-32, -14, -8, -5, -2, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 22, 40\}$$

Buradan $-32, 14, 13, 16, 22, 40$ değerlerini a^2'nin çok büyük olması nedeniyle tam kare negatif olamayacağı için eleriz.

Ufak bir göz atmayla $a = -5$ ve $a = -8$'in de negatif yaptığı görülebilir.

Geriye kalan sayılar ise el ile denediğimizde sadece $a = 10$'un geçerli olduğu ve $(x-y)^2 = 36$ olduğu görülür.

Buradan

$$x - y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 8, \quad y = 2$$

veya

$$x - y = -6 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 8$$

olarak bulunur.

131. **Soru.**

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$$

eşitliğini sağlayan m ve n negatif olmayan tam sayılarını bulunuz. (Arthur Engel)

Çözüm. Bu soru için bu tarz denklemin çözümü için oldukça kullanışlı olan bir lemma ispatlayalım.

a, b, m, n tam sayılar olmak üzere

$$(a + b\sqrt{2})^m = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ çift}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} (b\sqrt{2})^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ tek}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} (b\sqrt{2})^k,$$

$$(a - b\sqrt{2})^m = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ çift}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} (b\sqrt{2})^k - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ tek}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} (b\sqrt{2})^k.$$

Burada

$$(a + b\sqrt{2})^m = A + B\sqrt{2}, \quad (a - b\sqrt{2})^m = A - B\sqrt{2},$$

olup,

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ çift}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k 2^{\frac{k}{2}}, \quad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ tek}}}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k 2^{\frac{k-1}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{Z}.$$

Benzer şekilde $x, y, X, Y \in \mathbb{Z}$ için

$$(x+y\sqrt{2})^n = X + Y\sqrt{2}, \quad (x-y\sqrt{2})^n = X - Y\sqrt{2}$$

şeklinde olduğunu görürüz.

Bizim için burada önemli olan şey ise

$$(a+b\sqrt{2})^m = (x+y\sqrt{2})^n$$

ise $A = X$ ve $B = Y$ şartlarının zorunlu olmasıdır. Dolayısıyla

$$(a-b\sqrt{2})^m = (x-y\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} = X - Y\sqrt{2}$$

mantığından aynı üslerdeki ifadelerin eşlenikleri için de denklemin sağlanması gerekir.

Sorumuzda bunu uygularsak

$$7^m = (-41)^n$$

olur. Ki bu da kısa bir modüler aritmetik analiziyle sadece bariz durumlar, yani $m = 0$ ve $n = 0$ için sağlandığı görülebilir.

Sonuç olarak,

$$(m,n) = (0,0)$$

olması dışında çözümler yoktur.

132. **Soru.**

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

eşitliğini tam sayılarda çözünüz. (Arthur Engel)

Çözüm. Öncelikle denklemi şöyle yazalım:

$$4y^2 + 4y + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1,$$

yani

$$(2y+1)^2 = (2x^2+x)^2 + 3x^2 + 4x + 1.$$

Ayrıca,

$$(2x^2+x+1)^2 = 4x^4 + x^2 + 1 + 2(2x^2 + 2x^3 + x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1.$$

Böylece belirli bir x aralığı hariç

$$(2x^2+x)^2 < (2y+1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2+x+1)^2$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu da iki ardışık tam kare arasında tam kare olması demek olduğu için çelişir.

Şimdi bu eşitsizlik sınırlarının geçersiz olduğu aralıkları bulalım.

Alt sınır sıkıştırmasından

$$3x^2 + 4x + 1 = (3x + 1)(x + 1) > 0$$

olur. Burada istenmeyen aralık $x \in [-1, -\frac{1}{3}]$ için oluşur. $x = -1$'i manuel olarak denemeliyiz.
Üst sınır sıkıştırmasından

$$x^2 - 2x > 0$$

şartı gelir, bu da $x \in [0, 2]$ için geçersizdir.

Şimdi tek tek x değerlerini deneyelim:

- $x = -1$ ise denklem
$$y^2 + y = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$
yani $y^2 + y = 0$, buradan $y = 0$ veya $y = -1$ çözümleri gelir.
- $x = 0$ ise denklem yine
$$y^2 + y = 0,$$
yani $y = 0$ veya $y = -1$ çözümleri vardır.
- $x = 1$ ise denklem
$$y^2 + y - 4 = 0,$$
yani diskriminant tam kare olmadığı için çözüm yoktur.
- $x = 2$ ise denklem
$$y^2 + y - 30 = 0 = (y + 6)(y - 5),$$
yani $y = -6$ ve $y = 5$ çözümleri gelir.

O halde çözüm kümemiz

$$\{(-1, 0), (-1, -1), (0, 0), (0, -1), (2, -6), (2, 5)\}$$

olur.

133. **Soru.** $n \leq 5$ koşulunu sağlayan x, n pozitif tam sayıları için
$$\frac{x^n - 1}{x - 1}$$
ifadesinin tam kare olması durumunda (x, n) tam sayılarını belirleyiniz. (Nagel-Ljunggren, 1940'lar, Thue denklemlerinin yardımıyla tüm n ler için tam kare olan durumlar bulunmuş ancak elementer yöntem değil.)

Çözüm.

- $n = 1$ için $x = 1$ hariç ifade daima tam kare olur.
- $n = 2$ için Her $a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ için
$$x = a^2 - 1$$
olur.
- $n = 3$ için
$$1 + x + x^2 = y^2$$
şeklinde y tamsayısı bulunmalıdır. Ancak
$$x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$$
eşitsizliği pozitif tamsayılarda daima geçerlidir. Çözüm yoktur.

- $n=4$ için
$$1+x+x^2+x^3=y^2$$
şeklinde y tamsayısı bulunmalıdır. Sağ tarafı faktörleyelim:
$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1).$$
Burada $(x+1,x^2+1)=(x+1,2x)$ ve $(x+1,2)\in\{1,2\}$ olur.

a) $(x+1,x^2+1)=1$ olsun. O halde $x+1=a^2$ ve $x^2+1=b^2$ olacak şekilde a,b tam sayıları vardır. Ancak
$$x^2<x^2+1<x^2+2x+1$$
eşitsizliği arasında sıkıştırıldığından çözüm yoktur.

b) O halde $(x+1,x^2+1)=2$ olmalıdır. Bu da x'in tek sayı olma şartını zorunlu kılar,
$$x=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}^+,$$
($x=1$ paydada $x-1$ terimi olduğu için hariç tutulur).
O halde ifade
$$(2k+2)(4k^2+4k+1+1)=y^2,$$
yani
$$(k+1)(2k^2+2k+1)=l^2$$
şeklinde $l\in\mathbb{Z}$ tam sayısı vardır.

$k+1=u^2$, $u\in\mathbb{Z}^+$ olsun. O halde
$$2(u^2-1)^2+2(u^2-1)+1=2u^4-4u^2+2+2u^2-2+1=2u^4-2u^2+1=p^2,$$
$p\in\mathbb{Z}$ tam sayısıdır.

İlginç bir şekilde bu soru, 78) numaralı soruda çözümünü verdiğim diyafont denkleme dönüşmüş olur. Bu denklemin negatif olmayan tam sayılarda $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,5)$ harici çözümü yoktur. $u=0$ için $k=-1$ olur, bu istenmez. $u=1$ için $k=0$, yani $x=1$ olur ancak orijinal denklemin paydasında $x-1$ terimi olduğu için elenir. $u=2$ için $k=3$, yani $x=7$ olur. Gerçekten de
$$7^3+7^2+7+1=400=20^2$$
olarak sağlanır. $(7,4)$ çözümü gelir.

- $n=5$ için
$$1+x+x^2+x^3+x^4=y^2$$
şeklinde y tamsayısı bulunmalıdır.
132) numaralı soruda kurduğumuz sınıra benzer şekilde
$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=4y^2$$
ifadesini
$$(2x^2+x)^2=4x^4+4x^3+x^2<4x^4+4x^3+4x^2+4x+4<(2x^2+x+1)^2=4x^4+x^2+1+2(2x^3+2x^2+x)$$
$$=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$$

olarak sıkıştırabiliriz.

Sınır değerlerin daima sağlanmasını engelleyen x aralığını bulmalıyız.

Alt sınır daima sağlanır.

Üst sınır için

$$x^2 - 2x - 3 > 0,$$

yani

$$(x-3)(x+1) > 0,$$

olduğu için $x \in [-1, 3]$ aralığında sağlanmaz.

O halde

$$x = 1 \implies 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5$$

sağlanmaz.

$$x = 2 \implies 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 31$$

sağlanmaz.

$$x = 3 \implies 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121 = 11^2$$

olur. $(3, 5)$ çözümü gelir.

Sonuç olarak denklemin genel çözümleri

$$\{(t, 1), (t^2 - 1, 2), (7, 4), (3, 5)\}, \quad t \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$$

şeklindedir.

134. **Soru.** Her $a_i \in \{-1, 1\}$ olmak üzere

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

ise $4 \mid n$ olduğunu gösteriniz. (İzlanda Matematik Olimpiyatı)

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$ toplamındaki n tane terimin her biri 1 veya -1'dir. Yani tüm terimler tek sayıdır.

Bu tek sayıların toplamının 0 yani bir çift sayı olabilmesi için çift adette bulunmaları gerekir. (Örneğin, 6 tane tek sayının toplamı çift sayıdır veya 22 tane tek sayının toplamı çift sayıdır ama 5 tane tek sayının toplamı çift sayı değildir, yine tektir. $6, 22 \rightarrow$ çift sayı.)

Dolayısıyla n çift sayıdır. $n = 2k$ diyelim.

Toplamda bulunan $2k$ tane terimin (1 ve -1 ler) toplamının 0 olabilmesi için k tanesinin 1, k tanesinin de -1 olması gerekir.

Diğer taraftan bu $2k$ tane terimin çarpımı

$$(1)^k(-1)^k = (a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_na_1) = a_1^2a_2^2\cdots a_n^2 = 1$$

dir.

Buradan da k çift sayıdır. $k = 2m$ yazarsak

$$n = 2k = 4m$$

elde edilir ve $4 \mid n$ bulunmuş olur.

135. **Soru.** x, y pozitif tamsayılar olmak üzere

$$x! + y! = x^y$$

eşitliğini sağlayan tüm (x, y) çiftlerini bulunuz. (Ukrayna Matematik Olimpiyatı Final Rounds 2001-2003 ?)

Çözüm.

Bertrand-Chebyshev Teoreminin düzenlenmiş bir formundan, $x, y \geq 3$ için $x/2 < p < x$, $y/2 < q < y$ olacak şekilde p, q asalları vardır.

Öncelikle $x > y$ olsun. Bu durumda $v_q(x!) \geq 1$ ve $v_q(y!) = 1$ sağlanır. Bundan dolayı $q \mid x^y$ elde ederiz. Bu da bize $q \mid x$ yani $q \mid x!$ yani $q \mid y!$ verir. $y/2 < q < y$ kabulünden $q < y < 2q$ gelir. Çelişki oluşur.

Şimdi $x < y$ olsun. Bu durumda $v_p(x!) = 1$ ve $v_p(y!) \geq 1$ bulunur. Bu nedenle $p \mid x^y$ yani $p \mid x$ gelir. p asal olduğu ve $x/2 < p < x$ olduğundan, p ile bölünemez. Çelişki.

O halde $x = y$ tek olasılıktır.

Buradan

$$2x! = x^x$$

denklemini elde ederiz.

Bu durumda ise $p = q$ seçebiliriz. Yani $p \mid x!$ olduğundan $p \mid x^x$ barizdir. Ki bu da bize $p \mid x$ den çelişki verir.

Geriye kalan durumlarda $x = 2$, $y = 2$, $x = 1$, $y = 1$ olasılıkları kalır.

a) $x = 2$ olsun. Denklem

$$2 + y! = 2^y$$

gelir. $y \geq 4$ için sol taraf

$$2 + y! \equiv 2 \pmod 4$$

iken sağ taraf

$$2^y \equiv 0 \pmod 4$$

olduğundan çelişki olur. $y = 3$ ve $y = 2$ denklemi sağlar.

b) $y = 2$ olsun. Denklem

$$x! + 2 = x^2$$

gelir. $x \geq 4$ için sol taraf

$$x! + 2 \equiv 2 \pmod 4$$

olur. Bu bir kare kalan değildir. $x = 2$ denklemi sağlar.

c) $x = 1$ olsun. Denklem

$$1 + y! = 1$$

yani $y! = 0$ olur. Çelişki.

d) $y = 1$ olsun. Denklem

$$x! + 1 = x$$

olur. Çözümü olmadığı $x! > x$ olduğu için barizdir.

Sonuç: Denklemin çözüm kümesi

$$\{(2,2),(2,3)\}$$

olur.

Not: Bu teoremdeki $x/2 < p < x$ ifadesi şu şekilde hızlıca gösterilebilir:

Kanıt: Bertrand postülatından, $x < p < 2x$, $x \geq 2$ için p asalı olduğunu biliyoruz. $x = 2k$ formunda k varsa, $k < p' < 2k$, $k \geq 2$ için p' asalı olduğunu görürüz. (x çiftse minimum 4 olur.)

$x = 2k+1$ formunda ise $k \geq 24$ için $k+1 < p < \frac{6(k+1)}{5}$ olacak şekilde bir p asalı vardır (Nagura Teoremi). $x/2 = k + \frac{1}{2} < k+1$ olduğu için ve $\frac{6(k+1)}{5} < 2k+1 = x$ eşitsizliği her $k \geq 1$ için doğrudur. Dolayısıyla $k \geq 24$ durumu elenir. Küçük k değerlerini manuel test ettiğimizde x tek iken $x \geq 3$ için daima p asalı vardır.

O halde genel olarak her $x \geq 3$ için $x/2 < p < x$ şeklinde p asalı vardır.

136. **Soru.** m, n tam sayıları için

$$|12^m - 5^n|$$

şeklinde yazılabilen en küçük pozitif tam sayıyı belirleyiniz.

Çözüm. (MatematikOlimpiyatı) m ve n'ye göre yedi durumda inceleyelim:

i) $m, n < 0$ olsun. $m = -a$, $n = -b$ diyelim $(a, b > 0)$. Bu durumda

$$|12^m - 5^n| = \left|12^{-a} - 5^{-b}\right| = \left|\frac{1}{12^a} - \frac{1}{5^b}\right| = \left|\frac{5^b - 12^a}{12^a \cdot 5^b}\right|$$

olur. Bu ifade tam sayı olamaz çünkü pay tek, payda çift sayı olur. Buradan çözüm gelmez.

ii) $m > 0, n < 0$ (veya $m < 0, n > 0$) olsun. Bu durumda 12^m ve 5^n ifadelerinden biri tam sayı olurken diğeri tam sayı olmaz ve farkları tam sayı olamaz. Dolayısıyla bu durumdan da çözüm gelmez.

iii) $m, n > 0$ olsun. 12^m çift, 5^n tek olduğu için ifade tek sayı olmalıdır. Alt durumlara bakalım:

- a) $12^m - 5^n = 1 \implies 12^m - 5^n \equiv 1 \pmod 4 \implies -1 \equiv 1 \pmod 4$ Çelişki.
- b) $12^m - 5^n = -1 \implies 12^m - 5^n \equiv -1 \pmod{11} \implies 5^n \equiv 2 \pmod{11}$ Çelişki çünkü $5^x \equiv \{1,3,4,5,9\} \pmod{11}$.
- c) $12^m - 5^n = \pm 3 \implies 12^m - 5^n \equiv \pm 3 \pmod 3 \implies 5^n \equiv 0 \pmod 3$ Çelişki.
- d) $12^m - 5^n = \pm 5 \implies 12^m - 5^n \equiv \pm 5 \pmod 5 \implies 2^m \equiv 0 \pmod 5$ Çelişki.
- e) $12^m - 5^n = 7$ Bu durumu $m = n = 1$ için sağlayabiliriz.

iv) $m = n = 0$ için

$$|12^m - 5^n| = |1 - 1| = 0$$

olur.

v) $m = 0, n > 0$ olsun.

$$|12^m - 5^n| = |1 - 5^n| = 5^n - 1,$$

ifade artan olduğundan en küçük değer

$$5^1 - 1 = 4$$

olur.

vi) $n = 0, m > 0$ olsun.

$$|12^m - 5^n| = |12^m - 1| = 12^m - 1,$$

ifade artan olduğundan en küçük değer

$$12^1 - 1 = 11$$

olur.

vii) $m = 0, n < 0$ veya $n = 0, m < 0$ durumlarında 12^m ve 5^n ifadelerinden biri 1 olurken diğeri tam sayı olmaz, dolayısıyla fark tam sayı olamaz. Bu durumdan çözüm gelmez.

Sonuç olarak, m, n tam sayıları için

$$|12^m - 5^n|$$

ifadesinin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri

$$4$$

olur.

137. **Soru.** p asal sayısı için

$$(p-1)! + 1 = p^k$$

şeklinde p'nin bir tam kuvveti olacak şekilde p sayılarını bulunuz.

Çözüm. Asal p için

$$(p-1)! + 1 = p^k$$

denkleminde $p > 5$ için çelişki ispatlayacağız. $p = 2$, 3, 5 durumları kalır.
İlk olarak

$$(p-1)! + 1 = p^k$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$(p-1)! = p^k - 1 = (p-1)\big(p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1\big)$$

eşitliğini elde ederiz ve her iki tarafı $p-1$'e bölerek

$$(p-2)! = \sum_{i=0}^{k-1} p^i$$

elde edilir.

Eğer $p > 5$ ise $p-1 \geq 6$ olduğundan $(p-1) \mid (p-2)!$, yani

$$(p-2)! \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Öte yandan

$$\sum_{i=0}^{k-1} p^i \equiv \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k \pmod{p-1},$$

çünkü $p \equiv 1 \pmod{p-1}$. Dolayısıyla

$$k \equiv 0 \pmod{p-1}, \quad \text{yani} \quad k = t(p-1), \quad (t \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

Buna göre

$$(p-1)! + 1 = p^k = p^{t(p-1)}.$$

Ancak

$$(p-1)! + 1 < p^{p-1},$$

dolayısıyla $t \geq 1$ iken

$$p^{t(p-1)} \geq p^{p-1}$$

olur ki bu da $k < p-1$ iken k'nın $p-1$'in katı olması çelişkisini verir.

Sonuç olarak $p > 5$ için hiçbir çözüm yoktur. Kalan tek çözümler:

$$\begin{aligned} p = 2: &\quad (2-1)! + 1 = 2 = 2^1, \\ p = 3: &\quad (3-1)! + 1 = 3 = 3^1, \\ p = 5: &\quad (5-1)! + 1 = 25 = 5^2. \end{aligned}$$

Not: Bu sorunun p asalı yerine genel n sayıları için de ispatı yapılabiliyor gibi duruyor. n bileşke olursa çelişki elde edilebilir. Bu da bize genel olarak sadece $n = 2, 3, 5$ sağlama şartını doğurur gibi görünüyor.

Not: Bu sorunun daha genel bir versiyonu ve farklı bir çözümü bu linkte verilmiş:

https://geomania.org/forum/index.php?topic=2542.0

138. **Soru.** $1 \leq x, y, z \leq 100$ olacak şekilde pozitif tam sayılar için

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4xyz$$

denkleminin kaç çözümü vardır?

Cevap: 19

Çözüm. makalede ($X^2 + 2y^2 + z^2 = xyz$ denklemi çözümleri başlığı altında paylaşmıştım forumda) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4xyz$ denkleminin Vieta jumpingle indirgenen kök çözümün sadece $(1, 1, 1)$ olduğu ispatlanmıştır. Ancak biz bunu kullanmadan çözmeye çalışacağız.

Denklemi

$$x^2 - 4yz \cdot x + (2y^2 + z^2) = 0$$

şeklinde x değişkenine göre yazarsak, diskriminant

$$\Delta_x = 16y^2z^2 - 4(2y^2 + z^2) = k^2$$

şeklinde bir tam kare olmalıdır. Burada k tamsayısıdır. Ayrıca k çift olduğundan $k = 2w$ dönüşümünü yapabiliriz.

Böylece

$$(4y^2 - 1)z^2 = 2y^2 + w^2$$

eşitliği elde edilir.

Burada asal $p \mid (4y^2 - 1)$ olacak şekilde asal seçelim. $p = 2$ sağlamadığı açıktır. Denklemi p modunda inceleyelim:

$$2y^2 + w^2 \equiv 0 \pmod p$$

eşdeğeriyle

$$1 + 2w^2 \equiv 0 \pmod p$$

elde edilir. Buradan

$$w^2 \equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$$

durumu görülür. Legendre sembolü ile

$$\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)$$

ifadesi yazılır. Böylece

$$p \equiv 1, 3 \pmod 8$$

olması gerektiği sonucu çıkar. y çift olursa

$$4y^2 - 1 \equiv 7 \pmod 8$$

olur. Ancak $1, 3 \pmod 8$ tipindeki asallar ancak $3^2 \equiv 1 \pmod 8$ olduğu için ancak $1, 3 \pmod 8$ kalanlarını üretir. O halde y çift iken en az bir tane $5, 7 \pmod 8$ formundaki asal çarpan bulunmalıdır ve bu çelişki doğurur. Dolayısıyla y tek olmalıdır. y tek olması x ve z'nin de tek sayı olmasını gerektirir.

$p \equiv 5, 7 \pmod 8$ formu asal içeren y değerlerini ilk 100 sayıda elediğimizde;

$$y \in \{1, 5, 9, 21, 29, 41, 49, 61, 65, 69, 89\}$$

olur.

Bunlardan sadece

$$y = 1, 5, 29, 65$$

için çözüm mümkündür. Diğerleri elenir. ((1, 1, 1) den türeyen 19 çözümü yazdığımızda görülmektedir.)

Şimdi $9, 21, 41, 49, 61, 69, 89$ durumları için keşiflerde bulunalım.

Discriminant $_x = 4w^2$ olacak şekilde $w \geq 0$ tamsayısı bulunmalıdır. Buradan

$$w^2 - (4y^2 - 1)z^2 = -2y^2$$

elde edilir. $= 4w^2$ olduğunda

$$x = 2yz \pm w$$

şeklinde x değerleri bulunur.

$x = 2yz + w$ durumu oldukça sınırlı y için çözüm bırakacağından bunu şimdilik eleyelim. $x = 2yz - w$ durumunu inceleyelim.

Buradan

$$w^2 \equiv (x+z)^2 \pmod{2y+1}, \quad w^2 \equiv (x-z)^2 \pmod{2y-1}$$

denklikleri elde edilir.

Ayrıca

$$w^2 \equiv -2y^2 \equiv y \pmod{2y+1}$$

ve

$$w^2 \equiv y-1 \pmod{2y-1}$$

bulunur. Bu da

$$(x+z)^2 \equiv y \pmod{2y+1}, \quad (x-z)^2 \equiv y-1 \pmod{2y-1}$$

denklem çiftlerini verir.

Bu denklikler ve

$$2 \leq x+z \leq 200, \quad |x-z| < 100$$

şartları sayesinde tüm olası toplam ve fark değerleri bulunabilir.

Ancak $2y-1$ ve $2y+1$ asal değilse denklemin 2'den fazla çözümü olacağından hesaplama zorlaşır.

$x+z=c$ ise, orijinal denklemde $x=c-z$ yazılırsa

$$2(2y+1)z^2 - 2c(2y+1)z + (c^2+2y^2) = 0$$

elde edilir.

Buradan

$$d = \frac{c^2+2y^2}{2(2y+1)}$$

tanımlanırsa, denklem

$$z^2 - cz + d = 0$$

şeklindedir.

Çözdüğümüz denklik zaten d'nin tam sayı olmasını garanti eder. $d = z_1 \cdot z_2$ olduğu ve kökler tam sayı olduğu için z_1+z_2 pozitif tam sayılarda maksimum $z_1=1, z_2=d$ için olur. Bu da

$$c \leq d+1$$

olması gerektiğini gösterir.

Eşitsizliği açarsak:

$$c \leq \frac{c^2+2y^2}{2(2y+1)} + 1$$

$$2c(2y+1) \leq c^2 + 2y^2 + 2(2y+1)$$

$$|c-(2y+1)| \geq \sqrt{2y^2-1}$$

bulunur.

Bu eşitsizliği sadece $2y+1$ bileşke olduğunda tüm denklemleri tek tek yazmamak için kaba bir sınır olarak kullanabiliriz.

Not: Daha sıkı bir sınır için köklerden birinin 1 olduğu durumu manuel test edip

$$c \leq 2 + \frac{d}{2}$$

eşitsizliği de seçilebilirdi.

y değerlerine göre manuel incelemeler:

(a) $y=89$ $x=178z+w$ durumunda $x>100$ olacağından incelenmez. $x=178z-w$ olur. Bu durumda

$$(x+z)^2 \equiv 89 \pmod{179}$$

olur. $x+z \equiv 39$ veya $140 \pmod{179}$ olur. 200'ü geçmeyen çift değer sadece 140'tır. Ancak yukarıdaki eşitsizlik $c<100$ verdiği için 140 elenir.

(b) $y=69$ $x=138z+w$ durumunda istenen x mümkün değildir. $x=138z-w$ olmalıdır.

$$(x+z)^2 \equiv 69 \pmod{139}$$

olur.

$$c \equiv 25 \quad \text{veya} \quad 114 \pmod{139}$$

bulunur. 139 asal olduğundan sadece iki çözüm vardır. Eşitsizlik ise $c \leq 41$ verir. $c=25$ tek olduğundan elenir.

(c) $y=61$ $x=122z+w$ durumunda x mümkün değildir, $x=122z-w$ olmalıdır.

$$(x+z)^2 \equiv 61 \pmod{123}$$

olur. $123=3\cdot 41$ olduğundan iki çözümdür. Eşitsizlikler $c \leq 36$ ve $c \geq 210$ verir. $c=26$ bulunur ancak parabolik denklem diskriminantı tam kare olmadığından çözüm yoktur.

(d) $y=49$ $x=98z+w$ durumunda $z=1$ olasılığı vardır, ancak bu çözüm sağlamaz. $x=98z-w$ olmalıdır.

$$c^2 \equiv 49 \pmod{99}$$

olur. Eşitsizlik $|c-99| \geq 70$ verir. $c \leq 29$ veya $c \geq 169$ olur. 1 ile 29 aralığında sadece $c \equiv 7, 29 \pmod{99}$ çözümleri sağlanır. c çift olması gerektiğinden uygun c yoktur.

(e) $y=41$ $x=82z+w$ durumunda $z=1$ olasılığı vardır fakat çözüm yoktur. $x=82z-w$ olmalıdır.

$$c^2 \equiv 41 \pmod{83}$$

olur. Çözümler $c \equiv 37$ veya $46 \pmod{83}$ olur. 2 ile 200 aralığında çift c değerleri $46, 120$ olur. Parabolik denklemlerin diskriminantları tam kare değildir.

(f) $y=21$ $x=42z+w$ durumunda $z=1,2$ olasılıkları vardır, ancak çözüm sağlamazlar. $x=42z-w$ olmalıdır.

$$c^2 \equiv 21 \pmod{43}$$

olur.

$$c \equiv 8 \quad \text{ve} \quad 35 \pmod{43}$$

bulunur. 2 ile 200 aralığında çift c değerleri $\{8, 78, 94, 164, 180\}$ olur. Ayrıca

$$(x-z)^2 \equiv 20 \pmod{41}$$

dur.

$$x-z \equiv 15 \quad \text{ve} \quad 26 \pmod{41}$$

bulunur. $|x-z| < 100$ şartından olası değerler $\{-56, -26, 26, 56\}$ olur. Tek sayı olan x, z değerlerine göre $(x+z, x-z)$ çiftleri

$$(78, -56), (78, 56), (94, 56), (94, -56), (164, -26), (164, 26)$$

olur. Bunlar $(11, 67), (19, 75), (69, 95)$ olarak bulunur. Ancak orijinal denklem sağlamaz.

(g) $y=9$ $x=18z+w$ durumunda $z=1,2,3,4,5$ olasılıkları vardır, ancak çözüm yoktur. $x=18z-w$ olmalıdır.

$$c^2 \equiv 9 \pmod{19}, \quad (x-z)^2 \equiv 8 \pmod{17}$$

olur.

$$c \in \{16, 22, 54, 60, 92, 98, 130, 136, 168, 174\}$$

olur. $x-z \in \{12, 22, 46, 56, 80, 90\}$ olur. Buradaki ifadelerin toplamı $2 \pmod 4$ olmalıdır. Ayrıca

$$(c-5(2y+1))^2 \geq 25(4y^2-1)-2y^2$$

olur. $y = 9$ için

$$(c-95)^2 \geq 7913$$

yani

$$c \leq 6 \quad \text{veya} \quad c \geq 184$$

olmalıdır. Uygun c yoktur, $y = 9$ elenir.

Geriye Vieta tipi ağaçtan da bulunabilen

$$y \in \{1, 5, 29, 65\}$$

değerleri kalır.

(a) $y = 65$

$$c^2 \equiv 65 \pmod{131}$$

olur.

$$c \equiv 14, 117 \pmod{131}$$

bulunur. 2 ile 200 aralığında sadece $c = 14$ vardır. Denklemlerden

$$z^2 - 14z + 33 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-3)(z-11) = 0$$

$z = 3, 11$ olur ve

$$(3, 65, 11), (11, 65, 3)$$

çözümleri elde edilir.

(b) $y = 29$ $x = 58z + w$ durumunda $z = 1$ tek olasılıktır. Manuel test edilir. $x = 58z - w$ için

$$c^2 \equiv 29 \pmod{59}$$

olur.

$$c \equiv 18, 41 \pmod{59}$$

bulunur. 2 ile 200 aralığında çift c değerleri $18, 100, 136$ olur. Denklemler:

$$z^2 - 18z + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z-17) = 0$$

$$z^2 - 100z + 99 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z-99) = 0$$

$$z^2 - 136z + 171 = 0$$

Sonuncusu tam kare diskriminant sağlamaz, çözüm yoktur. Çözümler:

$$(1, 29, 17), (17, 29, 1), (1, 29, 99), (99, 29, 1)$$

(c) $y = 5$ $x = 10z + w$ ve $z \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ durumları vardır, manuel test gerektirir. $x = 10z - w$ için

$$c^2 \equiv 5 \pmod{11}$$

olur.

$$c \equiv 4, 7 \pmod{11}$$

bulunur. İlk 8 z manuel test edilmelidir. Kalan z için

$$c \leq 8 + \frac{d}{8}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Çözüldüğünde

$$c \leq 6 \quad \text{veya} \quad c \geq 168$$

bulunur. Aralıkta kalan c değerleri $4, 172, 180, 194$'tür. Bunlar için parabolik denklemler diskriminant tam kare değildir, çözüm yoktur.
$z = 1$ için:

$$x^2 - 20x + 51 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-17) = 0$$

Çözümler: $(3, 1)$, $(17, 1)$ ve simetrikleri.
$z = 3$ için:

$$x^2 - 60x + 59 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-59) = 0$$

Çözümler: $(1, 3)$, $(59, 3)$ ve simetrikleri.
$z = 5, 7, 9$ için diskriminant tam kare değildir, çözüm yoktur.
Çözümler:

$$(1, 5, 3), (3, 5, 1), (1, 5, 17), (17, 5, 1), (3, 5, 59), (59, 5, 3)$$

(d) $y = 1$ Bu durumda Pell denklemi

$$w^2 - 3z^2 = -2$$

elde edilir. Tek seed çözümü $(1, 1)$ olup genişletme formülü

$$(aw + bz, cw + dz)$$

ile

$$a^2 - 3c^2 = 1, \quad 2ab = 6cd, \quad b^2 - 3d^2 = -3$$

elde edilir.
a^2 ile çarpılırsa

$$3d^2(3c^2 - a^2) = -3a^2 = -3d^2$$

bulunur. Buradan

$$a = d, \quad b = 3c$$

gelir. Böylece

$$a^2 - 3c^2 = 1$$

denklemine ulaşılır. En küçük çözüm $(2, 1)$'dir.
En küçük (a, b, c, d) katsayıları

$$(2, 3, 1, 2)$$

olup,

$$(w, z) \quad \text{çözümse} \quad (2w + 3z, w + 2z)$$

de çözümdür.
Seedler:

$$(1, 1) \to (5, 3) \to (19, 11) \to (79, 41) \to (256, 153)$$

z değerleri:

$$1, 3, 11, 41$$

$z = 1$ için:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0$$

Çözümler: $(1, 1)$, $(3, 1)$.
$z = 3$ için:

$$x^2 - 12x + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-11) = 0$$

Çözümler: $(1,3)$, $(11,3)$.
$z = 11$ için:

$$x^2 - 44x + 123 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-41) = 0$$

Çözümler: $(3,11)$, $(41,11)$.
$z = 41$ için:

$$x^2 - 164x + 1683 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-11)(x-153) = 0$$

Çözüm: $(11,41)$ tek çözüm.
Çözümler:

$$(1,1,1),(3,1,1),(1,1,3),(11,1,3),(3,1,11),(41,1,11),(11,1,41)$$

Not: $y = 1$ durumu olasılıkları çok olduğu için Pell denklemi ile sınırlandırılmıştır; katsayılar küçük olduğu için mantıklıdır.

Toplam çözümler:

$$(1,1,1),(3,1,1),(1,1,3),(11,1,3),(3,1,11),(41,1,11),(11,1,41),$$

$$(1,5,3),(3,5,1),(1,5,17),(17,5,1),(3,5,59),(59,5,3),$$
$$(1,29,17),(17,29,1),(1,29,99),(99,29,1),$$
$$(3,65,11),(11,65,3)$$

toplam $7 + 6 + 4 + 2 = 19$ adettir.

139. **Soru.** Pozitif tam sayılar m, n için

$$m! = n! \cdot (n+1)!$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem şu şekilde yazılabilir:

$$m! = (n+1) \cdot (n!)^2.$$

Bertrand-Chebyshev Teoremi (postülatı) uyarınca $m \geq 4$ için aralık

$$\frac{m}{2} < p < m$$

şeklindedir ve bu aralıkta en az bir asal sayı p vardır. Bunu ispatlayalım.

Kanıt: Bertrand postülatına göre her $x \geq 2$ için aralık

$$x < p < 2x$$

şeklinde asal p vardır.

- $x = 2k$ formunda ise $k < p' < 2k$ olacak şekilde asal p' vardır (x çift ise 4 minimum).
- $x = 2k+1$ formunda ise Nagura Teoremi'nden $k \geq 24$ için

$$k + 1 < p < \frac{6(k+1)}{5}$$

olacak şekilde asal p bulunur.

Burada

$$\frac{x}{2} = k + \frac{1}{2} < k + 1$$

ve

$$\frac{6(k+1)}{5} < 2k + 1 = x$$

eşitsizliği her $k \geq 1$ için doğrudur. Dolayısıyla $k \geq 24$ durumu elenir.

Küçük k değerleri manuel test edilmiştir ve x tek ise $x \geq 3$ için böyle bir asal vardır.

Sonuç olarak her $x \geq 3$ için

$$\frac{x}{2} < p < x$$

şeklinde asal p vardır.

Bu eşitsizliği düzenlersek

$$p < m < 2p < p^2$$

elde edilir. Burada $p = 2$ ayrı incelenmelidir. $p = 2$ aralıkta olması için $m = 3$ olmalıdır. Bu küçük durumlar test edilerek dolaylı elenmiştir.

Legendre Teoremi'nden

$$v_p(m!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor$$

bilindiğinden, burada ilk terim 1 ve diğerleri 0 olduğundan

$$v_p(m!) = 1$$

bulunur.

Durum 1: $p \mid n!$ ise,

$$v_p\big((n!)^2\big) \geq 2$$

olur ki bu $v_p(m!) = 1$ ile çelişir.

Durum 2: $p \mid n+1$ ise, $pk = n+1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan

$$\frac{m}{2} < p = \frac{n+1}{k} < m$$

yani

$$n + 1 > \frac{km}{2}.$$

Eğer $k \geq 2$ ise

$$n + 1 > m,$$

yani

$$(n+1)! > m!,$$

bu da çelişki doğurur. Dolayısıyla $k = 1$ olmalıdır.

Böylece

$$p = n + 1,$$

ve

$$m! = p! \cdot (p-1)!$$

şeklindedir.

Şimdi

$$m = p + r, \quad 1 \leq r \leq p - 1$$

alalım. Denklemden

$$\prod_{k=1}^{r}(p+k) = (p-1)! \tag{1}$$

elde edilir.

Buradan:

(a) Aralık $(p, p+r]$ içinde asal sayı yoktur. Aksi takdirde, bu asal q soldaki çarpanı böler fakat $q > p-1$ olduğundan sağdaki $(p-1)!$'yi bölmez.

(b) Mod p altında

$$\prod_{k=1}^{r}(p+k) \equiv r! \pmod{p}.$$

Wilson Teoremi ile

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

olduğundan

$$r! \equiv -1 \pmod{p} \tag{2}$$

bulunur.

2-adik sayımlar için üst sınır lemması:

Her $a \geq 1$, $r \geq 1$ için

$$\nu_2\left(\prod_{k=1}^{r}(a+k)\right) = \sum_{j\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{a+r}{2^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{2^j} \right\rfloor\right) \leq \nu_2(r!) + \lfloor \log_2(a+r) \rfloor. \tag{3}$$

İspat: Legendre formülüne göre sol taraf yukarıdaki toplamdır. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu,

$$\left\lfloor \frac{a+r}{2^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{2^j} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{r}{2^j} \right\rfloor + 1$$

eşitsizliğine yol açar.

Toplamdaki 1 sayısı en fazla $\lfloor \log_2(a+r) \rfloor$ adettir ve böylece (3) elde edilir.

Sorumuzda $a = p$ alınırsa

$$\nu_2((p-1)!) \leq \nu_2(r!) + \lfloor \log_2(p+r) \rfloor. \tag{4}$$

De Polignac formülüne göre

$$\nu_2((p-1)!) = (p-1) - s_2(p-1),$$

burada $s_2(n)$ ikilik tabandaki basamak toplamıdır.

Lemma 2: Her $n \geq 1$ için

$$s_2(n) \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1.$$

İspat:

$$s_2(n) = \sum_{k=0}^{t} a_k,$$

burada $a_k \in \{0, 1\}$. Dolayısıyla

$$s_2(n) \leq t + 1,$$

burada t ikilik tabanda $2^t \leq n < 2^{t+1}$ koşulundan

$$t = \lfloor \log_2(n) \rfloor .$$

$n = p - 1$ için

$$\nu_2((p-1)!) \geq (p-2) - \lfloor \log_2(p-1) \rfloor ,$$

yani

$$p - 2 - \lfloor \log_2(p-1) \rfloor \leq \nu_2(r!) + \lfloor \log_2(p+r) \rfloor .$$

Ayrıca

$$\nu_2(r!) \leq r - 1, \quad \lfloor \log_2(p+r) \rfloor \leq \lfloor \log_2(2p) \rfloor \leq \lfloor \log_2(p) \rfloor + 1,$$

dolayısıyla

$$\nu_2(r!) + \lfloor \log_2(p+r) \rfloor \leq r + \lfloor \log_2(p) \rfloor .$$

Buna göre

$$p - r \leq 2 + \lfloor \log_2(p-1) \rfloor + \lfloor \log_2(p) \rfloor \leq 2 + 2 \lfloor \log_2(p) \rfloor .$$

Düzenlersek

$$p + r \geq 2p - 2 - 2 \lfloor \log_2(p) \rfloor .$$

Nagura Teoremi'ne göre (Chebyshev Teoremi'nin sıkılaştırılmış şekli) $a < q < \frac{6a}{5}$ olacak şekilde en az bir asal sayı q vardır, özellikle $a \geq 25$ için. Eğer böyle bir q $(p, p+r]$ aralığında varsa, q sol tarafta bulunur ancak sağ tarafta $(p-1)!$'de bulunmaz; bu da çelişki yaratır.

$p \geq 25$ için

$$p + r \geq 2p - 2 - 2 \lfloor \log_2(p) \rfloor \geq \frac{6p}{5}$$

olduğundan, $p \geq 25$ durumu elenir.

Geriye kalan durumlarda

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

Modüler testler ve detaylı analizle $p = 7$ ve $p = 2$ dışındaki durumlar da elenebilir.

Örnek çözümler:

$$(p, m, n) = (7, 10, 6), \quad (2, 2, 1).$$

Sonuç olarak denklemin çözüm kümesi

$$\{(2, 1), (10, 6)\}$$

şeklindedir.

Ek bilgi: Bertrand-Chebyshev ve Nagura teoremlerinden daha sıkı aralıklar için Rohrbach–Weis (1964), Schoenfeld (1976) ve Pierre Dusart (2010, 2016) tarafından daha gelişmiş sonuçlar mevcuttur.

Kaynak: Bu soru ilk olarak forumda Beyşehirli tarafından sorulmuştur: https://geomania.org/forum/index.php?

140. **Soru.** Hangi (a, b) pozitif tam sayı ikilileri için,

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab + a + b}$$

bir tam sayıdır? (2012 UMO yaz kampı sınavı)

Çözüm. Tüm terimler pozitif olduğu için

$$\frac{a^2+b^2+1}{ab+a+b}=k$$

olacak şekilde k pozitif tam sayısı olmalıdır. İçler dışlar çarpımı yapıp ifademizi düzenlersek (a gördüğümüz yere x yazalım).

$f:\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{Z}$ tanımlı $f(x)=x^2-k.(b+1)x+(b^2+1-kb)$ fonksiyonunu elde ederiz ve bu fonksiyonun bir kökü $x_1=a$ dır. Bu fonksiyonun diğer kökünü bulmak için Vieta Jumping yardımıyla $x_2=k.(b+1)-a$ olarak buluruz. Kökler çarpımı pozitif ve $x_1>0$ olduğu için $x_2>0$ da sağlanmalıdır.

$k\geq 3$ için

$$f(b)=(2-k)b^2-2kb+1=(2-k).(b^2+2b+1-1)-4b+1=(2-k).(b+1)^2+k-2-4b+1$$

$k-2=m$ dönüşümü yapalım ve m in pozitif tam sayı olduğunu not edelim. Bu durumda klasik $(b-1)^2\geq 0$ eşitsizliğinden $(b+1)^2\geq 4b$ elde edilir. Buradan

$$-m(b+1)^2\leq -4mb$$

gelir. Bunu $f(b)$ de uygularsak

$$f(b)=-m.(b+1)^2+m-4b+1\leq -4mb+m-4b+1=(m+1).(-4b+1)=-(m+1)(4b-1)$$

olur ve $m+1>0$ ve $4b-1>0$ olduğundan dolayı $f(b)<0$ elde edilir. Bu da bize fonksiyonun grafiği düşünülerek incelersek (her iki sonsuzda da fonksiyonun limiti + sonsuza gidiyor bu yüzden $f(b)<0$ noktasını seçtiğimizde bir kök b den küçük diğer kök ise b den büyük olmalıdır. $a\geq b$ kabulümüzden dolayı $0<a'<b$ ve $a>b>0$ elde edilir. (a',b) bir çözüm ise (b,a') de bir çözümdür. Bu da bize (a,b) den küçük bir (b,a') çözümü verir. Ayrıca, bu işlemi sonsuza kadar uygulayabileceğimiz için Fermat'ın infinite descent tekniğinden dolayı denklemin pozitif tam sayılarda çözümü bulunamaz.

$k=1$ ve $k=2$ durumları geriye kalır.

a) $k=1$ olsun. Bu durumda $a^2+b^2+1=ab+a+b$ gelir. Denklemi $a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0$ olarak yeniden yazalım. Denklemin diskriminantı alınırsa

$$b^2+2b+1-4.1.(b^2-b+1)=-3b^2+6b-3=-3.(b-1)^2$$

olur. Buradan $b=1$ in tek olasılık olduğu yani $(1,1)$ çözümünün geldiği görülebilir.

b) $k=2$ olsun. Bu durumda denklemimiz $a^2+b^2+1=2ab+2a+2b$ olur. Denklemi yeniden yazarsak

$$a^2+(-2b-2).a+b^2-2b+1=0$$

a ya göre diskriminantı alırsak

$$m^2=4b^2+8b+4-4.1.(b^2-2b+1)=16b$$

olacak şekilde m pozitif tam sayısı bulunduğunu görebiliriz. 16 tam kare olduğu için $b=t^2$ olacak şekilde bir t pozitif tam sayısı bulunmalıdır.

$$a_1=\frac{2t^2+2+4t}{2},\quad a_2=\frac{2t^2+2-4t}{2}$$

olur ve buradan denklemin çözümleri

$$\{((t+1)^2,t^2),((t-1)^2,t^2)\}$$

olur. Buradan yola çıkarak denklemin tüm çözümleri

$$\{(1,1),((t-1)^2,t^2),(t^2,(t-1)^2)\},\quad t\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$$

olarak bulunur.

Not: Soruda diskriminantı yazarken hatalı yazım yaptığımı fark ettim. $k=1$ kısmının çözümünü düzenledim.