Diyafont Denklemler ve Çözümleri

İbrahim Atakan Çiçek / Geomania.org

Sorular

Bu çalışmayı yapabilmemde yardımcı olan herkese öncelikle çok teşekkür ediyorum. Özellikle Diyafont Denklemler , Rasyonel ifadelerin tam sayı olması , tarzı konular ve bu konularla ilgili karşılaştığım tüm teoremleri ve ispatlarını, uygulamalarını içeren ve büyük çoğunluğu Lise Matematik Olimpiyatlarına yönelik olacak şekilde kitap hazırlamaya başladım. Bunu da 2026 yılı başına kadar tamamlama hayalim var. Umarım bu çalışma da Matematik Olimpiyatlarına hazırlananlar için faydalı olur. (İbrahim Atakan Çiçek)))

1. $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} = xyz + 27$ denklemini $x < y < z$ için pozitif tam sayılarda çözünüz.
2. $n^4 + 3n^2 + 1$ sayısının hiçbir n pozitif tam sayısı için tam kare olmadığını gösteriniz. **(UMO 2. Aşama 1992)**
3. $y^2 = x^3 + 7$ denklemini tam sayılarda çözünüz.
4. $k! + 48 = 48\,(k+1)^m$ olacak şekilde $k, m \geq 0$ tamsayılarının bulunmadığını gösteriniz. **(Kanada MO)**
5. $2^m - 3^n = 7$ olacak şekilde tüm (m, n) ikililerini bulunuz. **(Avusturya-Polonya MO 1993)**
6. $a^2 + b = b^{1999}$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(Estonya MO 1999)**
7. $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ denklemini sağlayan kaç $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{>0}$ vardır? **(Balkan Junior 2001)**
8. $5(xy + xz + yz) = 3xyz$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
9. $x^3 - y^3 = xy + 61$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(Sovyet MO 1981)**
10. $x^3 + 6xy + 40 = y^3$ denklemini sağlayan kaç $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vardır?
11. $n^3 + 7n - 133$ ifadesi pozitif bir tam sayının kübü ise n sayısına "iyi sayı" diyelim. Tüm iyi sayıları bulunuz. **(USC Math Contest)**
12. $n^2 - 19n + 99$ sayısı tam kare olacak şekildeki tüm n tam sayılarının toplamı kaçtır? **(AIME 1999)**
13. $n^4 + n^3 + 1$ tam kare olacak şekilde tüm n tam sayılarını bulunuz.
14. $5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(Asya–Pasifik MO 1989)**
15. $10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3$ denkleminin tam sayılarda kaç çözümü vardır? **(Municipial 1999)**
16. $(m-n)^2 = \dfrac{4mn}{m+n-1}$ denklemini sağlayan $0 < m + n < 100$ olacak şekilde kaç (m, n) tam sayı çifti vardır? **(Estonya MO 1999)**

17. Aşağıdaki denklem sistemini pozitif tam sayılar kümesinde çözünüz.

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3\,abc, \\ a^2 = 2\,(a+b+c) \end{cases}$$

(İsveç MO 1984)

18. $2n^3 - m^3 = mn^2 + 11$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(İsveç MO 1994)**

19. $x, y, \dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ sayıları tam sayı ise $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ sayısının tam küp olduğunu gösteriniz. **(Estonya MO 1995)**

20. m, n tam sayılar, p bir asal sayı olmak üzere

$$\frac{13^m + p \cdot 2^n}{13^m - p \cdot 2^n}$$

bir pozitif tam sayı olacak şekilde kaç (m, n, p) üçlüsü vardır? **(UMO 1. Aşama 2018)**

21. p bir asal sayı olmak üzere $p - x^4 = 4$ eşitliğini tam sayılarda çözünüz.

22. $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ olacak şekilde (x, y) ikililerini bulunuz. **(Romanya MO)**

23. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $1 < a < b < c$ olmak üzere

$$(a-1)\,(b-1)\,(c-1) \mid (abc-1)$$

koşulunu sağlayan (a, b, c) üçlülerini bulunuz. **(IMO 1992)**

24. $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$ eşitliğini sağlayan tüm $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ikililerini bulunuz. **(Avusturya MO)**

25. $p^3 - q^5 = (p+q)^2$ eşitliğini asal sayılar için çözünüz. **(Rusya MO)**

26. $x^2 - y! = 2001$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (AOPS)

27. $5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$ denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz. **(Bulgaristan MO)**

28. $x^3 - 5xy + y^3 = -4$ eşitliğini sağlayan tüm tam sayı değerlerini bulunuz.(Benzer bir sorudan türetilmiştir.)

29. $x^2 - y^2 = 2\,x\,y\,z$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

30. $\dfrac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p}$ ifadesinin bir tam sayının karesi olmasını sağlayan tüm m, n pozitif tam sayılarını ve p asal sayılarını bulunuz. (UMO Genç TST 2012)

31. $xy\,(x^2 + y^2) = 2z^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

32. $p^3 + p^2 + 11p + 2 = q$ denklemini asal sayılarda çözünüz. (2000 Ulusal Antalya M.O)

33. $x^3 - y^3 = 2y^2 + 1$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

34. $x^4 + 4^x = p$ denklemini p asal sayısı ve x tam sayısı için çözünüz.

35. $c^2 + 1 = (a^2 - 1)\,(b^2 - 1)$ denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

36. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

37. x, y pozitif tam sayılar ve 5'ten büyük asal çarpanı olmayan sayılar olmak üzere

$$x^2 - y^2 = 2^k, \quad k \geq 0$$

denklemini çözünüz.

38. $n^2 + 3^n$ sayısını tam kare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz.

39. a, b, m, n pozitif tam sayılar, $n > 1$ için $a^n + b^n = 2^m$ ise $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

40. $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

41. $p^m q^n = (p+q)^2 + 1$ olacak şekildeki tüm (m, n, p, q) pozitif tam sayıları bulunuz.

42. $ab \neq 1$, $a, b \geq 0$ olmak üzere
$$k = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab - 1}$$
ifadesiyle elde edilebilecek tüm $k \geq 0$ değerlerini bulunuz.

43.
$$x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$$
denkleminin pozitif tam sayılarda kaç çözümü vardır?

44. $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için
$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$$
denklemini sağlayacak tek bir (x_n, y_n) doğal sayı ikilisinin bulunduğunu gösteriniz.

45. $\varphi(n) = \varphi(2n)$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. (φ: Euler'in totient fonksiyonu)

46. $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

47. $a! + b^3 = 18 + c^3$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(UMO 1. Aşama 2013)**

48. $m^3 - n^3 = 9^k + 123$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır? **(UMO 1. Aşama 2014)**

49. p, $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ birer asal sayı olacak şekildeki p sayıları için
$$2x^3 - y^3 = p$$
denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

50. $t^2 + 1 = s\,(s+1)$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(UMO 2. Aşama 1994)**

51. $x^3 + 3367 = 2^n$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(UMO 2. Aşama 1998)**

52. $3^x + 11^y = z^2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(UMO 2. Aşama 2001)**

53. $5^m + 7^n = k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz. **(UMO 2. Aşama 2005)**

54. $k > 1$, $p = 6k + 1$ ve $m = 2^p - 1$ ise
$$\frac{2^{m-1} - 1}{127\,m}$$
ifadesinin bir tam sayı olduğunu gösteriniz. **(UMO 2. Aşama 2007)**

55. $2^n + n = m!$ denklemini (m, n) pozitif tam sayıları için çözünüz. **(UMO 2. Aşama 2013)**

56. $x^3 = 3^y \cdot 7^z + 8$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz. **(UMO 2. Aşama 2014)**

57. m, n pozitif tam sayılar,
$$k = \frac{(m+n)^2}{4m\,(m-n)^2 + 4}$$
tam sayı ise k'nın tam kare olduğunu gösteriniz. **(UMO 2. Aşama 2015)**

58. $a^2+b^2+c^2+d^2=a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç çözümü vardır? **(UMO TSÇ 1991)**

59. $a^2+b^2+3=abc$ olacak şekilde (a,b,c) çözümlerini bulunuz. **(UMO TSÇ 1994)**

60. n pozitif bir tam sayı olduğuna göre
$$x^2-xy+y^2=n$$
denklemini sağlayan (x,y) pozitif tam sayı ikililerinin sayısının 3 ile bölündüğünü ispatlayınız. **(UMO TSÇ 2000)**

61. $5^x=1+4y+y^4$ eşitliğini sağlayan (x,y) tam sayı ikililerini bulunuz. **(UMO TSÇ 2001)**

62. $m^6=n^{n+1}+n-1$ eşitliğini sağlayan (m,n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz. **(UMO TSÇ 2013)**

63. l,m,n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı için
$$p^{2l-1}\,m\,(mn+1)^2+m^2$$
tam kare ise m'nin de tam kare olduğunu ispatlayınız. **(UMO TSÇ 2015)**

64. Ondalık yazılımındaki rakamların çarpımı $x^2-10x-22$'ye eşit olan tüm x doğal sayılarını bulunuz. **(IMO 1968)**

65. $2^n+1=n^2m$ denklemini m,n tam sayıları için çözünüz. **(IMO 1990)**

66. $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının tam sayı olmasını sağlayan tüm (m,n) sıralı pozitif tam sayı ikililerinin sayısını bulunuz. **(IMO 1994)**

67. $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ bir pozitif tam sayı olduğunda kaç (a,b) vardır? **(IMO 2003)**

68. $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(IMO 2006)**

69. $5^k-3^n=p^2$ denklemini çözünüz. ($k,n\geq 0$, p asal)

70. $m^4+2n^3+1=mn^3+n$ eşitliğini sağlayan tüm (m,n) tam sayı ikililerini bulunuz.

71. $k!=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\ldots(2^n-2^{n-1})$ denklemini sağlayan $(k,n)\in\mathbb{Z}^2_{>0}$ ikililerini bulunuz. (IMO 2019)

72. $7n^2=m^3+15m$ denkleminin tam sayılarda kaç çözümü vardır? **(İSBO 2019 Ortaokul)**

73. $a>1$ ve $b>1$ tam sayıları için
$$a^{b^2}=b^a$$
denklemini çözünüz.

74. $2^x=3^y+5$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(IMO 1959–1966 LongList)**

75. $x^2+y^2=(x-y)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz. **(IMO 1971 LongList)**

76. $1+x+x^2+x^3+x^4=y^4$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(IMO 1972 LongList)**

77. $p^3+m(p+2)=m^2+p+1$ denklemini p asal sayıları ve $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ için çözünüz. **(AOPS)**

78. $2a^4-2a^2=b^2-1$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(AOPS)**

79. $ab+ac+bc=1$ eşitliğini sağlayan $a,b,c\in\mathbb{Z}$ sayıları için
$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=3^x-5^y$$
eşitliğini sağlayan kaç (a,b,c) üçlüsü vardır?

80. $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=n^2+4xy$ denkleminin tam sayılarda çözüm sayısını bulunuz.

81. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{n}$ eşitliğinin pozitif tam sayılardaki çözüm sayısını bulunuz.

82. $(xy-9)^2 = x^2+y^2$ denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz. (Hint Olimpiyatı'ndan uyarlama)

83. $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(Polonya MO)**

84. $x^4+4=p\,y^4$ denklemini tam sayılarda çözümlü yapan tüm p asal sayılarını bulunuz. **(Ion Cucurezeanu)**

85. $k_1+k_2+\cdots+k_n=5n-4$ ve $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}=1$ eşitliğini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(Putnam MO)**

86. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)=2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(İngiltere MO)**

87. Tüm n tam sayıları için
$$(x+y+z)^2=n\,x\,y\,z$$
denklemini sağlayan benzersiz pozitif tam sayı üçlüsünü gösteriniz.

88. $x^2+84x+2008=y^2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(AIME)**

89. $(100A+10B+C)(A+B+C)=2005$ denkleminde $A,B,C\in\{0,\ldots,9\}$ için A değerini bulunuz. **(AMC 12A 2005)**

90. $71p+1$ ifadesinin tam kare olması için p asal sayılarını bulunuz. **(Purple Comet MS 2011)**

91. p,q,r asal sayılar olmak üzere
$$pqr=7(p+q+r)$$
olduğuna göre $p+q+r$ değerini bulunuz.

92. $n-76$ ve $n+76$ aynı anda bir tam sayının kübü ise n tam sayısını bulunuz. **(Purple Comet HS 2004)**

93. $a,b>0$ için
$$\log_2\bigl(\log_{2^a}(\log_{2^b}2^{1000})\bigr)=0$$
eşitliğini sağlayan tüm (a,b) ikililerini bulunuz. **(AIME-1 2013)**

94. $4^y-615=x^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz. **(American Math League 2005–2006)**

95. $2(x^2+y^2)+x+y=5\,xy$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz. **(Awesome Math Test A)**

96. $x^3+y^3=z^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

97. $x_0,x_1,\ldots,x_{2011}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ için
$$m^{x_0}=\sum_{k=1}^{2011}m^{x_k}$$
olmasını sağlayan pozitif tam sayı m sayılarının sayısını bulunuz. **(AIME 2011)**

98. $x^3-2011x+m$ polinomunun tamsayılı kökleri a,b,c için $|a|+|b|+|c|$ toplamını bulunuz. **(AIME 2011)**

99. $x^2=8y^4+1$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

100. $x^4=y^2+z^2+4$ denkleminin tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

101. $3^k = m^2 + n^2 + 1$ denkleminin pozitif tam sayılarda sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz. **(St. Petersburg)**

102. $x^3 + 117y^3 = 5$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

103. $(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = z^2 + z + 1$ denklemini tam sayılar için çözünüz.

104. $m^3 + 6m^2 + 5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$ denkleminin tam sayılardaki çözümlerini bulunuz.

105. $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

106. $x^2 + y^2 = 2z^2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

107. $x^2 + y^2 = 3z^2$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

108. $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

109. $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$ denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözünüz.

110. $19x^3 - 84y^2 = 1984$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

111. Eğer $n = a^2 + b^2 + c^2$ eşitliğini sağlayan $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$ varsa, o hâlde

$$n^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

eşitliğini sağlayan $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ da vardır; gösteriniz.

112. $3n + 1$ ve $4n + 1$ aynı anda tam kare olduğuna göre $56 \mid n$ olduğunu gösteriniz.

113.

$$5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$$

denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz. **(İzlanda MO 1985)**

114. $x^2 = 2^n + 3^n + 6^n$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

115. $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

116. $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$ koşuluyla

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3$$

ve

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$$

denklemlerinin çözüm sayıları M ve N olsun; gösteriniz $M > N$.

117. $x^2 + 5y^2 = z^2$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

118. $x^5 - y^2 = 4$ denkleminin tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.

119. $4xy - x - y$ ifadesinin hiçbir $(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ için tam kare olamayacağını gösteriniz.

120. $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ eşitliğinin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümü olduğunu gösteriniz.

121. Eğer $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ ise $x^2 - y^2$ ile $x^2 + y^2$ ifadelerinin aynı anda tam kare olamayacağını gösteriniz.

122. $a!.b! = a! + b! + c!$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b, c) tamsayı üçlülerini bulunuz.

123. $x^4 - y^4 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümünün olmadığını gösteriniz.

124. $2^n - 1$ ifadesi, $m^2 + 9$ ifadesini bölecek şekilde bir m tam sayısının bulunmasını sağlayan tüm n tam sayılarını bulunuz. (IMO 1998 Shortlist N5)

125. $x^4 + x^2 + y^2 + y^4 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz.

126.
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$$

denkleminin pozitif tam sayılardaki tüm çözümlerini bulunuz.

127.
$$x^6+x^3+x^3y+y=147^{157}, \quad x^3+x^3y+y^2+y+z^9=157^{147}$$

eşitliklerini aynı anda sağlayacak $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ olmadığını gösteriniz.

128. $a,b,c\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\gcd(a,b)=1$, $\gcd(c,a)=1$ veya $\gcd(c,b)=1$ ise

$$x^a+y^b=z^c$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümü olduğunu gösteriniz.

129. Rastgele $x\in\mathbb{Q}$ için
$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=x$$

denklemine $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ bir çözüm her zaman vardır; gösteriniz.

130.
$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$$

denklemini tam sayılarda çözünüz.

131. $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$ eşitliğini $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ için çözünüz.

132. $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$ denklemini tam sayılarda çözünüz.

133. $n\leq 5$ için
$$\frac{x^n-1}{x-1}$$

ifadesinin tam kare olması koşuluyla tüm $(x,n)\in\mathbb{Z}_{>0}\times\{1,\ldots,5\}$ ikililerini bulunuz.

134. Her $a_i\in\{-1,1\}$ için
$$\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=0$$

ise $4\mid n$ olduğunu gösteriniz.

135. $x,y\in\mathbb{Z}_{>0}$ için
$$x!+y!=x^y$$

denklemine tüm çözümleri bulunuz.

136. $m,n\in\mathbb{Z}$ için
$$|12^m-5^n|$$

şeklinde en küçük pozitif tam sayıyı belirleyiniz.

137. Asal p için $(p-1)!+1$ ifadesinin p'nin bir tam kuvveti olması koşulunu sağlayan tüm p sayıları bulunuz.

138. $1\leq x,y,z\leq 100$ koşuluyla
$$x^2+2y^2+z^2=4xyz$$

denkleminin pozitif tam sayı çözüm sayısını bulunuz.

139. $m!=n!\,(n+1)!$ denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.

140. Hangi (a, b) pozitif tam sayı ikilileri için,

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab + a + b}$$

bir tam sayıdır? (2012 UMO yaz kampı sınavı)