IMO
Uluslararası Matematik Olimpiyatı

Soruları ve Çözümleri

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

İçindekiler

1. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1959

1 Hiçbir n doğal sayısı için $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin sadeleşmeyeceğini gösteriniz.

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Öklid algoritmasına göre $\text{ebob}(21n+4, 14n+3) = \text{ebob}(7n+1, 14n+3) = \text{ebob}(7n+1, 1) = 1$ dir. Yani $21n+4$ ile $14n+3$ aralarında asaldır. Buradan kesrin sadeleşemeyeceğini görürüz.

2

$$\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})} + \sqrt{(x-\sqrt{2x-1})} = A$$

denkleminin gerçel köklerini $(a)A = \sqrt{2}, (b)A = 1, (c)A = 2$ iken bulunuz. (Karekök içerisindeki ifadelerin negatif olmadığını varsayın.)

Çözüm:

Denklemin karesini alalım.

$x + \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - (\sqrt{2x-1})^2} + x - \sqrt{2x-1}$

$2\sqrt{x^2 - (\sqrt{2x-1})^2} = 2\sqrt{(x-1)^2}$ O zaman

$x + \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - (\sqrt{2x-1})^2} + x - \sqrt{2x-1} = 4x - 2 = A^2$

$A = \sqrt{2} \Rightarrow 4x - 2 = 2,\ x = 1$

$A = 1 \Rightarrow 4x - 2 = 1,\ x = \dfrac{3}{4}$

$A = 2 \Rightarrow 4x - 2 = 6,\ x = \dfrac{6}{4}$

3 a, b, c gerçel sayılar olmak üzere,

$$a\ \cos^2 x + b\ \cos x + c = 0$$

denklemi $\cos x$ e göre ikinci dereceden bir denklem olsun. a, b, c sayılarını kullanarak kökleri başlangıçtaki denklemle aynı olan $\cos 2x$ e göre ikinci dereceden bir denklem oluşturunuz. $a = 4, b = 2, c = -1$ değerleri için $\cos x$ ve $\cos 2x$ türünden olan denklemleri karşılaştırınız.

Çözüm:

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ özdeşliğini biliyoruz. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ denkleminin iki kökü $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \cos x_2$ olsun. Oluşturmak istediğimiz ikinci dereceden denklemin kökleri de $\cos 2x_1$ ve $\cos 2x_2$ olmalıdır.

Vieta formüllerinden $y_1 + y_2 = -\dfrac{b}{a}$, $y_1 y_2 = \dfrac{c}{a}$ ve

$y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$ dir.

Diğer taraftan $a\cos^2 2x + b\cos 2x + c = 0$ denklemi için

Kökler toplamı $\cos 2x_1 + \cos 2x_2 = 2y_1^1 - 1 + 2y_2^2 - 1 = 2(y_1^2 + y_2^2) - 2 = \dfrac{2b^2 - 4ac - 2a^2}{a^2}$

Kökler çarpımı $\cos 2x_1 \cdot \cos 2x_2 = (2y_1^1 - 1)(2y_2^2 - 1) = 4(y_1y_2)^2 - 2(y_1^2 + y_2^2) + 1 = \dfrac{4c^2 - 2b^2 + 4ac + a^2}{a^2}$

olur. Buna göre aranan denklem

$$a^2\cos^2 2x + (-2b^2+4ac+2a^2)\cos x + (4c^2-2b^2+4ac+a^2) = 0$$

dir.

Şimdi $a=4, b=2, c=-1$ değerlerini

$$\begin{aligned} a\cos^2 x + b\cos x + c &= 0 \\ a^2\cos^2 2x + (-2b^2+4ac+2a^2)\cos x + (4c^2-2b^2+4ac+a^2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinde yazarsak

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 &= 0 \\ 16\cos^2 2x + 8\cos x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İlginç bir durum olarak bu denklemler birbirinin aynıdır. Dolayısıyla ilk denklemin çözümü olan her x açısının iki katı hem ilk denklemin, hem de ikinci denklemin çözümüdür. $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ve $\cos x = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$ tür. Buradan x açılarını derece türünden bulabiliriz. $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ve $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ olduğunu kullanarak k, t keyfi tamsayıları için $x = \pm 36^\circ + 360^\circ \cdot k$ ve $x = \pm 72^\circ + 360^\circ \cdot t$ tüm çözümleri elde ederiz. Bu çözümleri sağlayan açıların iki katı, hem birinci hem de ikinci denklemin çözümüdür.

4 Hipotenüsü $c =$ Sabit, hipotenüse ait kenarortayı da dik kenarlarının geometrik ortalamasına eşit olan dik üçgeni çiziniz.

Çözüm:

$AB = c$, $CA = b$, $BC = a$ olsun. $c = 2\sqrt{ab}$ ve c ye ait yükseklik, $c\cdot h = a\cdot b \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{ab}}{2} = \dfrac{c}{4}$ olacaktır.

BC nin orta noktası O olsun. BC çaplı çemberi çizelim. BC ye O da dik olan yarıçapı çizelim. Bu yarıçapın orta noktası M olsun. M den BC ye çizilen paralelin çemberi kestiği noktalardan biri A olsun. ABC dik üçgeni istenen üçgendir. Ayrıca bu üçgen, bir $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgenidir.

5 AB doğru parçasının üzerinde bir M hareketli noktası alınıyor. $AMCD$ ve $MBEF$ kareleri, AB ye göre aynı tarafta yer alacak şekilde oluşturuluyor. Bu kareleri çevreleyen P ve Q merkezli çemberler, M haricinde bir N noktasında kesişiyor. AF ile BC doğrularının kesişimi N' ise,

(a) N ve N' noktalarının çakıştığını gösteriniz.

(b) MN doğrularının M seçiminden bağımsız sabit bir S noktasından geçtiğini gösteriniz.

(c) M, A ve B arasında değişirken, PQ doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

(a) $AM < MB$ olduğunu varsayalım.
$\angle ANM = \angle MNC = \angle FNE = \angle MNB = \angle BNE = 45^\circ$ olduğu için A, N, F doğrudaş; B, C, N de doğrudaştır.

(b) (a) dan, NM nin $\angle ANB$ nin açıortayı olduğu sonucunu da elde ettik. AB çaplı çember ile NM doğrusu S de kesişsin. S, AB yayının orta noktasıdır. AB sabit olduğu için S de sabittir.

(c) PQ nun orta noktası, R olsun. P, R, Q noktalarından AB ye inilen dikmelerin ayakları, sırasıyla, X, Y, Z olsun. $PX = AM/2$, $QZ = MB/2$ olduğu için, $PXZQ$ dik yamuğunda orta taban $RY = \dfrac{AM+MB}{4} = AB/4$ olacaktır. Bu da, R noktalarının geometrik yerini AB ye paralel bir doğru yapar.

$\boxed{6}$ P ve Q düzlemleri bir p doğrusu boyunca kesişiyor. Hiçbirisi p üzerinde yer almayan, P düzleminde bir A ve Q düzleminde bir C noktası veriliyor. $AB \parallel CD$ olacak şekilde aynı zamanda teğetler dörtgeni olan $ABCD$ ikizkenar yamuğunu, B ve D sırasıyla P ve Q düzlemlerinde olacak şekilde çiziniz.

Çözüm:

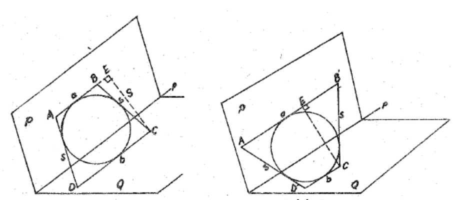
İlk olarak çizim esaslarının listesini yaparız. İstenilen $ABCD$ yamuğunun, AB ve CD paralel kenarlarının, her ikisinin de p ye paralel olmasıdır. (Eğer M, p nin bir noktası ise, AB ve CD ye paralel M den geçen tek bir l doğrusu vardır. l, P ve Q düzlemlerinin ikisinde de ortak olduğu için, burada $l = p$ çıkar.) Onlar arasındaki CE uzaklığı (Şekle bakınız) içine çizilen teğetçemberin çapına eşittir. Verilen A ve C noktaları arasındaki AC uzunluğu biliniyor. Henüz bilinmeyen AB ve CD uzaklıklarını sırasıyla a ve b ile ve AD ve BC eşit uzaklıklarını s ile gösteriniz. Teğetler dörtgeninin iç çemberine dörtgenin bir köşesinden çizilen iki teğet eşit olduklarından $AB + CD = AD + BC$, yani, $a + b = 2s$, böylece $s = \frac{1}{2}(a+b)$ dir. Eğet $a < b$ ise (Şekil - 1 deki gibi), o zaman $a + 2BE = b$, böylece

$$BE = \frac{1}{2}(b-a) \text{ ve } AE = a + BE = \frac{1}{2}(a+b) = s$$

olur. Eğer $a > b$ ise (Şekil 2 de $AB'CD'$ yamuğuna bakınız) o zaman $a - 2BE = b$, böylece

$$BE = \frac{1}{2}(a-b) \text{ ve } AE = a - BE = \frac{1}{2}(a+b) = s$$

olur. Böylece her iki halde de $AE = s$ dir.



Şekil - 1 Şekil - 2

Çizim: P düzleminde, A dan geçen p ye paralel bir l doğrusu çiziniz; Q düzleminde C den geçen p ye paralel bir m doğrusu çiziniz. CD ye C den bir dik çiziniz, bu dik l yi E de kessin. C merkezli AE yarıçaplı AE doğrusunu B de kesen bir çember yayı çiziniz. Şimdi istenen her iki B ve D köşeleri bulunmuştur.

Eğet $CE < AE$ ise; iki çözüm var (Şekildeki $ABCD$ ve $AB'CD'$). Eğer $CE = AE$ ise bir kare olan tek çözüm var. Eğer $CE > AE$ ise problemin çözümü yoktur.

Kaynak:

Uluslararası Matematik Olimpiyadları 1959-1977, Tübitak

2. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1960

$\boxed{1}$ Rakamlarının kareleri toplamının 11 katına eşit olan tüm üç basamaklı sayıları bulunuz.

Çözüm:

Sayımız $abc = 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2)$ olsun. Sol tarafın 11'e bölünmesi gerektiğinden

$$100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{11} \implies a + c \equiv b \pmod{11}$$

$18 \geq a + c \geq 1$ olduğundan $a + c = b$ veya $a + c = 11 + b$ olmalıdır.

i) Eğer $a + c = 11 + b$ ise

$$100a+10b+c = 11(a^2+b^2+c^2) \implies 110a+11c-110 = 11(a^2+(a+c-11)^2+c^2) \implies 10a+c-10 = 2a^2+2c^2+121-22a-22c+$$

$$\implies 32a + 23c - 131 = 2(a^2 + c^2 + ac) \tag{1}$$

Yani c sayısı tektir. Bu durumda sağ tarafı mod 4'de incelersek,

$$2a^2 + 2c^2 + 2ac \equiv (a + c)^2 + a^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

olur çünkü a ve $a + c$ farklı paritelerdedir. Dolayısıyla

$$32a + 23c - 131 \equiv -c + 1 \equiv 2 \pmod{4} \implies c \equiv 3 \pmod{4}$$

elde edilir. Yani $c = 3$ veya 7'dir. (1)'de yerine yazarsak $(a, c) = (5, 3), (8, 3)$ olur. $a + c = 11 + b$ olduğundan sadece $(a, b, c) = (8, 0, 3)$ çözümü elde edilir. ($c = 7$'den çözüm gelmez.)

ii) Eğer $a + c = b$ ise

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \implies 110a + 11c = 11(2a^2 + 2c^2 + 2ac) \implies 10a + c = 2(a^2 + c^2 + ac)$$

olduğundan c çifttir. $c = 2c_0$ dersek,

$$a^2 + 4c_0^2 + 2ac_0 = 5a + c_0 \implies a^2 + a(2c_0 - 5) + (4c_0^2 - c_0) = 0$$

olur. Diskriminantı hesaplarsak $\Delta = (2c_0 - 5)^2 - 4(4c_0^2 - c_0) = -12c_0^2 - 16c_0 + 25$ olur. Bu ifadenin tamkare olması gerekir. $c_0 = 0, 1, 2, 3, 4$ olabileceğinden sadece $c_0 = 0$ için tamkare olduğu görülebilir ($c_0 \geq 1$ iken Δ negatif olacaktır.) $c = 0$ için $a = 5$ çözümü bulunur. Buradan da $(a, b, c) = (5, 5, 0)$ bulunur.

Tüm sayılar 803 ve 550'dir.

$\boxed{2}$

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

eşitsizliği sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm:

Öncelikle karekök içi negatif olamayacağından $x \geq -\frac{1}{2}$ olmalıdır ama $x = 0$ olursa eşitsizliğin sol tarafı tanımsız olur. Yani $x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) - \{0\}$ için

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9 \iff 4x^2 < (2x + 9)(1 - \sqrt{1 + 2x})^2 = (2x + 9)(2 + 2x - 2\sqrt{1 + 2x})$$

$$\iff 2x^2 < (2x+9)(1+x-\sqrt{1 + 2x}) = 2x+9+2x^2+9x-(2x+9)\sqrt{1 + 2x} \iff (2x+9)\sqrt{1 + 2x} < 11x+9$$

$x \geq -\frac{1}{2}$ olduğundan $(2x + 9)\sqrt{1 + 2x}$ ve $11x + 9$ pozitiftir. Dolayısıyla

$$(2x + 9)\sqrt{1 + 2x} < 11x + 9 \iff (2x + 9)^2(1 + 2x) < (11x + 9)^2$$

$$\iff 8x^3 + 76x^2 + 198x + 81 < 121x^2 + 198x + 81 \iff 8x^3 < 45x^2 \iff x < \frac{45}{8}$$

Yani aradığımız aralık $\left[-\frac{1}{2}, \frac{45}{8}\right) - \{0\} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{45}{8}\right)$'dir.

3 Verilen bir ABC dik üçgeninde uzunluğu a olan BC hipotenüsü, n eşit parçaya (n tek tam sayı) bölünüyor. Hipotenüsün orta noktasını bulunduran parçayı gören A dar açısı α olsun. Hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu da h olsun.

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a = 2n$ olsun ve $AB > AC$ olsun. $\tan\alpha = \dfrac{2h}{n^2-1}$ olduğunu göstereceğiz.

X ve Y noktaları, BC üzerinde $BX = CY = n-1$ olacak şekilde alınsın. $\angle XAY = \alpha$ dır. Y den AX e inilen dikmenin ayağı Z, A dan BC ye inilen dikmenin ayağı H olsun. XY nin orta noktası M olsun. M aynı zamanda BC nin de orta noktası olacağından $AM = n$ dir.

$AM^2 - AH^2 = MH^2 \Rightarrow MH = \sqrt{n^2-h^2}$,

$HY = \sqrt{n^2-h^2} - 1$ ve $XH = \sqrt{n^2-h^2} + 1$ olacaktır.

$AZ^2 + YZ^2 = AH^2 + HY^2 \Rightarrow AZ^2 + YZ^2 = n^2 + 1 - 2\sqrt{n^2-h^2}$

$AX^2 = XH^2 + AH^2 \Rightarrow AX^2 = n^2 + 1 + 2\sqrt{n^2-h^2}$

$[AXY] = \dfrac{1}{2}\cdot AX\cdot ZY = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot XY \Rightarrow YZ = \dfrac{2h}{AX}$

$$AZ^2 = n^2+1-2\sqrt{n^2-h^2} - YZ^2 = n^2+1-2\sqrt{n^2-h^2} - \frac{4h^2}{n^2+1+2\sqrt{n^2-h^2}}$$

$$AZ^2 = \frac{(n^2+1)^2 - 4(n^2-h^2) - 4h^2}{n^2+1+2\sqrt{n^2-h^2}} = \frac{n^4+2n^2+1-4n^2}{AX^2} = \frac{(n^2-1)^2}{\frac{4h^2}{YZ^2}}$$

$$AZ = \frac{n^2-1}{2h}\cdot YZ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2h}{n^2-1}$$

4 h_a, h_b (A ve B'den geçen yükseklikler) ve A köşesinden geçen m_a kenarortayı verilen ABC üçgenini çiziniz.

Çözüm:

(1) M merkezli m_a yarıçaplı Π çemberini çizelim. Çemberin A dan geçen çapı, AM' olsun.

(2) A merkezli, $2\cdot h_a$ yarıçaplı çember ile Π çemberi H' noktasında kesişsin. AH' nün orta noktası H olsun. $MH \perp AH$ ve $AH = h_a$ olacaktır.

(3) M' merkezli h_b yarıçaplı çember, Π çemberini X ve Y de kessin.

(4) MH doğrusu, AX ile AY doğrularını, sırasıyla C_x ve C_y de kessin.

(5) (a) C_x in, M ye göre simetriği, B_x olsun. $MC_x = B_xM$ ve $AM = MM'$ olduğu için, $AB_xM'C_x$ bir paralelkenardır. Bu paralel kenarın AC_x ye ait yüksekliği $M'X = h_b$ kadardır. O halde B_x den AC_x ye inilen B_xH_x yüksekliği de h_b kadardır. Bu durumda, $\triangle AB_xC_x$ de, AM kenarortay, AH ve B_xH_x yüksekliktir.

(b) C_y in, M ye göre simetriği, B_y olsun. $MC_y = B_yM$ ve $AM = MM'$ olduğu için, $AB_yM'C_y$ bir paralelkenardır. Bu paralel kenarın AC_y ye ait yüksekliği $M'Y = h_b$ kadardır. O halde B_y den AC_y ye inilen B_yH_y yüksekliği de h_b kadardır. Bu durumda, $\triangle AB_yC_y$ de, AM kenarortay, AH ve B_yH_y yüksekliktir.

5 $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ yüzü doğruca $A'B'C'D'$ yüzünün üstünde olacak şekilde) küpünü ele alalım.

(a) X ve Y, sırasıyla AC ve $B'D'$ doğru parçalarının üzerinde rastgele noktalar olmak üzere; XY doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

(b) (a)'da tanımlanan XY doğru parçasının üzerinde $ZY = 2XZ$ olacak şekilde alınan Z noktalarının geometrik yerini bulunuz.

$\boxed{6}$ V_1 hacimli bir dik koninin içine tabanına teğet olacak şekilde en büyük hacimli küre çiziliyor. Tabanı koninin tabanı üzerinde yer alacak şekilde küreyi çevreleyen en küçük hacimli silindirin hacmi V_2'dir.

(a) $V_1 \neq V_2$ olduğunu gösteriniz.

(b) $V_1 = kV_2$ eşitliği sağlayan en küçük k sayısını bulunuz. Bu durumda, koninin tepesinden koninin taban çapını gören açıyı çiziniz.

$\boxed{7}$ Tabanları a ve c, yüksekliği h olan bir ikizkenar yamuk veriliyor.

(a) Yamuğun simetri ekseni üzerinde yer alan ve yamuğun kollarının ikisini de (tabanların dışındaki kenarları) dik açı ile gören tüm P noktalarını bulunuz.

(b) P'nin tabanlardan birinden uzaklığını hesaplayınız.

(c) Gerçekte, böyle P noktalarının hangi koşullar altında var olduğunu belirleyiniz. (Ortaya çıkabilecek değişik halleri irdeleyiniz.)

Çözüm:

AB nin orta noktası M, CD nin orta noktası N olsun.

(Simetriden dolayı, AD çaplı çember ile BC çaplı çemberin MN yi kestiği noktalardan geçer.)

BC çaplı çember, MN yi kesmezse, söz konusu bir P noktası bulunamaz.

BC çaplı çember, MN ye teğette, söz konusu tek bir P noktası vardır.

BC çaplı çember, MN yi iki kesiyorsa, iki tane P noktası vardır.

$\angle BPC = \angle BMP = \angle PBC = 90°$ olduğu için $\angle MBP = \angle CPN$, dolayısıyla da $\triangle CPN \sim \triangle PBM$ dir.

$MP = x$ dersek, $\dfrac{x}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{c}{2}}{h-x}$ olur.

$$hx - x^2 = \frac{ac}{4} \Rightarrow -ac = 4x^2 - 4hx \Rightarrow h^2 - ac = 4x^2 - 4hx + x^2 = (2x-h)^2$$

olduğundan

$$2x - h = \pm\sqrt{h^2 - ac} \Rightarrow x = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{h^2 - ac}}{2}$$

olur.

$h^2 = ac$ ise tek çözüm vardır.

$h^2 > ac$ ise iki çözüm vardır.

$h^2 < ac$ ise çözüm yoktur.

3. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1961

1 a ve b sabit sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz. Denklem sisteminin çözümleri olan x, y, z 'nin farklı pozitif sayılar olması için a ve b 'nin sağlaması gereken şartları belirtiniz.

Çözüm:

Eğer $xy+yz+xz$ ifadesini hesaplamaya çalışırsak,

$$2(xy+yz+xz) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = a^2-b^2$$

$$\implies z^2+yz+xz = z(x+y+z) = az = \frac{a^2-b^2}{2}$$

Eğer $a=0$ ise $a^2=b^2=0$ elde edilir. Yani $x^2+y^2+z^2=0$ olur. Buradan $(x,y,z)=(0,0,0)$ çözümü bulunur. Eğer x, y, z'nin reel olma şartı yoksa

$$x+y=-z \implies x^2+y^2+(x+y)^2=0 \implies x^2+y^2+xy=0 \implies \left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1=0$$

$$\implies \frac{x}{y} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \implies (x,y,z) = \left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}t, t, \frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Eğer $a\neq 0$, o zaman $z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$. Yerine yazarsak

$$x+y = a-z = \frac{a^2+b^2}{2a}$$

$$xy = z^2 = \frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

Eğer $y=\frac{a^2+b^2}{2a}-x$ yazarsak,

$$x\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-x\right) = -x^2+x\frac{a^2+b^2}{2a} = \frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} \implies x^2-x\frac{a^2+b^2}{2a}+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0$$

$$\implies x^2-2x\frac{a^2+b^2}{4a}+\frac{(a^2+b^2)^2}{16a^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{16a^2}-\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)}{16a^2}$$

$$\implies x = \frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)}}{4a}$$

Yani çözüm,

$$(x,y,z) = \left(\frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)}}{4a}, \frac{(a^2+b^2)\mp\sqrt{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)}}{4a}, \frac{a^2-b^2}{2a}\right)$$

bulunur. Eğer $x, y, z>0$ olmasını istiyorsak,

$$a^2>b^2 \text{ ve } a^2+b^2>\sqrt{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)}$$

olmalıdır. $3b^2>a^2$ olması gerektiğini de not alalım (eşitlik durumunda $x=y$ olur).

$$a^2+b^2>\sqrt{(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)} \iff (a^2+b^2)^2>(3b^2-a^2)(3a^2-b^2) \iff 4(a^2-b^2)^2>0$$

olur. Yani sadece $3b^2>a^2>b^2$ şartı ile x, y, z pozitif olur ve $x\neq y$ olur. Verilen son eşitlikten, eğer $x=z$ ise $x=y=z$ olması gerektiği görülebilir (pozitif olduklarından dolayı).
Sonuç olarak x, y, z'nin farklı pozitif sayılar olması için $3b^2>a^2>b^2$ olması yeterlidir.

2 Alanı T, kenarları a, b, c olan bir üçgende

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot T$$

olduğunu kanıtlayınız. Hangi koşullarda eşitlik sağlanır?

Çözüm 1:

u yarıçevre olmak üzere $T^2 = u(u-a)(u-b)(u-c)$

$AO \geq GO$ dan

$$\frac{u-a+u-b+u-c}{3} \geq \sqrt[3]{(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$\frac{u^3}{27} \geq (u-a)(u-b)(u-c)$$

$$\frac{u^4}{27} \geq u(u-a)(u-b)(u-c) = T^2$$

$$u^2 \geq 3T\sqrt{3}$$

$KO \geq AO$ dan

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4u^2}{3} = 4T\sqrt{3}$$

Çözüm 2:

ifade *Weitzenböck's* eşitsizliği olarak bilinmektedir.

ispat-1 :

$$T = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

olmak üzere,

$(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(a^4+b^4+c^4)}{3} \geqslant \dfrac{4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3} \geqslant 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3} \geqslant (4T)^2$

ispat-2:

$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3(a+b+c)(\dfrac{a+b+c}{3})^3}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$

3 n doğal sayı olmak üzere, $\cos^n x - \sin^n x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$n=1$ için $\cos x - \sin x = 1$ denklemini çözmemiz gerekiyor.

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1 \implies \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Buradan da $k\in\mathbb{Z}$ için $x=2k\pi$ ve $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ çözümlerini buluruz.

$n=2$ için $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) = 1$ ve $k\in\mathbb{Z}$ için $x=k\pi$ çözümü elde ederiz.

$n\geq 3$ için $f_n(x)=\cos^n x - \sin^n x$ diyelim.

$$f_n'(x) = -n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)$$

elde ederiz. Bu fonksiyonun maksimum değerini bulmak için kritik noktalarını bulmamız gerekiyor.

$$f_n'(x)=0 \iff \sin x = 0 \text{ veya } \cos x = 0 \text{ veya } \sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x=0$$

$$\iff x=k\pi \text{ veya } x=k\pi-\frac{\pi}{2} \text{ veya } \tan^{n-2}x=-1$$

Eğer n çiftse sadece $x=k\pi$ ve $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ elde ederiz. Eğer n tekse, $\tan^{n-2}x=-1$'den $\tan x=-1$ ve $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ kökü de eklenir.

$$f_n(k\pi)=\cos^n(k\pi)-\sin^n(k\pi)=(-1)^{nk}$$

$$f_n\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos^n\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^n\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{n(k+1)+1}$$

ve eğer n tekse

$$f_n\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^n\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^n\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}\frac{2}{2^{n/2}} & \text{eğer } k \text{ çiftse}\\ -\frac{2}{2^{n/2}} & \text{eğer } k \text{ tekse}\end{cases}$$

Yani f_n'in alabileceği maksimum değer 1'dir. 1 değerini de kritik noktalarda alır. Bu durumda,

$n\geq 3$ için $f_n(x)=1$ denkleminin çözümleri,

n tekse $x=2k\pi$, $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ve n çiftse $x=k\pi$ çözümü elde edilir.

4 P, $P_1P_2P_3$ üçgeni içerisinde bir noktadır. P_1P, P_2P, P_3P doğruları karşı kenarları sırasıyla Q_1, Q_2, Q_3 noktalarında kesiyor.

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

sayılarından en az birinin ≤ 2, ve en az birinin ≥ 2 olduğunu gösteriniz.

5 M, BC doğru parçasının orta noktası ve $\omega < 90^\circ$ olmak üzere; $AC=b$, $AB=c$ ve $\angle AMB=\omega$ verilen ABC üçgenini çiziniz. Bu şekilde bir çizimin yapılabilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$b\tan\frac{\omega}{2}\leq c < b$$

olduğunu gösteriniz. Hangi halde eşitlik geçerlidir?

Çözüm:

$\angle AXC=\omega$ ve $AX=XC$ olacak şekilde ikizkenar bir üçgen oluşturalım. (AXC) çemberinin bir çapı XY olsun. AC nin orta noktası da N olsun.

N merkezli $\dfrac{c}{2}$ yarıçaplı çember ile (AXC) çemberi; kesişmeyebilir, tek noktada kesişebilir, ya da iki noktada kesişebilir. Bu durumları birazdan inceleyeceğiz. Şimdilik kesişim noktalarından biri M olsun.

A dan NM ye çizilen paralel ile CM doğrusu B de kesişsin. Paralellikten $AB=2\cdot NM=2\cdot\dfrac{c}{2}=c$ ve $CM=MB$ olacaktır. Aynı zamanda, $AMCX$ kirişler dörtgeninde $\angle AMB=\angle AXC=\omega$ olacağı için ABC sorudaki tanıma uyan bir üçgendir.

Herhangi bir üçgende, AM kenarortay ve AH yükseklik olmak üzere,

$$\angle AMB < 90^\circ \Leftrightarrow M \in [HC] - \{H, C\} \Leftrightarrow BH < HC \Leftrightarrow AB = c < AC = b$$

olduğu kolayca görülebilir.

N merkezli Y den geçen çember (XAC) ye teğettir. $\angle YCA = \dfrac{\angle AXC}{2} = \dfrac{\omega}{2}$ olduğu için $NY = \dfrac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2}$

N merkezli $\dfrac{c}{2}$ yarıçaplı çember ile $(N, |NY|)$ çemberi kesişmez $\Longleftrightarrow \dfrac{c}{2} < NY = \dfrac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow c < b \tan \frac{\omega}{2}$

$c = b \tan \frac{\omega}{2}$ olduğunda $Y = M$ dir. $\angle YNC = 90^\circ$ olduğu için $\angle BAC = 90^\circ$ dir. O halde eşitlik, $\triangle BAC$ bir dik üçgen iken sağlanır.

6 Bir ϵ düzlemi ile bu düzleme paralel olmayan bir düzlem üzerinde yer alan, ϵ'a göre aynı tarafta bulunan ve doğrusal olmayan A, B, C noktalarını ele alalım. A', B', C' noktaları ϵ üzerinde rastgele üç nokta olsun. L, M, N sırasıyla AA', BB', CC' doğru parçalarının orta noktaları ve G de LMN üçgeninin ağırlık merkezi olsun. (L, M, N nin üçgen oluşturmadığı A', B', C' noktalarını ele almıyoruz.) A', B', C' noktaları ϵ üzerinde bağımsız olarak değişirken, G noktasının geometrik yeri nedir?

4. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1962

1 Aşağıdaki şartları sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

(a) Ondalık yazılımında son basamağı 6 dır.

(b) Son basamağı silinip başa yazılırsa, oluşan sayı ilk baştaki n sayısının dört katı oluyor.

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Sayı $(a6)_{10}$ olsun. $4 \cdot (a6)_{10} = (6a)_{10}$ dır. a sayısı k basamaklı olsun. O zaman ifadeyi açarsak $40a + 24 = 6 \cdot 10^k + a$ yani $13 \cdot a + 8 = 2 \cdot 10^k$ dir. Buradan $10^k \equiv 4 \pmod{13}$ ve en küçük k sayısı 5 bulunur. Yani bu şartları sağlayan en küçük n sayısı 6 basamaklıdır. Bu sayıyı da kolaylıkla 153846 olarak bulabiliriz.

2

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarını belirleyiniz.

Çözüm:

Öncelikle kareköklerin tanımlı olması için $x \in [-1, 3]$ olması gerektiğini not alalım. Verilen eşitsizliği düzenleyelim.

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \iff 3 - x > \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x+1}\right)^2 = \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$\iff \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

Son eşitsizliğin sağlanması için $x < \frac{7}{8}$ olması gerektiğini görebiliriz. Dolayısıyla $x \in \left[-1, \frac{7}{8}\right)$ olmalıdır. Bu aralık için

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \iff 4x^2 + \frac{49}{16} - 7x > x + 1 \iff 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 > 1 - \frac{33}{64} = \frac{31}{64} \iff |x-1| > \frac{\sqrt{31}}{8}$$

$x < \frac{7}{8} < 1$ olduğundan $|x-1| = 1 - x$ olacaktır. Buradan da

$$1 - x > \frac{\sqrt{31}}{8} \iff 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} > x$$

elde edilir. $1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8}$ olduğundan x'in en geniş aralığı $\boxed{\left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right)}$ bulunur.

3 $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ ve $A'B'C'D'$ sırasıyla üst ve alt tabanlar, AA', BB', CC', DD' kenarları birbirlerine paralel) küpünü ele alalım. X noktası sabit bir hızla $ABCD$ karesinin çevresinde $ABCDA$ yönünde hareket ediyor. Y noktası da aynı hızla $B'C'CB$ karesinin çevresinde $B'C'CBB'$ yönünde hareket ediyor. X ve Y noktları, hareketlerine aynı anda sırasıyla A ve B' noktasında başlıyor. Buna göre, XY doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini belirleyiniz ve çiziniz.

4 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$\cos 2x$ ve $\cos 3x$ fonksiyonları $\cos x$ cinsinden yazılabilir.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Yani $\cos x = y$ dersek, çözmemiz gereken denklem

$$y^2 + (2y^2-1)^2 + (4y^3-3y)^2 = 1 \iff 16y^6 - 20y^4 + 6y^2 = 2y^2(2y^2-1)(4y^2-3) = 0$$

Yani kökler $y = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ elde edilir. $\cos x = y$ yazarsak,

$$\boxed{x = n\pi - \frac{\pi}{2},\quad n\pi \pm \frac{\pi}{4},\quad n\pi \pm \frac{\pi}{6}}$$

bulunur.

5 K çemberi üzerinde üç farklı nokta, A, B, C, veriliyor. K üzerinde dördüncü bir D noktasını, oluşan dörtgen teğetler dörtgeni olacak şekilde (sadece cetvel ve pergel kullanarak) oluşturun.

6 Çevrel çemberinin yarıçapı r, içteğet çemberinin yarıçapı ρ olan bir ikizkenar üçgen veriliyor. Bu iki çemberin merkezleri arası uzaklık d ise,

$$d = \sqrt{r(r-2\rho)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

I iç merkez, O çevrel merkez olsun. $\angle BAC = 2\alpha$ olsun. AI, çevrel çemberi M de kessin.

$AI = \dfrac{\rho}{\sin\alpha}$ ve Sinüs Teoreminden $BM = 2r \cdot \sin\alpha$ olacaktır.

$\angle BIM = \angle BAM + \angle ABI = \angle MAC + \angle IBC = \angle CBM + \angle IBC = \angle IBM$ olduğu için $BM = MI = 2r \cdot \sin\alpha$.

I noktasının çevrel çembere göre kuvveti:

$$AI \cdot MI = R^2 - OI^2$$

$$\frac{\rho}{\sin\alpha} \cdot 2r \cdot \sin\alpha = 2r\rho = R^2 - d^2 \Rightarrow d = \sqrt{r^2 - 2r\rho}$$

Not:

Üçgenin ikizkenarlığını kullanmadık.

Ayrıca bu sorunun genel hali, 1767'de Euler tarafından sunulmuş.

7 Her biri SA, SB, SC, BC, CA, AB doğrularına teğet olan beş kürenin bulunabildiği $SABC$ dörtyüzlüsü veriliyor.

(a) $SABC$ dörtyüzlüsünün düzgün olduğunu gösteriniz.

(b) Karşıt olarak, her düzgün dörtyüzlü için bu şekilde beş kürenin bulunabildiğini kanıtlayınız.

5. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1963

$\boxed{1}$ p gerçel bir parametre olmak üzere,

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

$\boxed{2}$ A noktası ve BC doğru parçası veriliyor. Uzayda, bir kolu A'dan geçen, diğer kolu da BC doğru parçasını kesen dik açıların köşelerinin geometrik yerini belirleyiniz.

$\boxed{3}$ Tüm iç açıları eşit olan bir n-genin, ardışık kenarlarının uzunlukları arasında

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

bağıntısı varsa, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ olduğunu kanıtlayınız.

$\boxed{4}$ y bir parametre olmak üzere,

$$x_5 + x_2 = yx_1$$
$$x_1 + x_3 = yx_2$$
$$x_2 + x_4 = yx_3$$
$$x_3 + x_5 = yx_4$$
$$x_4 + x_1 = yx_5$$

sistemini sağlayan tüm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sayılarını bulunuz.

$\boxed{5}$ $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Eşitliği $2\sin\frac{\pi}{7}$ ile genişletelim.

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \stackrel{?}{=} \sin\frac{\pi}{7} \tag{1}$$

$$\sin\frac{2\pi}{7} - (\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}) + (\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}) \stackrel{?}{=} \sin\frac{\pi}{7} \tag{2}$$

$\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}$ olduğu için $\sin\frac{\pi}{7} \stackrel{?}{=} \sin\frac{\pi}{7}$ elde ederiz.

Çözüm 2:

$x^7 = 1$ denkleminin çözümleri $z_k = \cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ dır.
Kökler toplamı 0 olduğu için köklerin reel kısımları toplamı da 0 olacaktır. Bu durumda

$$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$$

elde edilir. $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ ve $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ olduğu için

$$1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + -\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

elde edilir. Biraz düzenlemeyle

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) = 1$$

elde ederiz.

Çözüm 3:

$7x = 2k\pi$ dersek $\cos 4x = \cos 3x$

$$2\cos^2 2x - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4\cos^3 x + 3\cos x$$

$$8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Denklemin katsayılar toplamı 0 olduğundan köklerden biri 1 olmalı. Buna göre,

$$(\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$$

$\cos x - 1 \neq 0$ olduğundan

$$8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

Bu denklemin kökleri $\cos 2\pi/7, \cos 4\pi/7$ ve $\cos 6\pi/7$ olup kökler toplamından

$$\cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7 = -1/2$$

$$\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7 + \cos 5\pi/7 = 1/2$$

bulunur.

$\cos 5\pi/7 = -\cos 2\pi/7$ olduğundan

$$\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7 - \cos 2\pi/7 = 1/2$$

olarak da yazılabilir

Çözüm 4:

Önce şu eşitliği kanıtlayalım: Kanıt için buradaki bağlantıya da bakılabilir.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\tfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right) &= \tfrac{4}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times 2\sin\left(\tfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{2}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times 2\sin\left(\tfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times 2\sin\left(\tfrac{4\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times 2\sin\left(\pi - \tfrac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times 2\sin\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\tfrac{3\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times \sin\left(\tfrac{6\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times \sin\left(\pi - \tfrac{6\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \times \sin\left(\tfrac{\pi}{7}\right)\\
&= \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Şimdi $\cos \pi/7 \cdot \cos 2\pi/7 \cdot \cos 3\pi/7 = 1/8$ eşitliğini kullanalım:

$$\begin{aligned}
(\cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7) + \cos 6\pi/7 &= (2\cos 3\pi/7 \cdot \cos \pi/7) + 2\cos^2 3\pi/7 - 1\\
&= 2\ (\cos(3\pi/7))(\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7) - 1\\
&= 4\cos \pi/7 \cdot \cos 2\pi/7 \cdot \cos 3\pi/7 - 1\\
&= 4 \cdot 1/8 - 1\\
&= -1/2
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7 = -1/2$$

olduğundan

$$\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7 + \cos 5\pi/7 = 1/2$$

bulunur. (veya 1963 Umo sorusu olarak $\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7 - \cos 2\pi/7 = 1/2$)

6 A, B, C, D, E öğrencileri bir yarışmaya katılıyor. Tahminlerden biri sıralamanın $ABCDE$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin tutmadı. Aslında, hiçbir yarışmacı tahmindeki sırada yarışmayı bitiremedi. Dahası, birbiri ardına sıralanır diye düşünülen hiçbir yarışmacı birbiri ardına sıralanmamıştır. Bir diğer tahminde, sıralamanın $DAECB$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin ilkinden daha iyiydi. Yarışmacılardan tam olarak ikisi, yarışmayı tahmin edilen sırada bitirdi. Dahası, tahminde birbiri ardına sıralanır diye düşünülen çiftlerden tam olarak ayrık ikisi yarışmayı birbiri ardında bitirdi. Buna göre, yarışmanın nasıl sonuçlandığını belirleyiniz.

6. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1964

1 (a) $2^n - 1$ sayısının 7 ile bölünebildiği tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.
(b) $2^n + 1$ sayısının 7 ile bölünmesini sağlayan bir n pozitif tam sayısının olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

a-) $7|2^n - 1$ miş. 2^n i $(2^3)^{n-3}$ şeklinde yazalım. $8 \equiv 1 \pmod 7$ olduğu için şu hali alır. $7|1^{n-3} - 1$ Bu da her $n \geq 3$ için sağlanır. $n = 2$ ve $n = 1$ için sağlanmayacağını da ayrıca görüyoruz.

b-)$7|2^n + 1$ ise yine yukarıda yaptığımızı uygularsak $7|1^{n-3} + 1$ olur. Bu da imkansızdır. $n \geq 3$ için çözüm olmadığını görürüz. $n = 2$ ve $n = 1$ için sağlanmayacağını da ayrıca görüyoruz.

2 a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere;

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

$c \leq b \leq a$ olsun. Üçgenin kenarları olduğundan iki kenar toplamı üçüncüden büyüktür.O zaman şunları yazabiliriz.

$\Longrightarrow c(a + b - c) - a(b + c - a) = (a - c)(a - b + c) > 0$

$\Longrightarrow c(a + b - c) - b(a + c - b) = (c - b)(a - b - c) > 0$

$\Longrightarrow b(a + c - b) - a(b + c - a) = (a - c)(a + b - c) > 0$

O zaman $c(a + b - c) > b(c + a - b) > a(b + c - a)$ olur. Soruda sol taraftaki kısma T diyelim. Yeniden düzenleme eşitsizliğini kullanalım.

$T \geq ca(b + c - a) + ab(c + a - b) + bc(a + b - c)$

$T \geq ba(b + c - a) + cb(c + a - b) + ac(a + b - c)$

Taraf tarafa toplarsak $2T \leq 6abc$ yani $T \leq 3abc$ ispatlanır.

3 Kenarları a, b, c olan bir ABC üçgeninin içteğet çemberi çiziliyor. Bu çembere teğet ve kenarlara paralel olan doğrular $\triangle ABC$'den birer üçgen kesiyor. Bu üçgenlerin içteğet çemberleri çiziliyor. Bu dört içteğet çemberin alanları toplamını a, b, c cinsinden bulunuz.

Çözüm:

Sırasıyla A, B, C köşelerini içeren üçgenlerin iç yarıçapları r_a, r_b, r_c olsun.

$\triangle ABC$ nin sırasıyla $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ye karşı dış teğet çemberlerinin yarıçapları da R_a, R_b, R_c olsun.

Benzerlikten $\dfrac{r_a}{r} = \dfrac{r}{R_a} = \dfrac{u-a}{u}$ olacaktır. (İç teğet çemberin AB ye değme noktasının A ya uzaklığı $u - a$, dış teğet çemberin AB ye değme noktasının A ya uzaklığı da u olduğu için)

O halde, $r_a = \dfrac{r(u-a)}{u}$, $r_b = \dfrac{r(u-b)}{u}$, $r_c = \dfrac{r(u-c)}{u}$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 = \frac{r^2}{u^2} \cdot \left((u-a)^2 + (u-b)^2 + (u-c)^2 + u^2\right) = \frac{r^2}{u^2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 = \frac{u^2 r^2}{u^4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{u(u-a)(u-b)(u-c)}{u^4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\pi(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2) = \pi \cdot \frac{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^3}$$

4 On yedi kişi aralarında, herkes bir diğerine yazacak şekilde mektuplaşıyorlar. Mektuplarda sadece üç konu üzerine, her çift sadece bir konu üzerine olacak şekilde yazışıyorlar. Birbirlerine aynı konu üzerine yazmış üç kişinin bulunabileceğini gösteriniz.

5 Düzlemde beş nokta, bu noktaların belirttiği doğrulardan herhangi ikisi birbirine paralel, dik veya çakışık olmayacak şekilde seçiliyor. Her noktadan, diğer dört noktanın belirttiği doğrulara dikler çiziliyor. Bu dikmelerin en fazla kaç noktada kesiştiğini belirleyiniz?

6 $ABCD$ dörtyüzlüsünde, D köşesi $\triangle ABC$'nin ağırlık merkezi olan D_0 ile birleştiriliyor. A, B, C noktalarından DD_0'a paraleller çiziliyor. Bu doğrular, BCD, CAD, ABD düzlemlerini sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kesiyor. $ABCD$'nin hacminin $A_1B_1C_1D_0$'nın hacminin üçte biri olduğunu kanıtlayınız. D_0, $\triangle ABC$ içerisinde herhangi bir nokta olsa, aynı oran sağlanır mı?

7. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1965

1

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

eşitsizliğini sağlayan $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığındaki tüm x değerlerini bulunuz.

2 Bilinmeyenleri x_1, x_2, x_3 olan

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

denklem sisteminin katsayıları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} pozitiftir,

(b) kalan katsayılar negatif,

(c) her denklemde katsayılar toplamı pozitiftir.

Buna göre verilen sistemin tek çözümünün $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ olduğunu gösteriniz.

3 AB ve CD ayrıtlarının uzunlukları sırasıyla a ve b olan $ABCD$ dörtyüzlüsü veriliyor. AB ve CD aykırı doğruları arasındaki mesafe d, aralarındaki açı ω'dır. AB ve CD doğrlarına paralel olan ϵ düzlemi, $ABCD$ dörtyüzlüsünü iki katı cisme bölüyor. ϵ düzleminin AB ve CD'ye olan uzaklıkları oranı k ya eşittir. Buna göre elde edilen iki katı cismin hacimleri oranını hesaplayınız.

4 Herhangi biri ile, diğer üçünün çarpımının toplamı 2 ye eşit olan tüm x_1, x_2, x_3, x_4 gerçel sayılarını bulunuz.

5 AOB açısı dar olan $\triangle OAB$ yi ele alalım. $M \neq O$ noktasından OA ve OB ye çizilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q dur. $\triangle OPQ$ nin yükseklikleri H de kesişiyor. M,

(a) AB kenarı üzerinde

(b) $\triangle OAB$ içerisinde

değişirken, H'nin geometrik yeri nedir?

6 Düzlemde n nokta $(n \geq 3)$ veriliyor. Her nokta çifti, doğru parçaları ile birleştiriliyor. Bu doğru parçalarının en uzununun uzunluğu d olsun. Uzunluğu d olan doğru parçalarının kümesinin eleman sayısının n'den çok olamayacağını gösteriniz.

8. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1966

1 25 yarışmacıdan her biri A, B, C problemlerinden en az birisini çözmüştür. A'yı çözemeyip B'yi çözenlerin sayısı, A'yı çözemeyip C'yi çözenlerin sayısının iki katıdır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı, A'yı çözüp B ve C'den en az birini çözenlerin sayısından bir fazladır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı sadece B'yi çözenler ile sadece C'yi çözenlerin toplamına eşitse, sadece B'yi çözen kaç kişi vardır?

2 Bir üçgenin kenarları a, b, c; bu kenarların karşılarındaki açılar da sırasıyla α, β, γ dır.

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha + b\tan\beta)$$

ise, bu üçgenin ikizkenar olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$\tan\dfrac{\gamma}{2} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ olduğundan ifade

$$a + b = \frac{a.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + b.\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

şekline dönüşür. Her iki taraf
$\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\alpha.\cos\beta$ ile çarpılıp ifade düzenlendiğinde

$$(a+b).\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\alpha.\cos\beta = (a.\sin\alpha.\cos\beta + b.\sin\beta\cos\alpha).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\iff a.\cos\beta\left(\cos\alpha.\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin\alpha.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

$$= b.\cos\alpha\left(\sin\beta.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\beta\right)$$

Sinüs fark formülü kullanıldığında

$$a.\cos\beta.\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = b.\cos\alpha.\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \iff \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{veya} \quad a.\cos\beta = b.\cos\alpha$$

İlk durumdan $\alpha = \beta$ elde edilir. İkincisi için Sinüs Teoremi'nden

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \iff \sin(\alpha-\beta) = 0 \iff \alpha = \beta$$

bulunur ve üçgen ikizkenarlığı elde edilir.

3 Bir düzgün dörtyüzlünün köşelerinin bu dörtyüzlünün çevrel küresinin merkezinden olan uzaklıkları toplamının, uzaydaki başka bir noktanın bu köşelere olan uzaklıkları toplamından az olduğunu kanıtlayınız.

4 Her n doğal sayısı ve her $x \neq k\pi/2^t (t = 0, 1, \cdots, n; k \in \mathbb{Z})$ gerçel sayısı için,

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

olduğunu gösteriniz.

5 a_1, a_2, a_3, a_4 dört farklı gerçel sayı olmak üzere;

$$|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1$$

sistemini çözünüz.

6 ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M noktaları alınıyor. AML, BKM, CLK üçgenlerinin en az birinin alanının ABC üçgeninin alanının dörtte birinden çok olmadığını gösteriniz.

9. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1967

1 Kenarları $AB = a$ ve $AD = 1$ olan $ABCD$ paralelkenarında $\angle BAD = \alpha$ dır. $\triangle ABD$ dar açılı ise, A, B, C, D merkezli ve 1 yarıçaplı dört çember ile paralelkenarın kaplanabilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 Bir dörtyüzlünün sadece bir kenarının uzunluğu 1 den büyükse, hacminin $\leq 1/8$ olduğunu kanıtlayınız.

3 k, m, n doğal sayılar olmak üzere; $m + k + 1$ sayısı $n + 1$'den büyük bir asal sayıdır.$c_s = s(s + 1)$ olsun.Bu durumda,

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \cdots (c_{m+n} - c_k)$$

çarpımının $c_1 c_2 \cdots c_n$ çarpımı ile bölündüğünü gösteriniz.

4 $A_0B_0C_0$ ve $A_1B_1C_1$ üçgenleri dar açılıdır. $\triangle A_1B_1C_1$ ile benzer olan (A_1, B_1, C_1 köşeleri sırasıyla A, B, C köşeleri ile eşleşiyor) ve $A_0B_0C_0$ üçgenini çevreleyen (A_0, B_0, C_0 sırasıyla BC, CA, AB üzerinde yer alıyor) tüm ABC üçgenlerini ele alalım. Bu tip üçgenler arasından en büyük alanlısını belirleyiniz, bu üçgeni çiziniz.

5 $a_1, a_2, \ldots, a_8$ hepsi birden sıfıra eşit olmayan gerçel sayılar olmak üzere;

$$c_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2$$
$$\cdots$$
$$c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n$$
$$\cdots$$

şeklinde tanımlanan $\{c_n\}$ dizisini ele alalım. $\{c_n\}$ dizisinin sonsuz sayıda teriminin sıfıra eşit olduğunu varsayın. $c_n = 0$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

6 Bir spor müsabakasında, peşpeşe $n > 1$ günde m madalya dağıtılıyor. İlk gün, bir madalya ve kalan $m - 1$ madalyanın 1/7'si dağıtılıyor. İkinci gün, iki madalya ve kalan madalyaların 1/7'si dağıtılıyor. Bu böyle devam ediyor. n. gün, yani sonuncu gün, geriye kalan n madalya dağıtılıyor. Müsabaka kaç gün sürdü, müsabakada toplamda kaç madalya dağıtıldı?

10. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1968

1 Kenar uzunlukları ardışık tam sayılar olan ve açılarından biri diğerinin iki katı olan, bir ve yalnız bir üçgenin bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma: Kenar uzunlukları a, b, c olan ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{C})$ ise $b^2 = c^2 + ac$ dir.

İspat: $[CB]$ doğru parçasının B yönünde uzantısı üzerinden $|AB| = |BD| = c$ olacak şekilde bir D noktası alalım. DAC üçgeni ikizkenar olup $|AD| = |AC| = b$ dir. $ABD \sim DAC$ benzerliğinden $\dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{|DB|}{|AD|}$ olup $b^2 = c^2 + ac$ elde edilir.

Şimdi ana problemimize dönelim. Büyük açının gördüğü kenar daha uzun olduğundan $b > a$ dır. $b^2 = c^2 + ac$ bağıntısından dolayı $b > c$ dir. O halde üçgenin kenar uzunlukları $x, x+1, x+2$ tamsayıları ise $b = x+2$ dir.

1. Durum: $a = x$, $c = x+1$ ise $(x+2)^2 = (x+1)^2 + x(x+1)$ olup $x^2 - x - 3 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin tamsayı kökü yoktur.

2. Durum: $a = x+1$, $c = x$ ise $(x+2)^2 = x^2 + x(x+1)$ olup $x^2 - 3x - 4 = 0$ denklemi elde edilir. Buradan $x = 4$ bulunur. Yani istenen özellikte bir tek ABC üçgeni vardır ve $a = 5$, $b = 6$, $c = 4$ kenar uzunluklarına sahiptir.

2 Ondalık yazımındaki rakamların çarpımı, $x^2 - 10x - 22$ ye eşit olan tüm x doğal sayılarını bulunuz.

Çözüm:

Kaba bir ispatla sayının 2 veya 3 basamaklı olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki x sayısı n basamaklı olsun.

$x^2 \geq 10^{2n-2}$ olduğundan $2n-1$ basamaklı en küçük sayıdır ve diğer 2 terim negatif olduğu için basamaklar çarpımının minimum değeri $x^2 - 10x - 22 > 10^{2n-3}$

Sayının basamaklar çarpımının maximum değeri ise n tane 10 çarpılmış olsaydı bile 10^n olurdu.

Basamaklar çarpımının maximum değeri minimum değerinden büyük veya tek değer alabiliyorsa eşit olacağından dolayı $10^n > 10^{2n-3}$ yani $n < 3$ bulunur.

x tek basamaklı ise $x = x^2 - 10x - 22$ olacağından dolayı Δ tamkare olmadığından çözüm gelmez.

x iki basamaklı ise $x = ab$ alalım. $a.b = (10a+b)^2 - 10.(10a+b) - 22$

$a \geq 2$ için b rakam olmak üzere

$$100a^2 + 19ab + b^2 - 100a - 10b - 22 > 0$$

olduğundan denklemin çözümü yoktur. $a = 1$ olmalıdır.

$b^2 + 9b - 22 = 0$ bulunur. Çözülürse $b = 2$ bulunur. $x = 12$ sağlar.

3 $a \neq 0, b, c$ gerçel sayılar olmak üzere; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri için

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\
ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\
&\cdots \\
ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c &= x_n \\
ax_n^2 + bx_n + c &= x_1
\end{aligned}$$

tanımlanan denklem sistemini ele alalım. $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ olsun. Bu sistemin,

(a) $\Delta < 0$ ise, çözümünün olmadığını,

(b) $\Delta = 0$ ise, tam olarak bir çözümünün olduğunu,

(c) $\Delta > 0$ ise, birden fazla çözümünün olduğunu gösteriniz.

4 Her dörtyüzlüde, uzunlukları bir üçgenin kenarları olabilen, üç ayrıtının birleştiği bir köşenin varlığını kanıtlayınız.

5 Tüm gerçel x sayıları için tanımlı, gerçel değerli f fonksiyonu, bir a sabiti için ve tüm x sayıları için

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

eşitliğini sağlıyor.

(a) f fonksiyonunun periyodik olduğunu (tüm x sayıları için $f(x+b) = f(x)$ olacak şekilde bir b pozitif sayısının bulunduğu) gösteriniz.

(b) $a = 1$ için, gerekli şartları sağlayan sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

6 Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$$

toplamını hesaplayınız.($[x]$ ile, x i aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

11. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1969

1 Şu özelliği sağlayan sonsuz çoklukta a doğal sayısının olduğunu gösteriniz: $z = n^4 + a$ sayısı, n doğal sayısının hiçbir değeri için asal değildir.

2 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sabitleri ve x gerçel değişkeni için

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

şeklinde tanımlanıyor. $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ise, $x_2 - x_1 = m\pi$ olacak şekilde bir m tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

3 Her $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değeri için, k tane ayrıtının uzunluğu a ve geri kalan $6 - k$ ayrıtının uzunluğu 1 olan bir dörtyüzlünün var olması için; $a > 0$ sayısı hakkında gerek ve yeter koşulları bulunuz.

4 AB çaplı γ yarım çemberi veriliyor. C, γ üzerinde A ve B den farklı bir nokta; D de C den AB ye inilen dikmenin ayağıdır. Üçü de AB doğrusuna teğet olan γ_1, γ_2, γ_3 çemberlerini ele alalım. Bunlardan γ_1, $\triangle ABC$'nin kenarlarına teğet, γ_2 ve γ_3 de γ ve CD ye teğet olup CD ye göre farklı taraflarda yer almaktadır. γ_1, γ_2 ve γ_3 ün ikinci bir ortak teğetinin olduğunu kanıtlayınız.

5 Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan $n > 4$ nokta veriliyor. Bu noktaların oluşturduğu en az $\binom{n-3}{2}$ dışbükey çokgenin bulunabileceğini gösteriniz.

6 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ şartını sağlayan tüm $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ gerçel sayıları için

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşulları veriniz.

12. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1970

1 M, $\triangle ABC$ nin AB kenarı üzerinde bir nokta olsun. r_1, r_2 ve r sırasıyla AMC, BMC ve ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları olsun. q_1, q_2 ve q da, sırasıyla aynı üçgenlerin ACB açıları üzerinde yer alan dışteğet çemberlerinin yarıçapları olsun.

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{p}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 a, b ve n tam sayıları 1 den büyük olup a ve b iki sayı sisteminin tabanlarıdır. a tabanındaki A_{n-1} ve A_n sayıları ile, b tabanındaki B_{n-1} ve B_n sayıları arasında

$$\begin{array}{rcl} A_n &=& x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ B_n &=& x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ x_n &\neq& 0, \quad x_{n-1} \neq 0. \end{array}$$

bağıntısı vardır.

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \Leftrightarrow a > b$$

olduğunu gösteriniz.

3 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ gerçel sayıları arasında

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

bağıntısı vardır. $b_1, b_2, \dots, b_n, \cdots$ sayıları

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

şeklinde tanımlanıyor.

(a) Her n için $0 \leq b_n < 2$ eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz.

(b) $0 \leq c < 2$ şartını sağlayan bir c sayısı verildiğinde, $b_n > c$ şartını sağlayan yeterince büyük n ler için, yukarıdaki özellikleri sağlayana $a_0, a_1, \dots$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

4 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ kümesinin birideki elemanların çarpımının, diğerindeki elemanların çarpına eşit olacak şekilde iki parçaya ayrılmasını mümkün kılan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5 $ABCD$ dörtyüzlüsünde BDC açısı dik açıdır. D den ABC düzlemine inilen dikmenin ayağı olan H, aynı zamanda $\triangle ABC$ nin yüksekliklerinin kesişim noktasıdır.

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

olduğunu kanıtlayınız. Eşitlik hangi dörtyüzlü için geçerlidir?

6 Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 100 nokta veriliyor. Bu noktaları köşe kabul eden tüm üçgenleri ele alalım. Bu üçgenlerin %70 inden daha fazlasının dar açılı olamayacağını gösteriniz.

13. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1971

1 Aşağıdaki iddianın $n = 3$ ve $n = 5$ için doğru, bunun haricinde her $n > 2$ doğal sayısı için yanlış olduğunu gösteriniz.

Her $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları için,

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n) + \cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

2 Köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_9$ olan bir P_1 çokyüzlüsünü ele alalım. $i = 2, 3, \ldots, 9$ olmak üzere; P_i ile, P_1 çokyüzlüsünün A_1 den A_2 ye ötelenmesi ile elde edilen çokyüzlüyü gösterelim. $P_1, P_2, \ldots, P_9$ çokyüzlülerinden en az ikisinin ortak bir iç noktaya sahip olduğunu kanıtlayınız.

3 $2^k - 3$ $(k = 2, 3, \ldots)$ biçimdeki tam sayılar kümesinin herhangi iki elemanı aralarında asal olan sonsuz elemanlı bir alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

4 $ABCD$ dörtyüzlüsünün yüzlerinden her biri dar açılı üçgendir. X, AB kenarı üzerinde A ve B den farklı bir noktadır. Benzer şekilde Y, Z, T sırasıyla BC, CD, DA kenarlarının iç noktalarıdır. Tüm $XYZTX$ kapalı çokgensel yollarını ele alalım.

(a) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, çokgensel yollar arasından en kısa yola sahip olanın bulunmadığını gösteriniz.

(b) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, sonsuz çoklukta en kısa çokgensel yol olduğunu, $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$ olmak üzere; bu en kısa yolun uzunluğunun da $2 \cdot AC \cdot \sin(\alpha/2)$ olduğunu gösteriniz.

5 Her m doğal sayısı için, düzlemde şu özelliği sağlayan bir S noktalar kümesinin var olduğunu gösteriniz: S deki her A noktası için, S de, A dan birim uzaklıkta olan tam olarak m nokta vardır.

6 $i, j = 1, 2 \ldots, n$ olmak üzere; $A = (a_{ij})$ elemanları negatif olmayan tam sayılar olan bir kare matris olsun. Herhangi bir eleman $a_{ij} = 0$ olduğunda i-inci satır ile j-inci sütundaki elemanların toplamının $\geq n$ olduğunu biliyoruz. Matristeki tüm elemanların toplamının $\geq n^2/2$ olduğunu gösteriniz.

14. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1972

1 Onluk sistemde, iki basamaklı on farklı sayıdan oluşan bir kümeden, elemanları toplamları aynı olan iki ayrık altküme seçilebileceğini gösteriniz.

2 $n \geq 4$ olmak üzere; her kirişler dörtgeninin her biri kirişler dörtgeni olan n dörtgene ayrılabileceğini kanıtlayınız.

3 Negatif olmayan her m ve n tam sayıları için,

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

kesrinin bir tam sayıya eşit olduğunu gösteriniz. ($0! = 1$.)

Çözüm:

[ ] sembolü tam kısım sembolü olmak üzere

Her x, y reel sayıları için $[2x] + [2y] \geq [\mathrm{x}] + [y] + [x+y]$ olduğunu gösterelim.

$x = [\mathrm{x}] + r$, $y = [y] + s$, $0 \leq r, s \leq 1$ olacak şekilde $r, s \in R$ sayıları vardır. $[\mathrm{x}] = a$,$[y] = b$ alalım.

$$[2x] + [2y] = 2a + 2b + [2r] + [2s]$$

$$[x+y] = a + b + [r+s]$$

üstteki iki özellik ispatı istenen eşitsizliğe yazılırsa $[2r] + [2s] \geq [\mathrm{r}] + [\mathrm{s}] + [r+s]$ olduğunu göstermek gerekir. $[\mathrm{r}] = 0$ ve $[\mathrm{s}] = 0$ olduğunu kullarak ve genelliği bozmadan $r \leq s$ alırsak $[\mathrm{r}] + [\mathrm{s}] + [r+s] = [r+s] \leq [s+s] = [2s] \leq [2r] + [2s]$ olduğundan ispat biter.

bizden istenen sayı varsayalım ki tam sayı olsun. O halde en az bir asal böleni vardır. Asal bölenleri sayısına k deresek asal bölenleri $1 \leq i \leq k$, p_i olarak düşünülebilinir.

O halde bu asal sayının paydaki en büyük kuvveti e paydadaki en büyük kuvveti f olsun. O halde sayının çarpanlarından biri p_i^{e-f} olur.

$$\sum_{k \geq 1} ([\frac{2m}{p_i^k}] + [\frac{2n}{p_i^k}] - [\frac{m}{p_i^k}] - [\frac{n}{p^k}])$$

bu ifadeye verdiğimiz eşitsizliği uygularsak $e - f \geq 0$ elde edilir. Burada p_i nin kuvveti hiçbir zaman negatif olmayacağından dolayı ispat tamamlanır.

4 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitif gerçel sayılar olmak üzere;

$$\begin{array}{rcl} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) & \leq & 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) & \leq & 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) & \leq & 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) & \leq & 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) & \leq & 0 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin sağlayan tüm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ beşlilerini bulunuz.

5 Tüm x, y gerçel sayıları için tanımlı gerçel değerli f ve g fonksiyonları, her x, y için

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(x)$ tamamiyle sıfır değilse ve her x için $|f(x)| \leq 1$ ise, her y için $|g(y)| \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

6 Dört farklı paralel düzlem veriliyor. Her bir düzlem üzerinde bir köşesi bulunan düzgün bir dörtyüzlünün var olduğunu kanıtlayınız.

15. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1973

1 g doğrusu üzerinde O noktası; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktaları g ile aynı düzlemde, g nin aynı tarafında ve $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ vektörleri birim vektör olacak şekilde alınıyor. $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ ile $\overrightarrow{OM}$ vekötürünün uzunluğu gösterilmek üzere; n tek ise,

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 M; uzayda, hepsi birden aynı düzlemde yer almayan sonlu noktalar kümesi olsun. M kümesindeki herhangi iki A ve B noktası için, AB ile CD paralel olacak; ama çakışık olmayacak şekilde M kümesinden C ve D noktaları seçilebiliyorsa, bu şekilde bir M kümesinin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

3 a ve b gerçel sayıları olmak üzere;

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

denkleminin en az bir gerçel çözümü olsun. Bu şekildeki tüm (a, b) sayı çifti için, $a^2 + b^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Çözüm:

Bu denklem katsayılarına göre simetrik olduğu için x^2 ile bölerek işe başlamalıyız. $x^2 + ax + b + \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$

Daha sonra $x + \dfrac{1}{x} = t$ denilip $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = (x + \dfrac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2$ olduğu denklemde yerine yazılırsa

$t^2 + at + b - 2 = 0$ elde edilir. Aynı zamanda $x + \dfrac{1}{x} = t$ yani $x^2 - tx + 1 = 0$ olup $\triangle = t^2 - 4 \geq 0$ olur.

Buradan $\mid t \mid \geq 2$ olarak bulunur.

Şimdi diğer denklemde kökleri bulalım.

$\mid t_{1,2} \mid = \mid \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \mid$ olarak bulunur.

$a \geq 0$ ise $\mid \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \mid \geq \mid \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \mid$ olacağından her iki katsayısı negatif için eşitsizliğe bakmak yeter.

$a < 0$ ise $\mid \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \mid \geq \mid \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \mid$ olacağıdan biri pozitif diğeri negatif katsayılı için eşitsizliğe bakmak yeter.

İki durumu birleştirirsek en genel halde $\dfrac{\mid a \mid + \sqrt{a^2 - 4.(b-2)}}{2} \geq 2$ bakmak yeter. Şimdi bu eşitsizliği çözelim.

$\mid a \mid + \sqrt{a^2 - 4.(b-2)} \geq 4$

$\sqrt{a^2 - 4.(b-2)} \geq 4 - \mid a \mid$ her iki tarafın karesi alınırsa

$a^2 - 4.(b-2) \geq 16 - 8 \mid a \mid + a^2$

$4 - 2 \mid a \mid \leq -b + 2$

$2 \mid a \mid \geq b + 2$ olması gereklidir.

$4a^2 \geq b^2 + 4b + 4$

$4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$ olarak bulunur.

$f(x) = 5x^2 + 4x + 4$ olsun. $f'(x) = 0$ denklemini çözüp yerine koyalım.

$f'(x) = 10x + 4 = 0$ yani $x = \dfrac{-2}{5}$ olur.

$f(x) \geq \dfrac{16}{5}$ olarak bulunur.

$4a^2 + 4b^2 \geq f(b) \geq \dfrac{16}{5}$

$a^2 + b^2 \geq \dfrac{4}{5}$ olur.

$\boxed{4}$ Bir asker, eşkenar üçgen şeklindeki bir bölgede mayın taraması yapıyor. Kullandığı mayın tarayıcı, eşkenar üçgenin yüksekliğinin yarısı kadar bir yarıçaplı bir dairenin içerisini tarayabiliyor. Asker üçgenin köşelerinden birinden başlayarak tüm bölgeyi taramak amacıyla yola koyuluyor. Askerin görevini en kısa mesafede tamamlayabileceği yolu bulunuz.

$\boxed{5}$ G; gerçel x değişkeninin

$$f(x) = ax + b, a \text{ ve } b \text{ gerçel sayılar}$$

biçimindeki sabit olmayan fonksiyonlarının kümesi olup, aşağıdaki özellikleri taşımaktadır:

(a) f ve g fonksiyonları G de ise, $g \circ f$ fonksiyonu da G dedir. (Burada $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$ oluyor.)

(b) f, G de ise, tersi olan f^{-1} de G dedir. (Burada $f(x) = ax + b$ nin tersi $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ oluyor.)

(c) G deki her f için, $f(x_f) = x_f$ olacak şekilde x_f gerçel sayısı vardır.

G deki her f için $f(k) = k$ olacak şekilde bir k gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

$\boxed{6}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif sayılar, q da $0 < q < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir gerçel sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sayılarını bulunuz:

(a) $k = 1, 2, \ldots, n$ için $a_k < b_k$,

(b) $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ için $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$,

(c) $b_1 + b_2 + \ldots b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

16. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1974

1 Üç oyuncu A, B ve C aralarında şöyle bir oyun oynuyor: Üç kartın her birine bir tam sayı yazılıyor. Bu üç p, q, r sayısı $0 < p < q < r$ koşulunu sağlıyor. Üç kart karıştırıldıktan sonra, her bir oyuncuya bir kart veriliyor. Her bir oyuncu, elindeki kartta yazılı sayı kadar fiş alıyor.

Bu süreç (kartların karıştırılması, dağıtılması, fişlerin alınması) en az iki tur sürüyor. Son tur sonunda A nın 20, B nin 10 ve C nin de 9 fişi vardır. Son turda B, r fiş almıştır. Buna göre, hangi oyuncu ilk turda q fiş almıştır?

2 ABC üçgeninin AB kenarı üzerinde bir D noktası alındığında, CD nin AD ile DB nin geometrik ortası olması için gerek ve yeter koşulun

$$\sin A \sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

(i) $CD = \sqrt{AD \cdot BD} \Rightarrow \sin\angle A \sin\angle B \le \sin^2 \frac{\angle C}{2}$
C nin D ye göre simetriği C' olsun. $CD \cdot DC' = AD \cdot BD$ olduğu için, $ACBC'$ bir kirişler dörtgenidir.
$\angle ACB$ nin açıortayı (ABC) çevrel çemberini L de kessin.
$BC = \sin\angle A$ dersek, $AC = \sin\angle B$ ve $BL = AL = \sin\frac{\angle C}{2}$ olacaktır.
$CD = DC'$ olduğu için, $[ADC] = [ADC']$, $[BCD] = [BDC']$, dolayısıyla $[ABC] = [AC'B] \le [ALB]$ dir. (AB ye ait yükseklik en büyük değerini yayı ortaladığında alır.)
$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle A \cdot \sin\angle B \le [ALB] = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle C \cdot \sin\angle C \Rightarrow \sin\angle A \cdot \sin\angle B \le \sin^2 \frac{\angle C}{2}$. ■

(ii) $\sin\angle A \sin\angle B \le \sin^2\frac{\angle C}{2} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}$ olacak şekilde D seçilebilir.
(ABC) çemberinin C yi içermeyen AB yayının orta noktası L olsun. AB nin orta noktası M olsun. $CH \perp AB$ ve $H \in AB$ olsun.
$BC = \sin\angle A$ dersek, $AC = \sin\angle B$, $BL = AL = \sin\frac{\angle C}{2}$ olacaktır.
$\sin\angle A \sin\angle B \le \sin^2\frac{\angle C}{2} \Rightarrow [ABC] \le [ABL] \Rightarrow CH \le ML$ dir.
C yi içermeyen AB yayı üzerinde hareketli C' noktaları alalım. C' den AB ye inilen dikmenin ayağı H' olsun. $0 < C'H' \le ML$ dir. Olası $C'H'$ lerden birinin uzunluğu CH ye eşit olsun. Böyle bir $C'H'$ vardır; çünkü $C'H'$, 0 ile ML arasında değişiyor ve $CH \le ML$. Söz konusu C' noktası için $CC' \cap AB = \{D\}$ olsun. $CH = C'H'$ olduğu için $CD = DC'$ dür. D noktasının çevrel çembere göre kuvvetinden $CD^2 = CD \cdot CD' = AD \cdot BD$. ■

3 Hiçbir $n \ge 0$ tam sayısı için, $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ sayısının 5 ile bölünmediğini kanıtlayınız.

Çözüm:

İki adet polinom tanımlayalım,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^{2k}$$

Bu iki polinomu taraf tarafa toplayıp, çıkartırsak

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k = (1+x)^{2n+1}$$

$$Q(x) - P(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-x)^k = (1-x)^{2n+1} = (1-x)^{2n+1}$$

Yani

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}x^{2k+1}=\frac{(1+x)^{2n+1}-(1-x)^{2n+1}}{2}\implies\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}x^{2k}=\frac{(1+x)^{2n+1}+(x-1)^{2n+1}}{2x}$$

Eğer $x=2^{3/2}$ koyarsak,

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}=\frac{(1+2^{3/2})^{2n+1}+(2^{3/2}-1)^{2n+1}}{2^{5/2}}$$

Eğer bu ifade 5'e bölünüyorsa 2^{n+3} katı da 5'e bölünür. Dolayısıyla

$$2^{n+3}S=2^{n+1/2}(1+2^{3/2})^{2n+1}+2^{n+1/2}(2^{3/2}-1)^{2n+1}=(4+\sqrt{2})^{2n+1}+(4-\sqrt{2})^{2n+1}$$

Eğer $a_n+b_n\sqrt{2}=(4+\sqrt{2})^{2n+1}$ dersek, $a_n-b_n\sqrt{2}=(4-\sqrt{2})^{2n+1}$ olur. $5\mid S$ olduğundan $5\mid a_n$ olmalıdır. Ayrıca

$$a_n^2-2b_n^2=(4+\sqrt{2})^{2n+1}(4-\sqrt{2})^{2n+1}=14^{2n+1}\equiv-1\pmod 5$$
$$\implies -2b_n^2\equiv-1\pmod 5\implies b_n^2\equiv 3\pmod 5$$

çelişkisi elde ederiz. Dolayısıyla hiçbir n için $5\mid S$ olamaz.

$\boxed{4}$ 8×8 bir satranç tahtasının p adet kesişmeyen dikdörtgene aşağıdaki koşullarda bölündüğü durumları ele alalım:

(i) Her dikdörtgen, siyah kareler kadar beyaz kare içeriyor.

(ii) i. dikdörtgendeki beyaz karelerin sayısı a_i ise, $a_1<a_2<\cdots<a_p$.

Bu şekilde bir parçalanmayı mümkün kılan en büyük p sayısını bulunuz. Bu p değeri için, mümkün olan tüm $a_1,a_2,\ldots,a_p$ dizilerini belirleyiniz.

Çözüm:

Tahtada 32 beyaz kare olduğundan

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=32$$

olur. $a_1\geq 1, a_2\geq 2,\ldots,a_p\geq p$ olduğundan

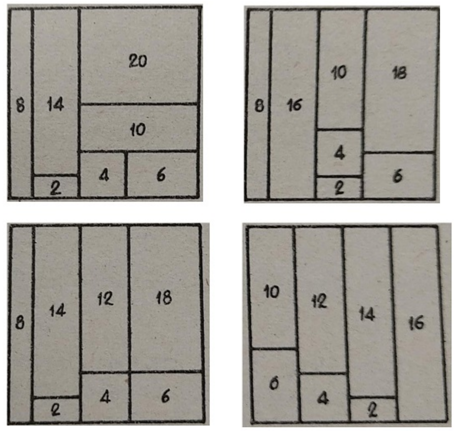
$$32\geq 1+2+\cdots+p=\frac{1}{2}p(p+1)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan $p^2+p\leq 64$ ve böylece $p\leq 7$ buluruz. Buna göre, istenilen türde bir ayrışımda en çok 7 dikdörtgen olabildiğini anlarız.

7 dikdörtgene ayrılma varlığını göstermek ve bunların hepsini bulmak için toplamı 32 eden 7 farklı tam sayı aramalıyız. Bunların tam bir listesi

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+5+6+11 &= 32\\
1+2+3+4+5+7+10 &= 32\\
1+2+3+4+5+8+9 &= 32\\
1+2+3+4+6+7+9 &= 32\\
1+2+3+5+6+7+8 &= 32
\end{aligned}$$

dir. Şimdi 11 siyah kare ve 11 beyaz kare ile toplam $2\cdot 11=22$ birim kareden oluşan bir dikdörtgen, 8×8 türündeki bir tahtadan kesilip çıkarılamadığı için ilk toplam olanaksızdır. Diğer hallerin olanaklı olduğunu olduğunu gösteren çizimleri vererek çözümü tamamlarız.



Kaynak: Samuel L. Greitzer'in IMO 1959-1977 kitabının Tübitak Yayınları tarafından yapılan çevirisinden alınmıştır.

5 a, b, c, d rastgele seçilmiş pozitif sayılar olmak üzere,

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

toplamının alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

6 P; tam katsayılı, sabit olmayan bir polinom olsun. $(P(k))^2 = 1$ eşitliğini sağlayan farklı k tam sayılarının sayısı $n(P)$ ise, $\deg(P)$ ile P polinomunun derecesi gösterilmek üzere, $n(P) - \deg(P) \leq 2$ olduğunu kanıtlayınız.

17. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1975

1 x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \text{ ve } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

olacak şekilde gerçel sayılar olsun. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nin herhangi bir permütasyonu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ise,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 $a_1, a_2, a_3, \ldots$; pozitif tam sayıların artan sonsuz bir dizisi olsun. x, y pozitif tam sayılar ve $q > p$ olmak üzere; her $p \geq 1$ için

$$a_m = xa_p + ya_q$$

şeklinde yazılabilen sonsuz çoklukta a_m sayısının bulunduğu kanıtlayınız.

3 Keyfi bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde, üçgenin dışına doğru, $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$ olacak şekilde ABR, BCP ve CAQ üçgenleri çiziliyor. $\angle QRP = 90°$ ve $QR = RP$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$\triangle RAQ$ üçgenini $\triangle RBQ' \cong \triangle RAQ$ olacak şekilde, BR üzerine şeklin dışına doğru yapıştıralım.

$\angle Q'RB = \angle ARQ$ olduğu için $\angle Q'RQ = \angle BRA = 150°$ ve $RQ' = RQ$.

$\angle RBP + \angle RAQ + \angle QCP = 360°$ ve $\angle RBQ' = \angle RAQ$ olduğu için $\angle Q'BP = \angle PCQ$.

$BP = a$ ve $AQ = b$ dersek, $\triangle BPC$ ve $\triangle ACQ$ de Sinüs teoreminden $CP = a\sqrt{2}$ ve $CQ = b\sqrt{2}$ çıkar.

$\angle Q'BP = \angle PCQ$, $Q'B : BP = b : a$ ve $QC : CP = 2b : 2a$ olduğu için $\triangle Q'BP \sim \triangle QCP$ olur. $Q'P = c$ dersek, $QP = c\sqrt{2}$ dir.

$\angle BPQ' = \angle APC$ olduğu için $\angle BPC = \angle Q'PQ = 105°$. Ayrıca, $Q'P : PQ = c : c\sqrt{2}$ ve $BP : PC = a : a\sqrt{2}$ olduğu için $\triangle QPQ' \sim \triangle BPC$ olur. O halde, $\angle QQ'P = 45°$ ve $\angle Q'QP = 30°$.

$Q'RQP$ dörtgeninde, $Q'R = RQ$ ve $360° - \angle Q'RQ = 210° = 2 \cdot \angle Q'PQ$ olduğu için, R merkezli, RQ yarıçaplı çember, Q', P ve Q noktalarından geçer. Bu durumda, $\angle PRQ = 2 \cdot \angle QQ'P = 90°$ ve $Q'R = RP = RQ$ dur.

4 4444^{4444} sayısı onluk sistemde yazılırsa, rakamları toplamı A dır. A nın rakamları toplamı B olsun. B nin rakamları toplamını bulunuz. (A ve B, onluk sistemde yazılmıştır.)

Çözüm 1:

$4444^{4444} < (10^4)^{4444} = 10^{17776}$ olduğu için $A < 9 \cdot 17776 < 10 \cdot 17776 = 177760 < 179999$.

A nın rakamları toplamı, B, en fazla 45 olabilir (Örn. $A = 99999$).

B nin rakamları toplamı en fazla 12 olabilir (Örn. $B = 39$).

$4444^{4444} \equiv 16^{4444} \equiv 4^{8888} \equiv (4^3)^{2962} \cdot 4^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9$ olduğu için $B \equiv 7 \pmod 9$ olmalı. O halde $B = 7$ dir.

Çözüm 2:

$s(n)$ fonksiyonunu n'nin rakamları toplamı olarak tanımlarsak, bizden $n = 4444^{4444}$ için $S = s(s(s(n)))$ değeri istenmektedir. Öncelikle $n \equiv s(n) \pmod 9$ olduğundan

$$S \equiv 4444^{4444} \equiv 2^{4444} \equiv \left(2^6\right)^{740} \cdot 2^4 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9$$

olacaktır. Ayrıca n sayısı a basamaklıysa $10^{a-1} \le n < 10^a$ ve $s(n) \le 9a$ olacaktır. Yani

$$s(n) \le 9a \le 9\left[\log_{10}(n) + 1\right]$$

olacaktır. $n = 4444^{4444}$ için

$$s(n) \le 9[4444 \cdot \log_{10}(4444) + 1] < 9 \cdot (4444 \cdot 4 + 1) = 159993$$

olur. Devam edersek,

$$s(s(n)) \le 9\left[\log_{10}(s(n)) + 1\right] < 9\log_{10}(159993) + 9 < 9 \cdot 6 + 9 = 63$$

olur. $s(s(n))$ en fazla 62 olabileceğinden $S = s(s(s(n))) \le 5 + 9 = 14$ olacaktır. $1 \le S \le 14$ ve $S \equiv 7 \pmod 9$ şartlarını sağlayan tek S değeri 7'dir. Buradan $S = 7$ bulunur.

5 Birim çember üzerinde, herhangi ikisinin arasındaki uzaklık bir rasyonel sayı olacak şekilde 1975 nokta alınıp alınamayacağını, ispatlayarak, belirleyiniz.

6 Aşağıdaki özelliklere sahip tüm iki değişkenli P polinomlarını bulunuz:

(i) Bir n tam sayısı ve t, x, y gerçel sayıları için P, n. dereceden homojendir. Yani

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)$$

(ii) Tüm a, b, c gerçel sayıları için

$$P(b + c, a) + P(c + a, b) + P(a + b, c) = 0$$

(iii) $P(1, 0) = 1$

18. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1976

1 Düzlemde, alanı 32 olan bir dışbükey dörtgenin karşılıklı iki kenarı ile bir köşegeninin uzunlukları toplamı 16 dır. Diğer köşegenin uzunluğunun alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

Çözüm:

$AB = a$, $BD = e$, $CD = c$ ve $a+c+e = 16$ olsun. $AO \geq GO$ dan $\dfrac{(a+c)+e}{2} \geq \sqrt{e(a+c)} \Rightarrow 64 \geq e(a+c)$.

$[ABC] \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot e$ ve $[BCD] \leq \frac{1}{2} \cdot c \cdot e$ olacağı için $32 = [ABCD] \leq \frac{1}{2} \cdot e \cdot (a+c) \leq 32$ olacaktır.

Eşitsizlikte, eşitliğin sağlanması için $e = a + c = 8$ ve $\angle ABD = \angle BDC = 90^\circ$ olması gerekir.

A dan geçen BD ye paralel olan doğru ile CD doğrusu F de kesişsin. Ayrıca, $AB \parallel CD$ olduğu için $AF = e = 8$ ve $DF = a$ dır. Bu durumda, $\triangle AFC$ dik üçgeninde, $AF = FC = 8$ olduğu için AC hipotenüsü $8\sqrt{2}$ dir. ■

2 $P_1(x) = x^2 - 2$ ve $j = 2, 3, \ldots$ için $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ olsun. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için, $P_n(x) = x$ denkleminin tüm köklerinin gerçel ve farklı olduğunu gösteriniz.

3 Birim küplerle tamamen doldurulabilen dikdörtgen şeklinde bir kutu veriliyor. Kenarları kutunun kenarlarına paralel olacak şekilde her biri 2 hacimli küplerle bu kutunun en fazla tam olarak %40 ı doldurulabiliyorsa, böyle kutuların sahip olabileceği tüm boyutları belirleyiniz.

4 Toplamları 1976 olan pozitif tam sayıların çarpımı şeklinde ifade edilebilecek en büyük sayıyı (ispatlayarak) belirleyiniz.

5 $q = 2p$ ve her a_{ij} katsayısının $\{-1, 0, 1\}$ kümesinin bir elemanı olduğu, $x_1, x_2, \ldots, x_q$ bilinmeyenli p denklemli aşağıdaki denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q &= 0 \\
&\vdots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q &= 0
\end{aligned}$$

Sistemin

(a) tüm x_j ler $(j = 1, 2, \ldots, q)$ birer tam sayı,

(b) en az bir j değeri için $x_j \neq 0$,

(c) $|x_j| \leq q$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$

olacak şekilde bir $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ çözümünün olduğunu kanıtlayınız.

6 $\{u_n\}$ dizisi

$$u_0 = 2, u_1 = 5/2 \text{ ve } n = 1, 2, \ldots \text{ için } u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2)$$

şeklinde tanımlanıyor. $[x]$ ile $\leq x$ olan en büyük tam sayı gösterilmek üzere; n pozitif tam sayıları için

$$[u_n] = 2^{[2^n - (-1)^n]/3}$$

olduğunu kanıtlayınız.

19. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1977

1 $ABCD$ karesinin içerisine ABK, BCL, CDM, DAN eşkenar üçgenleri çiziliyor. KL, LM, MN, NK doğru parçaları ile AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN doğru parçalarının orta noktalarının düzgün bir onikigenin köşeleri olduğunu kanıtlayınız.

2 Sonlu bir gerçel sayılar dizisinin herhangi ardışık yedi teriminin toplamı negatif, herhangi ardışık on bir teriminin toplamı ise pozitiftir. Buna göre, bu dizinin terim sayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

3 $n > 2$ olarak verilen bir tam sayı ve V_n, $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $1 + kn$ formundaki tam sayıların kümesi olsun. $m \in V_n$ sayısına; $pq = m$ olacak şekilde $p, q \in V_n$ sayıları bulunamıyorsa, V_n de *bölünemez* (çarpanlara ayrılamaz) denir. V_n de bölünemeyen elemanların çarpımı olarak birden fazla şeklinde ifade edilebilen bir $r \in V_n$ sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

4 a, b, A, B gerçel değişmezleri ve

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta$$

veriliyor. Her θ gerçel sayısı için $f(\theta) \geq 0$ ise,

$$a^2 + b^2 \geq 2 \text{ ve } A^2 + B^2 \leq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

5 a ve b pozitif tam sayılar olsun. $a^2 + b^2$ sayısı $a + b$ ile bölündüğü zaman, bölüm q ve kalan r oluyor. $q^2 + r = 1977$ olmasını sağlayan tüm (a, b) çiftlerini bulunuz.

6 $f(n)$, tüm pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı ve bu kümedeki tüm değerleri alan bir fonksiyon olsun. Her pozitif n tam sayısı için

$$f(n+1) > f(f(n))$$

ise, her n için

$$f(n) = n$$

olduğunu kanıtlayınız.

20. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1978

1 m ve n, $1 \leq m < n$ koşulunu sağlayan doğal sayılardır. 1978^m ile 1978^n sayılarının ondalık gösterimlerindeki son üç rakam eşittir. $m+n$ nin en küçük değerini almasını sağlayan m ve n yi bulunuz.

2 Bir kürenin içerisindeki bir P noktası veriliyor. P den çıkan ve ikişerli olarak birbirine dik olan üç ışın küreyi U, V ve W da kesiyor. PU, PV ve PW doğruları tarafından belirlenmiş paralelyüzlünün P köşesinin köşegence karşısındaki köşesi Q olsun. Yukarıda anlatıldığı gibi P den çıkan tüm üçlü ışınlar için, Q noktalarının geometrik yerini bulunuz.

3 Pozitif tam sayılar kümesi

$$\begin{array}{ccccccccc} f(1) & < & f(2) & < & \dots & < & f(n) & < & \dots, \\ g(1) & < & g(2) & < & \dots & < & g(n) & < & \dots \end{array}$$

ve her $n \geq 1$ için,

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

olacak şekilde iki ayrık $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$, $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ kümelerinin birleşimi ise, $f(240)$ ı belirleyiniz.

4 ABC üçgeninde $AB = AC$ dir. AB ve AC ye sırasıyla P ve Q da teğet olan çember, ABC üçgeninin çevrel çemberine de içten teğettir. PQ doğru parçasının orta noktasının ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Çemberlerin değme noktası T, küçük çemberin merkezi S, PQ nun orta noktası M olsun.

$SP = SQ$ olduğu için AS doğrusu, $\angle BAC$ nin açıortayıdır. Dolayısıyla (ABC) çemberinin merkezi, A, M, S, T doğrusaldır. Yani AT, (ABC) nin çapıdır.

$\angle ABC = \angle APM = \angle PSA = 2 \cdot \angle PTS$ ve $BPMT$ dörtgeni kirişler dörtgeni olduğu için $\angle PTS = PBM = \dfrac{\angle ABC}{2}$. Yani BM, $\angle ABC$ nin açıortayıdır. Bu durumda M noktası $\triangle ABC$ nin iç merkezi olacaktır.

Çözüm 2:

Çemberlerin değme noktası T, küçük çemberin merkezi S, PQ nun orta noktası M olsun.

$SP = SQ$ olduğu için AS doğrusu, $\angle BAC$ nin açıortayıdır. Dolayısıyla (ABC) çemberinin merkezi, A, M, S, T doğrusaldır. Yani AT, (ABC) nin çapıdır.

Çemberlerin T deki teğeti AB ile B', AC ile C' noktasında kesişsin.

$\triangle APS \sim \triangle ATB'$ olduğu için $\dfrac{MS}{AM} = \dfrac{BB'}{AB}$, dolayısıyla da $BM \parallel B'S$. Küçük çember, $\triangle AB'C'$ nin içteğet çemberi olduğu için $B'S$, $\angle AB'C'$ nün açıortayı olduğu için BM de, $\angle ABC$ nin açıortayıdır. Bu durumda M, $\triangle ABC$ nin iç merkezidir.

5 $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, 3 \dots, n, \dots)$, farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir dizi olsun. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(a_, a_2, \ldots, a_n)$ sonlu dizisinin terimleri birbirinden farklı pozitif tam sayılar olduğu için terimlerin küçükten büyüğe doğru sıralanışı $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ olsun. Dolayısıyla her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $b_k \geq k$ olur. $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ ve $\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$ dizileri için Yeniden düzenleme eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \frac{1}{k^2}) \geq \sum_{k=1}^{n}(b_k \cdot \frac{1}{k^2}) \tag{1}$$

olur. Ayrıca $b_k \geq k$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k \cdot \frac{1}{k^2}) \geq \sum_{k=1}^{n}(k \cdot \frac{1}{k^2}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{2}$$

olur. Böylece (1) ve (2) den, $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ sonucuna ulaşırız.

6 Uluslararası bir topluluğun üyeleri altı farklı ülkeden gelmiştir. Üye listesi $1, 2, \ldots, 1978$ ile numaralandırılmış 1978 isim içermektedir. Numarası kendi ülkesinden gelen iki üyenin numaralarının toplamına eşit olan veya numarası kendi ülkesinden gelen bir üyenin numarasının iki katı olan en az bir üyenin bulunduğunu ispatlayınız.

21. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1979

1 p ve q,

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

koşulunu sağlayan doğal sayılar olsun. p nin 1979 ile bölündüğünü kanıtlayınız.

2 $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgenini tepe, $B_1B_2B_3B_4B_5$ beşgenini de taban yüzü olarak kabul eden bir prizma veriliyor. Bu iki beşgenin her kenarı ile her $i, j = 1, \ldots, 5$ için tanımlanan A_iB_j doğru parçaları kırmızı ya da yeşile boyanıyor. Köşeleri, prizmanın köşeleri olan ve tüm kenarları boyanmış olan her üçgenin farklı renge boyanmış iki kenarı vardır. Tepe ve taban yüzlerindeki 10 kenarın da aynı renkte olduğunu gösteriniz.

3 Düzlemde, iki noktada keşisen iki çemberin kesişim noktalarından biri A olsun. Sabit hızlarla hareket eden iki nokta, A dan aynı anda başlayarak, kendi çemberlerinin üzerinde bir tam tur atarak aynı anda A ya gelmektedir. Düzlemde, herhangi bir anda, hareket eden noktalara eşit uzaklıkta yer alan sabit bir P noktasının bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Çemberlerden $[AB]$ çaplı olanın merkezi O, $[AC]$ çaplı olanın merkezi Q olsun. O merkezli çember üzerindeki hareketli nokta B', Q merkezli çember üzerindeki hareketli nokta C' olsun. BC nin orta noktası M, $B'C'$ doğru parçalarının orta noktaları hareketli M' noktası olsun.

ABC üçgeninde M, Q, O noktaları bulundukları kenarların orta noktaları olduğu için $OM = AQ = QC'$ ve $QM = AO = OB'$ dür.

B' ve C' noktaları turlarını eşit sürede tamamladıklarına göre, bu noktaların açısal hızları eşittir. AB' ile AC' yaylarının ölçüleri eşit, dolayısıyla, BB' ile CC' yaylarının ölçüleri de eşit olacak. Bu durumda, $\angle BOB' = \angle CQC'$. Aynı zamanda, $AOMQ$ dörtgeni paralelkenar olduğu için, $\angle BAC = \angle BOM = \angle MQC$. Bu durumda $\angle BOM - \angle BOB' = \angle CQM - \angle CQC' \Rightarrow B'OM = C'QM$ olur. $OB' = QM$ ve $OM = QC'$ olduğu için $\triangle MOB' \cong \triangle C'QM$, dolayısıyla da $B'M = C'M$ olacaktır. Söz konusu sabit P noktası M dir.

4 π düzlemi ile, bu düzlemde bir P noktası ile bu düzlemde yer almayan bir Q noktası veriliyor. $(QP+PR)/QR$ oranını en büyük yapan ve π düzleminde yer alan tüm R noktalarını bulunuz.

5

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$$

koşulunu sağlayan negatif olmayan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sayılarının bulunmasını sağlayan tüm gerçel a sayılarını bulunuz.

6 A ve E düzgün bir sekizgenin karşı iki köşesi olsun. Bir kurbağa, A dan başlayarak zıplıyor. Kurbağa, sekizgenin E hariç her köşesinden, komşu köşelerden birine zıplayabiliyor. E ye gelince ise zıplamayı bırakıyor. a_n ile tam olarak n zıplama sonucu E ye gelebilmeyi mümkün kılan farklı yolların sayısını gösterelim. $x = 2 + \sqrt{2}$ ve $y = 2 - \sqrt{2}$ olmak üzere; $a_{2n-1} = 0$ ve her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

Not: n zıplamalı bir yol, köşelerden oluşan bir $(P_0, \ldots, P_n)$ dizisi olup aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$,

(ii) her $0 \leq i \leq n-1$ için, $P_i \neq E$,

(iii) her $0 \leq i \leq n-1$ için, P_i ile P_{i+1} komşudur.

22. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1981

1 ABC üçgeninin içerisinde hareketli bir P noktası alınıyor. P den BC, CA, AB kenarlarına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F olmak üzere;

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

yi en küçük yapan tüm P noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $PD = x$, $PE = y$, $PF = z$ olsun. Cauchy'den

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot (ax + by + cz) \geq \left(\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sqrt{ax} + \sqrt{\frac{b}{y}} \cdot \sqrt{by} + \sqrt{\frac{c}{z}} \cdot \sqrt{cz}\right)^2 = (a+b+c)^2$$

$ax + by + cz = 2 \cdot [ABC]$ olduğu için

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2 \cdot [ABC]} = \text{Sabit}$$

olacaktır. Eşitlik hali

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{\sqrt{ax}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{y}}}{\sqrt{by}} = \frac{\sqrt{\frac{c}{z}}}{\sqrt{cz}} \Rightarrow x = y = z$$

iken sağlanır. O halde, P noktası iç merkez olduğunda, $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ ifadesi en küçük değerini alır.

2 $1 \leq r \leq n$ olmak üzere, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin r elemanlı tüm alt kümelerini ele alalım. Bu alt kümelerin her birinin en küçük bir elemanı var. Bu en küçük sayıların aritmetik ortalamasını $F(n,r)$ ile gösterirsek,

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$$

olduğunu gösteriniz.

3 $m, n \in \{1, 2 \ldots, 1981\}$ ve $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ koşullarını sağlayan m ve n tam sayıları için $m^2 + n^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

4 (a) Hangi $n > 2$ değerleri için, en büyük elemanı diğer $n-1$ elemanın en küçük ortak katını bölecek şekilde n ardışık pozitif sayıdan oluşan bir küme bulunur?

(b) Hangi $n > 2$ değerleri için, bu özelliği sağlayan tam olarak bir küme vardır?

5 Verilen bir üçgenin içerisinde ortak bir O noktasına sahip üç eş çember, her biri üçgenin iki kenarına teğet olacak şekilde alınıyor. Üçgenin iç merkezi, çevrel merkezi ve O noktasının doğrudaş olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

BC ye teğet olmayan çemberin merkezi A', AC ye teğet olmayan çemberin merkezi B', AB ye teğet olmayan çemberin merkezi C' olsun.

Çemberler eş olduğu için $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$ olacaktır. Bu durumda $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.

AA', BB', CC' doğruları $\triangle ABC$ de iç açıortay olduğu için $\triangle A'B'C'$ de de iç açıortaydır. Dolayısıyla $\triangle ABC$ nin iç merkezi ile $\triangle A'B'C'$ nin iç merkezi çakışıktır.

BC, $B'C'$ doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla D, D' olsun. O noktası $\triangle A'B'C'$ nin çevrel merkezidir. $\triangle ABC$ nin çevrel merkezi de Q olsun.

$OD' \perp B'C'$ ve $QD \perp BC$ olduğu için $QD \parallel OD'$ dür. Üçgenler benzer olduğu için benzerlik oranı $k = \frac{ID'}{ID} = \frac{OD'}{QD}$ dir. Parallelikle bu eşitliği birleştirince, I, O, Q noktalarının doğrusal olduğu sonucu çıkar.

6 $f(x, y)$ fonksiyonu, her negatif olmayan x, y tam sayıları için

(1) $f(0, y) = y + 1,$

(2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1),$

(3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

koşullarını sağlıyor. $f(4, 1981)$ i belirleyiniz.

23. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1982

1 $f(n)$, tüm pozitif n tam sayıları için tanımlanmış, negatif olmayan tam sayı değerler alan bir fonksiyondur. Ayrıca, her m, n için

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ veya } 1$$

$$f(2) = 0, f(3) > 0, \text{ ve } f(9999) = 3333$$

dir. $f(1982)$ yi belirleyiniz.

2 Kenarları a_1, a_2, a_3 (a_i, A_i nin karşısındaki kenar) olan ikizkenar olmayan $A_1A_2A_3$ üçgeni veriliyor. Her $i = 1, 2, 3$ için; M_i ile a_i kenarının orta noktasını, T_i ile içteğet çemberin a_i kenarına dokunduğu noktayı gösteriyoruz. T_i nin A_i açısının iç açıortayına göre simetriğini S_i ile gösteriyoruz. M_1S_1, M_2S_2 ve M_3S_3 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

3 Aşağıdaki özelliklere sahip sonsuz pozitif gerçel sayılar dizisi x_n i ele alalım:

$x_0 = 1$, ve her $i \geq 0$ için, $x_{i+1} \leq x_i$

(a) Bu tipteki her dizi için,

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$$

olacak şekilde bir $n \geq 1$ sayının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b)

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

eşitsizliğini sağlayan, yukarıda anlatılan şekilde bir dizi bulunuz.

4 n pozitif tam sayısı için,

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

denkleminin tam sayılarda bir (x, y) çözümü varsa, denklemin en az üç çözümünün olduğunu kanıtlayınız. $n = 2891$ için, denklemin çözümünün olmadığını gösteriniz.

5 $ABCDEF$ düzgün altıgeninin AC ve CE köşegenleri üzerinde

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

olacak şekilde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. B, M, N noktaları doğrudaş ise, r yi belirleyiniz.

Çözüm:

$CM = EN \Rightarrow \angle NDE = \angle MBC \Rightarrow \angle NBC + \angle NDC = 120° \Rightarrow \angle BND = 120°$

$BC = CD$ ve $360° - \angle BCD = 240° = 2 \cdot 120° = 2 \cdot \angle BND$ olduğu için;

C noktası, B, N, D noktalarından geçen çemberin merkezidir. $CN = 1$ dersek, $CE = \sqrt{3}$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6 S bir kenarı 100 olan bir kare olsun. L, bu kare içerisinde kendini kesmeyen ve $A_0 \neq A_n$ olmak üzere A_0A_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ doğru parçalarının birleşiminden oluşan bir yol olsun. S nin üzerindeki her P noktası için, L nin üzerinde P ye olan uzaklığı $1/2$ den büyük olmayan bir nokta bulunabildiğini varsayalım. L üzerinde, aralarındaki uzaklık 1 den büyük olmayan ve aralarındaki (L deki) yol 198 den küçük olmayan X ve Y noktalarının bulunduğunu kanıtlayınız.

24. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1983

1 Aşağıdaki koşulları sağlayan, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlanmış ve pozitif gerçel değerler alan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

(i) Tüm pozitif x, y sayıları için, $f(xf(y)) = yf(x)$;

(ii) $x \to \infty$ iken $f(x) \to 0$.

2 Eş olmayan, sırasıyla O_1 ve O_2 merkezli düzlemdeş C_1 ve C_2 çemberlerinin kesiştiği iki farklı noktadan biri A olsun. Bu çemberlerin ortak teğetlerinden biri C_1 e P_1 de, C_2 ye P_2 de; diğeri de C_1 e Q_1 de, C_2 ye Q_2 de dokunmaktadır. M_1, P_1Q_1 in orta noktası; M_2, P_2Q_2 nin orta noktası olsun. $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

İki çemberin diğer kesişimi B olsun. P_1P_2, Q_1Q_2, O_1O_2 doğruları Q da kesişsin. AB doğrusu, P_1P_2 yi P de kessin.

Açık şekilde, P_1Q_1 ile O_1O_2 doğruları birbirlerine M_1 de dik; P_2Q_2 ile O_1O_2 de birbirlerine M_2 de diktir.

$\triangle O_1P_1M_1 \sim \triangle O_2P_2M_2$ olduğu için

$$\frac{O_1P_1}{O_1M_1} = \frac{O_2P_2}{O_2M_2} \Rightarrow \frac{O_1A}{O_1M_1} = \frac{O_2A}{O_2M_2} \qquad (*)$$

P noktası kuvvet ekseni üzerinde olduğu için $PP_1 = PP_2$, dolayısıyla da $P_1P_2M_2M_1$ dik yamuğunda, AB doğrusu orta taban olacaktır. Böylece, $M_1A = AM_2$ ve $\angle AM_1O_1 = \angle AM_2O_1$ olmuş oldu.

O_1O_2 üzerinde bir M noktası, $\triangle AM_1O_1 \cong \triangle AM_2M$ olacak şekilde alınsın. $AM = AO_1$ ve $MM_2 = M_1O_1$ dir. Bu durumda, $(*)$ dan dolayı

$$\frac{AM}{MM_2} = \frac{O_2A}{O_2M_2}$$

olur. Bu da, AM_2 nin, $\angle MAO_2$ nin açıortayı olduğu anlamına gelir. Bu durumda,

$$\angle O_2AM_2 = \angle M_2AM = \angle M_1AO_1 \Longrightarrow \angle M_1AM_2 = \angle O_1AO_2$$

olur.

3 a, b, c; herhangi ikisinin 1 den büyük bir ortak böleni olmadığı pozitif tam sayılar olsun. x, y, z negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $xbc + yca + zab$ şeklinde ifade edilemeyen en büyük tam sayının $2abc - ab - bc - ca$ olduğunu gösteriniz.

4 ABC bir eşkenar üçgen ve $\mathcal{E}$ AB, BC ve CA doğru parçalarının üzerindeki (A, B, C dahil) tüm noktaların kümesi olsun. $\mathcal{E}$ nin her iki ayrık alt kümeye parçalanışı için, bu alt kümelerden en az birinin bir dik üçgenin köşelerini içerip içermediğini belirleyiniz. Cevabınızı açıklayınız.

5 Herhangi üçü bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olmayacak şekilde, her biri 10^5 e eşit ya 10^5 ten küçük 1983 tane pozitif tam sayı bulmak mümkün müdür? Cevabınızı açıklayınız.

6 a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olsun.

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin ne zaman sağlandığını belirtiniz.

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

$a \geq b \geq c$ olsun. O zaman $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{c}$ dir. Ve aynı zamanda $a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \leq c(a+b-c)$ dir.
Şimdi bu iki sıralamaya yeniden düzenleme eşitsizliği uygulayalım.
$\dfrac{1}{c}.c(a+b-c) + \dfrac{1}{b}.b(a+c-b) + \dfrac{1}{a}.a(b+c-a) \geq \dfrac{1}{b}.c(a+b-c) + \dfrac{1}{a}.b(a+c-b) + \dfrac{1}{c}.a(b+c-a)$
Düzenlersek ;
$\Longrightarrow a+b+c \geq a+b+c+\dfrac{ab-a^2}{c} + \dfrac{bc-b^2}{a} + \dfrac{ac-c^2}{b}$
$\Longrightarrow 0 \geq \dfrac{a(b-a)}{c} + \dfrac{c(a-c)}{b} + \dfrac{b(c-b)}{a}$
Bu eşitsizliği abc ile çarparsak $a^2b(a-b) + c^2a(c-a) + b^2c(b-c) \geq 0$ ispatlanır.

25. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1984

1 $x+y+z=1$ eşitliğini sağlayan x, y, z negatif olmayan tam sayıları için, $0 \leq yz+zx+xy-2xyz \leq 7/27$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

İlk önce ≥ 0 gösterelim. Varsayalım x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun. O zaman Aritmetik Harmonik Orta dan $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ dir. Paydaları eşitlersek $xy+yz+zx \geq 9xyz$ elde edilir. O halde $xy+yz+zx - 2xyz \geq 7xyz > 0$ olur. Sağlar. Eğer en az biri 0 a eşitse $xy+yz+zx \geq 2xyz = 0$ olur ki sağlar. İlk şıkkı ispatladık.

Şimdi ikinci kısma bakalım. **Schur'**un gelişmiş versiyonundan $x, y, z \geq 0$ için $(x+y-z)(y+z-x)(x+z-y) \leq xyz$ dir. Burada $x+y+z=1$ yerine koyarsak $xyz \geq (1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1-2(x+y+z) + 4(xy+yz+zx) - 8xyz$ yani $9xyz \geq 4(xy+yz+zx) - 1$ olur. $2xyz \geq \frac{8}{9}.(xy+yz+zx) - \frac{2}{9}$ olur. Eğer $\frac{8}{9}.(xy+yz+zx) - \frac{2}{9} + \frac{7}{27} \geq yz+zx+xy$ gösterirsek ispat biter. Bunun için $\frac{1}{3} \geq xy+yz+zx$ göstermemiz yeterlidir. Bu da $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ olduğundan doğrudur.

2 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir a, b pozitif tam sayı ikilisi bulunuz:

(i) $ab(a+b)$ sayısı 7 ile bölünmez;

(ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ sayısı 7^7 ile bölünür.

Cevabınızı açıklayınız.

3 Düzlemde farklı O ve A noktası veriliyor. Düzlemdeki O dan farklı her X noktası için, $a(X)$ ile OA ve OX doğruları arasındaki, OA dan saat yönünün tersi yöndeki $(0 \leq a(X) < 2\pi)$ açının radyan cinsinden değerini gösterelim. $C(X)$, O merkezli ve $OX + a(X)/OX$ uzunluktaki yarıçaplı çember olsun. Düzlemdeki her nokta, sonlu sayıdaki renklerden biri ile boyanıyor. $a(Y) > 0$ olmak üzere, $C(Y)$ çemberinin üzerindeki en az bir nokta ile aynı renge sahip bir Y noktasının bulunduğunu gösteriniz.

4 $ABCD$, CD doğrusu AB çaplı çembere teğet olan bir dörtgen olsun. AB doğrusunun CD çaplı çembere teğet olması için gerek ve yeter koşulun BC ile AD doğrularının paralel olması olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

AB nin orta noktası O, CD nin orta noktası Q, DC ile AB nin kesişimi E olsun. O merkezli çember CD ye R de değsin. Q dan AB ye inilen dikmenin ayağı S olsun.

$\triangle EQS \sim \triangle EOR \Rightarrow \dfrac{QS}{OR} = \dfrac{EQ}{EO}$.

İddia 1: $AD \parallel BC \Rightarrow QS = DQ$

İspat:

$ABCD$ yamuğunda OQ orta taban olduğundan, paralellikten, $\dfrac{EQ}{EO} = \dfrac{QD}{OA} = \dfrac{QS}{OR} \Rightarrow DQ = QS$. Yani DC çaplı çember, AB ye S de teğettir. ■

İddia 2: $QS = DQ \Rightarrow AD \parallel BC$

İspat:

$\dfrac{EQ}{EO} = \dfrac{QS}{OR} = \dfrac{DQ}{AO} = \dfrac{QC}{OB} \Rightarrow OQ \parallel AD \parallel BC$. ■

$\boxed{5}$ Düzlemde, $n > 3$ köşeli bir dışbükey çokgenin tüm köşegenlerinin uzunlukları toplamı d olsun. $[x]$ ile x i aşmayan en büyük tam sayı gösterilmek üzere;

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

$\boxed{6}$ a, b, c, d; $0 < a < b < c < d$ ve $ad = bc$ şartlarını sağlayan tek tam sayılar olsun. Bazı k ve m tam sayıları için $a + d = 2^k$ ve $b + c = 2^m$ ise, $a = 1$ olduğunu kanıtlayınız.

26. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1985

1 Merkezi, $ABCD$ kirişler dörtgeninin AB kenarı üzerinde bulunan çembere, dörtgenin diğer kenarları teğettir. $AD + BC = AB$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Çember BC ye P de, AD ye Q da dokunsun. Çemberin merkezi M olsun.

$\angle BAD = 2\alpha$ dersek, $\angle DCB = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle MCP = 90° - \alpha$ olur.

$[QD$ üzerinde $PC = QS$ olacak şekilde S noktası alalım. Ayrıca $QM = MP$ ve $\angle SQM = \angle CPM = 90°$ olduğu için $\triangle CPM \cong \triangle SQM$, yani, $\angle QSM = \angle PCM = 90° - \alpha$ olur. Bu durumda, $\triangle ASM$ de

$$\angle SMA = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha = \angle ASM$$

olduğu için $AM = AS = AQ + CP$ elde edilir.

Benzer şekilde, $BM = BP + QD$ olacağı için, taraf tarafta topladığımızda $AB = AM + MB = AQ + CP + BP + QD = AD + BC$ olacaktır.

2 n ve k sayıları $k < n$ eşitsizliğini sağlayan aralarında asal iki doğal sayı olsun. $M = \{1, 2, \dots n-1\}$ kümesindeki her sayı ya maviye ya da beyaza boyanıyor.

(i) Her $i \in M$ için, i ile $n - i$ aynı renkte;

(ii) her $i \in M$ için, $i \neq k$ olmak üzere, i ile $|i - k|$ aynı rekte

olduğu bilgisi veriliyor. M deki tüm sayıların aynı renkte olması gerektiğini kanıtlayınız.

3 Tam sayı katsayılı herhangi bir $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ polinomu için, $w(P)$ ile tek katsayıların sayısını gösterelim. $i = 0, 1, \dots$ için, $Q_i(x) = (1 + x)^i$ olsun. $i_1, i_2, \dots, i_n$, $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ şeklinde tam sayılarsa;

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \ge w(Q_{i_1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

4 Hiçbirinin 26 dan büyük bir asal çarpanı olmadığı 1985 farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir M kümesi veriliyor. M nin elemanları çarpımı bir tam sayının dördüncü kuvveti olan dört elemanlı en az bir alt kümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

5 ABC üçgeninin A ve C köşelerinden geçen O merkezli çember AB ve BC doğru parçalarını tekrardan, sırasıyla farklı K ve N noktalarında kesiyor. ABC ve KBN üçgenlerinin çevrel çemberleri B ve M gibi iki farklı noktada kesişiyor. OMB açısının dik açı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$\angle BAC = \alpha$ olsun.

O, (AKC) çemberinin merkezi olduğundan $\angle KOC = 2\alpha$; $AKNC$ kirişler dörtgeni olduğundan $\angle KNB = \angle KAC = \alpha$.

B, K, N, M çembersel olduğundan $\angle KNB = \angle KMB = \alpha$; A, B, M, C çembersel olduğundan $\angle BMC = 180° - \alpha$.

$\angle KMC = 180° - 2\alpha$ ve $\angle KOC = 2\alpha$ olduğu için K, M, C, O çembersel ve $KO = OC$ olduğu için de $\angle KMO = \angle OMC = 90° - \alpha$. Bu durumda $\angle OMB = 90°$ dir.

6 Her x_1 gerçel sayısı için, $x_1, x_2, \dots$ dizisini

$$\text{her } n \ge 1 \text{ için}, x_{n+1} = x_n \left(x_n \frac{1}{n} \right)$$

olacak şekilde oluşturalım. Her n için

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

olacak şekilde tek bir x_1 değerinin olduğunu kanıtlayınız.

27. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1986

1 d; $2, 5$ veya 3 sayılarına eşit olmayan herhangi bir pozitif tam sayı olsun. $\{2, 5, 13, d\}$ kümesinde, $ab - 1$ bir tam kare olmayacak şekilde farklı a, b sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

2 $A_1A_2A_3$ üçgeni ile aynı düzlemde bir P_0 noktası veriliyor. Her $s \geq 4$ için $A_s = A_{s-3}$ tanımlanıyor. ($k = 0, 1, 2, \ldots$ için) P_{k+1}, P_k nın saat yönünde A_{k+1} merkezli $120°$ döndürülmesi ile elde edilen görüntüsü olmak üzere; $P_1, P_2, P_3, \ldots$ noktalar kümesini oluşturuyoruz. $P_{1986} = P_0$ ise, $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar olduğunu kanıtlayınız.

3 Düzgün bir beşgenin her köşesine, bu beş sayının toplamı pozitif olacak şekilde tam sayılar veriliyor. Üç ardışık köşeye $y < 0$ olmak üzere, sırasıyla x, y, z sayıları verilmiş ise, x, y, z sayılarının sırasıyla $x + y$, $-y$, $z + y$ sayıları ile değiştirimesine izin veriliyor. Bu işlem, beş sayıdan en az biri negatif oluncaya kadar tekrarlanıyor. Bu işlemin sonlu sayıda adım sonunda sonlanıp sonlanmayacağını belirleyiniz.

4 A ve B, düzlemde, O merkezli düzgün bir n-genin ($n \geq 5$) iki ardışık köşesi olsun. OAB üçgenine eş XYZ üçgeni; başlangıçta OAB üçgeni ile çakışık olup, Y ile Z çokgenin kenarları üzerinde, X de çokgenin iç bölgesinde yer alacak şekilde düzlemde hareket ediyor. X in geometrik yerini bulunuz.

5 Negatif olmayan gerçel sayılarda tanımlı, negatif olmayan gerçel değerler alan ve

(i) her $x, y \geq 0$ için $f\left(xf(y)\right)f(y)$,

(ii) $f(2) = 0$,

(iii) $0 \leq x < 2$ için $f(x) \neq 0$

koşullarını sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

6 Düzlemde her biri tam sayı koordinatlı bir noktalar kümesi veriliyor. Kümedeki noktalardan bazılarını kırmızıya geri kalanlarını da beyaza; koordinat eksenlerinden birine paralel herhangi bir düz L doğrusu için L üzerindeki beyaz ve kırmızı noktaların sayılarının farkı (mutlak değerce) 1 den büyük olmayacak şekilde boyamak her zaman mümkün müdür?

28. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1987

1 $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ kümesinin sabit noktalarının sayısı tam olarak k'ya eşit olan permütasyonlarının sayısı $p_n(k)$ olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

olduğunu gösteriniz.

(Not: Bir $S \neq \emptyset$ kümesinden kendi üzerine tanımlı ve bire-bir olan bir f fonksiyonuna S'nin bir permütasyonu denir. S'nin bir i elemanı için $f(i) = i$ ise i f'nin bir sabit noktasıdır denir.)

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde A açısının açıortayı BC kenarını L'de ve daha sonra ABC üçgeninin çevrel çemberini N'de kesmektedir. L noktasından AB ve AC kenarlarına çizilen dik doğrular AB kenarını K'da ve AC kenarını M'de kesmektedir. $AKNM$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\angle BAN = \angle NAC = \angle NBC = \angle BCN$.

$AKLM$ kirişler dörtgeninin çevrel çemberi BC yi ikinci kez P de kessin.

$\angle KPL = \angle KAL = \angle CBN$ olduğu için $KP \parallel BN$ ve $\angle LAM = \angle MPC = \angle PCN$ olduğu için $PM \parallel CN$.

Paralellikten, $[BKP] = [KNP]$ ve $[CMP] = [PMN]$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} [ABC] &= [AKPM] + [BKP] + [CMP] \\ &= [AKPM] + [KNP] + [PMN] \\ &= [AKNM] \end{aligned}$$

olur.

3 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ olan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gerçek sayıları veriliyor. Her $k \geq 2$ tam sayısı için hepsi birden sıfır olmayan öyle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının varlığını gösteriniz ki her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|a_i| \leq k - 1$ ve

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

olsun.

4 Negatif olmayan tam sayılar kümesinden kendi içine tanımlı ve her n için $f(f(n)) = n+1987$ şartını sağlayan bir f fonksiyonunun olmadığını ispat ediniz.

5 Öklid düzleminde (iki boyutlu koordinat düzlemi) her $n \geq 3$ için n noktadan oluşan öyle bir küme bulunuz ki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık irrasyonel olsun ve her üç nokta dejenere olmayan ve alanı bir rasyonel sayıya eşit olan bir üçgen belirlesin.

6 $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. Eğer $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$ şartını sağlayan her k tam sayısı için $k^2 + k + n$ bir asal tam sayı ise $k = 0, 1, \ldots, n-2$ için $k^2 + k + n$ sayılarının hepsinin asal olduğunu ispat ediniz.

29. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1988

1 Aynı düzlemde bulunan ve merkezleri aynı olan R ve r ($R > r$) yarıçaplı iki çember veriliyor. P küçük çember üzerinde sabit bir nokta ve B büyük çember üzerinde değişken bir nokta olsun. BP doğrusu büyük çemberi C noktasında kesiyor. BP'ye P noktasında dik olan l doğrusu küçük çemberi A noktasında kesiyor. (Eğer l, P noktasında çembere teğet ise $A = P$ dir.)

(i) $BC^2 + CA^2 + AB^2$ ifadesinin aldığı değerlerin kümesini bulunuz.

(ii) AB'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

(i) BP küçük çemberi ikinci kez D noktasında kessin. $\angle APD = 90^\circ$ olduğu için A, O, D doğrusaldır. $\triangle ABD$ de, BO kenarortayı için

$$AB^2 + BD^2 = 2(BO^2 + OD^2) = 2(R^2 + r^2)$$

$\triangle ACD$ de, CO kenarortayı için

$$AC^2 + CD^2 = 2(CO^2 + OD^2) = 2(R^2 + r^2)$$

Taraf tarafa toplarsak, $AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2 = 4R^2 + 4r^2$
D noktasının büyük çembere göre kuvveti $BD \cdot DC = R^2 - OD^2 = R^2 - r^2$ olduğu için

$$BC^2 = (BD + CD)^2 = BD^2 + CD^2 + 2 \cdot BD \cdot CD = BD^2 + CD^2 - 2(R^2 - r^2)$$

Bu durumda

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 - 2(R^2 - r^2) = 4R^2 + 4r^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 + BC^2 = 6R^2 + 2r^2$$

(ii) AB nin orta noktası M olsun. $AO = OD$ ve $AM = MB$ olduğu için $BD = 2 \cdot OM$ dir. $PM = AM = MB$ olduğu için de

$$MP^2 + OM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BD^2) = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) = \text{Sabit}$$

Bu durumda, M noktalarının geometrik yeri, OP nin orta noktasına S dersek, S merkezli bir çemberdir. Kenarortay teoreminden

$$OM^2 + MP^2 = 2(SO^2 + SM^2) \Rightarrow \frac{1}{2}(R^2 + r^2) = 2\left(\frac{r^2}{4} + SM^2\right)$$

$$\Rightarrow SM^2 = \frac{R^2}{4}$$

O halde geometrik yer OP nin orta noktasını merkez kabul eden $\frac{R}{2}$ yarıçaplı çemberdir.

Geometrik yeri bulmanın bir diğer yolu şudur:
CO doğrusu büyük çemberi E de kessin.
AP orta dikmesi O dan geçer, aynı şekilde, EB orta dikmesi de O dan geçer. O halde $AEBP$ bir dikdörtgendir. PE ile AB köşegenleri birbirini ortalayacağı için PE nin orta noktası da M dir. $\triangle OPE$ üçgeninde OP nin orta noktasına S dersek, $OS = SP$ ve $PM = ME$ olduğu için $SM = \dfrac{OE}{2} = \dfrac{R}{2}$ dir.
Bu durumda, M noktalarının geometrik yeri, S merkezli $\frac{R}{2}$ yarıçaplı çemberdir.

2 n bir pozitif tam sayı ve $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ bir B kümesinin alt kümeleri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(a) Her bir A_i'nin tam $2n$ tane elemanı vardır.

(b) Her bir $A_i < A_j$ $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ yalnızca bir tek eleman içerir.

(c) B'nin her bir elemanı en az iki tane A_i'de vardır.

B'nin her bir elemanını 0 veya 1 ile göstermek istiyoruz. Böyle bir gösterilimin, A_i'lerin her birinin tam n tane 0 içerecek şekilde yapılabilmesi için n'nin değeri ne olmalıdır?

3 Bir f fonksiyonu pozitif tam sayılar kümesinden, pozitif tam sayılar kümesine, her n pozitif tam sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3 \\ f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

$f(n) = n$ koşuluna uyan ve 1988'den küçük ya da 1988'e eşit olan n pozitif tam sayılarını bulunuz.

4

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesinin, uzunluları toplamı 1988 olan ayrık aralıkların birleşimi olduğunu gösteriniz.

5 ABC, dik açısı A köşesinde olan bir dik üçgen ve D, A'dan çizilen yüksekliğin ayağı olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin iç çemberlerinin merkezlerinin birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kesmektedir. S ve T sırasıyla ABC ve AKL üçgenlerinin alanları ise, $S \geq 2T$ olduğunu gösteriniz.

6 a ve b pozitif tam sayıları, $ab+1$ sayısı a^2+b^2'yi tam olarak bölecek şekilde seçilsin. $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ ifadesinin, bir pozitif tam sayının karesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

(Vieta Jumping):

Öncelikle $a = b$ durumunu inceleyelim,

$$c = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{2a^2}{a^2+1} = 2 - \frac{2}{a^2+1}$$

olur. a pozitif tamsayı olduğundan ifadenin tamsayı olması için $a = b = 1$ olmalıdır, bu durumda $c = 1$ olacaktır, yani tamkaredir. Eğer a veya b'den biri 1 olursa aynı şekilde $a = b = c = 1$ bulunur.

Şimdi genelliği bozmadan $a > b \geq 2$ olsun. İfadeyi düzenleyip a'ya bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak yazarsak,

$$a^2 - a \cdot bc + (b^2 - c) = 0$$

bulunur. Bu denklemin pozitif tamsayı çözümleri arasında $a+b$'nin en küçük olduğu (a, b) çözümünü ele alalım. Bu denklem ikinci dereceden olduğundan a dışında bir d kökü de vardır. Vieta formüllerinden,

$$a + d = bc$$

$$ad = b^2 - c$$

elde edilir. İlk formülden d'nin tamsayı olduğunu görebiliriz ve eğer $bc - a$ pozitifse d de pozitif olmalıdır. Şimdi bu ifadenin pozitif olmadığını kabul edelim, $a = bc + x$ olsun, $x \geq 0$'dır.

$$a^2 + b^2 = abc + c \Rightarrow (bc+x)^2 + b^2 = (bc+x)bc + c \Rightarrow bcx + x^2 + b^2 = c$$

olur. Eğer $x = 0$ ise $d = 0$ ve Vieta'dan $b^2 = c$ olur, yani c tamkare olur. Eğer $x > 0$ ise

$$bcx + x^2 + b^2 = c \Rightarrow c \geq bc + b^2 + 1 > c$$

olur. Çelişki. Dolayısıyla $bc - a$'nın pozitif olması gerekir. (0 olması durumunda ifadenin tamkare olduğunu gösterdiğimizden bu kısmı tekrar incelemeye gerek yok.)

d sayısı hem pozitif tamsayı olması hem de denklemi sağlamasından dolayı (d, b) ikilisi de denklemin bir çözümü olur fakat eğer $a > d$ ise (b, d) çözümü (a, b) ikilisinin toplamı en küçük olması kabulüyle çelişir. Dolayısıyla $d \geq a$'dır. Vieta teoreminden

$$a + d = bc \geq 2a \Rightarrow \frac{2a}{b} \leq c = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \leq \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

olur, çelişki. Dolayısıyla ifadenin tamsayı olduğu durumlarda $c = 1$ veya $c = b^2$ olur, yani her zaman tamkaredir.

Çözüm 2:

Bu çözümü AoPS'da "Rust" adlı bir kullanıcının bu soruya verdiği cevaptan esinlenerek yaptım, onun cevabını da buradan inceleyebilirsiniz.

Öncelikle $a = b$ ise $a = b = c = 1$ olması gerektiğini bir önceki çözümde göstermiştik. Genelliği bozmadan $a > b$ olsun.

$$ab + 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

şeklinde asal çarpanlarına ayıralım. a ve b bu k asalın hiçbirine bölünemez. $ab+1 | a^2+b^2$ olduğundan a^2+b^2 ifadesi $i = 1, 2, \ldots k$ için $p_i^{\alpha_i}$'ye bölünmelidir.

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

$$ab + 1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

elde edilir. Bu iki denklikten

$$-b^4 \equiv a^2b^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow b^4 \equiv -1 \equiv ab \pmod{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow a \equiv b^3 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

bulunur. Buradan,

$$c \equiv \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \equiv \frac{b^6 + b^2}{b^4 + 1} \equiv b^2 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

bulunur. Tüm $i = 1, 2, \ldots k$ için bu sağlandığından

$$c \equiv b^2 \pmod{ab + 1}$$

olur. $ab + 1 > b^2 + 1 > b^2$ olduğundan $t \geq 0$ için $c = b^2 + t(ab + 1)$ formatında olmalıdır. $t = 0$ ise $c = b^2$ olur. Eğer $t > 0$ ise

$$c = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = b^2 + t(ab + 1) \geq b^2 + ab + 1 \Rightarrow a^2 \geq ab^3 + a^2b^2 + 2ab + 1 > a^2$$

olur. Çelişki. Yani $c = 1$ veya $c = b^2$ olmalı, dolayısıyla her zaman tamkare olmalıdır.

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1989

1 $\{1, 2, \dots, 1989\}$ kümesinin aşağıdaki özelliklere uyan, ikişer ayrık A_i $(i = 1, 2, \dots, 117)$ altkümelerinin birleşimi olarak yazılabildiğini ispatlayınız.

(i) Her bir A_i kümesinde 17 tane eleman bulunsun,

(ii) A_i kümelerinin her birindeki elemanlarının toplamı aynı olsun.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde, A açısının iç açıortayı ABC üçgeninin çevrel çemberi ile A_1 noktasında kesişmektedir. B_1 ve C_1 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. B ve C açılarının dış açıortaylarının AA_1 doğrusu ile kesişme noktası A_0 olsun. B_0 ve C_0 noktaları da benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(i) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, $AC_1BA_1CB_1$ altıgeninin alanının iki katına eşittir.

(ii) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının en az dört katıdır.

Çözüm:

ABC üçgeninde A_0, B_0, C_0 dış teğet çember merkezleridir. ABC nin iç merkezi I olsun.

(i) $\angle BIA_1 = \angle ABI + \angle BAI = \angle IBC + \angle CBA_1 = \angle IBA_1 \Rightarrow IA_1 = A_1B$
IB iç açıortay, A_0B de dış açıortay olduğu için $\angle IBA_0 = 90°$ ve $BA_1 = A_1I = A_0A_1$. Dolayısıyla da, $[A_1BI] = [A_0A_1B]$.
Benzer şekilde, $[A_0A_1C] = [IA_1C]$, $[B_0B_1C] = [IB_1C]$, $[B_0B_1A] = [IB_1A]$, $[C_0C_1A] = [IC_1A]$, $[C_0C_1B] = [IC_1B]$ olduğu için $2 \cdot [AC_1BA_1CB_1] = [A_0B_0C_0]$

(ii) $[A_0A]$, $[B_0B]$, $[C_0C]$; $\triangle A_0B_0C_0$ ın yükseklikleridir. C_0BCB_0 dörtgeni $\angle C_0BB_0 = \angle C_0CB_0$ olduğu için kirişler dörtgenidir. Yani, $\angle BCA_0 = \angle B_0C_0A_0$. Bu durumda, $\triangle CBA_0 \sim \triangle C_0B_0A_0$ dır. Benzerlik oranı, $\dfrac{BC}{B_0C_0} = \dfrac{A_0B}{A_0B_0} = \cos\angle A_0$ dır. Benzer şekilde, $AC = A_0C_0 \cdot \cos\angle B_0$ ve $AB = A_0B_0 \cdot \cos\angle C_0$.
$\angle C_0A_0B_0 = \angle BAC_0 = \angle CAB_0$ ve $\angle BAC = 180° - 2 \cdot \angle A_0$ olduğu için

$$\begin{aligned}
[ABC] &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC \\
&= \frac{1}{2} \cdot A_0B_0 \cdot \cos\angle C_0 \cdot A_0C_0 \cdot \cos\angle B_0 \cdot \sin(180° - 2 \cdot \angle A_0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot A_0B_0 \cdot A_0C_0 \cdot \sin(2 \cdot \angle A_0) \cdot \cos\angle B_0 \cdot \cos\angle C_0 \\
&= [A_0B_0C_0] \cdot 2 \cdot \cos\angle A_0 \cdot \cos\angle B_0 \cdot \cos\angle C_0
\end{aligned}$$

İddia: $\angle A_0 + \angle B_0 + \angle C_0 = 180° \Rightarrow \cos\angle A_0 \cdot \cos\angle B_0 \cdot \cos\angle C_0 \leq \dfrac{1}{8}$.

İspat:

$$\begin{aligned}
\cos\angle A_0 \cdot \cos\angle B_0 \cdot \cos\angle C_0 &= \frac{1}{2}(\cos(\angle A_0 - \angle B_0) + \cos(\angle A_0 + \angle B_0)) \cdot \cos\angle C_0 \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\angle A_0 - \angle B_0) - \cos\angle C_0) \cdot \cos\angle C_0
\end{aligned}$$

Diğer taraftan, $AO \geq GO$ dan

$$4 \cdot \cos(\angle A_0 - \angle C_0) \cdot \cos\angle C_0 \leq \cos^2(\angle A_0 - \angle C_0) + 4 \cdot \cos^2\angle C_0$$

$$4 \cdot (\cos(\angle A_0 - \angle B_0) - \cos\angle C_0) \cdot \cos\angle C_0 \leq \cos^2(\angle A_0 - \angle C_0) \leq 1$$

$$8 \cdot \cos\angle A_0 \cdot \cos\angle B_0 \cdot \cos\angle C_0 \leq 1. \blacksquare$$

Bu durumda, $4 \cdot [ABC] \leq [A_0B_0C_0]$.

3 n ve k pozitif tam sayılar olsun. S bir düzlem üzerinde bulunan ve aşağıdaki iki koşula uyan n tane noktanın oluşturduğu küme olsun.

(i) S'deki herhangi üç nokta aynı doğru üzerinde değildir,

(ii) S'nin her bir P noktası için, bu P noktasına olan uzaklıkları aynı olan ve S'de bulunan en az k tane nokta vardır.

Bu koşullar altında

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

olduğunu ispatlayınız.

4 $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun ve $|AB|$, $|AD|$, $|BC|$ kenar uzunlukları

$$|AB| = |AD| + |BC|$$

koşulunu sağlasın. Bu dörtgenin içinde aşağıdaki özelliklere uyan bir P noktası vardır.

(i) P noktasının CD kenarına olan uzaklığı h kadardır.

(ii) $|AP| = h + |AD|$ ve $|BP| = h + |BC|$'dir.

Bu takdirde

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Merkezleri A ve B olan ve birbirlerine M noktasında dıştan teğet olan iki çemberin ortak teğeti A merkezli çembere D', B merkezli çembere C' noktasında değsin. $C'M$ küçük yayı üzerinde bir C noktası, $D'M$ küçük yayı üzerinde bir D noktası alalım. Söz konusu $ABCD$ dörtgeni soruda verilen dörtgenle aynı. İki çembere ve CD ye teğet olan çemberin merkezi P, yarıçapı h dir. Bu çember CD ye E noktasında değsin. Bu çember en büyüyük yarıçapını $D = D'$ ve $C = C'$ iken alır. Bu durumda, söz konusu $P = P'$ ve $E = E'$ olsun.

$ABCD$ dik yamuğunda, $(AM + BM)^2 - (AD' - BC')^2 = D'C'^2 \Rightarrow D'C' = 2\sqrt{AD \cdot BC}$.

$AP'E'D'$ dik yamuğunda, $E'D' = 2\sqrt{AD' \cdot P'E'} = 2\sqrt{AD \cdot h'}$.

$BP'E'C'$ dik yamuğunda, $E'C' = 2\sqrt{BC' \cdot P'E'} = 2\sqrt{BC \cdot h'}$.

$D'E' + E'C' = D'C' \Rightarrow \sqrt{h'}(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = \sqrt{AD} \cdot \sqrt{BC}$

$$\sqrt{h'} = \frac{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{BC}}{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}} \geq \sqrt{h}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}}{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{BC}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5 Her n pozitif tam sayısı için, her biri bir asal sayının tam kuvveti olmayan, ardışık n tane pozitif tam sayının var olduğunu ispatlayınız.

6 n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ kümesinin bir permütasyonu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ olsun. Eğer bu permütasyonda en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ için $|x_i - x_{i+1}| = n$ koşulu sağlanıyorsa, permütasyona P özelliğine sahiptir diyelim.

Her n için, P özelliğine sahip olan permütasyonların sayısının, P özelliğine sahip olmayanlardan daha fazla olduğunu gösteriniz.

31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1990

1 Bir çemberin AB ve CD kirişleri, çemberin içerisindeki E noktasında kesişiyor. M, EB doğru parçası üzerinde bir nokta olsun. D, E, M noktalarından geçen çembere E de teğet olan doğru BC ve AC doğrularını sırasıyla F ve G de kesiyor.

$$\frac{AM}{AB} = t$$

ise

$$\frac{EG}{EF}$$

ifadesinin t cinsinden değerini bulunuz.

Çözüm:

$\angle FEM = \angle EDM = \angle AEG = \alpha.$

$\angle MDB = \beta$ dersek, $\angle CAE = \alpha + \beta$ ve $\angle AGE = \beta$.

$\angle MBD = \angle GCE = \theta$ olsun.

$\angle CEF = \beta + \theta = \angle AMD$ ve $\angle MAD = \angle ECF$.

$A.A$ dan $\triangle CEG \sim \triangle BMD$ ve $\triangle FEC \sim \triangle DMA$. Benzerlikleri yazıp,

$$\frac{EG}{CE} = \frac{MD}{BM} \text{ ve } \frac{CE}{EF} = \frac{AM}{MD}$$

taraf tarafta çarparsak

$$\frac{EG}{EF} = \frac{MA}{BM} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{1}{\frac{AB}{AM} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{t}{t-1}.$$

2 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere; E kümesi, bir çember üzerindeki farklı $2n-1$ noktadan oluşan bir küme olsun. Bu noktalardan tam olarak k tanesi siyaha boyanıyor. Aralarındaki yaylardan biri üzerinde E kümesinden tam olarak n nokta olacak şekilde en az bir çift siyah noktanın bulunduğu boyamalara "iyi" diyeceğiz. E nin k noktasının her boyamasının iyi olduğu en küçük k değerini bulunuz.

3

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

ifadesinin tam sayı olmasını sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.

Çözüm:

$n | 2^n + 1 \Longrightarrow 2^n \equiv -1 \pmod{n} \Longrightarrow 2^{2n} \equiv 1 \pmod{n}$

n sayısının en küçük asal bölenine p_1 diyelim

$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p_1}$ ve $2^{p_1 - 1} \equiv 1 \pmod{p_1}$

2 sayısının $\pmod{p_1}$'deki mertebesi d olsun. O zaman $d | (p_1 - 1, 2n)$,

$(p_1 - 1, 2n)$ ifadesi $(p_1 - 1, n) = 1$ olduğundan 1 veya 2 olabilir.

$d | 1, 2$ olduğundan $d = 1, 2$ olabilir. $d = 1$ olursa $n = 1$ gelir. O yüzden

$d = 2$ olur ve buradan $2^2 \equiv 1 \pmod{p_1}$ olduğundan $p_1 = 3$ olur.

$n = 3^x.y$ diyelim. Buradan $3^{2x} | 2^n + 1$ gelir.

$v_3(3^{2x}) \leq v_3(3) + v_3(n)$

$2x \leq 1 + x \Longrightarrow x \leq 1 \Longrightarrow x = 1$

Demekki $x = 3.y$ ve $(y, 3) = 1$

Buradan $y|2^{3y} + 1 \implies 2^{3y} \equiv -1 \pmod{y}$

$2^{6y} \equiv -1 \pmod{y}$, y sayısının en küçük asal bölenine p_2 diyelim.

$2^{6y} \equiv -1 \pmod{p_2}$ ve $2^{p_2-1} \equiv -1 \pmod{p_2}$

2 sayısının $\pmod{p_2}$'deki mertebesi f olsun.O zaman $f|(p_2 - 1, 6y)$

$(p_2 - 1, 6y)$ ifadesi $(p_2 - 1, y) = 1$ olduğundan$1, 2, 3$ veya 6 olabilir.Durumları inceleyelim:

1) $(p_2 - 1, 6y) = 1 \implies f = 1 \implies 2^1 \equiv 1 \pmod{p_2}$ olamayacığından

n'nin başka asal böleni yoktur. Buradan $n = 3$ çözümü gelir.

2) $(p_2 - 1, 6y) = 2 \implies f = 2(f = 1$ durumunu daha önce incelemiştik)

$2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ Buradan ancak $p_2 = 3$ gelir ancak bu durum $(y, 3) = 1$ ile çelişir.

Demekki bu durumdan çözüm gelmez.

3) $(p_2 - 1, 6y) = 3 \implies f = 3 \implies 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{p_2}$

Buradan $p_2 = 7$ gelir ancak $2^{3y} + 1 \equiv 8^y + 1 \equiv 2 \pmod{7}$ olduğundan

$7|2^{3y} + 1$ koşulu sağlanmaz.

4) $(p_2 - 1, 6y) = 6 \implies f = 6 \implies 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{p_2}$

Buradan $p_2 = 3, 7$ durumları gelir ancak bu durumlardan daha önce çözüm gelmediğini görmüştük.

Demekki sağlayan tek durum $n = 3$

$\boxed{4}$ Pozitif rasyonel sayıların kümesini $\mathbb{Q}^+$ ile gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için,

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

koşulunu sağlayan bir $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonu bulunuz.

Çözüm:

Öncelikle bu fonksiyonun birebir, örten olduğunu gösterelim. $x = 1$ koyarsak,

$$f(f(y)) = \frac{f(1)}{y} \tag{1}$$

olacaktır. Örtenlik için herhangi bir $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ için $y = \frac{b}{af(1)}$ alırsak,

$$f(f(y)) = \frac{a}{b}$$

olacağından $f(y) \mapsto \frac{a}{b}$ olacaktır, yani fonksiyon örtendir. Ayrıca

$$f(y_1) = f(y_2) \implies f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \implies \frac{f(1)}{y_1} = \frac{f(1)}{y_2} \implies y_1 = y_2$$

elde edilir. Yani fonksiyon birebir ve örtendir, dolayısıyla tersi vardır. (1)'de $y = 1$ koyarsak,

$$f(f(1)) = f(1) \implies f^{-1}(f(f(1))) = f^{-1}(f(1)) \implies f(1) = 1$$

elde edilir. Yani $f(f(y)) = \frac{1}{y}$'dir. Ana denklemde y yerine $f(y)$ yazarsak

$$f(xf(f(y))) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \implies f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \tag{2}$$

elde edilir. x yerine xy yazarsak

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

olacaktır. Eğer herhangi bir p asalı için $f(p)$'yi bulursak, (3)'den her n pozitif tamsayısı için $f(n)$'yi inşa edebiliriz. (2)'yi kullanarak da her $x \in \mathbb{Q}^+$ için $f(x)$'i inşa ederiz. Öncelikle (3)'ün ve $f(f(y)) = \frac{1}{y}$ eşitliğinin ana denklemi verdiği kolayca görülebilir çünkü

$$f(xf(y)) = f(x)f(f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

olacaktır. Bir p asalının a'ya gittiğini varsayarsak, $f(f(p)) = f(a) = \frac{1}{p}$ olduğundan ve (3)'den

$$p \mapsto a \mapsto \frac{1}{p} \mapsto \frac{1}{a} \mapsto p$$

şeklinde bir döngü elde edilecektir. Bu döngüden yola çıkarak p_k, k. asalı temsil etmek üzere

$$f(p_{2k}) = p_{2k+1} \quad \text{ve} \quad f(p_{2k+1}) = \frac{1}{p_{2k}} \tag{4}$$

olarak tanımlarsak tüm asal sayılar için f'i uygun bir şekilde tanımlamış oluruz. Tüm pozitif rasyonel sayılar için $x = \frac{r_1^{a_1} r_2^{a_2} \cdots r_k^{a_k}}{q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_t^{b_t}}$ olarak asal çarpanlarına ayırırsak,

$$f(x) = \frac{f(r_1)^{a_1} f(r_2)^{a_2} \cdots f(r_k)^{a_k}}{f(q_1)^{b_1} f(q_2)^{b_2} \cdots f(q_t)^{b_t}}$$

ve asallar için (4)'ü kullanarak fonksiyonu tanımlamış oluruz.

5 Başlangıçta verilmiş bir $n_0 > 1$ tam sayısı için, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ oyuncuları, $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sayılarını sırayla değişerek aşağıda tanımlanan şekilde seçiyor:

(n_{2k} sayısını bilerek) $\mathcal{A}$,

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

olacak şekilde bir n_{2k+1} sayısını;

(n_{2k+1} sayısını bilerek) $\mathcal{B}$,

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

sayısı bir asal sayının pozitif kuvveti olacak şekilde bir n_{2k+2} sayısını seçiyor.

$\mathcal{A}$ oyuncusu 1990 sayısını, $\mathcal{B}$ oyuncusu da 1 sayısını seçtiği takdirde oyunu kazanıyor. Hangi n_0 sayıları için:

(a) $\mathcal{A}$ nın kazanan bir stratejisi vardır?

(b) $\mathcal{B}$ nin kazanan bir stratejisi vardır?

(c) İki oyuncunun da kazanan bir stratejisi yoktur?

6 Aşağıdaki iki özelliğe sahip dışbükey bir 1990−genin bulunduğunu gösteriniz:

(a) Tüm açıları eşittir.

(b) 1990 kenarın uzunlukları $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1990^2$ sayılarının bir dizilişidir.

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1991

1 Verilen bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olsun. A, B, C açılarına ait içaçıortaylar karşı kenarları sırasıyla A', B', C' noktalarında kesiyor.

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ diyelim. $BA' = \dfrac{ac}{b+c}$ ve $\dfrac{AI}{AA'} = \dfrac{AB}{AB + BA'} = \dfrac{c}{c + \dfrac{ac}{b+c}} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$ olacaktır.

Benzer şekilde $\dfrac{BI}{BB'} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ ve $\dfrac{CI}{CC'} = \dfrac{a+b}{a+b+c}$.

$a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$ ve $u = x + y + z$ şeklinde değişken değiştirelim ve sorudaki ifadeyi yeniden yazalım:

$$\frac{1}{4} < \frac{u+z}{2u} \cdot \frac{u+x}{2u} \cdot \frac{u+y}{2u} \leq \frac{8}{27}$$

$GO \leq AO$ dan dolayı,

$$\sqrt[3]{(u+x)(u+y)(u+z)} \leq \frac{4u}{3}$$

eşitliğin sağ tarafı kolayca gösterilebilir.

Şimdi sol tarafı gösterelim:

$$\frac{8u^3}{4} < (u+x)(u+y)(u+z)$$

$$2u^3 < u^3 + u^2(x+y+z) + uxy + uxz + uyz + xyz$$

$$2u^3 < u^3 + u^3 + uxy + uxz + uyz + xyz$$

$$0 < uxy + uxz + uyz + xyz.$$

2 $n > 6$ bir tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sayıları n den küçük ve n ile aralarında asal tüm doğal sayılar olsun.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

ise, n sayısının ya bir asal sayı ya da 2 nin bir kuvveti olacağını kanıtlayınız.

3 $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$ olsun. S nin n elemanlı her altkümesi ikişerli olarak aralarında asal beş eleman içerdiğine göre, en küçük n tam sayısını bulunuz.

4 G nin k kenarlı bağlı bir çizge olduğunu varsayalım. Kenarları, her köşe iki veya daha çok kenara ait olacak ve bu kenarların etiketlerinin en büyük ortak böleni 1 olacak şekilde, $1, 2, \ldots, k$ sayıları ile etiketlendirmenin mümkün olduğunu kanıtlayınız.

[Bir *çizge*, *uçlar* diye adlandırılan noktalar kümesi ile bu uçlardan bazı çiftleri birleştiren *kenarlar* kümesinden oluşur. Her u, v uç çifti, en fazla bir kenara aittir. Her farklı x, y uçları için, her v_i, v_{i+1} $(0 \leq i < m)$ çifti G nin bir kenarı tarafından birleştirilecek ve $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$ olacak şekilde bir uçlar dizisi varsa, G çizgesi *bağlıdır* diyoruz.]

5 ABC bir üçgen ve P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta olsun. $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ açılarından en az birinin $30°$ ye eşit ya da $30°$ den küçük olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

P noktasının BC, AC, AB doğruları üzerindeki izdüşümü sırasıyla A', B', C' olsun.

Erdös–Mordell eşitsizliğine göre $PA + PB + PC \geq 2(PA' + PB' + PC')$.

$\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ açılarından hepsinin $30°$ den büyük olduğunu varsayalım.

Açılardan biri geniş açı olsun. $\angle PBC > 90°$ olduğunu varsayılım. $\angle PAB$ ile $\angle PCA$, dar açıdır. Bu durumda, $\sin \angle PAB = \dfrac{PC'}{PA} > \dfrac{1}{2}$. Yani $2 \cdot PC' > PA$ dır. Benzer şekilde, $2 \cdot PB' > PB$. Erdős–Mordell'in sağlanması için $2 \cdot PA' < PA$, dolayısıyla da $\sin \angle PBC = \dfrac{PA'}{PA} < \dfrac{1}{2} = \sin 150°$ olacaktır. $\angle PBC$ geniş açı olduğu için $\angle PBC > 150°$ olur ki, bu zaten diğer açıların $30°$ den küçük olduğu anlamına gelir. Çelişki.

$\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ açıların hiçbiri geniş açı olmasın. Hepsinin $30°$ den büyük olduğunu varsaymıştık. $\sin \angle PAB = \dfrac{PC'}{PA} > \dfrac{1}{2}$. Yani $2 \cdot PC' > PA$ dır. Benzer şekilde, $2 \cdot PB' > PB$. Erdős–Mordell'in sağlanması için $2 \cdot PA' < PA$, dolayısıyla da $\sin \angle PBC = \dfrac{PA'}{PA} < \dfrac{1}{2} = \sin 30°$ olacaktır. Çelişki.

O halde; $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ dan en az biri $30°$ ye eşit ya da $30°$ den küçüktür.

6 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gerçel sayılarından oluşan sonsuz bir diziye, her $i \geq 0$ için $|x_i| \leq C$ olacak şekilde bir C sabiti varsa, *sınırlı* denir.

Herhangi bir $a > 1$ gerçel sayısı verildiğinde, her negatif olmayan farklı i, j tam sayı çifti için

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$$

olacak şekilde bir $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sınırlı sonsuz dizisi oluşturun.

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1992

1 $1 < a < b < c$ olmak üzere, $abc - 1$ tam sayısının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünmesini sağlayan tüm a, b, c tam sayılarını bulunuz.

Çözüm:

Denklemde bir dönüşüm yaparak başlayalım. $a-1 = x$,$b-1 = y$,$c-1 = z$, $xyz \mid (x+1).(y+1).(z+1)-1$, $x < y < z$ ve $x, y, z \in Z^+$ olur.

$xyz \mid (xy + x + y + 1).(z+1) - 1$

$xyz \mid xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 - 1$

$xyz \mid xy + xz + yz + +x + y + z$ elde edilir. Buradan

$\frac{xy+xz+yz+x+y+z}{xyz} \in Z^+$ elde edilir. İfadeyi düzenlersek $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$ olur. $x < y < z$ olduğundan $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z} > \frac{1}{xy} > \frac{1}{xz} > \frac{1}{yz}$ olur. Bu da bize x yerine değer seçerek İfadenin maksimum değerini bulma şansı verir. yani seçebileceğimiz en küçük üçlüyü seçerek işe koyulalım.

$(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ise $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ olur. Bu ise $2 + \frac{5}{6}$ yani ifadenin 3 ten kesinlikle küçük olacağını söyler.

$(x, y, z) = (2, 3, 4)$ ise $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{35}{24} < 2$ olur. Yani $x = 2$ için ifadenin değeri 1 dir.

$x \geq 3$ için ise bu ifade en yüksek değerini $(3, 4, 5)$ için alır.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{59}{60} < 1$ olur. bu da $x \geq 3$ için çözüm olmadığını söyler. Dolayısıyla $x = 1$ için ifade 1 veya 2 olabildiğinden ve $x = 2$ için ifadenin değeri 1 olduğundan 3 farklı durumda incelemek yeterlidir.

1) $x = 1$ için ifadenin değeri 1 ise

$2y + 2z + 1 + yz = yz$

$2y + 2z + 1 = 0$ olur. ki $2y + 2z > 0$ olduğundan doalyı mümkün değildir.

2) $x = 1$ için ifadenin değeri 2 ise

$2y + 2z + 1 = yz$

$2z + 1 = y.(z-2)$

$y = \frac{2z+1}{z-2}$

$\frac{2z+1+4-2z}{z-2} \in Z$ yani $z - 2 \mid 5$ olur. $z > 2$ olduğundan dolayı $z \in \{3, 7\}$ olur.

$z = 3$ ise $y = 7$ olur. $z > y$ koşulu sağlanmadığından dolayı çözümü yoktur.

$z = 7$ ise $y = 3$ olur. bu bir çözümdür. $(x, y, z) = (1, 3, 7)$ olduğundan $(a, b, c) = (2, 4, 8)$

3) $x = 2$ için ifadenin değeri 1 ise

$3z + 3y + 2 + yz = 2yz$

$3y + 3z + 2 = yz$

$3z + 2 = y.(z-3)$

$\frac{3z+2}{z-3} \in Z$

$\frac{3z+2+9-3z}{z-3} \in Z$

$z > 2$ olduğundan ve $z \not\equiv 3$ olduğu için $z - 3 > 0$ olmalıdır.

$\frac{11}{z-3} \in Z^+$ ve $Z \in \{4, 14\}$ olmalıdır.

$z = 4$ ise $y = 14$ olur bu $z > y$ ile çelişir.

$z = 14$ ise $y = 4$ olur bu durumda $(x, y, z) = (2, 4, 14)$ bir çözümdür ve $(a, b, c) = (3, 5, 15)$ olarak bulunur.

bu bölme işlemini sağlayan üçlüler $(2, 4, 8)$ ve $(3, 5, 15)$ olmak üzere 2 tanedir.

2 $\mathbf{R}$ ile reel sayılar kümesini gösterelim. Her reel x, y için

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

bağıntısını sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 Uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Her bir nokta çifti bir kenar (yani bir doğru parçası) ile birleştiriliyor ve her kenar ya mavi ya kırmızıya boyanıyor ya da hiç boyanmadan bırakılıyor. Aşağıdaki koşulu sağlayan en küçük n sayısını bulunuz:

Kenarlardan tam olarak n tanesi boyandığında, boyalı kenarların kümesi içinde mutlaka üç kenarı da aynı renkte olan bir üçgen bulunur.

4 Düzlemde, C bir çember; L, C çemberine teğet olan bir doğru ve M ise L doğrusu üstünde bir nokta olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm P noktalarının geometrik yerinin bulunuz:

L doğrusu üstünde Q ve R gibi öyle iki nokta vardır ki, M, QR nin orta noktası ve C de PQR üçgeninin iç çemberi olur.

Çözüm:

İddia: ABC üçgeninde I merkezli iç teğet çember BC kenarına D de değiyor. DI iç teğet çemberi ikinci kez E de kesiyor. AE, BC kenarını D' kessin. $BD' = CD$ dir.

İspat:

$AB > AC$ ve AH yükseklik olsun. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, u yarıçevre, r iç yarıçap, h da a ya ait yükseklik olsun.

$DC = u - c$, $HC = \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$, $DH = DC - HC = \dfrac{2ua - 2ac - b^2 + c^2 - a^2}{2a} = \dfrac{c^2 - b^2 + ab - ac}{2a}$
$= \dfrac{(c-b)(b+c-a)}{2a} = \dfrac{(c-b)\cdot 2(u-a)}{2a} = \dfrac{(c-b)(u-a)}{a}$

Üçgende alandan $a \cdot h = 2u \cdot r \Rightarrow h = \dfrac{2ur}{a}$.

$ED \parallel AH$ olduğu için $\dfrac{DD'}{DH} = \dfrac{ED}{AH - ED} = \dfrac{2 \cdot r}{h - 2r} \Rightarrow DD' = DH \cdot \dfrac{2r}{h - 2r} = \dfrac{(c-b)(u-a)}{a} \dfrac{2r}{\dfrac{2ur}{a} - 2r}$
$= \dfrac{(c-b)(u-a)}{a} \dfrac{a}{u-a} = c - b$

$BD' = BC - DD' - CD = a - (c - b) - (u - c) = u - c = CD$ ■

Soruya dönelim, çember L ye D de dokunsun. DE, C çemberinin bir çapı olsun. İddia gereği, PE L yi $QD = RD'$ olacak şekilde D' noktasında keser. Bu durumda M, DD' nün orta noktasıdır. M sabit, D sabit olduğu için D' de sabittir. E noktası da sabit olduğu için, P noktaları $D'E$ doğrusu üzerindedir. Sınırları da düşünürsek P noktalarının geometrik yeri, $[D'E$ ışınının $[D'E]$ hariç kısmıdır.

5 S, üç boyutlu uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan bir küme olsun. S_x, S_y ve S_z ile S deki noktaların sırasıyla yz düzlemi, zx düzlemi ve xy düzlemi üstüne dik izdüşümlerinden oluşan kümeleri gösterelim. Bu durumda

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

olduğunu kanıtlayınız. Burada $|A|$ ile sonlu bir A kümesindeki eleman sayısı gösterilmektedir.

(Not: Bir noktanın bir düzlem üstüne dik izdüşümü, o noktadan düzleme çizilen dikmenin ayağıdır.)

6 Her n pozitif tam sayısı için $S(n)$ sayısını aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük tam sayı olarak tanımlıyoruz: Her $k < S(n)$ pozitif tam sayısı için, n^2 sayısı k tane pozitif tam karenin toplamı olarak yazılabilir.

(a) Her $n > 4$ için $S(n) < n^2 - 14$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan bir n tam sayısı bulunuz.

(c) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1993

1 $n > 1$ bir tam sayı ve $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ olsun. $f(x)$ in, herbirinin derecesi en az 1 olan ve tüm katsayıları tam sayılar olan iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.

2 Daraçılı bir ABC üçgeni içindeki bir D noktası, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90°$ ve $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ koşullarını sağlamaktadır.

(a) $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ oranının değerini bulunuz.

(b) ACD ve BCD üçgenlerinin çevrel çemberlerine C noktasında çizilen teğetlerin dik olduklarını kanıtlayınız.

Çözüm:

(a) $|BD| = |DE|$ olacak şekilde BDE dik üçgenini inşaa edelim.

$\angle ADE = \angle ACB$ açı eşitliğini görebiliriz. Soruda verilen bilgiyle birlikte, $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AC}{BC}$ olduğundan ACB üçgeni ile ADE üçgeni benzer üçgenlerdir.

Bu benzerliğe göre;

$\angle EAD = \angle BAC \Rightarrow \angle EAB = \angle DAC$ dir. $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ orantısı önceki benzerliğin bir sonucu idi bu sonuç bulunan açı eşitliği ile birlikte,

AEB üçgeni ile ADC üçgeninin benzer üçgenler olduğunu gösterir.

Bu benzerliğe göre;

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EB}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot EB = AC \cdot BD \cdot \sqrt{2}$

Buradan, $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$ bulunur.

(b) (ACD) ve (BCD) çemberlerinin C deki teğetlerinin dik olması, bu noktadaki normallerinin de dik olması demektir.

Çemberlerin merkezleri sırasıyla P ve Q olsun. $PC \perp QC$ olduğunu göstereceğiz.

$\angle DAC + \angle DBC = 90°$ dir. $\angle PCD = 90 - \angle DAC$ ve $\angle QCD = 90 - \angle DBC$ olup $\angle PCD + \angle QCD = 180 - (\angle DAC + \angle DBC) = 90°$ dir.

3 Sonsuz bir satranç tahtası üzerinde aşağıdaki oyun oynanıyor. Başlangıç durumunda, n^2 tane taş her karede bir taş olmak üzere birbirine bitişik karelerden oluşan $n \times n$ büyüklüğündeki bir blokta bulunmaktadırlar. Oyundaki bir hamle, dolu bir komşu kare üzerinden yatay veya düşey doğrultuda geçerek hemen ardındaki boş kareye atlamaktadır. Üzerinden atlanan taş tahtadan kaldırılmaktadır.

Hangi n değerleri için oyunun tahta üzerinde yalnızca bir taş kalacak şekilde sonuçlanacağını bulunuz.

4 Düzlemde verilen P, Q, R gibi üç nokta için, $m(PQR)$, PQR üçgeninin yüksekliklerinin minimumu olarak tanımlanıyor. (P, Q, R nin doğrusal olması durumunda $m(PQR) = 0$)

A, B, C düzleminde verilmiş noktalar olsun. Düzlemdeki herhangi bir X noktası için

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

olduğunu kanıtlayınız.

5 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $f(1) = 2$, ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $f(f(n)) = f(n) + n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) < f(n+1)$ koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun var olup olmadığını belirleyiniz.

6 $n > 1$ bir tam sayı olsun. Bir çember üzerine n tane lamba $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ yerleştirilmiştir. Her lamba **AÇIK** ya da **KAPALI**dır. $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ işlemler dizisi uygulanmaktadır. İşlem S_j yalnızca L_j'nin durumunu (diğer tüm lambalarının durumunu koruyarak) şu şekilde etkiler:

Eğer L_{j-1} **AÇIK** ise, S_j, L_j'nin durumunu **AÇIK**tan **KAPALI**ya ya da **KAPALI**dan **AÇIK**a çevirir. Eğer L_{j-1} **KAPALI** ise, S_j, L_j'nin durumunu değiştirmez.

Lambalar n moduna göre şöyle sıralanmıştır:

$$L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_1 = L_{n+1}, \text{vs.}$$

Başlangıçta bütün lambalar **AÇIK** durumdadır. Aşağıdakileri gösteriniz.

(a) Öyle bir pozitif tam sayı $M(n)$ vardır ki, $M(n)$ işlemden sonra tüm lambalar tekrar **AÇIK** duruma gelmektedir.

(b) Eğer n, 2^k şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

(c) Eğer n, $2^k + 1$ şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - n + 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1994

$\boxed{1}$ m ve n pozitif tam sayılar olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin farklı öyle elemanları olsun ki, $1 \leq i \leq j \leq m$ olmak üzere $a_i + a_j \leq n$ olduğu her durumda, $a_i + a_j = a_k$ olacak şekilde bir k $(1 \leq k \leq m)$ bulunsun.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

$\boxed{2}$ ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olsun.

(a) M, BC'nin orta noktası; O da, AM doğrusu üstünde bulunan ve OB'nin AB'ye dik olmasını sağlayan nokta olsun.

(b) Q, BC kenarı üstünde, B ve C'den farklı herhangi bir nokta olsun.

(c) E, Q ve F aynı doğru üstünde bulunan farklı noktalar olmak üzere, E'nin AB doğrusu, F'nin de AC doğrusu üstünde bulunduğunu kabul edelim.

OQ'nun EF'ye dik olmasının, $|QE| = |QF|$ olması için gerek ve yeter bir koşul olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$OQ \perp EF$ olsun.

$OQFC$ kirişler dörtgeninde $\angle QFO = \angle QCO = \angle CBO$

$EBQO$ kirişler dörtgeninde $\angle QEO = \angle QBO = \angle QFO \Longrightarrow OE = EF \Longrightarrow QE = QF$. ■

$QF = QE$ olsun.

F den AB ye çizilen paralel BC yi G de kessin. $EQ = QF$ olduğu için $BE = FG$ ve paralellikten $\angle ABC = \angle FGC = \angle FCG$ olduğu için $BE = FC$ dir. Aynı zamanda $OB = OC$ olduğu için $\triangle OBE \cong \triangle OCF$ olup, $OE = QF$ ve $OQ \perp EF$ dir. ■

$\boxed{3}$ Her k pozitif tam sayısı için, $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ kümesine ait ve 2 tabanına göre yazılımlarında tam olarak üç tane 1'in geçtiği elemanların sayısı $f(k)$ olsun.

(a) Her m pozitif tam sayısı için, $f(k) = m$ olacak şekilde en az bir k pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $f(k) = m$ eşitliğinin tam olarak bir k için sağlandığı tüm m pozitif tam sayılarını bulunuz.

$\boxed{4}$ $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm:

Bölme Algoritmasını uygulayalım.

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = qn + r$$

$q \geq 0$, $0 \leq r < n$

Denklemi içler dışlar çarpıp düzenlersek

$$n^3 + 1 = qmn^2 + rmn - qn - r$$

Denkleme n modunda bakarsak $1 \equiv -r(modn)$ yani $r \equiv -1(modn)$ bölme algoritmasını da göz önüne alırsak $r = n - 1$ olmalıdır.

Denklemi tekrar düzenlersek $n^2 = qmn + (n-1).m - q - 1$ elde edilir.

$m^3.\dfrac{n^3+1}{mn-1} = \dfrac{m^3n^3-1}{mn-1} + \dfrac{m^3+1}{mn-1}$ olduğundan ilk 3 terim tam sayı olduğundan $\dfrac{m^3+1}{mn-1}$ de bir pozitif tam sayıdır. Genelliği bozmadan $m \geq n$ alabiliriz.

$n = 1$ ise $1 = qm - q - 1$ $2 = qm - q$ $q \mid 2$ olduğundan $q = 1$ veya $q = 2$ dir.

$q = 2$ ise $m = 2$ $(2, 1)$ ve simetriği

$q = 1$ ise $m = 3$ olur. $(3, 1)$ ve simetriği gelir.

$m \geq n \geq 2$ olsun. O zaman

$n^2 \geq qn^2 + n.(n-1) - q - 1$

$n + 1 \geq q.(n^2 - 1)$

$q.(n-1) \leq 1$

$n \geq 2$ olduğundan $q \leq 1$ elde edilir.

$q = 1$ için $n^2 \geq qn^2 + n.(n-1) - q - 1$ eşitsizliğine tekrar bakalım .

$n^2 \geq 2n^2 - n - 2$

$n^2 - n - 2 \leq 0$ $n \geq 2$ olduğundan dolayı $n = 2$ olası tek çözümdür. Denklemde yerine konulursa $m = 2$ çıkar.

$q = 0$ için

$n^2 = mn - m - 1$

$$n^2 + 1 = m.(n-1)$$

$$\frac{n^2+1}{n-1} \in Z$$

Polinom bölmesi yardımıyla

$$\frac{2}{n-1} \in Z^+$$

olmalıdır. $n = 2$ ve $n = 3$ çözümleri gelir.

$n = 2$ için $m = 5$

$n = 3$ için $m = 5$ olur.

Denklemin tüm çözümleri bunların simetrikleri ile birlikte $\{(1,3), (3,1), (1,2), (2,1), (2,2), (5,3), (3,5), (2,5), (5,2)\}$ şeklinde 9 çözümü vardır.

$\boxed{5}$ S, -1'den kesin büyük reel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan tüm $f : S \to S$ fonksiyonlarını bulunuz:

(a) S'ye ait her x, y için, $f\left(x + f(y) + xf(y)\right) = y + f(x) + yf(x)$ olup,

(b) $\dfrac{f(x)}{x}$, $-1 < x < 0$ ve $0 < x$ aralıklarının her birinde kesin artan bir fonksiyondur.

$\boxed{6}$ Aşağıdaki koşulu sağlayan ve pozitif tam sayılardan oluşan bir A kümesinin var olduğunu gösteriniz:

Tüm elemanları asal sayılar olan sonsuz her S kümesi için, m ve n sayılarından her birinin S'ye ait k farklı elemanın çarpımı olmasını sağlayacak biçimde $K \leq 2$, $m \in A$ ve $n \notin A$ pozitif tam sayıları vardır.

36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1995

1 A, B, C, D bir doğru üstünde belirtilen sırada dört farklı nokta olsun. AC ve BD çaplı çemberler X ve Y de kesişiyor. XY doğrusu BC yi Z de kesiyor. P, XY doğrusu üzerinde Z den farklı bir nokta olsun. CP doğrusu AC çaplı çemberi C ve M de, BP doğrusu BD çaplı çemberi B ve N de kesiyor. AM, DN, XY doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

P noktasının BD çaplı çembere göre kuvvetinden $XP \cdot PY = BP \cdot PN$.

P noktasının AC çaplı çembere göre kuvvetinden $XP \cdot PY = CP \cdot PM$.

Bu durumda B, C, N, M çemberseldir. Dolayısıyla $\angle NMC = \angle NBC$ ve $\angle MNB = \angle MCB$.

AM ile XY, Q da kesişsin. $\angle AQZ = \angle ACM = \angle MNP$ olduğu için P, M, P, N çemberseldir. Bu durumda, $\angle NQP = \angle NMP = \angle NBD$ olduğu için Q, N, D doğrusaldır. Yani AM, XY, DN noktadaştır.

2 a, b, c; $abc = 1$ koşulunu sağlayan pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Paydadaki ifadelerden kurtulmak için dönüşüm yapalım $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ olsun. İfade şuna dönüşür

$$\Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x^3}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})} + \frac{1}{\frac{1}{y^3}(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})} + \frac{1}{\frac{1}{z^3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} = \frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3xz}{x+z} + \frac{z^3xy}{x+y}$$

$abc = 1$ ise $xyz = 1$ dir. O zaman son ifadede xyz yerine 1 yazalım. Artık ispatlamamız gereken ifade şudur:

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayalım:

$$\Longrightarrow [(y+z)+(x+z)+(x+y)][\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}] \geq [x+y+z]^2$$

$$\Longrightarrow [\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}] \geq \frac{[x+y+z]^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

Şimdi $x+y+z \geq 3$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Bunu da A.G.O dan rahat bir şekilde görebiliriz.

$\Longrightarrow x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ dir. $xyz = 1$ olduğu için $x+y+z \geq 3$ tür. Ve ispat biter.

Çözüm 2:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)} \text{ (Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uyguluyoruz)}$$
$$\geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{2(ab+bc+ca)}$$
$$=\frac{(bc+ca+ab)}{2} \text{ (Aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğini uyguluyoruz)}$$
$$\geq 3\frac{(abc)^{\frac{3}{2}}}{2}$$
$=\dfrac{3}{2}$ elde edilir. Eşitlik durumu yalnızca $a=b=c=1$ iken sağlanır.

Çözüm 3:

Bu soruya Jensen Eşitsizliği kullanarak da cevap verebiliriz.

Önceden yapılan dönüşümleri tekrardan ($x=\frac{1}{a}$,$y=\frac{1}{b}$,$z=\frac{1}{c}$) şeklinde dönüşümler yapıldığında

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$ haline gelir.

şimdi $f(x)=\frac{1}{x}$ olsun. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ve buradan $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ ve $x>0$ olduğundan dolayı $f''(x)>0$ elde edilir. Buna göre Jensen eşitsizliği kullanılabilir.

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$$=x.f(\frac{y+z}{x})+y.f(\frac{x+z}{y})+z.f(\frac{x+y}{z})\geq(x+y+z).(\frac{x+y+z}{(y+z)+(x+z)+(x+y)})=\frac{x+y+z}{2}$ Daha sonra aritmetik - geometrik ortalama eşitsizliğinden

$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ve $xyz=1$ olduğundan $x+y+z\geq 3$ yani

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$ elde edilir.

3 Düzlemde $1\leq i<j<k\leq n$ için $\triangle A_iA_jA_k$ nın alanının $r_i+r_j+r_k$ olduğu herhangi üçü doğrusal olmayan $A_1,\dots,A_n$ noktalarının ve $r_1,\dots,r_n$ gerçel sayılarının bulunmasını sağlayan tüm $n>3$ tam sayılarını bulunuz.

4 $i=1,\dots,1996$ için
$$x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$$
ve $x_0=x_{1995}$ olacak şekilde $x_0,x_1,\dots,x_{1995}$ pozitif gerçel sayılar dizisi bulunduğuna göre, x_0 ın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

5 $ABCDEF$ dışbükey altıgeninde $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$ ve $\angle BCD=\angle EFA=\pi/3$ olsun. G ve H ın altıgenin iç bölgesinde $\angle AGB=\angle DHE=2\pi/3$ olacak şekilde alınan noktalar olduğunu varsayalım. $AG+GB+GH+DH+HE\geq CF$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Altıgenin dışına doğru ABG' ile DEH' eşkenar üçgenleri kurulsun.

Ptolemy'den $AG\cdot G'B+GB\cdot AG'=GG'\cdot AB\Rightarrow AG+GB=GG'$ ve benzer şekilde $HD+HE=HH'$ olacaktır.

Soru, $GG'+GH+HH'\geq CF$ ye dönüştü.

$GG'+GH+HH'$ en küçük değerini G', G, H' doğrusal iken alır. O halde $GG'+GH+HH'\geq G'H'$.

$G'BDH'$ dörtgeni ile $CBAF$ dörtgeni eş olduğu için $G'H'=CF$. Yani $AG+GB+GH+DH+HE=GG'+GH+HH'\geq G'H'=CF$.

6 p tek bir asal sayı olsun. $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ kümesinin, elemanları toplamı p ile bölünecek şekilde p elemanlı kaç A alt kümesi vardır?

37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1996

1 Gerçel r sayısı ile $|AB| = 20$, $|BC| = 12$ boyutlarında bir $ABCD$ dikdörtgeni veriliyor. Dikdörtgen, 20×12 birim karelik ızgaraya bölünüyor. Bir kareden diğer kareye hareket edebilmek için, bu iki karenin merkezleri arasındaki uzaklığın $\sqrt{r}$ olması gerekiyor. Görevimiz, A köşesine sahip birim kareden başlayıp B köşesine sahip birim kareye giden bir hareketler dizisini bulmak.

(a) r, 2 veya 3 ile bölünüyorsa; görevin tamamlanamayacağını gösteriniz.

(b) $r = 73$ ise, görevin tamamlanabileceğini kanıtlayınız.

(c) $r = 97$ olduğunda, görev tamamlanabilir mi?

2 P, ABC üçgeninin iç bölgesinde

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

olacak şekilde bir nokta olsun. APB ve APC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla D ve E olsun. AP, BD, CE nin bir noktada kesiştiklerini gösteriniz.

Çözüm:

P nin BC, AB, AC kenarları üzerindeki izdüşümleri sırasıyla A', B', C' olsun.

$A'CB'P$, $AB'PC'$ ve $A'PC'B$ birer kirişler dörtgeni olduğu için,

$\angle C'B'P = \angle PAC'$ ve $\angle PB'A' = \angle PCA'$. $\angle C'B'A' = \angle C'AP + \angle PCA' = \angle APC - \angle ABC$.

$\angle B'C'P = \angle B'AP$ ve $\angle PC'A' = \angle PBA'$. $\angle B'C'A' = \angle B'AP + \angle PBA' = \angle APB - \angle ACB$.

Buradan $\angle A'B'C = \angle B'C'A'$ ve $A'B' = A'C'$ elde ettik.

$\triangle A'B'C$ de, Sinüs Teoreminden $\dfrac{A'B'}{\sin \angle C} = 2R = CP \Rightarrow A'B' = CP \cdot \sin \angle C$.

$\triangle A'C'B$ de, Sinüs Teoreminden $\dfrac{A'C'}{\sin \angle B} = BP \Rightarrow A'C' = BP \cdot \sin \angle B$.

$\triangle ABC$ de, Sinüs Teoreminde $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin \angle C}{\sin \angle B}$.

$A'B' = A'C' \Rightarrow CP \cdot \sin \angle C = BP \cdot \sin \angle B \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{CP} \Rightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AC}{CP}$. Bu da demektir ki $\angle ACP$ nin iç açıortayı ile $\angle ABP$ nin iç açıortayı AP üzerinde aynı noktada kesişir. ■

3 S, negatif olmayan tam sayılar kümesini göstersin. S den kendisine

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad \forall m, n \in S$$

şeklinde tanımlanan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

4 a ve b pozitif tam sayıları $15a + 16b$ ve $16a - 15b$ sayıları birer pozitif tam sayının karesi olacak şekilde alınıyor. Bu tam karelerden küçük olanın alabileceği en küçük değer nedir?

5 $ABCDEF$ dışbükey altıgeninde AB, DE ye paralel; BC, EF ye paralel; CD de FA ya paraleldir. R_A, R_C, R_E; sırasıyla FAB, BCD, DEF üçgenlerinin çevrel yarıçapları ve P de altıgenin çevresi olsun.

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

6 p, q, n; $p + q < n$ olacak şekilde alınan üç pozitif tam sayı olsun. $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, aşağıdaki koşulları sağlayan bir tam sayı $(n+1)$ lisi olsun:

(a) $x_0 = x_n = 0$.

(b) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her i için ya $x_i - x_{i-1} = p$ ya da $x_i - x_{i-1} = -q$ dur.

$x_i = x_j$ olacak şekilde $(i, j) \neq (0, n)$ şartını sağlayan $i < j$ indislerinin bulunduğunu gösteriniz.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1997

1 Köşeleri düzlemdeki tam sayı koordinatlı noktalar olan birim karelere bakalım. Bu kareler (satranç tahtasındaki gibi) sırayla siyah ve beyaza boyanmış olsun. Her (m, n) pozitif tam sayı çifti için, köşeleri tam sayı koordinatlı noktalar olan ve m ve n uzunluğundaki dik kenarları yukarıdaki karelerin kenarları üstünde bulunan bir dik üçgen alalım. S_1 ile bu üçgendeki siyah bölgelerin toplam alanını; S_2 ile de aynı üçgendeki beyaz bölgelerin toplam alanını gösterelim.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

olsun.

(a) Her ikisi de tek veya her ikisi de çift pozitif m ve n tam sayıları için $f(m, n)$ değerini hesaplayınız.

(b) Her m ve n için $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

(c) $f(m, n) < C$ koşulunu m ve n'nin tüm değerleri için sağlayan bir C sabitinin bulunmadığını gösteriniz.

2 A açısı ABC üçgenindeki açıların en küçüğüdür. B ve C noktaları bu üçgenin çevrel çemberini iki yaya ayırıyor. U, B ve C arasındaki, A noktasını içermeyen yayın bir iç noktası olsun. $[AB]$ ile $[AC]$'nin orta dikmeleri AU doğrusunu sırasıyla V ve W noktlarında kesiyor. BV ile CW doğruları da T noktasında kesişiyor.

$$|AU| = |TB| + |TC|$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

CW çemberi X noktasında kessin.

$\angle XBA = \angle XCA = \angle CAU$.

$\angle ABT = \angle BAU$.

$\angle BXC = \angle BAC = \angle BAU + \angle CAU = \angle ABT + \angle XBA = \angle XBT \Rightarrow XT = BT$

$AW = WC$ olduğu için $WU = XW$ dur. Bu durumda $AU = XC = XT + TC = BT + TC$ olur.

3 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olsun.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$'nin

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşulu sağlanacak biçimde bir $y_1, y_2, \ldots, y_n$ permüstasyonu bulunduğunu gösteriniz.

4 Elemanları $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ kümesine ait bir $n \times n$ matrise (n sütun ve n satırdan oluşan kare biçimindeki bir tabloya), eğer her $i = 1, \ldots, n$ için i-inci satır ile i-inci sütun birlikte S'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa, bir *gümüş matris* diyoruz.

(a) $n = 1997$ için hiç bir gümüş matrisin bulunmadığını;

(b) n'nin sonsuz sayıda değeri için gümüş matrislerin bulunduğunu gösteriniz.

5 $a \geq 1$, $b \geq 1$ olmak üzere,

$$a^{(b^2)} = b^a$$

eşitliğini sağlayan tüm (a, b) tam sayı sıralı ikililerini bulunuz.

Çözüm:

Bu soruyu $a > b$ olup olmamasına göre iki parçada inceleyelim.

1) $1 \leq a \leq b$ için çözüme bakalım.

$a \leq b$ olduğunu kullanarak eşitsizlik kurmayı hedefleyelim.

$(a^b)^b = b^a$ şeklinde yazabiliriz. $a \leq b$ den dolayı $a^b \leq b$ olmazsa çözümün olamayacağı açıktır.

$a^b - b$ ifadesinin türevini alalım. $\dfrac{d}{db}(a^b - b) = 1.a^b.lna - 1$ $b > a > e$ için $lna > 1$ ve $a^b > 1$ olacağı için türev 0'dan büyüktür Mesela $b = 3$ alacak olursak $a^3 - 3 > 0$ olduğunu gösterirsek $a^b - b$ nin daima pozitif olduğunu göstermiş oluruz.

$a > e > 2$ $a^3 > 8$ yani $a^3 - 3 > 0$ elde edilir. Yani $a = 1$ ya da $a = 2$ olmalıdır.

$a = 1$ olsun. O halde $b = 1$ olması gerektiği açıktır.

$a = 2$ olsun. $2^{b^2} = b^2$ $b^2 = t$ dönüşümü yapalım. $2^t = t$, $2^t - t = 0$ Şimdi bu ifade için türeve bir kez daha bakalım.

$2^t.ln2 - 1$ olur. Bu ifadeyi ise $ln2^{2^t} - 1$ şeklinde yazdıktan sonra $t > 1$ için türevin 0 dan büyük olacağı açıktır. Aynı zamanda $2^2 - 2 > 0$ da sağlandığından dolayı daima $t > 1$ için daima pozitiftir. $t = 1$ in de sağlamadığı açıktır.

2) şimdi de $b > a \geq 1$ olsun.

$a^{b^2} = b^a = (a^b)^b$ den dolayı $a > b^2$ gelir yani $\dfrac{a}{b^2} > 1$ elde edilir. Acaba $a = k.b^2$ eşitliğindeki k sayısı daima bir pozitif tam sayı olabilir mi diye düşünelim.

$(ab^{-2})^{b^2} = b^{a-2b^2}$ şeklinde yazarsak $ab^{-2} > 1$ olduğu için $a - 2b^2 > 0$ olacağı açıktır. $a > 2b^2$ olur.

$\dfrac{a}{b^2} = \dfrac{k}{n}$,$k, n \in Z^+$ ve $(k, n) = 1$ olsun. Buradan $n.a.b^{-2} = k$ elde edilir.

Aşağıdaki adımları takip edelim.

$$k^{b^2} = n^{b^2}.a^{b^2}.(b^{-2})^{b^2} = n^{b^2} = n^{b^2}.b^{a-2b^2}$$

bu ifadeden dolayı $n \mid k$ olması gereklidir. $(k, n) = 1$ olduğundan dolayı $n = 1$ alınmalıdır. Artık $a = k.b^2$ $a > 2b^2$ yani $k \geq 3, k \in Z^+$ olduğunu biliyoruz.

Bunu başlangıçtaki denklemde yerine koyacak olursak $k^{b^2} = (b^{k-2})^{b^2}$ olmalıdır. buradan $k = b^{k-2}$ buluruz.

$k \geq 5$ için $b^{k-2} - k \geq 2^{k-2} - k$ olur. $\dfrac{d}{dk}(2^{k-2} - k) = (k-2).2^{k-2}.ln2 - 1$ yani $2^{k-2}.ln2^{k-2} - 1 > 0$ $k = 5$ için ise $2^3 - 5 = 3 > 0$ olduğundan $k < 5$ olmalıdır.

$k = 3$ ise $3b^2 = b^3$ yani $b = 3$ elde edilir. $a = kb^2 = 27$ olur. $(27, 3)$ çözümü gelir.

$k = 4$ ise $4b^2 = b^4$ yani $b = 2$ elde edilir. $a = 16$ olur. $(16, 2)$ çözümü gelir.

O halde denklemin çözüm kümesi $\{(1, 1), (27, 3), (16, 2)\}$ olmalıdır.

$\boxed{6}$ Her n pozitif tam sayısı için, n'nin, 2'nin negatif olmayan tam sayı kuvvetlerinin toplamı olarak yazılış biçimlerinin sayısını $f(n)$ ile gösterelim. Toplamda geçen terimlerin yalnızca sırasının değişik olduğu yazılış biçimlerinini aynı sayıyoruz. Örneğin 4 sayısı; 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1 olarak dört şekilde yazılabileceğinden $f(4) = 4$ olur. Her $n \geq 3$ tam sayısı için

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f\left(2^n\right) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

olduğunu kanıtlayınız.

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1998

1 $ABCD$ konveks dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine dik olup, AB ve DC kenarları paralel değildir. AB ve DC'nin orta dikmelerinin kesiştiği P notkasının $ABCD$'nin iç bölgesinde yer aldığı bilinmektedir. $ABCD$'nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(i) $[APB] = [PDC] \Longrightarrow AP = PB = PC = PD$ olduğunu gösterelim.
$BD \cap AC = \{E\}$, $[BA \cap [CD = \{F\}$, AB nin orta noktası X, CD nin orta noktası Y olsun.
Köşegenler dik kesiştiği için $AX = BX = XE$ ve $CY = DY = EY$.
Alan eşitliğinden $PX \cdot AB = PY \cdot CD \Rightarrow PX \cdot EX = PY \cdot EY \Rightarrow \dfrac{EX}{EY} = \dfrac{PY}{PX}$.
$\angle XBE = \angle XEB = \alpha$ ve $\angle YEC = \angle YCE = \beta$ dersek, $\angle AXE = 2\alpha$ ve $\angle EYD = 2\beta$.
$FBEC$ içbükey dörtgeninde $\angle BEC = \angle BFC + \angle FBE + \angle FCE \Rightarrow \angle BFC = 90° - \alpha - \beta$.
$FXEY$ içbükey dörtgeninde $\angle XEY = \angle XFY + \angle AXE + \angle EYD = (90° - \alpha - \beta) + 2\alpha + 2\beta = 90° + \alpha + \beta$.
$PXFY$ dörtgeninde $\angle XPY + \angle XFY = 180° \Rightarrow \angle XPY = 180° - (90° - \alpha - \beta) = 90° + \alpha + \beta = \angle XEY$.
Bu durumda, $K.A.K.$ dan $\triangle XEY \sim \triangle YPX$. XY ortak olduğu için de $\triangle XEY \cong \triangle YPX$ olur. Bu durumda $XE = EY$, yani $AB = CD$ ve alandan $PY = PX$ çıkar. Bu da $\triangle APB \cong \triangle CPD$ olduğu anlamına gelir. $AP = PB = PC = PD$ den de, $ABCD$ nin kirişler dörtgeni olduğu sonucu çıkar. ■

(ii) $AP = PB = PC = PD \Longrightarrow [APB] = [PDC]$ olduğunu gösterelim.
$ABCD$ kirişler dörtgeninde köşegenler dik kesiştiği için AB ile CD yaylarının ölçüleri toplamı toplamı $180°$ dir. Bu durumda $\angle APB + \angle DPC = 180°$ ve alan eşitliğinden $[PAB] = \dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot PB \cdot \sin \angle APB = \dfrac{1}{2} \cdot PC \cdot PD \cdot \sin(180° - \angle APB) = [PCD]$ ■

2 Bir yarışmada, $b \geq 3$ bir tek sayı olmak üzere, a yarışmacı ve b hakem bulunmaktadır. Her hakem her yarışmacıyı ya "başarılı" ya da "başarısız" olarak değerlendiriyor. k aşağıdaki özelliğe sahip bir sayı olsun: Herhangi iki hakemin en çok k yarışmacı hakkındaki değerlendirmeleri çakışmaktadır.

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğunu gösteriniz.

3 Her pozitif n tam sayısı için, $d(n)$ ile n'nin (1 ve n dahil olmak üzere) bölenlerinin sayısını gösterelim.

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

olmasını sağlayacak biçimde bir n sayısının bulunduğu tüm pozitif k tam sayılarını bulunuz.

4 $ab^2 + b + 7$'nin $a^2b + a + b$'yi bölmesini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

5 I ile, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini gösterelim. ABC'nin iç çemberinin BC, CA ve AB kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla K, L ve M olsun. B'den geçen ve MK'ya paralel olan doğru, LM ve LK doğrularını sırasıyla R ve S noktalarında kesiyor. $\angle RIS$'nin bir dar açı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\angle RMB = \angle AML = \angle ALM = \angle MRB \Rightarrow MB = BR$. Benzer şekilde, $BM = BK = BS$. $\triangle BIK$ dik üçgeninin hipotenüsü BI üzerinde $BK = BI'$ olacak şekilde I' noktası alalım. $BR = BS = BI'$ ve olduğu için $\angle RI'S = 90° > \angle RIS$ dir.

6 $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesini göstersin. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $\mathbb{N}$'ye ait her s, t için

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını ele alalım. $f(1998)$'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.

40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1999

1 Düzlemde aşağıdaki şartı sağlayan en az üç noktalı tüm S sonlu kümelerini belirleyiniz:

S deki herhangi iki farklı A ve B noktası için, AB doğru parçasının orta dikmesi, S nin bir simetri eksenidir.

Çözüm:

Simetri eksenlerinden birini ele alalım. S nin noktalarından bazıları bu simetri ekseni üzerinde olabilir, geri kalan nokta çiftlerinin orta noktaları bu simetri ekseni üzerindedir. O halde, S nin ağırlık merkezi herhangi bir simetri ekseni üzerinde olmalı. Bu durumda tüm simetri eksenleri S nin ağırlık merkezi G de kesişir. Simetri eksenleri orta dikmeler olacağı için S, G merkezli bir çemberin noktalarıdır. S nin ardışık 3 elemanı sırasıyla A, B, C olsun. B, AC nin orta dikmesi üzerinde olmalı. Bu durumda $AB = BC$, dolayısıyla da S bir düzgün çokgenin köşeleridir.

Not:

Bu sorunun IMO Shortlist'inde yer alan versiyonu şu şekildedir:

Aşağıdaki koşulları sağlayan ve uzayda en az üç noktadan oluşan S noktalar kümesine **tam simetrik** diyeceğiz:

S nin herhangi iki farklı A, B noktası için AB doğru parçasını ortalayan ve AB doğru parçasına dik olan düzlem, S nin bir simetri düzlemidir.

Sonlu tam simetrik bir kümenin ya düzgün bir çokgenin ya düzgün bir dörtyüzlünün ya da düzgün bir sekizyüzlünün köşelerinden oluşması gerektiğini kanıtlayınız.

2 $n \geq 2$ sabit bir tam sayı olsun.

(a) Aşağıdaki eşitsizliği, her $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ gerçel sayılarını için sağlayan en küçük C sabitini bulunuz.

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i \right)^4$$

(b) Bu C sabiti için, eşitliğin hangi durumda sağlandığını belirleyiniz.

Çözüm:

$$\left(\sum_{cyc} x_1\right)^4 = \left(\sum_{cyc} x_1^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right)^2 \overbrace{\geq}^{AGO} \left(2\sqrt{2\left(\sum_{cyc} x_1^2\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right)}\right)^2$$

$$= 8\left(\sum_{cyc} x_1\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right) \geq 8\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

Bundan dolayı $C \geq \dfrac{1}{8}$ elde ederiz. Çift satırlık ispatın son kısmında $\sum_{cyc} x_1^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i^2 + x_j^2$ yani $n \geq 2$ olduğunu kullandık.

Eşitlik durumunda ise $\sum_{cyc} x_1^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i^2 + x_j^2$ olduğundan $n-2$ tane x_i sıfıra eşit olmalıdır.

3 n sabit bir pozitif çift sayı olmak üzere; $n \times n$ kareli bir tahta ele alalım. Tahta n^2 birim kareden oluşuyor. Ortak kenara sahip karelere komşu kareler diyoruz.

Tahtanın N tane birim karesini, tahtadaki her kare (işaretli ya da değil) en az bir işaretlenmiş komşu kareye sahip olacak şekilde işaretliyoruz.

N nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4 Aşağıdaki koşulları sağlayan tüm (n, p) pozitif tam sayı çiftlerini belirleyiniz:

p asal,

$n \leq 2p$,

$(p-1)^n + 1$ sayısı n^{p-1} ile bölünüyor.

5 G_1 ve G_2 çemberleri, G çemberine sırasıyla, farklı M ve N noktalarında içten teğettir. G_1, G_2 nin merkezinden geçmektedir. G_1 ve G_2 nin kesiştiği noktalardan geçen doğru G yi A ve B de kesmektedir. MA ve MB doğruları, G_1 ile sırasıyla C ve D de kesişmektedir. CD nin G_2 ye teğet olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

AN ile BN, G_2 yi sırasıyla E ve F de kessin.

G_1 ile G_2 nin merkezi sırasıyla O_1 ve O_2 olsun.

EC ile FD doğruları P de kesişsin.

G nin N ile M deki teğetleri Q da kesişsin.

G_1 ile G_2, X ve Y noktalarında kesişsin.

$AE \cdot AN = AX \cdot AY = AC \cdot AM \Rightarrow E, C, M, N$ çemberseldir. Bu durumda $\angle ACE = \angle ANM = \angle ABM = \angle AMQ = \angle CDM \Rightarrow CD \parallel AB$ olacaktır. Ayrıca $\angle MCP = \angle ACE = \angle CDM$ olduğu için EC G_1 e teğettir.

Benzer şekilde, EC, G_2 ye de teğettir. Yani EC, G_1 ve G_2 nin ortak teğet doğrusudur.

Benzer şekilde, FD de, bu çemberlerin diğer ortak teğet doğrusudur. Bu durumda, P, O_1 ve O_2 doğrusaldır.

G_1 e O_2 de teğet olan doğru PC ile S de kesişsin. $SO_2 = SC$ ve $\angle SO_2C = SCO_2$ olacaktır. $CD \parallel SO_2$ olduğundan $\angle O_2CD = \angle SO_2C = \angle SCO_2$ olacaktır. CO_2, $\angle SCD$ nin açıortayı olduğu için O_2 den SC ile CD ye inilen dikmeler eşittir. O_2 den CD ye inilen dikmenin ayağı T olsun. $O_2E = O_2T$ olacaktır. Bu da, CD nin G_2 ye T de teğet olduğu anlamına gelir.

6 Tüm x, y gerçel sayıları için

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2000

1 Γ_1 ve Γ_2 çemberleri M ve N de keşisiyor. ℓ, Γ_1 ve Γ_2 nin M ye yakın olan ortak teğeti olsun. ℓ, Γ_1 e A da, Γ_2 ye de B de değmektedir. M de geçen ve ℓ ye paralel olan doğru Γ_1 çemberini C de, Γ_2 çemberini de D de kesmektedir. CA doğrusu ile DB doğrusu E de, AN doğrusu ile CD doğrusu P de, BN doğrusu ile CD doğrusu Q da kesiştiğine göre, $EP = EQ$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

EN ile AB, R de kesişsin.

$RA^2 = RM \cdot RN = RB^2 \Rightarrow RA = RB$. Ayrıca $AB \parallel PQ$ olduğu için $MQ = MP$.

Teğet kiriş açıdan $\angle BAM = \angle ACM$ ve paralellikten $\angle EAB = \angle ACM = \angle MAB$.

Benzer şekilde, $\angle ABE = \angle ABM$.

$AMBE$ dörtgeninde, AB köşegeni iki köşe için de açıortay olduğu için $AEBM$ bir deltoiddir. Dolayısıyla $AB \perp EM$. Paralellikten $EM \perp PQ$. $MQ = MP$ olduğunu daha önce göstermiştik. O halde, $EP = EQ$.

2 $abc = 1$ olacak şekilde alınan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

$$b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\right) = b\left(1 + a - \frac{1}{b}\right)$$

dir. Son eşitliğe $abc = 1$ den faydalanarak vardık. Devam edelim.

$$\Longrightarrow \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) b \left(1 + a - \frac{1}{b}\right) = b\left(a^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2\right) \le ba^2$$

dir. Benzer düşünce ile

$$\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le cb^2, \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \le ac^2$$

buluruz. Soruda sorulan ifade T olsun. Bulduğumuz üç ifadeyi taraf tarafa çarparsak şu sonuca ulaşırız:

$$\Longrightarrow T^2 \le a^3 b^3 c^3$$

$abc = 1$ olduğundan $T \le 1$ olur ve ispat biter.

Çözüm 2:

$abc = 1$ olduğundan, $a = \dfrac{x}{y}, b = \dfrac{y}{z}, c = \dfrac{z}{x}$ olacak şekilde x, y, z pozitif reel sayıları vardır.

$a - 1 + \dfrac{1}{b} = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{z}{y} = \dfrac{x - y + z}{y}$

Benzer şekilde,

$b - 1 + \dfrac{1}{c} = \dfrac{x + y - z}{z}$

$c-1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{-x+y+z}{x}$

$\Longrightarrow \left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{-x+y+z}{x}\right)\left(\dfrac{x-y+z}{y}\right)\left(\dfrac{x+y-z}{z}\right)\leq 1$

$\Longleftrightarrow (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\leq xyz$

Parantezler açıldığında $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\leq x^3+y^3+z^3+3xyz$ elde edilir. Bu eşitsizlik ise iyi bilinen **Schur Eşitsizliği**'nin $t=1$ için özel hali olduğundan doğrudur.

Çözüm 3:

Önceki çözümdeki gibi $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\leq xyz$ elde ettikten sonra $x\geq y\geq z$ varsaydığımızda sol taraftaki çarpanlardan en fazla biri negatif olabiliyor. Tam olarak bir tanesinin negatif olduğu durumda sol taraf sağ taraftan küçük olacağı için eşitsizlik sağlanır.

Hepsinin pozitif olduğu durumu ele alalım.

$AO\geq GO$ dan

$$\sqrt{(-x+y+z)(x-y+z)}\leq\frac{(-x+y+z)+(x-y+z)}{2}=z$$

elde edilir. Diğer ikili çarpımlar için de benzer eşitsizlikleri yazınca $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\leq xyz$ elde ederiz.

Çözüm 4:

Farklı bir çözüm verelim. Daha çok üstüne gideceğiz ve parantezleri ikili olarak açacağız. Sonrasında ise $ab=\dfrac{1}{c}$ olduğunu kullanacağız.

$$P_{ab}=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=ab-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}$$

$$ab-a+\frac{a}{c}-b+1-ab+1-\frac{1}{b}+a=\frac{a}{c}+2-\left(b+\frac{1}{b}\right)\overbrace{\leq}^{AGO}\frac{a}{c}$$

elde ederiz. Diğer ikili çarpımlar P_{bc} ve P_{ca} için de

$$P_{bc}\leq\frac{b}{a}\qquad||\qquad P_{ca}\leq\frac{c}{b}$$

olduğunu söyleyebiliriz. O zaman

$$LHS=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\sqrt{P_{ab}P_{bc}P_{ca}}\leq\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}=1$$

elde eder ve ispatı tamamlarız.

3 $n\geq 2$ pozitif tam sayı olmak üzere, başlangıçta n adet pire, yatay bir doğru boyunca, hepsi birlikte aynı noktada olmayacak şekilde yer almaktadır.

λ pozitif gerçel sayısı için, bir adım şu şekilde tanımlanıyor:

A, B nin solunda olacak şekilde alınan A ve B noktalarındaki herhangi iki pire için, A daki pire; doğru üzerinde B nin sağında ve $BC/AB=\lambda$ şartını sağlayan C noktasına atlıyor.

Doğru üzerindeki herhangi bir M noktası için, başlangıçtaki n pirenin dizilişi ne olursa olsun, tüm pireleri M nin sağına taşımayı mümkün kılan tüm λ değerlerini belirleyiniz.

4 Bir sihirbaz 1 den 100 kadar numaralanmış yüz kartı, biri kırmızı, diğeri beyaz, öteki mavi üç kutuya her kutuda en az bir kart olacak şekilde yerleştiriyor.

İzleyicilerden biri bu kutulardan ikisini seçtikten sonra, her iki kutudan da bir kart çekerek, bu kartların üzerinde yazan sayıların toplamını söylüyor. Bu toplama göre, sihirbaz içinden kart alınmayan kutuyu belirleyebiliyor.

Tüm kartlar bu kutulara, yukarıda anlatılan numara her zaman işleyecek şekilde kaç farklı biçimde dağıtılabilir? (Kartlardan en az biri farklı bir kutuya konmuşsa, bu iki yol farklı sayılacak.)

5 n, tam olarak 2000 asal sayı tarafından bölünecek ve 2^n+1 sayısı n ile bölünecek şekilde bir n pozitif tam sayısının bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

Evet, böyle bir sayı vardır.

Tümevarım kullanarak tam olarak k asal böleni olan n sayısının var olduğunu göstereceğiz.

$n_1 = 3$ için $3 \mid 2^3+1$ dir.

$\ell \geq 1$ ve $3 \not| t$ olmak üzere; $n_k = 3^\ell \cdot t$ sayısının tam olarak k asal böleni olsun ve $n_k \mid 2^{n_k}+1$ olsun.

$n_{k+1} = 3p \cdot n_k = 3p \cdot 3^\ell \cdot t = 3^{\ell+1} \cdot t \cdot p$, $p \not| 3t$ ve $n_{k+1} \mid 2^{n_{k+1}}+1$ olacak şekilde bir p asal sayısının varlığını göstereceğiz. Bu durumda n_{k+1} sayısının tam olarak $k+1$ asal böleni olacak.

n_k sayısı tektir. Aksi halde n_k çift sayısının $2^{n_k}+1$ tek sayısını bölmesi gerekirdi.

$n_k \mid 2^{n_k}+1$ olduğunu biliyoruz.

$2^{2n_k} - 2^{n_k} + 1$ sayısını mod3 te inceleyelim. $2^{2n_k} - 2^{n_k} + 1 = 4^{n_k} - 2^{n_k} + 1 \equiv 1 - (-1)^{n_k} + 1 \equiv 0 \pmod 3$

O halde $2^{3n_k}+1 = (2^{n_k}+1)(2^{2n_k} - 2^{n_k} + 1)$ sayısı $3n_k$ ile bölünür.

İddia: Her $a > 2$ tam sayısı için $p \mid a^3+1$ ve $p \not| a+1$ şeklinde bir p asal sayısı vardır.

İspat: a^3+1 in bir böleni olup $a+1$ in böleni olmayan bir p asal sayısının var olmadığını varsayalım.

O halde $a^2 - a + 1$ sayısının her asal böleni $a+1$ sayısını da bölecektir. Bu asal bölenlerden biri q olsun.

$a^2 - a + 1 = (a+1)(a-2) + 3 \equiv 0 \pmod q \Longrightarrow 3 \equiv 0 \pmod q \Longrightarrow q = 3$.

Bu durumda $a^2 - a + 1$ sayısı 3 ün bir kuvveti olmalı.

$3 \mid a+1$ olduğu için $3 \mid a-2$ olacaktır. Bu durumda $a^2 - a + 1 = (a+1)(a-2) + 3 \equiv 3 \pmod 9$ elde ederiz.

O halde $a^2 - a + 1$ sayısı sadece 3 olabilir. $a > 2 \Rightarrow a^2 - a + 1 > 3$ olacağı için çelişki elde ettik.

Bu durumda $p \mid a^3+1$ ve $p \not| a+1$ şeklinde bir p asal sayısı vardır. $\blacksquare$

$a = 2^{n_k}$ alırsak $3 \mid 2^{n_k}+1 = a+1$ olduğu için bir $p > 3$ asal sayısı için $p \not| 2^{n_k}+1$ ve $p \mid 2^{3n_k}+1$ dir.

$2^{3n_k} \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2^{3n_k p} \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod p \Longrightarrow p \mid 2^{3n_k p}+1 \Longrightarrow p \mid 2^{n_{k+1}}+1$ olacak.

Bu p sayısı için $2^{3n_k} \equiv -1 \pmod{3n_k} \Longrightarrow 2^{3n_k p} \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{3n_k} \Longrightarrow 3n_k \mid 2^{n_{k+1}}+1$ olacaktır.

$n_k \mid 2^{n_k}+1$ ve $p \not| 2^{n_k}+1$ olduğu için $(p, n_k) = 1$ dir. O halde $3n_k p \mid 2^{n_{k+1}}+1$, yani $n_{k+1} \mid 2^{n_{k+1}}+1$ elde ederiz.

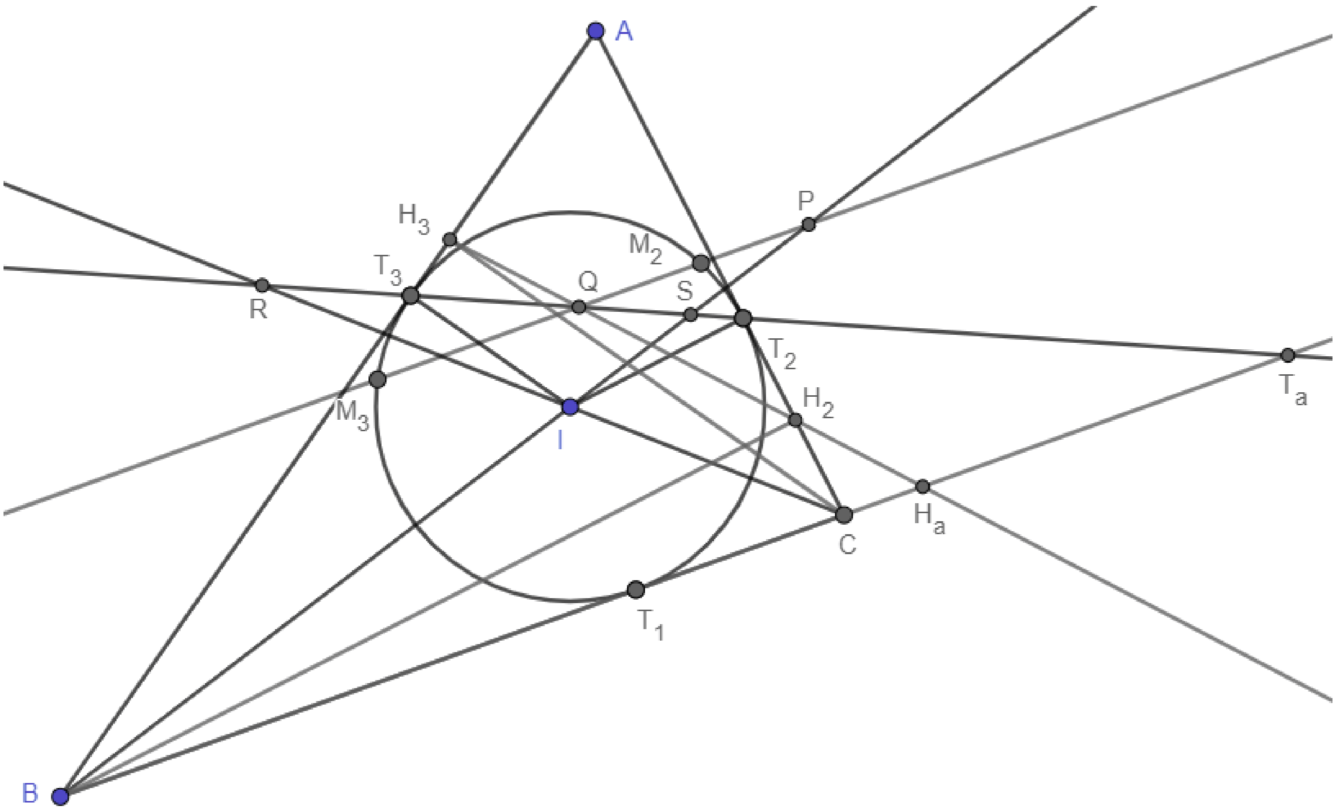
Kaynak: IMO Shortlist 2000.

6 AH_1, BH_2, CH_3 doğru parçaları dar açılı ABC üçgeninin yükseklikleri olsun. ABC üçgeninin içteğet çemberi BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla T_1, T_2, T_3 noktalarında dokunsun. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları sırasıyla H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 doğrularının sırasıyla T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 doğrularına göre simetriği olsun.

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ün köşeleri ABC üçgeninin içteğet çemberi üzerinde olan bir üçgen belirttiğini kanıtlayınız.

Çözüm 1:

Uzunca bir konfigürasyon yapalım. (Geogebra linkinden takip edebilirsiniz.)



$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ ve $\angle C = 2\theta$ olsun.

Genelliği bozmadan ABC üçgeninde $AB > BC > AC$ olsun.

BC sırasıyla T_3T_2 ve H_3H_2 ile T_a ve H_a da kesişsin. H_3H_2 ile T_3T_2, Q da kesişsin.

ABC nin içmerkezi I olsun. T_3T_2, BI ve CI ile sırasıyla S ve R de kesişsin.

H_2H_3 ün T_2T_3 e göre simetriği olan ℓ_1 doğrusu içteğet çemberi M_2 ve M_3 te (M_2, T_2 ye yakın) kessin. ℓ_1 ile BI da P de kesişsin.

M_2 nin T_2 nin BI ya göre simetriği, M_3 ün T_3 ün CI ya göre simetriği olduğunu göstereceğiz.

Benzer şekilde T_1 in AI ya göre simetriğini M_1 olarak tanımladığımızda ℓ_2 ile M_1M_3 doğrusunu; ℓ_3 ile de M_1M_2 doğrusunu elde etmiş olacağız. Bu durumda ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları köşeleri M_1, M_2, M_3 olan üçgen belirtmiş olacak.

Önce basit açı hesaplarıyla başlayalım.

$\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$ eşitliğini yazımları kolaylaştırmak için yeri geldikçe kullanacağız.

$\angle AH_3H_2 = \angle ACB = 2\theta$, $\angle AH_2H_3 = \angle ABC = 2\beta$.

$\angle AT_3T_2 = \angle AT_2T_3 = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \beta + \theta$.

$\angle T_3SB = \angle AT_3S - \angle T_3BS = \theta$.

$\angle T_3IR = \angle ICH_3 = \angle ICA - \angle H_3CA = \theta - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha - \beta$.

$\angle T_2IP = \angle H_2BI = \angle IBC - \angle H_2BC = \beta - (90^\circ - 2\theta) = \theta - \alpha$.

$\angle H_2H_aC = \angle ACB - \angle CH_2H_a = 2\theta - 2\beta$.

$\angle T_2T_aC = \angle ACB - \angle CT_2T_a = 2\theta - (\beta + \theta) = \theta - \beta$.

$\angle M_2QT_2 = \angle T_2QH_2 = \angle QH_aT_a - \angle QT_aH_a = \theta - \beta$.

Şimdi de bizi çözüme götürecek hamleleri yapalım.

T_3IT_1B bir deltoid olduğu için T_3T_1 in orta dikmesi BI dır. Bu durumda T_3ST_1 üçgeninde SI orta dikme olduğu için $T_3S = T_1S$ yani $\angle T_1SI = \angle T_3SI = \theta$ olacaktır. $\angle ICT_1 = \angle IST_1 = \theta$ olduğu için $ISCT_1$ bir kirişler dörtgeni, dolayısıyla $\angle ISC = 180° - IT_1C = 90°$ olacaktır.

BSH_2C dörtgeni, $\angle ISC = \angle IH_2C = 90°$ olduğu için bir kirişler dörtgenidir. Bu durumda $\angle PSH_2 = \angle H_2CB = 2\theta$, $\angle SH_2T_2 = \angle SBC = \beta$ olacaktır. $\angle H_3H_2A = 2\beta$ olduğu için $\angle SH_2Q = \beta$, $\angle T_3SI = \angle PST_2 = \theta$ olduğu için de $\angle T_2SH_2 = \theta$ elde edilir.

QS hem PQH_2 üçgeninde hem de PSH_2 üçgeninde açıortay olduğu için $PH_2 \perp QS$, dolayısıyla da $PQ = QH_2$, $PS = SH_2$ ve $PT_2 = T_2H_2$ olacaktır. Bu da $\angle QH_2S = \angle SPQ = \angle SH_2T_2 = \angle SPT_2 = \beta$ demektir.

IM_2PT_2 dörtgeninde $IM_2 = IT_2$ ve $\angle M_2PI = \angle IPT_2 = \beta$ olduğu için ya $\angle IM_2P = \angle IT_2P$ ya da $\angle IM_2P + \angle IT_2P = 180°$ dir. İkinci durum, $\angle IT_2P = 180° - \angle IM_2P = \angle M_3M_2I$ geniş açı olduğu için $\triangle M_3M_2I$ nin ikizkenar olma durumuyla çelişeceği için $\angle IM_2P = \angle IT_2P$ dir. Bu da IM_2PT_2 yi bir deltoid yapar. Bu da M_2 nin T_2 nin BI ya göre simetriği olduğu anlamına gelir.

Çözümün büyük kısmını bitirdik. Şimdi de M_3 ün T_3 ün CI ya göre simetriği olduğunu göstereceğiz.

$\angle M_2IP = \angle PIT_2 = \theta - \alpha$ olduğu için $\angle M_2T_3T_2 = \dfrac{\angle M_2IT_2}{2} = \theta - \alpha$ dır.

$\angle T_3M_2Q = \angle M_2QT_2 - \angle M_2T_3Q = (\theta - \beta) - (\theta - \alpha) = \alpha - \beta$.

$\angle M_3IT_3 = 2 \cdot \angle T_3M_2M_3 = 2(\alpha - \beta)$ ve $\angle RIT_3 = \alpha - \beta$ olduğu için $\angle M_3IR = \angle RIT_3 = \alpha - \beta$; yani M_3, T_3 ün CI ya göre simetriğidir.

Toparlarsak ℓ_1 doğrusu içteğet çemberi T_2 ve T_3 ün sırasıyla BI ve CI açıortaylarına göre simetriği olan M_2 ve M_3 de kesecektir.

Benzer şekilde ℓ_2 doğrusu da içteğet çemberi T_1 ve T_3 ün sırasıyla AI ve CI açıortaylarına göre simetriği olan M_1 ve M_3 de kesecektir. ℓ_3 de içteğet çember M_1 ve M_2 de kesecektir.

Böylelikle ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları köşeleri M_1, M_2, M_3 olan üçgen belirtmiş oldu.

Çözüm 2:

$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\theta$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ olsun.

R, ABC nin çevrel yarıçapı; r, ABC nin iç yarıçapı olsun.

Genelliği yitirmeden, $a \le b \le c$ kabul edelim.

İddia: $\ell_1 \parallel BC$

$b = c$ ise $H_2H_3 \parallel T_2T_3 \parallel BC$ olacaktır. Bu durumda $\ell_1 \parallel BC$ olur.

$b < c$ durumunda; $\angle AT_2T_3 = \beta + \theta$, $\angle AH_2H_3 = 2\beta$ dır. Bu durumda $m(T_2T_3, H_2H_3) = \theta - \beta$, $m(\ell_1, H_2H_3) = 2\theta - 2\beta$, $m(\ell_1, AC) = 2\theta = \angle ACB$ olduğu için $\ell_1 \parallel BC$ dir. ■

Simetriden dolayı, $\ell_2 \parallel AC$ ve $\ell_3 \parallel AB$ dir.

$A' = \ell_2 \cap \ell_3$, $B' = \ell_1 \cap \ell_3$, $C' = \ell_1 \cap \ell_2$ olsun. (AA) benzerliğinden $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $A'B'C'$ üçgeni iç teğet çember üzerinde ise, benzerlik oranı R/r olacaktır.

ABC nin iç merkezi I, çevrel merkezi O olsun. $\angle B'A'I = \angle BAO = 90° - 2\theta$ ve $AB \parallel A'B'$ olduğu için $A'I \parallel AO$ dur.

AA' ile OI, J de keşissin. $OJ/JI = R/r$ olacaktır.

Buna göre, şimdi şöyle ters bir konfigürasyon yapalım:

OI doğru parçasını R/r oranında bölen nokta J olsun. $AJ/JA' = R/r$ olacak şekilde AJ nin uzantısı üzerinde A' noktası alalım. A' noktasından AB ye paralel çizelim. Bu paralel doğru üzerinde $A'B' = \dfrac{AB \cdot r}{R}$ olacak şekilde ($AB'A'B$ dışbükey olacak şekilde) B' noktası alalım. B' den BC ye çizilen paralel ile A' den AC ye çizilen paralel, C' noktasında keşissin. $A'B'C'$ üçgeni, ABC nin iç teğet çemberi üzerindedir ve $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ dir.

Şimdi de $A'B'$ doğrusunun T_1T_2 e göre simetriğinin H_1H_2 olduğunu göstereceğiz. Bunun için T_1 in $A'B'$ ve H_1H_2 doğrularına olan uzaklıklarının eşit olduğunu göstermek yeterli.

T_1 in H_1H_3 e olan uzaklığı:

$\angle H_2H_1C = \angle BAC = 2\alpha$.

$\dfrac{(a+b+c)r}{2} = \dfrac{bc\sin 2\alpha}{2} \Longrightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{r(a+b+c)}{bc}$.

$$\begin{aligned} T_1H_1 &= CT_1 - CH_1 \\ &= \frac{a+b-c}{2} - \frac{b^2+a^2-c^2}{2a} \\ &= \frac{a^2+ab-ac-b^2-a^2+c^2}{2a} \\ &= \frac{(c-b)(b+c-a)}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(T_1, H_1H_2) &= T_1H_1 \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{(c-b)(b+c-a)}{2a} \cdot \frac{r(a+b+c)}{bc} \\ &= \frac{r(c-b)(b+c-a)(a+b+c)}{2abc} \end{aligned}.$$

T_1 in $A'B'$ ye olan uzaklığı:

I dan T_1 den geçen $A'B'$ ye paralel olan doğruya inilen yüksekliğin ayağı P, I dan $A'B'$ ye inilen yüksekliğin ayağı Q olsun.

$\angle PIT_1 = \angle T_2T_1C = 2\beta$. $\angle QIA = \angle A'C'B' = \angle ACB = 2\beta$.

$d(T_1, A'B') = PQ = r(\cos 2\beta - \cos 2\theta)$.

$\cos 2\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos 2\theta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

$$\begin{aligned} d(T_1, A'B') &= r \cdot \frac{(a^2b+bc^2-b^3)-(a^2c+b^2c-c^3)}{2abc} \\ &= \frac{r(-a^2(c-b)+bc(c-b)+(c-b)(c^2+b^2+bc))}{2abc} \\ &= \frac{r(c-b)(-a^2+bc+c^2+b^2+bc)}{2abc} \\ &= \frac{r(c-b)((b+c)^2-a^2)}{2abc} \\ &= \frac{r(c-b)(b+c-a)(a+b+c)}{2abc} \end{aligned}$$

T_1 in H_1H_2 ve $A'B'$ e uzaklıkları eşit olduğu için T_1 bu iki doğrunun açıortayı üzerinde olacaktır.

Benzer durum, T_2 için de geçerlidir. O halde T_1T_2, H_1H_2 ile $A'B'$ doğrularının açıortayıdır. Diğer bir deyişle; $A'B'$, H_1H_2 nin T_1T_2 ye göre simetriğidir. $\ell_3 = A'B'$.

Benzer şekilde $B'C' = \ell_1$, $A'C' = \ell_2$ olacaktır.

42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2001

1 Dar açılı ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. BC üzerindeki P, A dan geçen yüksekliğin ayağı olsun.

$\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$ olduğunu kabul edelim.

$\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

BC nin orta noktası M olsun.

$\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC$ ve $\angle PAC = 90^\circ - \angle BCA$ olduğu için $\angle OAP = (90^\circ - \angle ABC) - (90^\circ - \angle BCA) = \angle BCA - \angle ABC \geq 30^\circ$.

O dan AP ye inilen dikmenin ayağı Q olsun. $\angle OAQ \geq 30^\circ$ olduğu için $OQ \geq AO \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{AO}{2}$.

$OQ \geq AO - OQ = OC - MP > MC - MP = PC$.

$\angle POC < OCP = 90^\circ - \angle MOC = 90^\circ - \angle CAB$.

2 Her pozitif gerçel a, b, c sayıları için

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

olduğunu ya da eşdeğer olarak

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$$

olduğunu göstereceğiz.

$AO-GO$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\\ &\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\\ &= 8a^{\frac{2}{3}}bc\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 &\geq \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc\\ &= a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)\end{aligned}$$

, yani

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} &\geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \quad \text{ve}\\ \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} &\geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

elde ederiz. Oluşan üç eşitsizliği taraf tarafa topladığımızda

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

elde ederiz.

Kaynak:

IMO Shortlist 2001

Çözüm 2:

İlk baştaki ifadeye S diyelim. Hölder Eşitsizliğinden $(S).(S).((a^3+8abc)+(b^3+8abc)+(c^3+8abc))\geq (a+b+c)^3$ idir. Biz $S\geq 1$ göstermek istiyoruz. Eğer biz $(a+b+c)^3\geq ((a^3+8abc)+(b^3+8abc)+(c^3+8abc))$ gösterirsek ispat biter. $(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$ gösterirsek ispat biter. İfadeyi açarsak;

$a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2c)+3(ab^2+ac^2+bc^2)\geq a^3+b^3+c^3+24abc$ göstermemiz yani;

$(a^2b+a^2c+b^2c)+(ab^2+ac^2+bc^2)\geq 6abc$ göstermemiz yeterlidir. Bunu da $A.G.O$ eşitsizliğinden kolayca elde edebiliriz.

Çözüm 3:

Bu çözüm Fehmi Emre Kadan hocamızın yapmış olduğu çözümdür, biraz detaylandırdım.

Homojeniteden dolayı $abc=1$ diyebiliriz.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8abc}}$$

$$=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8}}$$

$a=\frac{2}{x}, b=\frac{2}{y}, c=\frac{2}{z}$ dönüşümlerini yapalım ($abc=1\Rightarrow xyz=8$)

$$LHS=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{\frac{8}{x^3}}{8\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}}=\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$$

elde ederiz. Ayrıca aritmetik-geometrik ortalamadan da bildiğimiz üzere

$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\overbrace{\leq}^{AGO}\frac{(x+1)+\left(x^2-x+1\right)}{2}=\frac{x^2+2}{2}$$

Dolayisıyla

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\geq\frac{2}{x^2+2}+\frac{2}{y^2+2}+\frac{2}{z^2+2}\geq 1$$

Sondaki ifadeyi ispatlamak için ortak paydaya alıyoruz. İfadeleri açtıktan sonra

$$2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+8\left(x^2+y^2+z^2\right)+24\geq 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(x^2+y^2+z^2\right)+x^2y^2z^2+8$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2+y^2+z^2\right)+16 \geq x^2y^2z^2 = 64$$

Bu ifade ise $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 12$ olduğundan doğrudur. İspat biter.

$\boxed{3}$ Yirmi bir kız ile yirmi bir erkek bir matematik yarışmasına katılıyor.

- Her yarışmacı en fazla altı soru çözmüştür.
- Her kız ve erkek için, ikisinin de çözdüğü en az bir soru vardır.

Buna göre, en az üç kız ve en az üç erkek tarafından çözülen bir sorunun bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

NOT: Her bir sorunun en az bir kız ve en az bir erkek tarafından çözüldüğünü varsayalım. Aksi halde bu soruları silelim. Sildiğimiz sorular kızlarla erkeklerin ortaklaşa çözdüğü sorulardan olmadığı için aradığımız soru değil. Bu durumda yarışmacılar hala en fazla altı soru çözmüş olacaklar. Aşağıda bir soru kümesinden bahsederken sadece en az bir kız ve bir erkek tarafından çözülen soruları ele alıyor olacağız.

G ile kızların kümesini, B ile erkeklerin kümesini, P ile soruların kümesini, $P(g)$ ile $g \in G$ kızının çözdüğü soruların kümesini, $P(b)$ ile $b \in B$ erkeğinin çözdüğü soruların kümesini, $G(p)$ ile $p \in P$ sorusunu çözen kızların kümesini, $B(p)$ ile $p \in P$ sorusunu çözen erkeklerin kümesini gösterelim.

Soruda verilenleri küme sembolleri ile gösterelim:

$$|G| = |B| = 21$$
$$|P(g)| \leq 6, |P(b)| \leq 6$$
$$P(g) \cap P(b) \neq \emptyset$$

Bizden istenen $|G(p)| \geq 3$ ve $|B(p)| \geq 3$ şartlarını sağlayan en az bir $p \in P$ sorusunun varlığını göstermemiz.

Hiçbir $p \in P$ sorusu için hem $|G(p)| \geq 3$ hem de $|B(p)| \geq 3$ ün birlikte sağlanmadığını varsayacağız. Sonunda bir çelişki elde edeceğiz. Bu da en az bir $p \in P$ sorusu için hem $|G(p)| \geq 3$ hem de $|B(p)| \geq 3$ ün birlikte sağlandığı anlamına gelecek.

Soru, kız ve erkek üçlülerini (p, g, b) ile gösterelim. Bu üçlülerin kümesi $T = \{(p, g, b) \ : \ p \in P(g) \cap P(b)\}$ olsun. Her (g, b) çifti en az bir soruyu ortaklaşa çözdüğü için en az (g, b) çifti sayısı kadar (p, g, b) üçlüsü vardır. Daha resmi bir dille

$$|T| = \sum_{g\in G}\sum_{b\in B} |P(g) \cap P(b)| \geq |G| \cdot |B| = 21^2 = 441 \tag{1}$$

Benzer şekilde T nin elemanları

$$|T| = \sum_{p\in P} |G(p)| \cdot |B(p)|$$

şeklinde de sayılabilir.

P kümesini iki ayrık kümeye ayıralım: $P_+ = \{p \in P : |G(p)| \geq 3\}$ ve $P_- = \{p \in P : |G(p)| \leq 2\}$

Yani bir soru 2 den fazla kız tarafından çözüldüyse P_+ kümesine ait, 3 ten az kız tarafından çözüldüyse P_- kümesine ait olacak.

$$\begin{aligned} |T| &= \sum_{p\in P} |G(p)| \cdot |B(p)| \\ &= \sum_{p\in P_+} |G(p)| \cdot |B(p)| + \sum_{p\in P_-} |G(p)| \cdot |B(p)| \end{aligned}$$

Varsayımımız üzerine, $p \in P_+$ sorusu için $|B(p)| \leq 2$ olmalı. P_- kümesinin tanımı gereği de $p \in P_-$ sorusu için $|G(p)| \leq 2$. Bu değerleri yukarıdaki ifade de tekrar yazarsak

$$\begin{aligned}|T| &= \sum_{p\in P_+} |G(p)|\cdot|B(p)| + \sum_{p\in P_-} |G(p)|\cdot|B(p)| \\ &\le \sum_{p\in P_+} |G(p)|\cdot 2 + \sum_{p\in P_-} 2\cdot|B(p)| \\ &= 2\sum_{p\in P_+} |G(p)| + 2\sum_{p\in P_-} |B(p)|\end{aligned} \tag{2}$$

Her kız en fazla 6 soru çözdüğü için (p,g) çiftlerinin sayısı

$$\sum_{p\in P} |G(p)| \le 6|G| \tag{3}$$

g kızı en fazla 6 soru çözdüğü için, $b_1, b_2, \ldots, b_{21} \in B$ erkekleri ile çözdüğü sorulardan en az birini $\lceil 21/6 \rceil = 4$ erkekle birlikte çözmüştür. Bu soruya p dersek $|B(p)| \ge 4$ olacaktır. Bu durumda $p \in P_-$ olmalı.

Bu da her g kızının $p \in P_-$ olan en az bir soru çözdüğü gösterir. O halde

$$\sum_{p\in P_-} |G(p)| \ge |G| \tag{4}$$

(3) ile (4) ü birleştirsek

$$\sum_{p\in P_+} |G(p)| \le 5|G| \tag{5}$$

Her erkek en fazla 6 soru çözdüğü için (p,b) çiftlerinin sayısı

$$\sum_{p\in P} |B(p)| \le 6|B| \tag{6}$$

Benzer şekilde her b erkeği $\lceil 21/6 \rceil = 4$ kızla birlikte bir soru çözmüştür. Bu soru için $|G(p)| \ge 4$ olduğu için bu soru P_+ kümesine aittir. Bu da her b erkeğinin $p \in P_+$ olan en az bir soru çözdüğünü gösterir. O halde

$$\sum_{p\in P_+} |B(p)| \ge |B| \tag{7}$$

(6) ile (7) yı birleştirsek

$$\sum_{p\in P_-} |B(p)| \le 5|B| \tag{8}$$

(5) ve (8) deki bulgularımızı (2) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}|T| &\le 2\sum_{p\in P_+} |G(p)| + 2\sum_{p\in P_-} |B(p)| \\ &\le 2\cdot 5\cdot|G| + 2\cdot 5\cdot|B| \\ &= 420\end{aligned} \tag{9}$$

(1) ve (9) çeliştiği için varsayımımız yanlıştır. Dolasıyla en az bir p için $|G(p)| \ge 3$ ve $|B(p)| \ge 3$ tür.

Kaynak:

IMO Shortlist 2001

$\boxed{4}$ n, 1 den büyük tek bir tam sayı olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tam sayıları verilsin. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının her $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permütasyonu için

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

şeklinde tanımlanıyor. $n!$, $S(b) - S(c)$ yi bölecek şekilde b ve c permütasyonlarının $(b \ne c)$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Tüm permütasyonları sırasıyla yazalım:

$$\begin{array}{lcl}
p_1 & = & (1,2,\ldots,n-1,n) \\
p_2 & = & (1,2,\ldots,n,n-1) \\
 & \cdots & \\
p_{(n-1)!} & = & (1,n,\ldots,3,2) \\
p_{(n-1)!+1} & = & (2,1,\ldots,n-1,n) \\
 & \cdots & \\
p_{2(n-1)!} & = & (2,n,\ldots,3,1) \\
 & \cdots & \\
p_{(n-1)(n-1)!+1} & = & (n,1,\ldots,n-2,n-1) \\
 & \cdots & \\
p_{n!} & = & (n,n-1,\ldots,2,1)
\end{array}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n!} S(p_i)$ toplamını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n!} S(p_i) &= (n-1)! \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i \\
&= n!\frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i
\end{aligned}$$

n tek olduğu için $\sum\limits_{i=1}^{n!} S(p_i) \equiv 0 \pmod{n!}$ olacaktır.

Herhangi $b, c \in \{p_1, p_2, \ldots, p_{n!}\}$ ve $b \neq c$ çifti için $S(b) - S(c) \not\equiv 0 \pmod{n!}$ olmadığını varsayalım.

Bu durumda $S(p_i)$ ifadelerinin her biri mod$n!$ de farklı bir değere denk olacaktır.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n!} S(p_i) &\equiv 0 + 1 + \cdots + (n!-1) \pmod{n!} \\
&\equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!}
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu iki toplamı eşitlersek (c_1 ve c_2 birer tam sayı olmak üzere)

$$c_1 \cdot n! = c_2 \cdot n! + \frac{n!-1}{2} \cdot n!$$

elde ederiz. Buradan $\frac{n!-1}{2}$ ifadesinin bir tam sayı olması gerektiği çıkar. $n > 1$ iken $n!$ çift ve $n! - 1$ tek sayı olacağı için bu mümkün değildir. Çelişki.

O halde, ($i \neq j$ olmak üzere) en az bir (p_i, p_j) çifti için $S(p_i) \equiv S(p_j) \pmod{n!}$ olmak zorunda. ■

5 ABC üçgeninde, BC üzerine P noktası, CA üzerinde Q noktası, AP doğrusu $\angle BAC$ nin açıortayı, BQ doğrusu da $\angle ABC$ nin açıortayı olacak şekilde alınıyor. $\angle BAC = 60^\circ$ ve $AB + BP = AQ + QB$ olduğunu biliniyor. Buna göre, ABC üçgeninin açılarının alabileceği değerleri bulunuz?

Çözüm 1:

$[AB$ üzerinde, $[AB]$ dışında, $BP' = BP$ olacak şekilde P' noktası ile; $[AQ$ üzerinde, $[AQ]$ dışında, $QB' = QB$ olacak şekilde B' noktası alalım. $AB' = AP'$ olacaktır. AP, $\angle P'AB'$ nün açıortayı olduğu için $PP' = PB'$ ve $\angle AP'P = \angle AB'P = \alpha$ dır. $BQB'P$ dörtgeninde (içbükey ya da dışbükey) QP yi gören açılar, $\angle QBP$ ile $\angle QB'P$, α ya eş olduğu için $\triangle QBP$ ile $\triangle QB'P$ de Sinüs teoreminden,

$$\frac{BQ}{\sin\angle BPQ} = \frac{QP}{\sin\angle QBP} = \frac{QB'}{\sin\angle QPB'}$$

olacaktır. $BQ = QB'$ olduğu için $\sin\angle BPQ = \sin\angle QPB'$. Bu durumda, ya $\angle BPQ = \angle QPB'$ dür, ya da $\angle BPQ + \angle QPB' = 180^\circ$ dir.

(i) $\angle BPQ = \angle QPB'$ olduğunda simetriden $PP' = BP = PB' = BP'$, dolayısıyla $\alpha = 60°$ dir. ABC üçgende $\angle BAC = 60°$ olduğu için $\angle ABC < 120°$ olmalı. Dolayısıyla, buradan çözüm gelmez.

(ii) $\angle BPQ + \angle QPB' = 180°$ olduğu için B, P, B' noktaları doğrusal, yani $B' = C$ dir. Bu durumda, $2\alpha + \alpha + 60° = 180° \Rightarrow \alpha = 40°$ olacaktır. $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$ tek çözüm olacaktır.

Çözüm 2:

Gösterim kolaylığı için $\angle B = 2\alpha$ olsun. $\triangle ABP$ 'de Sinüs Teoremi'ne göre

$$\frac{AB}{BP} = \frac{\sin(2\alpha + 30°)}{\sin 30°} \iff BP = \frac{AB}{2.\sin(2\alpha + 30°)}$$

olacaktır. Şimdi ise $\triangle AQB$ 'de Sinüs Teoremi'ni uygularsak

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{\sin\alpha}{\sin 60°} \iff AQ = \frac{QB.\sin\alpha}{\sin 60°} \qquad \text{ve} \qquad \frac{AB}{QB} = \frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin 60°}$$

olduğu söylenebilir. Buna göre problem koşulu $AB + BP = AQ + QB$ sağlanıyorsa

$$AB + BP = AB\left(1 + \frac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)}\right) = QB\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\sin 60°}\right)$$

$$\iff \frac{AB}{QB} = \boxed{\frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin 60°} = \frac{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\sin 60°}}{1 + \dfrac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)}}}$$

trigonometrik denklemi elde edilir. Bu denklemde pay ve paydalarla oynandığında ve $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ olduğu kullanılırsa

$$1 + \frac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)} = \frac{\sin\alpha + \sin 60°}{\sin(\alpha + 60°)} = \frac{2.\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right)}{2.\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)}$$

elde edilir. Şimdi ise $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\sin a \sin b$ özdeşliğini kullanacağız. Buna göre kaldığımız yerden devam edersek

$$1 + \frac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)}$$

$$\iff \boxed{\frac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)} = \frac{2.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin 30°}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)}}$$

elde edilir. Sondaki ifade biraz incelendiğinde

$$\frac{1}{2.\sin(2\alpha + 30°)} = \frac{2.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin 30°}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)} \iff \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin(2\alpha + 30°)} = 4.\sin 30° = 2$$

$$\iff \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right) = 2.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin(2\alpha + 30°)$$

bulunur. Yine $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a \sin b$ özdeşliği ve $\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2.\cos a.\cos b$ özdeşliğiyle

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right) = 2.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin(2\alpha+30^\circ) = \cos\left(\frac{3\alpha}{2}+30^\circ\right) - \cos\left(\frac{5\alpha}{2}+30^\circ\right)$$

$$\iff \cos\left(\frac{3\alpha}{2}+30^\circ\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right) + \cos\left(\frac{5\alpha}{2}+30^\circ\right) = 2.\cos\left(\frac{3\alpha}{2}+30^\circ\right).\cos\alpha$$

$$\iff \cos\left(\frac{3\alpha}{2}+30^\circ\right)[2.\cos\alpha - 1] = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla $0 < \alpha < 60^\circ$ için iki durum oluşur :

$$\arccos(0) = \frac{3\alpha}{2}+30^\circ \qquad \text{ya da} \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha$$

olacaktır. İlk durumda $\boxed{\alpha = 40^\circ}$ elde edilir. İkinci durumda ise $\alpha \in (0^\circ, 60^\circ)$ için çözüm gelmez. Tek çözüm $\alpha = 40^\circ$ olduğunda oluşur ve $\angle B = 80^\circ, \angle C = 40^\circ$ olarak belirlenir.

$\boxed{6}$ a, b, c, d tam sayıları $a > b > c > d > 0$ eşitsizliğini sağlasın.

$$ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

ise, $ab + cd$ nin asal olmadığını kanıtlayınız.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} ac+bd &= (b+d+a-c)(b+d-a+c) \\ &= ((b+d)+(a-c))((b+d)-(a-c)) \\ &= (b+d)^2-(a-c)^2 \\ &= b^2+d^2+2bd-a^2-c^2+2ac \end{aligned}$$

Buradan da

$$b^2+d^2+bd = a^2+c^2-ac$$

elde edilir. Biraz düzenlemeyle

$$b^2+d^2-2bd\cdot\cos(120^\circ) = a^2+c^2-2ac\cdot\cos(60^\circ) = k$$

elde edilir. $(b, d, \sqrt{k})$ ve $(a, c, \sqrt{k})$ üçlüleri kosinüs teoremini sağlayan sayılar olduğu için üçgen eşitsizliklerini de sağlayacaktır.

$AB = a$, $BC = c$, $AC = e = \sqrt{k}$ üçgenini çizelim. B ile D, AC doğrusuna göre farklı tarafta olacak şekilde $CD = b$, $AD = d$ şartlarını sağlayan D noktası aldığımızda $\angle ABC = 60^\circ$ ve $\angle CDA = 120^\circ$, dolayısıyla $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olacaktır.

$AC = e$, $BD = f$ dersek Ptolemy Teoreminden

$$ef = AB\cdot CD + BC\cdot AD = ab + cd \tag{1}$$

elde ederiz.

$\angle BAD = \alpha$ olmak üzere; $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$ eşitliklerinden $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc} \\ &= a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \\ &= \frac{(a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad}{ad + bc} \\ &= \frac{a^2bc + bcd^2 + ab^2d + ac^2d}{ad + bc} \\ &= \frac{ac(ab + cd) + bd(ab + cd)}{ad + bc} \\ &= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \end{aligned}$$

elde ederiz. $e^2 = a^2 + c^2 - ac$ ve (1) den dolayı $ef = ab + cd$ olduğu için

$$e^2 f^2 = (ab + cd)^2 = (a^2 + c^2 - ac) \cdot \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$$

elde ederiz. Biraz düzenlemeyle

$$(ab + cd)(ad + bc) = (a^2 + c^2 - ac)(ac + bd) \tag{2}$$

elde edilir.

$a > b > c > d$ olduğu için $a(b - c) > d(b - c)$ ve $a(c - d) > b(c - d)$ eşitsizlikleri doğrudur. Dolayısıyla (2) nolu ifadede geçen terimler arasında $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ bağıntısı vardır.

$ab+cd$ asal ise$(ac+bd, ab+cd) = 1$ olacağından (2) nolu eşitliğe göre $(ac+bd)|(ad+bc)$ olmalı. $ac+bd > ad+bc$ olduğu için bu mümkün olamaz. Çelişki.

Bu durumda $ab + cd$ asal değildir. ∎

Kaynak:

IMO Shortlist 2001

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} ac + bd &= (b + d + a - c)(b + d - a + c) \\ &= ((b + d) + (a - c))\,((b + d) - (a - c)) \\ &= (b + d)^2 - (a - c)^2 \\ &= b^2 + d^2 + 2bd - a^2 - c^2 + 2ac \end{aligned}$$

Buradan da

$$b^2 + d^2 + bd = a^2 + c^2 - ac$$

elde edilir. Biraz düzenlemeyle

$$b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos(120^\circ) = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(60^\circ) = k$$

elde edilir. $(b, d, \sqrt{k})$ ve $(a, c, \sqrt{k})$ üçlüleri kosinüs teoremini sağlayan sayılar olduğu için üçgen eşitsizliklerini de sağlayacaktır.

$AB = a$, $BC = c$, $AC = e = \sqrt{k}$ üçgenini çizelim. B ile D, AC doğrusuna göre farklı tarafta olacak şekilde $CD = b$, $AD = d$ şartlarını sağlayan D noktası aldığımızda $\angle ABC = 60^\circ$ ve $\angle CDA = 120^\circ$, dolayısıyla $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olacaktır.

Herhangi bir kirişler dörtgeninde;

$2[ABCD] = ac \sin\angle B + bd \sin\angle D = (ac + bd) \sin\angle B.$

$2[ABCD] = ad\sin\angle A + bc\sin\angle C = (ad+bc)\sin\angle A.$

Sinüs Teoreminden

$$\frac{e}{f} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} = \frac{\dfrac{2[ABCD]}{ac+bd}}{\dfrac{2[ABCD]}{ad+bc}} = \frac{ad+bc}{ac+bd}$$

Bunu, Ptolemy'den elde ettiğimiz $ef = ab+cd$ değeri ile taraf tarafa çarparsak

$$e^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}$$

elde ederiz.

$e^2 = a^2+c^2-ac$ nin pozitif tam sayı olduğunu biliyoruz. O halde $\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}$ ifadesinin de bir pozitif tam sayı olduğunu biliyoruz.

$a > b > c > d$ olduğu için $a(b-c) > d(b-c)$ ve $a(c-d) > b(c-d)$ eşitsizlikleri doğrudur. Biraz düzenlemeyle $ab+cd > ac+bd > ad+bc$ elde ederiz.

$ab+cd$ asal ise$(ac+bd, ab+cd) = 1$ olacağından $(ac+bd)|(ad+bc)$ olmalı. $ac+bd > ad+bc$ olduğu için bu mümkün olamaz. Çelişki.

Bu durumda $ab+cd$ asal değildir. ■

Çözüm 3:

$$\begin{aligned}
ac+bd &= (b+d+a-c)(b+d-a+c)\\
&= ((b+d)+(a-c))\,((b+d)-(a-c))\\
&= (b+d)^2-(a-c)^2\\
&= b^2+d^2+2bd-a^2-c^2+2ac
\end{aligned}$$

Buradan da $a^2+c^2-b^2-d^2 = ac+bd$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
(a^2+c^2-ac)(ac+bd) &= (a^2+c^2)(ac+bd)-ac(ac+bd)\\
&= (a^2+c^2)(ac+bd)-ac(a^2+c^2-b^2-d^2)\\
&= (a^2+c^2)ac+(a^2+c^2)bd-ac(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2)\\
&= (a^2+c^2)bd+ac(b^2+d^2)\\
&= ab(ad+bc)+cd(bc+ad)\\
&= (ab+cd)(ad+bc)
\end{aligned}$$

Bu aşamadan sonra resmi çözümdeki gibi devam edebiliriz. Biraz farklılaştıralım. Yeniden düzenleme eşitsizliği kullanalım.

$a > d$ ve $b > c$ den $ab+cd > ac+bd$.

$a > b$ ve $c > d$ den $ac+bd > ad+bc$.

$ab+cd$ asal ise$(ac+bd, ab+cd) = 1$ olacağından $(ac+bd)|(ad+bc)$ olmalı. $ac+bd > ad+bc$ olduğu için bu mümkün olamaz. Çelişki.

Bu durumda $ab+cd$ asal değildir. ■

43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2002

1 n pozitif bir tam sayı olsun. x, y $x+y<n$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tam sayılar olmak üzere; T ile düzlemdeki (x,y) noktalarının kümesini gösterelim. T deki her nokta kırmızı ya da maviye boyanıyor. Bir (x,y) noktası kırmızı ise, T deki $x' \leq x$ ve $y' \leq y$ eşitsizliklerinin ikisini de sağlayan (x',y') noktaları da kırmızıdır. Farklı x-koordinatına sahip n mavi noktadan oluşan bir kümeye X kümesi, farklı y-koordinatına sahip n mavi noktadan oluşan bir kümeye Y kümesi diyelim. X kümelerinin sayısı ile Y kümelerinin sayısının eşit olduğunu kanıtlayınız.

2 BC, O merkezli Γ çemberinin bir çapı olsun. A, Γ üzerinde $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. D, C yi içermeyen AB yayının orta noktası olsun. O dan geçen ve AD ye paralel olan doğru, AC ile J de kesişiyor. AO nun orta dikmesi Γ yı E ve F de kesiyor. J nin CEF üçgeninin iç merkezi olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

AO nun orta noktası M olsun. $2 \cdot MO = OF$ olduğu için $\angle MFO = 30^\circ$ ve $AO = AF = OF$ olacaktır. $m(AE) = m(AF) = 60^\circ$, dolayısıyla, $\angle ACF = \angle ECF = 30^\circ$ olur. J, $\angle ECF$ nin iç açıortayı üzerinde. O halde, $\angle EJF = 90^\circ + \dfrac{\angle ECF}{2} = 120^\circ$ olduğunu gösterirsek; J, $\triangle ECF$ nin iç merkezi olacak.

D, AB yayının orta noktası olduğu için OD, AB yi ortalar. Aynı zamanda $BO = OC$ olduğu için $OD \parallel AC$ dir. Soruda, $AD \parallel OJ$ verildiği için, $ADOJ$ bir paralelkenar ve $AJ = OD = AO = AF = AE$ dir. O halde, A merkezli, AF yarıçaplı çember, F, J, O, E noktalarından geçer. $EOJF$ kirişler dörtgeninde, $\angle EJF = \angle EOF = 120^\circ$ dir. O halde, J, $\triangle ECF$ nin iç merkezidir.

3 Sonsuz sayıda a pozitif tam sayısı için

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

sayısını tam sayı yapan tüm $m, n \geq 3$ tam sayı ikililerini bulunuz.

4 n, 1 den büyük bir tam sayı olsun. n nin pozitif tam bölenleri

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

ve $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$ olsun.

(a) $D < n^2$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) D nin n^2 nin bir böleni olduğu tüm n sayılarını belirleyiniz.

Çözüm:

$p \leq k$ olmak üzere $d_p = \dfrac{n}{d_{k+1-p}}$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} D &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k \\ &= \frac{n^2}{d_k d_{k-1}} + \frac{n^2}{d_{k-1} d_{k-2}} + \cdots + \frac{n^2}{d_2 d_1} \\ &= n^2 \left(\frac{1}{d_k d_{k-1}} + \frac{1}{d_{k-1} d_{k-2}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d_1} \right) \\ &\leq n^2 \left(\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(k-2)(k-2)} + \cdots + \frac{1}{2.1} \right) \end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=1}^{j} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{j}$ olduğundan

$$D \leq n^2 \left(\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(k-2)(k-2)} + \cdots + \frac{1}{2.1} \right) = n^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) < n^2$$

elde edilir ve a) kısmı ispatlanmış olur.

b) kısmına gelelim. $D|n^2$ durumunda

$$1 < \frac{n^2}{D} \leq \frac{n^2}{d_{k-1}d_k} = d_1 d_2 = d_2$$

olduğundan D ifadesinin n^2'in tam böleni olması için

$D = d_{k-1}d_k$ dolayısıyla $k = 2$ olmalıdır. Aksi halde a) probleminden dolayı n^2'nin kendisine eşit olamaz ve n^2'yi tam bölemez. $k = 2$ olması ise n'in asal olması ile sonuçlanır. Dolayısıyla D, ancak ve ancak n'in asal olması ile n^2'nin tam böleni olur.

5 Her x, y, z, t gerçel sayıları için

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

6 $n \geq 3$ olmak üzere; düzlemde, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ 1 yarıçaplı çemberler olsun. Sırasıyla, $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ile bu çemberlerin merkezlerini gösterelim. Hiçbir doğrunun ikiden fazla çemberi kesmediğini varsayalım.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

olduğunu kanıtlayınız.

44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2003

1 A kümesi $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ kümesinin 101 elemanlı bir alt kümesi olsun.

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

kümeleri ikişerli olarak ayrık olacak şekilde S ye ait $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.

2

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

sayısının pozitif bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

Çözüm:

$\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$, $k \in Z^+$ diyerek işe koyulalım .

İçler dışlar çarpıp ifadeleri tek tarafta toplarsak

$$f(x) = x^2 - 2kb^2.x + k.(b^3 - 1) = 0$$

denkleminin çözümleri $b > 1$ için iki adet pozitif tam sayı köktür.

$b = 1$ durumunu özel olarak incelersek $(2n, 1)$ çözümünü görürüz.

pozitif tam sayı köklerden birinin $x = a$ olduğunu görürüz. Diğer kökü a' olsun.

Genelliği kaybetmeden $a' \geq a$ alınabilir.

$$a^2 \leq a.a' = k.(b^3 - 1)$$

gelir.

Başlangıçtaki ifadeyi düzenleyelim.

$$k = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \leq b.\frac{k^3 - 1}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

$$b^3 - 1 \geq 2ab^2 - b^3 + 1$$

$$b^3 - 1 \geq ab^2$$

$$b > b - \frac{1}{b^2} \geq a$$

olduğundan $b > a$ bulunur.

Aynı zamanda başlangıçtaki denklem

$$b^2 > a^2 = k.(2ab^2 - b^3 + 1) \geq 2ab^2 - b^3 + 1 > 0$$

yazılabildiğinden dolayı

$$b^2 > (2a - b).b^2 + 1 > 0$$

elde edilir. $2a - b > 0$ için sol kısma bakınca $0 > 1$ çelişkisi gelir. $2a - b < 0$ ise $2a - b = -x$,$x \in Z^+$ olmalıdır. $-xb^2 + 1 > 0$ çelişkisi gelir. $2a = b$ olmalıdır.

yani (a, b) ikililerinden biri daha $(n, 2n)$ olarak bulunur. Yerine konulduğunda $k = n^2$ yapar.

$$f(x) = x^2 - 2kb^2.x + k.(b^3 - 1) = x^2 - 8n^3x + 8n^4 - n = 0$$

Denkleminin köklerinden biri n olduğuna göre

$n.a' = 8n^4 - n$ $a' = 8n^3 - n$ elde edilir. O halde $(8n^3 - n, 2n)$ de bir çözümdür.

3 Her karşılıklı kenarları için, bu iki kenarın orta noktaları arasındaki uzaklık, bu iki kenarın uzunlukları toplamının $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşit olan dışbükey bir altıgenin tüm açılarının eşit olduğunu kanıtlayınız.
(Dışbükey $ABCDEF$ altıgeninin üç çift karşılıklı kenarı vardır: AB ile DE, BC ile EF, CD ile FA)

4 $ABCD$ kirişler dörtgeninde, D noktasından BC, CA, AB doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla P, Q, R olsun. $PQ = QR$ olması için gerek ve yeter koşulun $\angle ABC$ ile $\angle ADC$ açısının açıortaylarının AC ile noktadaş olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

A, R, Q, D noktaları çemberseldir. Çemberin çapı AD olup Sinüs Teoreminden $RQ = AD \cdot \sin\angle BAC$ dir.
Q, C, P, D noktaları çemberseldir. Çemberin çapı CD olup Sinüs Teoreminden $PQ = CD \cdot \sin\angle ACB$ dir.
Taraf tarafa oranlayalım:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$PQ = QR \Longleftrightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

Son eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul kirişler dörtgeninin B ve D açıortaylarının AC üzerinde kesişmesidir.

5 n pozitif bir tam sayı ve $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ gerçel sayılar olsun.

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

olduğunu kanıtlayınız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşulun $x_1, \ldots, x_n$ in aritmetik bir dizi olması olduğunu gösteriniz.

6 p bir asal sayı olsun. q sayısı, hiçbir n tam sayısı için, $n^p - p$ sayısını bölmeyecek şekilde bir q asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2004

1 ABC, kenarları arasında $AB \neq AC$ bağıntısı olan dar açılı bir üçgen olsun. BC çaplı çember, AB ve AC kenarlarını sırasıyla M ve N noktalarında kesiyor. BC kenarının orta noktasını O ile gösterelim. $\angle BAC$ ve $\angle MON$ açılarının iç açıortayları R de kesişmektedir. BMR ve CNR üçgenlerinin çevrel çemberlerinin BC kenarı üzerinde yer alan ortak bir noktalarının olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$OM = ON$ ve OR $\angle MON$ nin açıortayı olduğu için $RM = RN$ dir.

$\triangle AMR$ ile $\triangle ANR$ de AR ortak, $MR = RN$ olduğu için $\sin\angle AMR = \sin\angle ANR$ dir. $AB \neq AC$ olduğu için $AM \neq AN$ dir. O halde, $\angle AMR + \angle ANR = 180°$ dir.

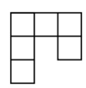
BC üzerinde $\angle BKR = \angle AMR$ olacak şekilde bir K noktası aldığımızda $\angle BKR = \angle RNC$ olacaktır. O halde, $BMRK$ dörtgeni ile $CNRK$ dörtgeni birer kirişler dörtgenidir.

2 $ab + bc + ca = 0$ eşitliğini sağlayan her a, b, c gerçel sayıları için

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c)$$

bağıntısının sağlandığı tüm gerçel katsayılı polinomları bulunuz.

3 Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi altı birim kareden oluşan şekle, ya da bu şeklin döndürülmesi ya da yansıtılması ile oluşabilecek şekle "kanca" diyoruz.



Herhangi iki kanca üst üste binmeyecek ve hiçbir kanca dikdörtgenin dışına taşmayacak şekilde kancalar kullanarak tamamen kaplanabilecek tüm $m \times n$ dikdörtgenleri belirleyiniz.

4 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere; $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pozitif gerçel sayıları

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

koşulunu sağlasın. $1 \leq i < j < k \leq n$ koşulunu sağlayan her i, j, k sayıları için t_i, t_j, t_k sayılarının bir üçgenin kenarları olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Genelliği bozmadan $t_n \geq t_{n-1} \geq \cdots \geq t_1$ olsun.

Soruda bu eşitsizliği sağlayan t_i lerden herhangi farklı üçünün bir üçgen oluşturduğu ispatlamamız isteniyor.

Aksini varsayalım, $t_n \geq t_1 + t_2$ olsun. Buna göre $t_n \geq \dfrac{2t_n}{5} + \dfrac{3\,(t_1+t_2)}{5}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Dolayısıyla

$$LHS = (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \geq \left(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + \frac{2t_n}{5} + \frac{3\,(t_1+t_2)}{5}\right)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

$$= \left(\frac{8t_1}{5} + \frac{8t_2}{5} + t_3 + \cdots + t_{n-1} + \frac{2t_n}{5}\right)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \overbrace{\geq}^{Cauchy} \left(n + \sqrt{10} - 3\right)^2$$

Sondaki eşitsizliği gösterelim

$$= \left(\frac{8t_1}{5} + \frac{8t_2}{5} + t_3 + \cdots + t_{n-1} + \frac{2t_n}{5}\right)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{8t_1}{5}}.\sqrt{\frac{1}{t_1}} + \sqrt{\frac{8t_2}{5}}.\sqrt{\frac{1}{t_2}} + \sqrt{t_3}.\sqrt{\frac{1}{t_3}} + \sqrt{t_4}.\sqrt{\frac{1}{t_4}} + \cdots + \sqrt{t_{n-1}}.\sqrt{\frac{1}{t_{n-1}}} + \sqrt{\frac{2t_n}{5}}.\sqrt{\frac{1}{t_n}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{8}{5}} + \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n-3} + \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \left(n - 3 + \sqrt{10}\right)^2$$

elde edilir.

Sonuç olarak $t_n \geq t_1 + t_2$ durumunda

$$LHS \geq \left(n + \sqrt{10} - 3\right)^2 \geq n^2 + 1$$

olduğunu gösterirsek çelişkiyi elde etmiş olacağız. Gösterelim

$$\left(n + \sqrt{10} - 3\right)^2 = n^2 + 2n\left(\sqrt{10} - 3\right) + 19 - 6\sqrt{10} \geq n^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2n\left(\sqrt{10} - 3\right) + 18 - 6\sqrt{10} \geq 0$$

Sol tarafın $(2n - 6)\left(\sqrt{10} - 3\right) \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$ olması ile biter.

Özetle çelişkiyi elde ettik. Çelişkimiz ise şudur:

$t_n \geq t_1 + t_1$ durumunda $LHS \geq n^2 + 1$ elde edilir. Bundan dolayı $t_n < t_1 + t_2$ olmalıdır dolayısıyla üçgen oluşturmaları gerekir. Boylelikle ispat tamamlanır.

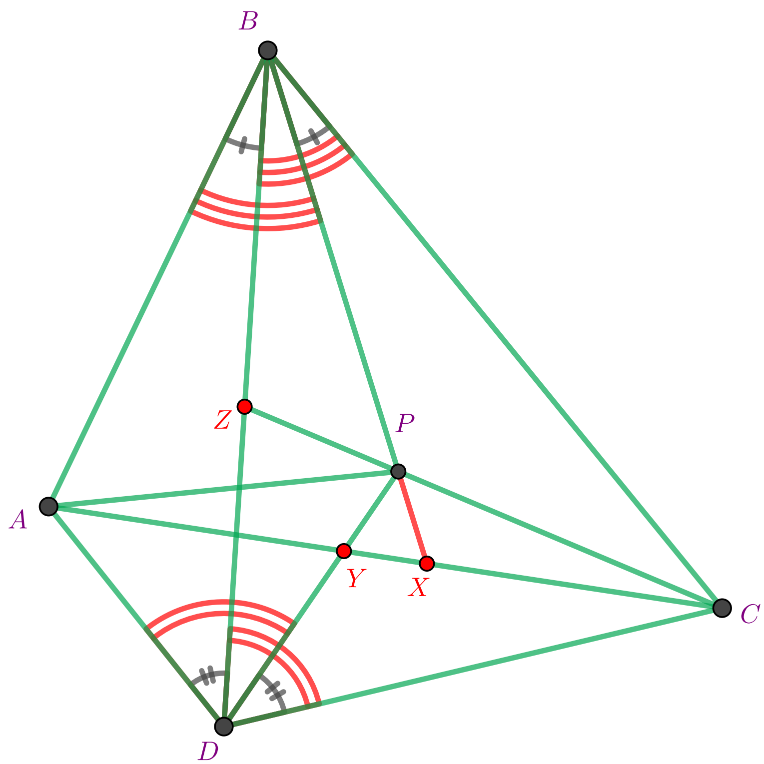
Problemin ispatı, genelliği bozmadan kısmında $\max t_1 = t_n$ verilerek de gösterilebilirdi. Ayrıca her üçgen oluşturan t_i ler eşitsizliği sağlamak zorunda değillerdir ama tersi doğrudur.

5 $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, BD köşegeni ABC açısının da CDA açısının da açıortayı değildir. P noktası, $ABCD$ nin iç bölgesinde

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ ve } \angle PDC = \angle BDA$$

olacak şekilde bir noktadır. $ABCD$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun $AP = CP$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1:



$\triangle BPD$ de, A noktası için Trigonometrik Ceva:

$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB}\cdot\frac{\sin\angle ADP}{\sin\angle APD}\cdot\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle ABP}=1 \tag{1}$$

$\triangle BPD$ de, C noktası için Trigonometrik Ceva:

$$\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle CDB}\cdot\frac{\sin\angle CDP}{\sin\angle CPD}\cdot\frac{\sin\angle CPB}{\sin\angle CBP}=1 \tag{2}$$

(1) ile (2) taraf tarafa çarpıp $\angle ABD=\angle PBC$, $\angle ABP=\angle DBC$, $\angle ADB=\angle PDC$, $\angle ADP=\angle BDC$ eşitliklerini yazarsak

$$\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle APD}\cdot\frac{\sin\angle CPB}{\sin\angle CPD}=1 \tag{3}$$

elde ederiz.

BP ile DP doğruları AC yi sırasıyla X ve Y de kessin. PC ile BD, Z de kesişsin.

(3) ü

$$\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle APD}=\frac{\sin\angle CPD}{\sin\angle CPB}=\frac{\sin\angle ZPD}{\sin\angle ZPB} \tag{4}$$

şeklinde yazarsak $\angle APB=\angle ZPD$ ve $\angle APD=\angle ZPB$ çıkar. Biraz düzenlemeyle

$$\angle XPC=\angle YPA \tag{5}$$

elde edilir.

(i) $ABCD$ kirişler dörtgeni ise; $\angle PXY = \angle XBC + \angle XCB = \angle YCD + \angle YDC = \angle PYX$ elde edlir. (5) ile birleştirirsek $AP = CP$ elde edilir.

(ii) $AP = CP$ ise; PX i $PD = PE$ olacak şekilde uzatalım. $\triangle PEC \cong \triangle PDA$.
$ACED$ ikizkenar yamuktur. Yani bir kirişler dörtgenidir.
$\angle CEP = \angle ADP = \angle BDC$ olduğu için de $BDEC$ kirişler dörtgenidir. Bu durumda $ABCD$ kirişler dörtgenidir.

Not 1: $ABCD$ kirişler dörtgeni ise $AP = CP$ önermesinin aslında daha kolay ispatları var. Bundan dolayı olmalı ki, IMO istatistiklerine göre, yarışmacıların %25 i 3 puan almış.

Not 2: A ile C noktaları, $\triangle BDP$ de izogonal eşleniklerdir. Aslında yukarıda bunun ispatı yapıldı. Aslında bu durum doğrudan Trigonometrik Ceva'daki oranların yer değiştirmesinin bir sonucudur. Soruda nokta üçgenin dışında olduğu için bunun görülmesi zor olmuş olabilir. Ben pratik olarak, nokta üçgen içerisindeymiş gibi oranları yazarak ilerliyorum.

Çözüm 2:

Sadece, $ABCD$ kirişler dörtgeni ise $AP = CP$ olduğunu gösterelim.

Ptolemy Teoremi'nin ispatında kullanılan yoldan gideceğiz. Bunun için ilk çözümdeki şekli kullanalım.

BP ile DP doğruları ile AC doğrusu, sırasıyla X ve Y de kesişşin.

(AA) benzerliğinden $\triangle AYD \sim \triangle BCD$ ve $\triangle BCX \sim \triangle BDA$.

$\dfrac{AY}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$ ve $\dfrac{XC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$ oranlarından $AY = XC$.

Az önceki (AA) benzerliğinin bir sonucu olarak ya da basit açı hesaplarıyla $\angle PYX = \angle PXY$ olduğu için (KAK) benzerliğinden $\triangle PYA \cong \triangle PXC$, dolayısıyla $AP = CP$.

$\boxed{6}$ Ondalık yazılımında ardışık herhangi iki basamağı teklik-çiftlik açısından farklı olan pozitif tam sayıya *değişimli sayı* diyoruz. n pozitif tam sayısının değişimli bir tam kata sahip olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

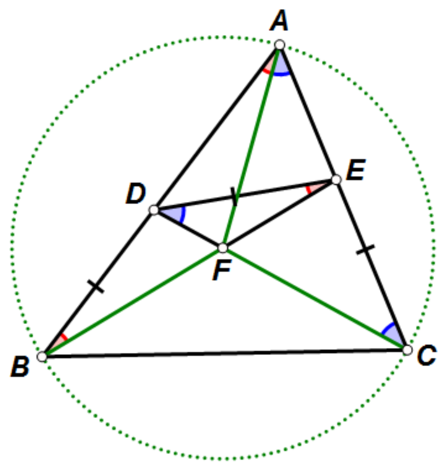
46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2005

1 ABC eşkenar üçgeninin BC kenarı üzerinde A_1, A_2; CA kenarı üzerinde B_1, B_2; AB kenarı üzerinde C_1, C_2 noktaları $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dışbükey altıgeninin tüm kenarları eşit olacak şekilde seçiliyor. A_1B_2, B_1C_2 ve C_1A_2 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

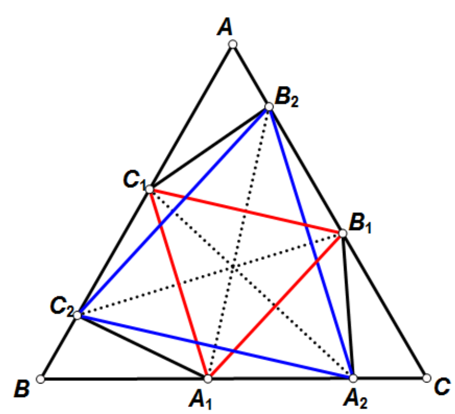
Çözüm:

Asıl problemin çözümünden önce, bir alt problemi çözelim.

İddia: $\angle ABC = 60°$ olan ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinden sırasıyla D ve E noktaları $|BD| = |DE| = |EC|$ olacak şekilde seçiliyor.ABC üçgeninin çevrel merkezi BE ile CD nin kesim noktasındadır.*



İspat: $\angle ADE = 2\angle DBE = 2\angle DEB = 2\alpha$ ve $\angle AED = 2\angle EDC = 2\angle ECD = 2\beta$ diyelim.$\alpha + \beta = 60°$ olduğu kolayca görülebilir.$BE \cap CD = F$ olsun .Buna göre, $\angle DFE = 120°$ dir. O halde $ADFE$ bir kirişler dörtgenidir. Bu dörtgende $\angle DAF = \angle DEF, \angle EAF = \angle EDF$ açı eşitlikleri vardır.Bu son eşitlikler ile birlikte $|FA| = |FB| = |FC|$ olduğunu görüyoruz. Buna göre F noktası çevrel çemberin merkezidir.



Bu sonucu asıl problemde $AB_1C_2, BC_1A_2, CA_1B_2$ üçgenleri için uygularsak sırasıyla $B_1C_1 \cap B_2C_2, A_1C_1 \cap A_2C_2, A_1B_1 \cap A_2B_2$ kesim noktaları bu üçgenlerin çevrel çember merkezlerini oluştururlar. Buradan

$$\angle B_2C_2B_1 = \angle C_1B_1B_2 = \angle A_1C_1A_2 = \angle A_2C_2A_1 = \angle A_1B_2A_2 = \angle B_1A_1B_2 = 30°$$

eşitliklerini ve bu eşitliklerin sonucunda

$$A_1A_2B_2C_1, A_2B_1C_1C_2, A_1B_1B_2C_2$$

dörtgenlerinin birer kirişler dörtgeni (ikizkenar yamuk) olduğunu görmekteyiz. Açılar bu dörtgenlere göre incelendiğinde

$$\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_2C_2 = \angle A_2C_1B_1 = \angle A_2C_2B_1 = \angle B_2A_1C_1 = \angle B_2A_2C_1 = 30^\circ$$

şeklinde yeni açı eşitliklerine ulaşırız. Sonuç olarak $A_1B_1C_1$ ve $A_2B_2C_2$ üçgenleri eşkenar üçgenler ve A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 doğruları bu üçgenlerin iç açıortayları olduğundan aynı bir noktadan geçerler.

2 $a_1, a_2, \ldots$ tam sayılar dizisi, sonsuz çoktuklukta pozitif ve sonsuz çoklukta negatif elemandan oluşmaktadır. Her n pozitif tam sayısı için, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının n ile bölününce n farklı kalan bıraktığını varsayalım. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots$ dizisinde her tam sayının tam olarak bir kez geçtiğini kanıtlayınız.

3 x, y, z pozitif gerçel sayıları için $xyz \geq 1$ olmak üzere;

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Bu eşitsizlik;

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3$$

ile özdeştir. Bunu ispatlayalım. Cauchy-Schwarz'dan;

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

biliyoruz. O halde benzer şekilde yapılıp toplanırsa;

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3$$

olduğundan doğrudur. İspat biter.

4

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n \geq 1$$

sonsuz dizisinin tüm terimleri ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayıları belirleyiniz.

Çözüm:

Bunu sağlayan yegane sayının 1 olduğunu kanıtlayalım. Bunun için her p asalı için $p \mid a_m$ olacak şekilde bir m indisi olduğunu göstermeliyiz. $m = p - 2$ olarak seçersek koşul sağlanır. O halde ispat biter.

5 $ABCD$, BC ile DA paralel olmayacak ve $BC = DA$ olacak şekilde sabit bir dışbükey dörtgen olsun. E ve F sırasıyla BC ve DA kenarları üzerinde $BE = DF$ koşulunu sağlayan hareketli noktalar olsun. AC ile BD doğrusu P de, BD ile EF doğrusu Q da, EF ile AC doğrusu da R de kesişiyor.

E ve F değişirken, PQR üçgenlerinin çevrel çemberlerinin P den başka ortak bir noktaya sahip olduklarını kanıtlayınız.

6 Katılımcılara 6 soru yöneltilen bir matematik yarışmasında, herhangi iki soruyu yarışmacıların $\frac{2}{5}$ sinden daha fazlası çözmüştür. Ayrıca, 6 soruyu da çözen bir yarışmacı çıkmamıştır. Tam olarak 5 soruyu çözen en az 2 yarışmacının bulunduğunu gösteriniz.

47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2006

1 İçteğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninin içinde,

$$m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})$$

olacak şekilde bir P noktası seçiliyor. $|AP| \geq |AI|$ olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $P = I$ olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

Çözüm:

$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB = \dfrac{\angle B + \angle C}{2}$ olduğu için $\angle BIC = \angle BPC$ dir.

Yani P noktalarının geometrik yeri (BIC) çemberinin üçgen içerisinde kalan kısmıdır.

AI doğrusu (ABC) yi M noktasında kessin. Basit açı hesaplarıyla $\angle BIM = \angle IBM$ ve $\angle MIC = \angle ICM$ olduğu görülür.

Bu durumda M noktası (BIC) nin merkezidir.

A noktasının (BIC) çemberine en yakın olduğu nokta AM ile çemberin kesiştiği nokta, yani I noktasıdır. I noktası hariç noktaların A ya uzaklığı AI dan büyüktür. Bu durumu üçgen eşitsizliğinden de görebiliriz:

$$AP + PM \geq AM = AI + IM \Rightarrow AP \geq AI.$$

2 Bir P düzgün 2006-geni veriliyor. P nin bir köşegenine, uçları P nin çevresini, her birisi P nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor. P nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.

P, herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

3 Tüm a, b, c reel sayıları için

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük M reel sayısını bulunuz.

Çözüm:

a, b, c'ler, herhangi üçü farklı reel sayılar olsun. Şayet bu reellerden en az ikisi birbirine eşitse $M \geq 0$ elde ederiz fakat biz en büyük (iyi) değeri arıyoruz. Yani a, b, c, çözümün devamında birbirlerine eşit olmasın

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| = |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$$

$a - b = x, b - c = y, c - a = z, a + b + c = s$ olsun. Genelliği bozmadan $a > b > c$ olsun. Dolayısıyla x ve y pozitif reel sayılardır. Buna göre sağ taraf

$$M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = M\left(\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2}{3}\right)^2 = \frac{M}{9}\left(x^2 + y^2 + z^2 + s^2\right)^2$$

Bunu eşitsizlikte yerine koyduğumuzda

$$|xyzs| \leq \frac{M}{9}\left(x^2 + y^2 + z^2 + s^2\right)^2$$

elde ederiz. Pariteleri aynı olan x, y için $x + y$ sabit iken $x = y$ durumunu gösterirsek ispat biter çünkü $x = y$ iken sol taraftaki xy'yi maksimize ve sağ taraftaki $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ minimize eder. Bundan ötürü $x = y$ olsun. Haliyle $z = -2x$ olacaktır

$$|xyzs| \leq |2x^3 s| \leq \frac{M}{9}\left(6x^2+s^2\right)^2 \leq \frac{M}{9}\left(x^2+y^2+z^2+s^2\right)^2$$

Yani

$$\frac{M}{9}\left(6x^2+s^2\right)^2 = \frac{M}{9}\left(2x^2+2x^2+2x^2+s^2\right)^2 \geq \frac{M}{9}\left(4\sqrt[4]{2^3x^6s^2}\right)^2 = M.\frac{16\sqrt{2}}{9}2x^3s \geq 2x^3s = |2x^3s|$$

Dolayısıyla $M \geq \dfrac{9}{16\sqrt{2}}$ elde edilir.

$\boxed{4}$ $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x,y) tam sayı ikililerini belirleyiniz.

Çözüm:

$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ denklemini çözerken öncelikle kullanışlı bilgiler bulalım .

Varsayalım ki (x_0,y_0) bir çözüm olsun. O halde $(x_0,-y_0)$ da bir çözümdür.

$1+2^x+2^{2x+1}>0$ olduğundan $y^2>0$ olur. O halde genelliği kaybetmeden $y>0$ alabiliriz.

$x=0$ için çözümleri bulalım. $1+1+2=y^2$ yani $(0,2)$ ile $(0,-2)$ çözümleri bulunur.

Buradan sonra $y>0$ ve $x>0$ için çözümleri bulalım.

$y^2-1=2^x.(2^{x+1}+1)$ olur.

Şimdi bu denklemi çözmek için hangi ifadenin hangi ifadeyi böldüğünü bulalım.

öncelikle x'in 1 veya 2 için olamayacağını görelim.

$x=1$ ise $11=y^2$ olur , sağlamaz.

$x=2$ ise $37=y^2$ olur , sağlamaz.

O halde $x\geq 3$ olmalıdır.

$2 \mid y-1$ ya da $2 \mid y+1$ olacağı açıktır. iki durumda da $y-1$ ve $y+1$ çifttirler ve ardışık olduklarından içlerinden biri 4 ile bölünür.

yani $x=3$ için biri 4 ile diğeri 2 ile bölünür.

$x=4$ için yine biri 4 biri 2 ile bölündüğünden ya biri 8 diğeri 2 ya da her ikisi de 4 ile bölünmelidir. Fakat ardışık çift sayıların ikisi birden 4 e bölünemez.

O halde içlerinden biri 2^3 ile diğeri 2 ile bölünür.

$x\geq 3$, $x=x$ için bakarsak kalanlar arası fark 2 olması gerektiğinden dolayı içlerinden biri yalnızca 2 ile bölünür diğeri 2^{x-1} ile bölünür.

$y\pm 1=m.2^{x-1}$, $y=m.2^{x-1}+k$, $k=\pm 1$, $m\in Z^+$ olur. Bu bilgiyi alıp ilk denkleme koyalım.

$2^x.(2^{x+1}+1)=(2^{x-1}.m+k)^2-1$ yani $1+2^{x+1}=2^{x-2}.m^2+mk+k^2-1$ olur. $k=\pm 1$ olduğundan dolayı $k^2=1$ yani $k^2-1=0$ olur.

$1+2^{x+1}=2^{x-2}.m+mk$

$1-mk=2^{x-2}.(m^2-8)$ olur.

1) $k=1$ için $1-m=2^{x-2}.(m^2-8)$ bu ifadenin ise $m=2$ dışında çözümü yoktur. çünkü $m=1$ ise sağ taraf 0 dan büyüktür. $m>2$ için sol taraf negatifken sağ taraf pozitiftir.

$m=2$ için ise sol taraf tek sayı olacağından dolayı çözümü yoktur. O halde $k=-1$ olmalıdır.

2) $k=-1$ için $1+m=2^{x-2}.(m^2-8)$, $x\geq 3$ olduğunu söylediğimiz için $1+m=2^{x-2}.(m^2-8)\geq 2.(m^2-8)$ olur.

$2m^2-m-17\leq 0$ eşitsizliği elde edilir. $m=4$ için $32-4-17>0$ olur. $f(m)=2m^2-m-17$ şeklinde düşünürsek $f'(m)=4m-1$ yani $m\geq 4$ için $f(m)>0$ ve $f'(m)>0$ olduğundan daima artandır ve sıfırdan büyüktür.

Aynı zamanda $m^2 - 8 > 0$ olduğundan dolayı $m > 2$ olmalıdır. $2 < m < 4$ elde edilir. yani $k = -1$,$m = 3$ olmaldır.

$1 + 3 = 2^{x-2}.1$ buradan $x = 4$ elde edilir. $y = m.2^{x-1} + k$ ifadesinde $k = -1$ $m = 3$ ve $x = 4$ yerleştirilirse $y = 23$ elde edilir.

O halde denklemin tüm çözümleri $(0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)$ olarak bulunur.

5 Katsayıları tam sayı ve derecesi $n > 1$ olan bir $P(x)$ polinomu ile bir $k > 0$ tam sayısı veriliyor. $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, P nin k kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere, $Q(t) = t$ eşitliğini sağlayan t tam sayılarının sayısının en fazla n olacağını ispatlayınız.

6 Dışbükey bir P çokgeninin her b kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi b olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor. P nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının, P nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2007

1 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları verilmiş olsun. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için,

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun.

(a) Tüm $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayıları için,

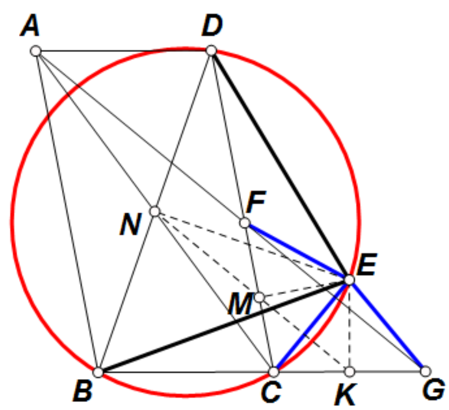
$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \qquad (*)$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) $(*)$ da eşitliğin gerçekleşmesini sağlayan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2 A, B, C, D ve E den oluşan beş nokta, $ABCD$ bir paralelkenar ve $BCED$ konveks bir kirişler dörtgeni olacak biçimde verilmiş olsun. A dan geçen bir ℓ doğrusu, $[DC]$ doğru parçasını bir F iç noktasında ve BC doğrusunu da bir G noktasında kessin. $|EF| = |EG| = |EC|$ olduğunu varsayalım. ℓ nin, $\widehat{DAB}$ açısının açı ortayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:



$AC \cap BD = \{N\}$ ve E den $[CG]$ ve $[CF]$ ye çizilen dikme ayakları sırasıyla K ve M olsun. K, M, N noktaları sırasıyla $[CG], [CF], [CA]$ doğru parçalarının orta noktalarıdır.$G - F - A$ doğrusal noktalar olduğundan, $K - M - N$ noktaları da doğrusaldır.

E noktası BDC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde $EK \perp BC$, $EM \perp DC$ olduğundan KM, BDC üçgenine ait **simson-wallace** doğrusudur.Buna göre $EN \perp BD$ olacaktır. Ayrıca $|BN| = |ND|$ olduğundan $|EB| = |ED|$ dir.

Bu sonuç $BCED$ kirişler dörtgeni olduğundan $\angle FCE = \angle GCE$ demektir. Buna göre $|CF| = |CG|$ olup $\angle BAG = \angle DAG$ dir.

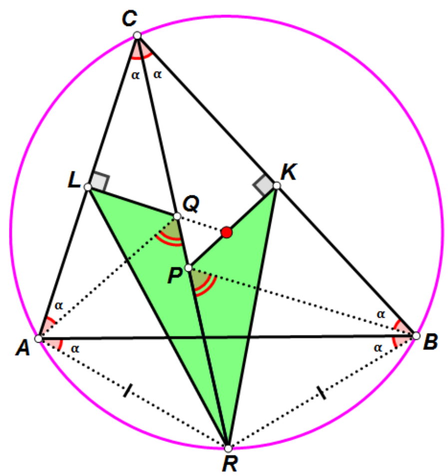
3 Bir matematik yarışmasına katılan yarışmacılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık her zaman karşılıklıdır. Bir yarışmacı grubundaki her yarışmacı çifti arkadaşsa, bu gruba bir *klik* diyelim. (Özellikle, ikiden az yarışmacıdan oluşan her grup bir kliktir.) Bir kliğin eleman sayısına bu kliğin *büyüklüğü* diyelim.

Bu yarışmadaki kliklerin büyüklüklerinin aldığı en büyük değer bir çift sayı olsun. Tüm yarışmacıların, bir odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değeri, diğer odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değerine eşit olacak biçimde iki odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

4 Bir ABC üçgeninde, $\widehat{BCA}$ açısının açı ortayı, üçgenin çevrel çemberini ikinci kez R de, $[BC]$ nin orta dikmesini P de ve $[AC]$ nin orta dikmesini de Q da kesiyor. $[BC]$ nin orta noktası K ve $[AC]$ nin orta noktası L olsun. RPK ve RQL üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$ARBC$ kirişler dörtgeninde $\angle ACR = \angle BCR = \alpha$ olduğundan, $AR = BR$ ve $\angle BAR = \angle ABR = \alpha$ olur.



$[QL]$ ve $[PK]$ kenar orta dikmeler olduğundan, $\angle QAC = \angle QCA = \angle BCP = \angle PBC = \alpha$ dır.

$\triangle QAR$ ve $\triangle PBR$ üçgenlerinde sırasıyla $\angle QAR = \angle BAC$ ve $\angle PBR = \angle ABC$ dir.

Buraya kadar bulunanlar ile $\triangle ABC \sim \triangle ARQ \sim \triangle RBP$ ve $\triangle ABR \sim \triangle BCP \sim \triangle CAQ$ benzerlikleri görülebilir.

Sırasıyla bu benzerliklerin sağladığı orantıları yazalım.

$$\triangle ARQ \sim \triangle RBP \Rightarrow \frac{PR}{PB} = \frac{QR}{QA} \tag{1}$$

bulunur.Diğer taraftan

$$\triangle BCP \sim \triangle ACQ \Rightarrow \frac{QA}{PB} = \frac{QL}{PK} \tag{2}$$

olup, (1) ve (2) den,

$$QL \cdot QR = PK \cdot PR \tag{3}$$

olur ve $\angle LQR = \angle KPR$ olduğundan (3)'den dolayı $[QLR] = [PKR]$ dir.

5 a ve b pozitif tam sayılar olsun. $4ab - 1$, $(4a^2 - 1)^2$ yi bölüyorsa, $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

6 n pozitif bir tam sayı olsun. Üç boyutlu uzayda $(n+1)^3 - 1$ noktadan oluşan

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kümesi veriliyor. Birleşimleri S kümesini kapsayan, ama $(0, 0, 0)$ noktasını içermeyen düzlemlerin sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2008

1 Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H olsun. Merkezi BC nin orta noktası olup H den geçen çember BC doğrusunu A_1 ve A_2 noktalarında kesiyor. Benzer şekilde, merkezi CA nin orta noktası olup H den geçen çember CA doğrusunu B_1 ve B_2 noktalarında ve merkezi AB nin orta noktası olup H den geçen çember AB doğrusunu C_1 ve C_2 noktalarında kesiyor. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ noktalarının aynı çember üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

Çözüm:

Çözüm: ABC üçgeninin kenar orta noktaları A_0, B_0, C_0 olsun. ABC nin çevrel merkezi O, çevrel yarıçapı R olsun. Bahsedilen altı nokta çembersel olacaksa, bu çemberin merkezi ancak O noktası olabilir. $[AH], [CH]$ doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla K, L olsun. OA_0LB_0, AKA_0O, HA_0OK dörtgenlerinin birer paralelkenar olduğunu görebiliriz. $|A_0K| = |OA| = R$ dir. HA_0OK da paralelkenar kanunundan,

$$2(|OA_0|^2 + |A_0H|^2) = |OH|^2 + |A_0K|^2 = |OH|^2 + R^2 \qquad (1)$$

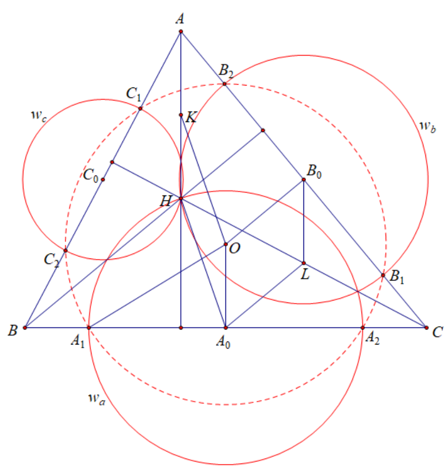
olur. OA_0A_1 dik üçgeninden,

$$|OA_1|^2 = |OA_0|^2 + |A_0A_1|^2 = |OA_0|^2 + |A_0H|^2 \qquad (2)$$

olup (1) ve (2) den,

$$|OA_1|^2 = \frac{|OH|^2 + R^2}{2}$$

elde edilir. Bu ifade ABC üçgeni için sabit olduğundan benzer şekilde $|OB_1|^2 = |OC_1|^2 = \dfrac{|OH|^2 + R^2}{2}$ elde edilir. Böylece, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ noktaları çemberseldir ve çemberin merkezi O noktası olup yarıçapı $\sqrt{\dfrac{|OH|^2 + R^2}{2}}$ dir.



Kaynak: IMO çözüm kitapçıkları

2 (a) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan sonsuz tane x, y, z rasyonel sayı üçlüsü için yukarıdaki eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğünü gösteriniz.

Çözüm 1:

Soruda $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, x = \frac{c}{a}$ dönüşümü yapılırsa soru;

$$\frac{a^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2}{(c-a)^2} \geq 1$$

haline döner. Bu eşitsizlik de;

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} - 3\right)^2 \geq 0$$

olduğundan doğrudur. Şimdi b) bölümüne bakalım. $b = ak, c = b.r = akr$ dersek;

$$k + r + \frac{1}{rk} = 3$$

şekilde sonsuz tane rasyonel sayı ikilisi olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu düzenlersek;

$$k^2 + (r-3)k + \frac{1}{r} = 0$$

eşitliğinin δ sının tamkare olduğu sonsuz adet r değeri varsa doğal olarak sonsuz sayıda $k, r \in \mathbf{Q}$ bulunur. Bunun için;

$$(r-3)^2 - \frac{4}{r} = \frac{r-4}{r}(x-1)^2$$

olduğundan $\frac{r-4}{r}$ tamkare olacak şekilde sonsuz sayıda $r \in \mathbf{Q}$ olmalı. Buradan;

$$(x, y, z) = \left(-k(k+1), \frac{-(k+1)}{k^2}, \frac{k}{(k+1)^2}\right)$$

alırsak sağlayacağını görebiliriz. İspat biter.

Çözüm 2:

$\frac{x}{x-1} = a$, $\frac{y}{y-1} = b$, $\frac{z}{z-1} = c$ dersek $a, b, c \neq 1$ olmak üzere $x = \frac{a}{a-1}$, $y = \frac{b}{b-1}$, $z = \frac{c}{c-1}$ olur. $xyz = 1$ eşitliği bize $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ eşitliğini verir. Parantezleri açarsak $a+b+c-1 = ab+bc+ca$ olur. Ayrıca ispatlamamız istenen eşitsizlik de $a^2+b^2+c^2 \geq 1$ biçimine dönüşür. $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$ özdeşliğinden faydalanırsak:

$$\begin{aligned}
&2(a+b+c-1) = 2(ab+bc+ca) \\
\Longrightarrow\ & 2(a+b+c) - 2 = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \\
\Longrightarrow\ & a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2 \\
\Longrightarrow\ & a^2+b^2+c^2 = (a+b+c-1)^2 + 1 \geq 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim. $a^2+b^2+c^2 = 1$ ise $a+b+c = 1$ ve $ab+bc+ca = 0$ olmalıdır. $c = 1-a-b$ yazarsak $ab + (b+c)(1-a-b) = 0$ olup b ye göre ikinci dereceden bir denklem olan

$$b^2 + (a-1)b + a(a-1) = 0$$

eşitliğine ulaşırız. a rasyonel iken denklemin b kökünün de rasyonel sayı olması için gerek ve yeter şart diskriminantın bir rasyonel sayının karesi olmasıdır. $\Delta = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$ olur. k, m tam sayılar olmak üzere $a = \dfrac{k}{m}$ koyalım. $\Delta = \dfrac{(m-k)(m+3k)}{m^2}$ olur. Eğer $m = k^2 - k + 1$ seçersek $m > 0$ ve $\Delta = \dfrac{(k-1)^2(k+1)^2}{m^2}$ olur. b yi büyük kök olarak seçerek devam edelim. $b = \dfrac{m-k+(k^2-1)}{m^2} = \dfrac{m-1}{m}$ olur. $a+b+c = 1$ den dolayı $c = \dfrac{1-k}{m}$ bulunur. $a, b, c \neq 1$ şartına uygun olması için $k \neq 0$, $k \neq 1$ almalıyız. O halde $k > 1$ tam sayıları seçerek sonsuz çoklukta (a, b, c) rasyonel sayı üçlüsü elde edebiliriz. $x = \dfrac{a}{a-1}$, $y = \dfrac{b}{b-1}$, $z = \dfrac{c}{c-1}$ eşitliklerinden sonsuz çoklukta (x, y, z) rasyonel sayı üçlüsü üretilir.

Kaynak: IMO çözüm kitapçıkları

3 Sonsuz tane n doğal sayısı için $n^2 + 1$ sayısının $2n + \sqrt{2n}$ den büyük asal böleninin olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Çözüm: Öncelikle şu iki yardımcı teoremi hatırlayalım.

- $p \equiv 1 \pmod 4$ olacak şekilde sonsuz çoklukta p asal sayısı vardır.
- $x^2 \equiv -1 \pmod p$ ve $1 \leq x \leq p-1$ olacak şekilde iki farklı x tam sayısı vardır. Bu denkliğin çözümünün varlığı ile ilgili forumda 4n+1 asal başlıklı konuya bakabilirsiniz.

Şimdi $p \equiv 1 \pmod 4$ olacak şekilde bir p asal sayısını göz önüne alalım. Yardımcı teoremden dolayı $x^2 \equiv -1 \pmod p$ denkliğinin $1 \leq x \leq p-1$ olacak şekilde iki farklı x tam sayı çözümü olduğunu biliyoruz. Bunlardan küçük olan çözüme n dersek, büyük olan çözüm de $p-n$ olur. O halde $1 \leq n \leq \dfrac{p-1}{2}$ dir. Böylece $n^2 \equiv -1 \pmod p$ olup $p \mid n^2 + 1$ elde ederiz. Şimdi bu n sayısı için

$$p - 2n > \sqrt{2n} \tag{0}$$

ana eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayacağız. $1 \leq n \leq \dfrac{p-1}{2}$ olduğundan bir $m \in \{1, 3, \ldots, p-3\}$ tek sayısı için $n = \dfrac{p-m}{2}$ olup

$$p = 2n + m \tag{1}$$

yazılabilir. Öte yandan $n^2 \equiv \left(\dfrac{p-m}{2}\right)^2 \equiv -1 \pmod p \implies m^2 \equiv -4 \equiv p-4 \pmod p$ elde edilir. Buna göre

$$m \geq \sqrt{p-4} \tag{2}$$

olup (1) ve (2) den

$$p \geq 2n + \sqrt{p-4} \tag{3}$$

elde edilir. (0) ana eşitsizliğini ispatlayabilmek için (3) eşitsizliğinde $\sqrt{p-4} > 4$ olacak şekilde p asal sayısı seçmeliyiz. Yani $p > 20$ seçmeliyiz. O halde $p > 20$ ve $p \equiv 1 \pmod 4$ olan p asallarını göz önüne aldığımızda $p \mid n^2 + 1$ ve $p > 2n + \sqrt{2n}$ sağlanır. Bu seçimin n sayılarını nasıl ürettiğini örneklendirebiliriz:

$p = 29$ için $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}$ için $n = 12$, $n = 17$ sağlar. Küçük olan n değerini seçmeliyiz. $p = 29 > 24 + \sqrt{24}$ sağlanır.

$p = 37$ için $n^2+1 \equiv 0 \pmod{37}$ için $n = 6$, $n = 31$ sağlar. Küçük olan n değerini seçmeliyiz. $p = 37 > 12+\sqrt{12}$ sağlanır.

$p = 41$ için $n^2+1 \equiv 0 \pmod{41}$ için $n = 9$, $n = 32$ sağlar. Küçük olan n değerini seçmeliyiz. $p = 41 > 18+\sqrt{18}$ sağlanır.

Bu tür n sayılarının kümesini $S = \{12, 6, 9, \dots\}$ ile gösterelim. S kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu da göstermeliyiz. Bunun için, aksini varsayalım ve $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $|S| = k$ şeklinde sonlu elemanlı olduğunu düşünelim. Sonsuz çoklukta $p \equiv 1 \pmod 4$ asal sayısı olduğu için her $i = 1, 2, \dots, k$ için $(p, n_i^2 + 1) = 1$ olacak şekilde bir p asal sayısı seçebiliriz. Yine bu p asal sayısını kullanarak, yukarıda açıkladığımız yöntemle $p \mid \ell^2 + 1$ ve $p > 2\ell + \sqrt{2\ell}$ olacak şekilde bir başka ℓ pozitif tam sayısı üretebiliyoruz. $\ell \notin S$ olduğundan S kümesi sonlu elemanlı olamaz.

Kaynak: AoPS sitesinde sunulan çözümden faydalanılmıştır.

4 $wx = yz$ olmak üzere, tüm w, x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

koşulunu sağlayan tüm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (diğer deyişle f, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve pozitif değerler alan bir fonksiyondur) fonksiyonlarını bulunuz.

5 n ve k pozitif tam sayı olmak üzere, $k \geq n$ ve $k - n$ çift sayıdır. $1, 2, \dots, 2n$ sayılarıyla numaralandırılmış $2n$ tane lambanın herbiri *açık* veya *kapalı* durumda olabiliyor. Başlangıçta lambaların hepsi kapalı durumdadır. Her hamlesinde bir lamba seçilerek, seçilen lambanın durumunu değistiren (açıktan kapalıya veya kapalıdan açığa) *hamleler* dizileri tanımlayalım.

Sonucunda 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren tüm hamleler dizilerinin sayısı N olsun.

Sonucunda yine 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n+1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren, fakat $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambalarla hiç hamle yapmayan tüm hamleler dizilerinin sayısı M olsun.

N/M oranının değerini bulunuz.

6 $|BA| \neq |BC|$ olmak üzere, $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. ABC ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberleri sırasıyla ω_1 ve ω_2 olsun. BA ışınınına A dan sonraki bir noktada ve BC ışınınına C den sonraki bir noktada teğet olan ve aynı zamanda AD ve CD doğrularına da teğet olan bir ω çemberinin olduğunu varsayalım. ω_1 ve ω_2 çemberlerinin ortak dış teğetlerinin ω çemberi üzerinde kesiştigini kanıtlayınız.

50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2009

1 n pozitif bir tam sayı; $a_1, \dots, a_k$ $(k \geq 2)$ de, $\{1, \dots, n\}$ kümesine ait olan ve, her $i = 1, \dots, k-1$ için, n sayısının $a_i(a_{i+1} - 1)$ sayısını bölmediğini kanıtlayınız.

2 O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi; P ve Q da, sırasıyla, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları üstünde, köşelerden farklı iki nokta olsun. K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M den geçen çembere Γ diyelim. PQ doğrusu Γ çemberine teğet ise, $|OP| = |OQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

KL; AB yi R de, AC yi S de kessin.

$\angle KLM = \angle QMK = \angle AQP$ ve $\angle MKL = \angle LMP = \angle APQ$ olduğu için $A.A$ dan $\triangle APQ \sim \triangle MKL$ dir.

$\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{KM}{ML} \Rightarrow AQ \cdot KM = AP \cdot ML \Rightarrow AQ \cdot BQ = AP \cdot CP$

$\Rightarrow OA^2 - OQ^2 = OA^2 - OP^2 \Rightarrow OQ = OP.$ ■

3 Pozitif tam sayılardan oluşan ve kesin artan $s_1, s_2, s_3, \dots$ dizisinin

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ ve } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

altdizilerinin her ikisi de birer artimetik dizi ise, $s_1, s_2, s_3, \dots$ dizisinin kendisinin de bir aritmetik dizi olduğunu kanıtlayınız.

4 $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\widehat{CAB}$ ve $\widehat{ABC}$ açılarının açıortayları $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. K, ADC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olmak üzere; $m(\widehat{BEK}) = 45^\circ$ ise, $m(\widehat{CAB})$ nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm 1:

BE ile AD doğruları I da kesişsin. I, $\triangle ABC$ nin içmerkezidir.

I dan AC ye inilen dikmenin ayağı H olsun. $IHCD$ deltoidinde $\angle IHK = \angle IDK = 45^\circ = \angle IEK$ dir.

$E \neq H$ olduğunda I, H, E, K noktaları çembersel, dolayısıyla $\angle IHE = \angle IKE = 90^\circ$ olacaktır. Bu durumda $\angle EIK = 45^\circ$, $\angle IBC = 22,5^\circ$, dolayısıyla $\boxed{\angle BAC = 90^\circ}$ olacaktır.

$E = H$ olduğunda I aynı zamanda diklik merkezi olacağı için $\boxed{\angle BAC = 60^\circ}$ olacaktır.

Çözüm 2:

$\triangle ABC$ nin içmerkezi I olsun. $\angle IBC = \angle ICB = \angle ACI = \alpha$ olacaktır.

$\triangle DIC$ de açıortay teoreminden

$$\frac{IK}{KC} = \frac{ID}{DC} = \tan\alpha \tag{1}$$

$\triangle IEK$ ve $\triangle EKC$ de Sinüs Teoreminden

$$\frac{IK}{KC} = \frac{IK}{KE} \cdot \frac{KE}{KC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(3\alpha + 45^\circ)} \tag{2}$$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 2\alpha} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(3\alpha + 45^\circ)} \Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \sin(3\alpha + 45^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos\alpha = \sin 45^\circ \sin(90^\circ - \alpha)$

$\Rightarrow \cos(\alpha + 45^\circ) - \cos(5\alpha + 45^\circ) = \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(135^\circ - \alpha) = -\cos(135^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)$

$\Rightarrow \cos(5\alpha + 45°) = cos(135° + \alpha)$.

Bu durumda, ya $5\alpha + 45° = 135° + \alpha$ ya da $(5\alpha + 45°) + (135° + \alpha) = 360°$ olacak.

Buradan, $\alpha = 22,5°$ ya da $\alpha = 30°$ elde edilir.

O halde $\angle BAC = 90°$ ya da $\angle BAC = 60°$ dir.

5 Pozitif tamsayılar kümesinden pozitif tamsayılar kümesine tanımlı olan ve tüm a ve b pozitif tamsayıları için, yoz olmayan ve kenar uzunlukları

$$a, f(b) \text{ ve } f\left(b + f(a) - 1\right)$$

olan bir üçgenin bulunmasını sağlayan bütün f fonksiyonlarını belirleyiniz.

(*Yoz* üçgen, köşeleri doğrudaş olan üçgendir.)

6 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirinden farklı pozitif tamsayılar; M de, $n-1$ tane pozitif tam sayıdan oluşan ve $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sayısını içermeyen bir küme olsun. Bir çekirge, gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak sağa doğru, uzunlukları kendi seçtiği bir sırada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n sıçrayış yapacaktır. Çekirgenin sıçrayışlarının uzunluklarının sırasını, hiçbir sıçrayışta M ye ait bir noktaya düşmeyecek biçimde seçebileceğini kanıtlayınız.

51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2010

1 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları belirleyiniz. (Burada $\lfloor z \rfloor$ ile, z yi aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

Çözüm:

Koyduğumuz (x, y) ikililerini $P(x, y)$ olarak gösterelim.

$P(0,0) : f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor \Rightarrow f(0) = 0$ yada $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

İkinci durumda $P(x, 0) : f(x) = f(0)$ bulunur. $1 \le c < 2$ olmak üzere $f(x) = c$ bir çözümdür. İlk duruma bakalım.

$P(1,1) : f(1) = f(1)\lfloor f(1) \rfloor \Rightarrow f(1) = 0$ yada $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

İlk duruma bakalım.

$P(1, x) : f(x) = 0$. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$ bir çözümdür. İkinci durumda

$P(x, 1) : f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$ olur.

$P(3, \frac{1}{3}) : f(1) = 0$ olur. Deminki durum tekrar eder. Sonuç olarak cevap $1 \le c < 2$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ yada her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$'dır.

2 Bir ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ve çevrel çemberi Γ dır. AI doğrusu Γ yı ikinci kez D de kesiyor.

$$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{CAE}) < \frac{1}{2} m(\widehat{BAC})$$

koşullarını sağlayacak biçimde, BDC yayı üstünde E ve $[BC]$ kenarı üstünde F noktası alınıyor. $[IF]$ doğru parçasının orta noktası G olsun. DG ve EI doğrularının Γ ya ait bir noktada kesiştiğini kanıtlayınız.

Çözüm:

$EI \cap \Gamma = T, AF \cap \Gamma = K$ olsun. DT'nin IF'yi ortaladığını gösterirsek ispat biter. $DT \cap AL = L$ olsun. $\angle LTI = \angle IAE = \angle IAL$ olduğundan $LIAT$ kirişler dörtgenidir. $\angle ETA = \angle ALI = \angle AKI$ olduğundan $LI||KE$'dir. Ayrıca $KE||BC$ olduğundan $LI||BC$ olur. $TL \cap BC = S$ olsun. "DT ,$[IF]$'nı ortalar $\iff SILF$ paralelkenardır" olduğu açıktır. Paralelkenarlığı ispatlamak soruyu bitirir. $\frac{|DI|}{|DA|} = \frac{|DS|}{|DL|}$ olduğunu ispatlamalıyız. $AD \cap BC = R$ olsun. $|DI| = |BD|$ olduğunu biliyoruz. (D'nin (BIC)'nin merkezi olması kuralından.) Deminki eşitlikte sağdaki ifade $CR||IL$'den $\frac{|DR|}{|DI|}$'ya eşittir. Yerine yazarsak ispatlanmasını istediğimiz ifade $\frac{|DR|}{|DI|} = \frac{|DI|}{|DA|}$ olur. $\angle CBD = \angle DAC = \angle DAB$ olduğundan $\triangle DRB \sim \triangle DBA$'dır. $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|DR|}{|BD|}$ olur. Demin söylediğimiz $|BD| = |DI|$ eşitliğinden ifade $\frac{|DR|}{|DI|} = \frac{|DI|}{|DA|}$'ye dönüşür. İspat biter.

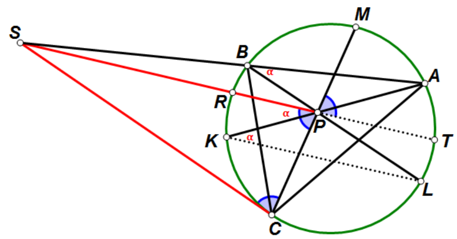
3 $\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

sayısının tam kare olmasını sağlayan tüm $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonskiyonlarını belirleyiniz.

4 P, ABC üçgeninin içinde yer alan bir nokta olsun. AP, BP ve CP doğruları, ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ yı ikinci kez sırasıyla, K, L ve M noktalarında kesiyor. Γ ya C noktasında teğet olan doğru da, AB doğrusunu S noktasında kesiyor. $|SC| = |SP|$ ise, $|MK| = |ML|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:



$\measuredangle XY$ ile XY yayının ölçüsünü gösteriyoruz.

S noktasının Γ çemberine göre kuvvetinden $SC^2 = SB \cdot SA$ yazılabilir. $SP = SC$ olduğundan, $SP^2 = SB \cdot SA$ olur. Buna göre $\triangle BSP \sim \triangle PSA$ olup $\angle SPK = \angle ABL$ dir.

Ayrıca $\angle AKL = \angle ABL$ olduğundan, $\angle SPK = \angle AKL$ ve buna göre $SP \parallel KL$ dir. SP doğrusunun çemberi kestiği noktalar $R \in [SP]$ olmak üzere R ve T olsun, . $RT \parallel KL$ olduğundan,

$$\measuredangle KR = \measuredangle LT \tag{1}$$

dir. $\measuredangle RC + \measuredangle MT = 2\angle SPC$ ve $\measuredangle RC + \measuredangle MR = 2\angle SCP$ olduğundan,

$$\measuredangle MR = \measuredangle MT \tag{2}$$

dir. (1) ve (2)'den $\measuredangle MK = \measuredangle ML$ olup $MK = ML$ dir.

5 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ile gösterilen altı kutunun her birinde başlangıçta birer madenî para bulunuyor. İki tip işleme izin veriliyor:

Tip 1: $1 \le j \le 5$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_j kutusu seçiyoruz. B_j den bir madenî para çıkarıyoruz ve B_{j+1} e iki madenî para koyuyoruz.

Tip 2: $1 \le k \le 4$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_{k+1} ile B_{k+2} kutularının içeriklerini birbiriyle değiştiriyoruz.

Sonucunda, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 kutularının boş olmasını ve B_6 kutusunda da tam olarak $2010^{2010^{20}}$ madenî para olmasını sağlayan sonlu bir işlemler dizisi bulunup bulunmadığını belirleyiniz. (Burada $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ dir.)

6 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir pozitif gerçel sayılar dizisi olsun. Her $n > s$ için,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

olmasını sağlayan bir s pozitif tam sayısı bulunduğunu varsayalım. $\ell \le s$ ve her $n \ge N$ için $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ olacak biçimde bir ℓ ve N pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2011

1 Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi için, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ toplamını s_A ile gösteriyoruz. $1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere, $a_i + a_j$ nin s_A yı böldüğü (i, j) ikililerinin sayısını da n_A ile gösterelim. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan ve n_A nın alabileceği en büyük değeri almasını sağlayan tüm A kümelerini bulunuz.

2 $\mathcal{S}$ düzlemde en az iki noktadan oluşan sonlu bir küme olsun. $\mathcal{S}$ nin herhangi üç noktasının doğrudaş olmadığını varsayalım. Bir *yeldeğirmeni*, $\mathcal{S}$ ye ait tek bir P noktasından geçen bir ℓ doğrusu ile başlayan bir süreçtir. Bu doğru, *dönme merkezi* P olmak üzere, $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönüyor. Bu ikinci noktaya Q dersek, bundan sonra doğru, yeni dönme merkezi Q olmak üzere, tekrar $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönmeyi sürdürüyor. Bu süreç sonsuza kadar devam ediyor.

Oluşan yeldeğirmeninin $\mathcal{S}$ nin her noktasını sonsuz kez dönme merkezi olarak kullanmasını sağlayacak biçimde, $\mathcal{S}$ ye ait bir P noktası ve P den geçen bir ℓ doğrusu seçebileceğimizi gösteriniz.

3 Gerçel sayılar kümesinden kendisine tanımlı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

koşulunu sağlıyor. Her $x \leq 0$ için, $f(x) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$P(x, y)$ ifadesi f de yerine koyduğumuz değerleri temsil etsin.

Lemma 1: $f(f(x)) \geq f(x)$

İspat: $P(x, 0) \implies$

$$\boxed{f(f(x)) \geq f(x)}$$

Lemma 2: $f(x) \geq x \iff f(x) \geq 0$

İspat: $P(x, f(x) - x) \implies$

$$\boxed{(f(x) - x)f(x) \geq 0}$$

Lemma 3: $f(f(x)) \geq 0$

İspat: Lemma 1 ve 2 den açık bir şekilde elde edilir.

Lemma 4: $f(0) \geq 0$

İspat: $P(0, f(f(0))) \implies$

$$f(f(0))f(0) + f(f(0)) \geq f(f(f(0))) \geq f(f(0))$$
$$\implies f(f(0))f(0) \geq 0$$
$$\implies \boxed{f(0) \geq 0}$$

Lemma 5: $f(0) = 0$

İspat: $P(0, f(y)) \implies$

$$f(y)f(0) + f(f(0)) \geq f(f(y)) \geq 0$$

$f(0) \geq 0$ olduğunu kullanarak $P(0, y)$ yazarsak

$$(yf(0) + f(f(0)))f(0) + f(f(0)) \geq f(y)f(0) + f(f(0)) \geq 0$$

Ancak bu $y \to -\infty$ olduğunda açıkça yanlıştır. O halde eşitlik olmalıdır.

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Lemma 6: $f(x) \leq 0$

İspat: $P(0,x) \implies$

$$\boxed{f(x) \leq 0}$$

Lemma 7: $f(f(x)) = 0$

İspat: 3 ve 6. lemmadan açıktır.

[size=10pt]Ana İspat:[/size] Lemma 7 den $P(x,y)$ koyulursa

$$f(x+y) \leq yf(x)$$

elde edilir. $(x,-x)$ koyarsak

$$0 \leq -xf(x)$$

olur. $x \leq 0 \implies f(x) \geq 0$ olur. Ancak lemma 6 dan $f(x) \leq 0$ olur. Sonuç olarak;

$$x \leq 0 \implies f(x) = 0$$

elde edilir.

4 $n > 0$ bir tam sayı olsun. İki kefeli bir terazimiz ve ağırlıkları $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ olan n tane ağırlığımız var. Bu ağırlıkları n hamlede birer birer ve hiçbir aşamada sağ kefe sol kefeden daha ağır olmayacak biçimde teraziye yerleştirmemiz gerekiyor. Tüm ağırlıklar teraziye konulana kadar her hamlede, teraziye henüz konulmamış ağırlıklarda birini seçerek bunu sol veya sağ kefeye yerleştiriyoruz. Bu hamleler dizisini kaç farklı biçimde yapabileceğimizi belirleyiniz.

5 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini ve $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesini göstermek üzere; $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olsun. Tüm m, n tam sayıları için, $f(m) - f(n)$ farkının $f(m-n)$ ile bölündüğünü varsayalım. $f(m) \leq f(n)$ koşulunu sağlayan tüm m, n tam sayıları için, $f(n)$ sayısının $f(m)$ ile bölündüğünü kanıtlayınız.

6 ABC, çevrel çemberi Γ olan dar açılı bir üçgen olsun. ℓ, Γ ya teğet olan bir doğru ve ℓ nin BC, CA ve AB doğrularına göre yansıtılmasıyla elde edilen doğrular da sırasıyla, ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c olsun. ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c doğrularının belirlediği üçgenin çevrel çemberinin Γ çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2012

1 Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çemberin merkezi J noktası olsun. Bu dışteğet çember BC kenarına M, AB ve AC doğrularına ise sırasıyla K ve L noktalarında teğettir. LM ve BJ doğruları F noktasında, KM ve CJ doğruları ise G noktasında kesişiyor. AF ve BC doğrularının kesişim noktası S, AG ve BC doğrularının kesişim noktası ise T olsun. M'nin $[ST]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.

(ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki *dışteğet çember*; BC kenarına, B'nin ötesinde $[AB$ ışınına ve C'nin ötesinde $[AC$ ışınına teğet olan çemberdir.)

Çözüm:

Açık şekilde $BJ \perp KM$ ve $CJ \perp ML$.

JFG üçgeninde GM ve FM doğruları yükseklik olduğu için JM doğrusu da yüksekliktir. Dolayısıyla $JM \perp FG$, yani $BC \parallel FG$ dir.

$\angle AJC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \angle BKM = \angle AKG = \angle AJG$ olduğu için A, K, J, G çemberseldir.

Bu durumda $\angle JAG = \angle GKB = \angle JBM = \angle JFG$ olacağı için J, F, A, G noktaları da çemberseldir.

$\angle FGA = \angle FJA = \dfrac{\angle BCA}{2} = \dfrac{180° - 2 \cdot \angle BCJ}{2} = 90° - \angle FGJ \Rightarrow JG \perp AG$.

$\triangle ACT$ de CG hem açıortay hem de yükseklik olduğu için $AC = CT$, benzer şekilde $AB = BS$ dir. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ve u yarıçevre ise $BM = u - c$, $CM = u - b$ ve $SM = TM = u$ olacaktır.

2 $n \geq 3$ bir tam sayı ve $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ olsun.

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$(a_k + 1) = \left(a_k + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1} \right) \geq k \sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}}$$

$$\Rightarrow (a_k + 1)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k$$

olduğunu $A.G.O$ dan biliyoruz. Bunu $k = 2, 3, \ldots, n$ için uygularsak;

$$\prod_{k=2}^{n} (a_k + 1)^k \geq n^n a_2 a_3 \cdots a_n = n^n$$

elde edilir. İspat biter. Eşitlik olması için $a_k = \frac{1}{k-1}$ olması gerekir ancak bunun için $a_2.a_3 \ldots a_n < 1$ olur çelişki. Eşitlik durumu yoktur.

3 *Yalancının sayısını tahmin etme oyunu*, A ve B oyuncuları arasında oynanan bir oyundur. Oyun, her iki oyuncuya da önceden bildirilen k ve n pozitif tam sayılarına göre oynanıyor.

Oyunun başında A oyuncusu $1 \leq x \leq N$ olacak şekilde x ve N tam sayılarını seçer ve N sayısının ne olduğunu B oyuncusuna dürüstçe söyler, fakat x sayısını gizli tutar. Daha sonra B oyuncusu A oyuncusuna sorular sorarak x sayısı hakkında bilgi edinmeye çalışır. Her defasında B oyuncusu pozitif tam sayılardan oluşan bir S kümesi belirler (bu küme daha önceki bir soruda geçen küme de olabilir) ve A oyuncusuna "x

sayısı S kümesinin elemanı mıdır?" diye sorar. B oyuncusu istediği kadar soru sorabilir. A oyuncusu istediği kadar yalan söyleyebilir, fakat herhangi ardışık $k+1$ cevabından en az biri doğru olmak zorundadır.

B oyuncusu istediği kadar soru sorduktan sonra en fazla n pozitif tam sayıdan oluşan bir X kümesi belirlemelidir. Eğer x sayısı X kümesinin elemanı ise B oyunu kazanır, aksi durumda kaybeder.

(a) $n \geq 2^k$ ise, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantileyebileceğini kanıtlayınız.

(b) Yeterince, büyük her k tam sayısı için, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantilemesinin mümkün olmadığı bir $n \geq 1,99^k$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

4 $a+b+c=0$ olmak üzere, tüm a, b, c tam sayıları için

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Burada $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesidir.)

5 Bir ABC üçgeninde $\angle BCA = 90°$ ve C köşesinden indirilen yüksekliğin ayağı D olsun. $[CD]$ doğru parçası üzerinde C ve D noktalarından farklı bir X noktası alınıyor. $[AX]$ doğru parçası üzerinde $|BK| = |BC|$ olacak şekilde bir K noktası ve benzer şekilde $[BX]$ doğru parçası üzerinde $|AL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası seçiliyor. AL ve BK doğrularının kesişim noktası M olsun. $|MK| = |ML|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

AB çaplı çember AX ile BX doğrularını sırasıyla E ve F noktalarında kessin. $BF \perp AF$ ve $AE \perp BE$ olduğu için $AF \cap BE = \{P\}$ ise $\triangle PAB$ de X diklik merkezi, dolayısıyla P, C, X, D noktaları doğrusaldır.

$BD \cdot AB = BC^2 = BK^2$ olduğu için $\angle KAB = \angle BKD$ dir. Ayrıca $\angle KAB = \angle DPB$ olduğu için P, B, D, K noktaları çemberseldir. Yani $\angle PKB = \angle PDB = 90°$ dir. Diğer bir ifadeyle PK, (B, BK) çemberine teğettir.

Benzer şekilde $\angle PLA = 90°$ ve PL, (A, AL) çemberine teğettir.

C nin AB ye göre simetriği C' olsun. B merkezli $BC' = BK = BC$ yarıçaplı çember ile A merkezli $AC = AL = AC'$ yarıçaplı çemberin kuvvet ekseni CC' dür. Yani P kuvvet ekseni üzerinde bir noktadır. O halde, $PK = PL$ dir. Bu durumda $PKML$ dörteninde karşılıklı açılar $90°$ olduğu için $MK = ML$ dir.

6 Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan tam sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2013

1 Her k ve n pozitif tam sayı ikilisi için,

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

eşitliğini sağlayan $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (farklı olmaları gerekmeyen) pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2 Düzlem üzerindeki 4027 noktanın herhangi üçü doğrusal olmayıp, 2013 tanesi kırmızı ve 2014 tanesi mavi ise, bu 4027 noktaya bir *Kolombiya* konfigürasyonu diyelim. Düzlemde çizilen birkaç doğru düzlemi bölgelere ayırır. Bir doğrular kümesi, bir Kolombiya konfigürasyonu için aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, bu küme bu konfigürasyon için *iyi* kabul ediliyor.

- doğrulardan her biri, konfigürasyonun hiçbir noktasından geçmemektedir;
- her iki rengi birden içeren bölge bulunmamaktadır.

4027 noktalı herhangi bir Kolombiya konfigürasyonu verildiğinde, bu konfigürasyon için iyi olan ve k doğrudan oluşan bir küme bulunuyorsa, k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

3 Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çember BC kenarına A_1 noktasında teğet olsun. Benzer şekilde, B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberleri kullanarak CA kenarı üzerinde B_1 ve AB kenarı üzerinde C_1 noktalarını tanımlayalım. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel merkezi ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde ise, ABC üçgeninin bir dik üçgen olduğunu gösteriniz.

ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki dışteğet çember; BC kenarına, B'nin ötesinde AB ışınına ve C'nin ötesinde AC ışınına teğet olan çemberdir. B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberler de benzer biçimde tanımlanıyor.

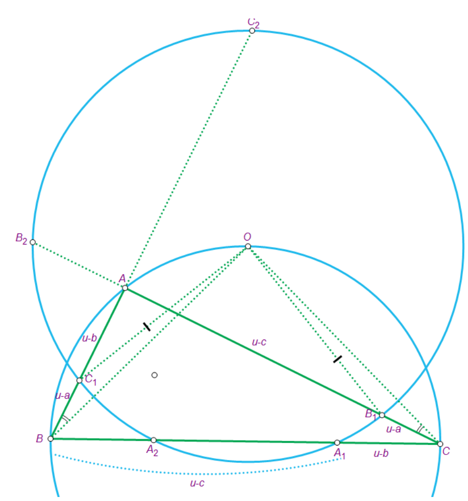
Çözüm:

$(A_1B_1C_1)$ in merkezine O diyelim. O, AC küçük yayı üzerinde olsun.

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ve u yarıçevre olsun.

$BC_1 = CB_1 = u - a$, $CA_1 = AC_1 = u - b$, $AB_1 = BA_1 = u - c$ dir.

$(A_1B_1C_1)$ BC yi ikinci kez A_2 noktasında kessin.



$\angle ABO = \angle OCA$, $OC_1 = OB_1$ ve $BC_1 = CB_1$ olduğu için $\sin\angle C_1OB = \sin\angle B_1OC$ dir. $\angle C_1OB + \angle B_1OC = 180^\circ$ olamayacağı için $\angle C_1OB = \angle B_1OC$ ve $\triangle OBC_1 \cong \triangle OCB_1$ dir. Bu durumda $OB = OC$ ve dolayısıyla B ve C noktalarının $(A_1B_1C_1)$ çemberine göre kuvvetleri eşit olacağı için $BA_2 = A_1C = u - b$ dir.

BC_1 ile CB_1 doğruları $(A_1B_1C_1)$ i ikinci kez sırasıyla C_2 ve B_2 noktalarında kessin. B ve C noktalarının bu çembere göre kuvvetleri eşit olacağı ve $BC_1 = CB_1$ olduğu için $C_1C_2 = B_1B_2$, dolayısıyla da $AC_2 = AB_1 = u - c$ olacaktır.

Son durumda, B noktasının $A_1B_1C_1$ çemberine göre kuvvetini yazarsak,

$$BA_2 \cdot BA_1 = BC_1 \cdot BC_2 \Rightarrow (u-b)(u-c) = (u-a)(u)$$

elde ederiz.

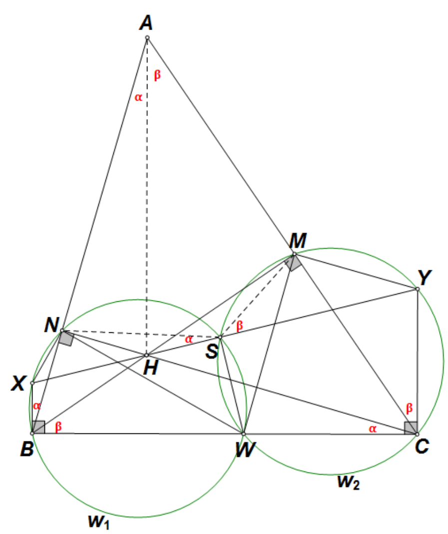
İki tarafı da $u(u-a)$ ile çarpıp iki tarafında da kökünü alırsak

$$\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = u(u-a) = ur \Rightarrow u - a = r \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$$

olacaktır.

4 Diklik merkezi H olan bir dar açılı ABC üçgeninde W, BC kenarı üzerinde B ve C den farklı bir nokta olsun. M ve N noktaları, sırasıyla B ve C ye ait yükseklik ayağı olsun. BWN nin çevrel çemberi w_1 olmak üzere; w_1 üzerinde bir X noktası, $[WX]$ doğru parçası w_1 in bir çapı olacak şekilde seçiliyor. Benzer biçimde CWM nin çevrel çemeri w_2 olmak üzere; w_2 üzerinde bir Y noktası, $[WY]$ doğru parçası w_2 nin bir çapı olacak şekilde seçiliyor. X, Y ve H noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



Verilen bilgiler ile $\angle BNC = \angle CMB = \angle XBC = \angle YCB = 90^\circ$ görülebilir. w_1 ile w_2 çemberlerinin ikinci defa kesiştikleri noktaya S diyelim. $\angle XSW = \angle YSW = 90^\circ$ olduğundan $X - S - Y$ doğrusal noktalardır.

$\angle HAB = \angle NCB = \angle NBX = \angle NSX = \alpha$ olduğundan $X - H - S$ noktaları ve $\angle HAC = \angle MBC = \angle MCY = \angle MSY = \beta$ olduğundan da $Y - S - H$ noktaları doğrusaldır.

Buna göre; $X - H - S - Y$ noktaları aynı doğru üzerindedir.

5 Pozitif rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}_{>0}$ ile gösterelim. Bir $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlamaktadır:

(i) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) $f(a) = a$ olacak şekilde bir $a > 1$ rasyonel sayısı vardır.

Her $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ için $f(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

$\boxed{6}$ $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, bir çember üzerinde çemberi eşit yaylara bölen $n+1$ nokta işaretlenmiştir. $0, 1, \ldots, n$ sayılarının her biri tam olarak bir kez kullanılarak işaretli noktalara yazılmasına numaralandırma diyelim. Biri diğerinden çemberin döndürülmesi ile elde edilen iki numaralandırma aynı sayılmaktadır. Bir numaralandırmada, $a + d = b + c$ koşulunu sağlayan her $a < b < c < d$ için uçlarında a ve d yazan kiriş ile uçlarında b ve c yazan kiriş kesişmiyorsa, bu numaralandırmaya *güzel* diyelim.

Güzel numaralandırmaların sayısı M, $x + y \leq n$ ve $obeb(x, y) = 1$ koşullarını sağlayan (x, y) pozitif tam sayı sıralı ikililerinin sayısı N olsun.

$$M = N + 1$$

olduğunu gösteriniz.

55. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2014

1 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ sonsuz pozitif tam sayılar dizisi olsun. Tam olarak bir tane $n \geq 1$ tam sayısı için

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2 $n \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere, n^2 birim kareden oluşan $n \times n$ satranç tahtası verilmiştir. n kalenin; her satırda ve her sütunda tam olarak bir kale olmak üzere, bu satranç tahtasına yerleşimine *barışçıl* konfigürasyon diyelim. k nın en büyük hangi pozitif tam sayı değeri için; n kalenin her barışçıl konfigürasyonunda, üzerinde kale olmayan bir $k \times k$ karesi bulunur (yani bu $k \times k$ karesinin toplam sayısı k^2 olan birim karelerin hiçbirinde kale yoktur)?

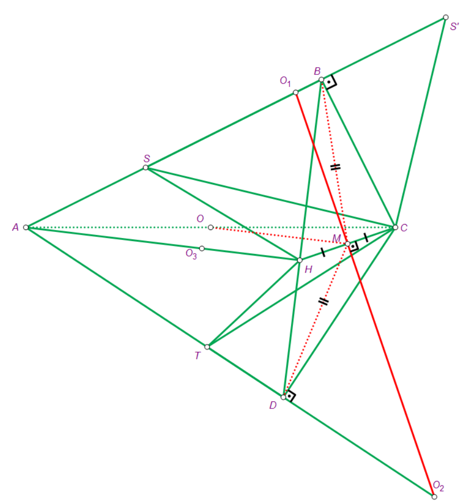
3 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninde $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ dir. A dan BD ye çizilen dikmenin ayağı H olsun. S ve T noktaları sırasıyla $[AB]$ ve $[AD]$ kenarları üzerinde olmak üzere, H noktası SCT üçgeninin içinde ve

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°$$

ise, BD doğrusunun TSH üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(CHS) çemberi AB yi S' noktasında kessin. $\angle SS'C = 180° - \angle CHS = 180° - (90° + \angle CSB) = 90° - \angle CSB$ olduğu için SS' doğru parçası (CHS) nin çapıdır. (CHS) nin merkezi O_1 olsun.



Benzer şekilde (CHT) nin çevrel çemberinin merkezi $O_2 \in AD$ olsun.
CH bu iki çemberin ortak kirişi olduğu için

$$O_1O_2 \perp CH \tag{1}$$

dır. $O_1O_2 \cap CH = \{M\}$ olsun.

$$CM = MH \tag{2}$$

$ABCD$ kirişler dörtgeninde AC çapının orta noktası O olsun. $CO/OA = CM/MH = 1$ olduğu için $OM \parallel AH$, yani $OM \perp BD$ dir. O merkez olduğu için OM BD nin orta dikmesidir. Bu durumda

$$BM = MD \tag{3}$$

$\angle O_1BC = \angle O_1MC = 90°$ olduğu için O_1, B, C, M noktaları çemberseldir.

$$\angle BCM = \angle AO_1M \tag{4}$$

Benzer şekilde $\angle O_2MC = \angle CDO_2 = 90^\circ$ olduğu için M, C, O_2, D noktaları çemberseldir.

$$\angle DCM = \angle AO_2M \tag{5}$$

Sinüs teoreminden (BMC) nin çapı

$$CO_1 = \frac{BM}{\sin\angle BCM} \tag{6}$$

ve (DMC) nin çapı

$$CO_2 = \frac{MD}{\sin\angle DCM} \tag{7}$$

(3) nolu eşitlikteki bilgiyi kullanarak (6) ile (7) yi oranlarsak

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{\sin\angle DCM}{\sin\angle BCM} = \frac{\sin\angle AO_2M}{\sin\angle AO_1M} = \frac{AO_1}{AO_2} \tag{8}$$

Bu durumda, $\angle AO_1H$ nin açıortayı ile $\angle AO_2H$ nin açıortayı AH üzerinde aynı O_3 noktasında kesişir. $\triangle SO_1H$ ile $\triangle TO_2H$ ikizkenar üçgenler olduğu için

$$TO_3 = O_3H = SO_3 \tag{9}$$

Yani O_3, (SHT) nin merkezidir. $O_3H \perp BD$ olduğu için de BD doğrusu (SHT) çemberine teğettir.

$\boxed{4}$ Dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerindeki P ve Q noktaları için $\angle PAB = \angle BCA$ ve $\angle CAQ = \angle ABC$ dir. M ve N noktaları sırasıyla AP ve AQ doğruları üstünde olmak üzere, P noktası $[AM]$ nin ve Q noktası $[AN]$ nin orta noktasıdır. BM ve CN doğrularının ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde kesiştiklerini gösteriniz.

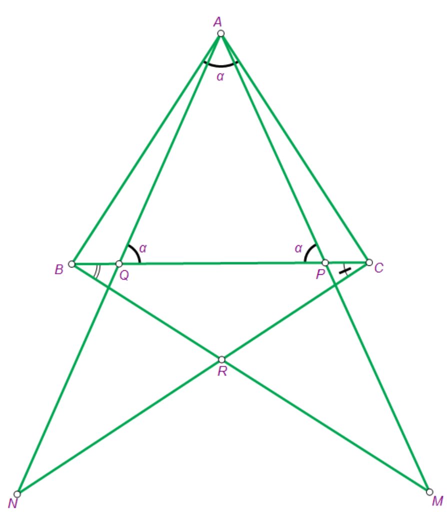
Çözüm:

$\triangle ABC \sim \triangle PBA \sim \triangle QAC$.

Önce açı eşitliğinden $\angle BAC = \angle BPA = \angle AQC$, dolayısıyla $AP = AQ = PM = QN$ dur.

Sonra kenar oranlarından, $\dfrac{AP}{CQ} = \dfrac{BP}{AQ} \Rightarrow \dfrac{PM}{CQ} = \dfrac{BP}{QN}$.

Ayrıca $\angle BPM = \angle NQC$ olduğu için $\triangle BPM \sim \triangle NQC$, dolayısıyla $\angle PBM = \angle QNC$ dir. BM ile CN nin kesişimine R dersek basit açı eşitliklerinden $\angle BQN = \angle BRN = \angle BAC$ olur ki bu da A, B, R, C noktalarının çembersel olduğu anlamına gelir.



5 Cape Town bankası her n pozitif tam sayısı için değeri $\frac{1}{n}$ olan madeni paralar basmaktadır. Sonlu sayıda madeni paradan oluşan ve toplam değeri en fazla $99 + \frac{1}{2}$ olan her madeni para koleksiyonunu (koleksiyonda değerleri aynı olan madeni paralar da bulunabilir) her birinin toplam değeri en fazla 1 olan 100 veya daha az sayıda gruba ayırabileceğimizi kanıtlayınız.

6 Düzlemde herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü noktadaş olmayan doğrulara *genel durum* özelliği olan doğrular diyelim. Genel durum özelliği olan doğrular, düzlemi bazılarının alanları sonlu olan bölgelere ayırıyor; alanı sonlu olan her bölgeye *sonlu bölge* diyelim. n nin yeterince büyük tüm değerleri için, genel durum özelliği olan herhangi n doğrunun en az $\sqrt{n}$ tanesinin mavi renge; hiçbir sonlu bölgenin tüm sınırları mavi olmayacak biçimde boyanabileceğini gösteriniz.

Not: Soruyu $\sqrt{n}$ yerine $c\sqrt{n}$ için çözenlere c sabitinin değerine göre puan verilecektir.

56. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2015

1 Düzlemin sonlu sayıda noktasından oluşan bir $\mathcal{S}$ kümesindeki herhangi iki farklı A ve B noktaları alındığında; $|AC| = |BC|$ olacak şekilde, $\mathcal{S}$ nin elemanı olan bir C noktası bulunabiliyorsa, $\mathcal{S}$ kümesine *dengeli* diyelim. $\mathcal{S}$ deki herhangi üç birbirinden farklı A, B ve C noktaları alındığında; $|PA| = |PB| = |PC|$ olacak şekilde, $\mathcal{S}$ nin elemanı olan bir P noktası bulunamıyorsa, $\mathcal{S}$ kümesine *merkezciksiz* diyelim.

(a) Her $n \geq 3$ tam sayısı için, n noktadan oluşan dengeli bir küme bulunduğunu gösteriniz.

(b) Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, n noktadan oluşan dengeli ve merkezciksiz bir küme bulunabilir?

2 a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

sayılarının her birinin 2 nin tam kuvveti olmasını sağlayan tüm (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

(n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, 2^n şeklindeki sayılara 2 nin tam kuvveti deniyor.)

Çözüm:

Eğer bunlardan bir sayı 1 eşit olursa, genelliği bozmadan bu c olsun, o halde $a - b$ ve $b - a$ nın pozitif olması gerekir çelişki! O yüzden genelliği bozmadan $a \geq b \geq c > 1 \Longrightarrow ab - c \geq ca - b \geq bc - a$ kabul edebiliriz. Burada 3 durum mevcuttur:

Durum 1: Eğer a bir çift sayı ise; $2a - b \leq ca - b = \text{obeb}(ab - c, ca - b) \leq \text{obeb}(ab - c, a(ca - b) + ab - c) \leq c$ olduğundan dolayı $a = b = c$ olması gerekir. $a(a-1) = 2^n$ olur. $(a, a-1) = 1$ olduğundan a ve $a - 1$ ikinin kuvveti olmalı. Ancak biri tek olmalı. O yüzden bu durumdan $a = b = c = 2$ elde edilir.

Durum 2: Eğer a, b, c sayıları tekse; $a > b > c > 1$ diyebiliriz. $ca - b = \text{obeb}(ab - c, ca - b) \leq \text{obeb}(ab - c, c(a^2 - 1)) \leq 2^{v_2(a^2-1)} \leq 2a + 2 \leq 3a - b$ olur. O yüzden $c = 3$ ve $a = b + 2$ olması gerekir. Buradan $3a - b = ca - b \geq 2(bc - a) = 6b - 2a$ ve $a = 7, b = 5$ elde edilir.

Durum 3: a tek, b ve c sayıları çift olsun. O halde $bc - a = 1 \Longrightarrow bc^2 - b - c = ca - b$ olur. $c^3 - b - c = (1 - c^2)(ab - c) + a(bc^2 - b - c) + (ca - b)$ olduğundan $bc^2 - b - c = ca - b = \text{obeb}(ab - c, ca - b) \leq \text{obeb}(ab - c, c^3 - b - c)$ elde edilir. Buradan;

1. İhtimal: $c^3 - b - c \neq 0$ olsun. $b^2c - b - c \leq \text{obeb}(ab - c, c^3 - b - c) \Longrightarrow |c^3 - b - c| \geq bc^2 - b - c$ o yüzden $b = c \Longrightarrow a = c^2 - 1 \Longrightarrow ab - c = c(c^2 - 2) \Longrightarrow c^2 - 2 = 2 \Longrightarrow a = 3, b = c = 2$ olur.

2. İhtimal: $c^3 - b - c = 0 \Longrightarrow b = c^3 - c$ olsun. $bc - a = 1 \Longrightarrow a = c^4 - c^2 - 1$ olduğundan $ca - b = c^5 - 2c^3 = c^3(c^2 - 2) \Longrightarrow c^2 - 2 = 2 \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow a = 11, b = 6$ olur.

Tüm çözümler $(a, b, c) = (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 6, 11), (3, 5, 7)$ ve permütasyonları olur.

3 $|AB| > |AC|$ koşulunu sağlayan bir ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberi Γ, diklik merkezi H, A dan geçen yüksekliğin ayağı ise F olsun. $[BC]$ nin orta noktasına Mdiyelim. Γ çemberi üzerinde $\angle HQA = 90°$ olacak şekilde bir Q ve yine Γ çemberi üzerinde $\angle HKQ = 90°$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. A, B, C, K ve Q noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve Γ üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor.

KQH ve FKM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirlerine teğet olduklarını gösteriniz.

Çözüm:

AE doğru parçası Γ nın çapı olsun. $AF \cap \Gamma = D$ ve Γ nın merkezi O olsun.

1. Adım: Q, H, M, E noktaları doğrusaldır.

Kanıt: $BECH$ bir paralelkenardır dolayısıyla E, M, H doğrusaldır. AE çap ve $\angle AQE = 90$ olduğundan Q, H, M, E doğrusaldır.

2. Adım: (DHK) çemberi QE ye teğettir.

Kanıt: QP doğru parçası Γ nın çapı olacak şekilde P noktası alalım. P, H, K doğrusaldır. O halde $\angle HKD = \angle PQD = \angle OQD = 90 - \angle QBD$ olduğunu biliyoruz. $\angle QMC = \angle DMC$ olduğundan $QBDC$ harmoniktir.

O halde $\angle QBD = \angle QMC$ diyebiliriz. $\angle HKD = 90 - \angle QMC = \angle MHD$ olduğundan 2. Adımın ispatı da tamamlanır.

(KHD) nin merkezi olarak X noktası alalım. $X \in [BC]$ idir çünkü BC doğrusu HD nin kenarorta dikmesidir ve $XH \perp QE$ idir. Buradan $XK^2 = XH^2 = XF \cdot XM$ olur bu da XK nın (MFK) ye teğet olduğunu gösterir. $XK = XH$ olduğundan ve XH da (QHK) ye teğet olduğundan. XK (QHK) ye teğet olur. Buradan da ispat biter.

$\boxed{4}$ Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi O merkezli Ω çemberidir. A merkezli bir Γ çemberi $[BC]$ kenarını D ve E noktalarında kesiyor. B, D, E ve C noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve BC doğrusu üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. Γ ve Ω çemberlerinin kesişim noktaları F ve G olmak üzere A, F, B, C ve G noktalarının Ω üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. BDF üçgeninin çevrel çemberi $[AB]$ kenarını ikinci kez K noktasında kesiyor. CGE üçgeninin çevrel çemberi ise $[CA]$ kenarını ikinci kez L noktasında kesiyor.

FK ve GL doğrularının farklı olduklarını ve bir X noktasında kesiştiklerini varsayalım. Bu X noktasının AO doğrusu üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

$\boxed{5}$ Gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim. Tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

koşulunu sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

$\boxed{6}$ Tam sayılarından oluşan $a_1, a_2, \dots$ dizisi

(i) her $j \geq 1$ için $1 \leq a_j \leq 2015$;

(ii) her $1 \leq k < l$ için $k + a_k \neq \ell + a_\ell$

koşullarını sağlıyor. $n > m \geq N$ koşulunu sağlayan tüm m ve n tam sayıları için

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

olmasını sağlayan b ve N pozitif tam sayılarının bulunabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Bu pozitif tamsayılardan oluşan diziyi noktalar dizisi gibi kabul edip, her n için n den başlayan ve $n+a_n$ de biten bir yol çizeceğiz ve buna yolun uzunluğu diyeceğiz ayrıca uzunluğun değeri a_n olacak. Buna uygun olarak, bir $m \neq n$ için $m + a_m \neq n + a_n$ olacak ayrıca tam olarak bir pozitif tamsayıyı diğer bir pozitif tamsayıya götüren bir yol bulunacak. Örnek olarak hiçbir yol ulaşmayan -1 gibi- bir pozitif tamsayıya da Başlangıç noktası adını vereceğiz. Eğer herhangi bir Başlangıç noktasından başlayıp yolları takip edersek, bu dizi sürekli ve artan olduğundan, tam olarak bir yol bizi sonsuz yola iletecek, biz buna ışın diyeceğiz. uzunluğu en fazla 2015 olan bir ışın bir s noktasıyla başlayacak $[n, n+2014]$ kapalı aralığındaki tüm yollara uğrayacak ve $n \geq s$ olacak.

Çelişki elde etmek için, en az 2016 başlangıç noktasından oluşan bir dizi düşünelim. 2016 başlangıç noktasından büyük bir n noktası alabilirdik fakat şuan $[n, n+2014]$ kapalı aralığında en azından 2016 ışına uğrayacak biçimde artan tabiri caizse "saçma" noktalar seçeceğiz. Böylece herhangi bir b sayısı için, $1 \leq b \leq 2015$ olacak şekilde başlangıç noktaları seçebileceğiz. N herhangi bir tamsayıyı gösterir öyleki bu tamsayı tüm başlangıç noktalarından büyük olacak. Şimdi böyle b ve N tamsayılarının bulunabileceğini kanıtlayacağız.

Bunu görmek için ilk önce, 2 rastgele tamsayı alalım öyleki bunlar $n > m \geq N$ koşulunu sağlayan m ve n olsun. $\sum_{i=m+n}^{n} a_i$ toplamı $m+1$ den n ye kadar olan yolun toplam uzunluğunu verecek. Bu uzunluklar birlikte alındığında ışınlara giden b alt yollarını -ki bazıları boş bir yere ulaşmayan yollar da olabilir- oluşturur. Şimdi de ilk noktası m den büyük olan ışınların noktalarını $x_1, \dots, x_b$ şeklinde isimlendirelim. $y_1, \dots, y_b$ de bu sıralanışa benzer olarak n deki ışınları temsil etsin. Bu sıralamaların farkları $y_1 - x_1, \dots,\ y_b - x_b$ benzer olarak bir yolun uzunluklarını oluşturur. Ardışık olarak

$$\sum_{i=m+n}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{b} y_j - x_j \Rightarrow \sum_{i=m+n}^{n} a_i - b = \sum_{j=1}^{b} (y_j - n) - \sum_{j=1}^{b} (x_j - m).$$

Şimdi de tüm b ışınları $[m+1, m+2015]$ aralığındaki bazı noktalara uğrasın, böylece $x_1 - m, \ldots, x_b - m$ noktaları da b ışınları üzerinde $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ aralığında artan olsun. Dahası $m+1$ bir başlangıç noktası olmadığından fakat yine de bir ışın üstünde olması gerektiğinden, 1 bu sayıların başında olmalı.

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1}(j+1) \leq \sum_{j=1}^{b}(x_j - m) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1}(2016 - b + j).$$

Aynı argüman n üzerinde $y_1, \ldots, y_b$ üzerinde uygulandığında,

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1}(j+1) \leq \sum_{j=1}^{b}(y_j - m) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1}(2016 - b + j).$$

Taraf tarafa çıkarıldığında,

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \leq \sum_{j=1}^{b-1}((2016 - b + j) - (j+1)) = (b-1)(2015-b) \geq \left(\frac{(b-1) + (2015-b)}{2}\right)^2 = 1007^2$$

İspat biter. $\square$

57. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2016

1 Bir BCF üçgeninin B açısı diktir. CF doğrusu üzerinde bir A noktası $|FA| = |FB|$ olacak ve F noktası A ile C arasında kalacak şekilde seçiliyor. D noktası, $|DA| = |DC|$ olacak ve $\angle DAB$ nin açıortayı AC olacak şekilde seçiliyor. E noktası, $|EA| = |ED|$ olacak ve $\angle EAC$ nin açıortayı AD olacak şekilde seçiliyor. $[CF]$ nin orta noktası M olsun. X noktası, $AMXE$ bir paralelkenar ($AM \parallel EX$ ve $AE \parallel MX$) olacak şekilde seçiliyor. BD, FX, ve ME doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

2 n bir pozitif tamsayı olmak üzere nn lik bir satranç tahtasının her birim karesine I,M ve O harflerinden biri yazılıyor;

$\Longrightarrow$ Her satırda ve her sütunda harflerin üçte biri I üçte biri M ve üçte biri O dur.

$\Longrightarrow$ Üzerindeki birim kare sayısı 3 ün katı olan her köşegende harflerin üçte biri I üçte biri M ve üçte biri O dur.

Şartlarına uygun olarak yazılabiliyorsa n nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

3 $P = A_1A_2 \dots A_k$ kordinat düzleminde bir dışbükey çokgen olsun. A_1, A_2, $\dots$, A_k köşeleri tamsayı kordinatlıdır ve hepsi bir çember üzerindedir. P nin alanı S olsun. P nin kenar uzunluklarının her birinin karesini tam bölen bir n pozitif tamsayısı veriliyor. $2S$ nin n ile tam bölünen bir sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Gauss tamsayıları ile çalışacağız, Gauss Tamsayıları Kümesini $\mathbb{Z}[g]$ ile gösterelim. Önbilgi olması açısından bu tamsayılar ile çalışırken, $\alpha = a + bi, \in \mathbb{Z}[g]$ bir sayının normunu $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ şeklinde tanımlayacağız. Sorumuza geçelim.

Herhangi bir köşenin kordinatlarını $1 \leq i \leq k$ olmak üzere, A_i için z_i şeklinde tanımlayalım. Kanıtlamamız gereken bir tek asal sayı için ve herhangi bir e sayısı için, $n = p^e$ olduğu.

Şimdi $p = 4t + 3$ olsun, $p^e \mid |z_i - z_{i+1}|^2$ ayrıca $f = \lceil e/2 \rceil$ için, $p^f \mid z_i - z_{i+1}$ ifadeleri $\mathbb{Z}[g]$ içinde tamsayıdır. Böylelikle $A_1, \dots, A_k$ köşeleri $p^f\mathbb{Z}[g]$ ifadesinin bir altkümesi olacak ve $2S$ te $p^{2f} = p^e = n$ yi bölecektir.

Son olarak $p = 4t + 1$ olsun. Yukarda verdiğimiz gibi $\mathbb{Z}[g]$ içinde $p = q\bar{q}$ gibi 2 çarpan bulunur. Herhangi bir $z \in \mathbb{Z}[g]$ koşulunu sağlayan sayının mutlak değerinin karesinin yani $|z|^2$ nin p^n gibi bir sayıya (p burada asal ve n bir tamsayı) bölünebilmesi için gerek ve yeter şart $q^s\bar{q}^{n-s}$ ifadesinin z yi bölmesini sağlayan bir s sayısının bulunmasıdır. Daha düzgün bir ifade ile, Bir çokgenin üçgenlenebilmesi için, tüm üçgenlerin, bir $0 \leq s \leq e$ koşulunu sağlayan bir s sayısı için, $q^s\bar{q}^{n-s}$ ifadesinin tüm kenar vektörlerini bölmesi gerekir.

Kanıtlayalım.

kolaylık için ilk önce $e = 1$ kabul edelim. Bu durumda tüm kenar uzunlukları q veya $\bar{q}$ nun katı olacaktır. Eğer iki ardışık kenarın ikisi de q nun bir katı ise, bu iki kenarın üçgenlemesinden oluşacak üçgenlerin kenarları da q nun bir katı olacaktır. Elde ettiğimiz üçgenleri kesip bir kenarı q veya $\bar{q}$ nun bir katı olan daha küçük çokgenler elde edebiliriz. Yeterince küçültürsek, bir kenarı q olan üçgen bölge elde edebiliriz böylece ilk durumu kanıtlamış olduk. (aynı mantık ile ardışık iki kenarın $\bar{q}$ nun bir katı olduğunu varsayabiliriz.)

Şimdi de her ikisi de q veya $\bar{q}$ ile bölünen ardışık 2 kenar mevcut olmasın. Böyle kenarlar olmadığı ve q nun ve $\bar{q}$ nun katları eşit miktarda olacağı için, (çünkü $p = q\bar{q}$) kenar sayısı çift olmak zorundadır. $k = 2l$ olsun. Genelliği bozmadan $q|z_1 - z_2$ kabul edebiliriz çünkü tüm köşeler bir çember üzerinde.

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) \cdots (z_{2l-1} - z_{2l})}{(z_2 - z_3) \cdots (z_{2l} - z_1)}$$

ifadesi bir tamsayı olmak zorunda. Bu yüzden

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) \cdots (z_{2l-1} - z_{2l})(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) \cdots (\bar{z}_{2l} - \bar{z}_1) = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) \cdots (\bar{z}_{2l-1} - \bar{z}_{2l})(z_2 - z_3) \dots (z_{2l} - z_1).$$

olmalı. Denklemin sol tarafı q nun bir katı fakat sağ tarafı değil , çelişki!

Şimdi de son olarak $e \geq 2$ olsun. Tümevarımla ilerleyeceğiz. Şimdi ifade $e - 1$ için doğru olsun. Göstermemiz gereken tüm kenarlar için, $q^s\bar{q}^{e-1-s}$ ifadesinin bir katını içerecek üçgenlemelerin mevcut olması. Kanıtlamak için, s lerin iki üçgen için farklı olduğunu kabul edelim. Ayrıca bu üçgenlerin ortak kenarlarının olduğunu varsayabiliriz çünkü bir üçgenlemede bir diğerine ulaşan mutlaka bir yol vardır. Bir üçgen $q^{s_1}\bar{q}^{e-1-s_1}$ ifadesinin bir katı olsun, diğer üçgen de $q^{s_1}\bar{q}^{e-1-s_2}$ ifadesinin bir katı olsun. $s_1 < s_2$ kabul edelim. Ortak kenar mutlaka $q^{s_2}\bar{q}^{e-1-s_1}$ bir katı olması gerekir, ayrıca bu kenar uzunluğunun karesi de $q^{s_1}\bar{q}^{e-1-s_2}$ ifadesinin bir katı olacak ve p^e ile bölünecektir. Çokgenimizin köşegenlerinden biri de bu kenar uzunluğudur. Bu da bize çokgenimizi uygun koşullar altında 2 farklı küçük çokgen meydana getirip üçgenleyebileceğimizi gösterir.

Eğer iki üçgende aynı s değerine sahipse, tüm çokgen $q^s\bar{q}^{e-1-s}$ nın bir katı olacak yani çokgenimizi yine 2 parçaya bölebiliriz bu parçalarında $q^s\bar{q}^{e-s}$ ve $q^{s+1}\bar{q}^{e-1-s}$ ifadelerinin bir katı olduğunu görmek zor olmayacaktır.

Son olarak problemimize geri dönersek, çokgenimizi $q^s\bar{q}^{e-s}$ ifadelerinin katları ile üçgenlenmiş olarak ele alabiliriz. Buradaki bütün üçgenlerin alanı da $|q^s\bar{q}^{e-s}|^2/2 = p^e/2$ ifadesinin bir katı olacak yani $2S$ $n = p^e$ ile tam bölünür. ■

Koreden bir çözüm...

Çözüm 2:

$A_k = x_k, y_k$ olsun. Çokgenin herhangi bir kenarı için, $|A_pA_r|^2 = (x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2 \Rightarrow n|(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2$ eşitliği geçerli olacaktır. Yani bu çokgenin tüm kordinatlarını içinde bulunduran bir E kümesi için,

$$n|\sum_{i,j\in E}(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

olmalı. Peki ya $k \to \infty$ olursa ne olur ? Çokgenimiz giderek daireye benzemeye başlar. Yani aslında

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i,j\in E}(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = 2\pi R \Rightarrow n|2\pi R(*)$$

Burada R çokgenimizin dış teğet çemberinin yarıçapı.

Şekil düzgün bir şekle yakınsayacağı için alanını herhangi iki köşeden dış teğet çembere çizilen 2 uzunluk arasında kalan açı olarak α yı alabilriz

$$S = \frac{1}{2}k.R^2.\sin\alpha \Rightarrow \lim_{k\to\infty} 2S = \lim_{k\to\infty} k.R^2.\sin\alpha = k.R^2.\sin\alpha$$

$(*)$ nın bir sonucu olarak $n|2S$ kabul edebiliriz. ■

4 Pozitif tamsayılardan oluşan en az 2 elemanlı bir alt kümede.Her eleman en az 1 diğer elemanla ortak bir asal.bölene sahipse bu kümeye *misgibi* diyelim $P(n)$=n[sup]2[/sup]+$n+1$ olsun

P(a+1),P(a+2),...,P(a+b)

kümesi mis gibi olacak şekilde bir a negatif olmayan tam sayısı bulunuyorsa b nin alabileceği en küçük değer nedir?

5 Tahtaya

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

denklemi yazılmıştır (denklemin her iki tarafında 2016 şar lineeer çarpan bulunuyor).Bu 4032 lineer çarpandan tam olarak k tanesi, her iki tarafta en az birer çarpan kalacak ve geriye kalan denklemin hiç reel çözümü olmayacak şekilde, silinebiliyorsa k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm:

Yanıtımız: $\boxed{2016}$

1008 eşitsizliği alt alta yazalım.

$$\begin{array}{rcl} (x-1)(x-4) & < & (x-2)(x-3) \\ (x-5)(x-8) & < & (x-6)(x-7) \\ (x-9)(x-12) & < & (x-10)(x-11) \\ & \vdots & \\ (x-2013)(x-2016) & < & (x-2014)(x-2015). \end{array}$$

Buradaki bütün eşitsizliklerde, en fazla bir tane negatif terim yer alacak, her iki taraf birden 0 olmayacak. Eğer her iki taraftan birinde tam olarak bir negatif terim varsa, bu negatif terim eşitsizliklerin sol tarafında olacak yani eşitsizlikleri taraf tarafa çarpabiliriz. Kontrol etmemiz gereken durum, $x \in (4m-2, 4m-1)$ (burada m m. eşitsizliği ifade ediyor.) çünkü eşitsizliğin iki tarafında da 9 çarpanı yer alabiliyor. O halde Göstermemiz gereken

$$\prod_{k\geq 0}^{2016} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)} < e.$$

olduğu.

Bu ifadenin eşiti

$$\prod_{k\geq 0}^{2016} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)} = \sum_{k\geq 0}^{2016} \log\left(1 + \frac{1}{(4k+1)(4k+4)}\right) < 1.$$

olduğundan ve $\log(1+t) \leq t$ eşitsizliği geçerli olduğundan,

$$\sum_{k\geq 0}^{2016} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} < 1$$

eşitsizliği geçerli. □

$\boxed{6}$ Düzlemde verilen $n \geq 2$ adet doğru parçasının herhangi ikisi iç noktalarda kesişiyor, ve herhangi üçü noktadaş değildir. Aslı her doğru parçasının bir ucunu seçip oraya bir kurbağayı, yüzü diğer uca dönük olarak, yerleştirecektir. Daha sonra $n-1$ defa el çırpacaktır. Elini her çırptığında, kurbağaların her biri hemen ileri atlayıp kendi doğru parçası üzerindeki bir sonraki kesişim noktasına konacaktır. Bu kurbağalar atlama yönlerini hiç bir zaman değiştirmezler. Aslı bu kurbağaları, herhangi iki kurbağa asla aynı anda aynı kesişim noktasında buluşmayacak şekilde yerleştirmek istiyor.

Doğru parçaları, şartlara uygun olarak nasıl verilmiş olursa olsun,

(a) n tekse, Aslı'nın amacına ulaşabileceğini gösteriniz.

(b) n çiftse, Aslı'nın amacına ulaşamayacağını gösteriniz.

58. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2017

1 Her $a_0 > 1$ tam sayısı için $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dizisi şu şekilde tanımlanıyor:

$$\text{her } n \geq 0 \text{ için } a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{eğer } \sqrt{a_n} \text{ tam sayı ise} \\ a_n + 3 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

a_0 ın hangi değerleri için öyle bir A tam sayısı vardır ki sonsuz çoklukta n değeri için $a_n = A$ olsun?

Çözüm:

Sorudaki şart için $3|a_0$ olması gerek ve yeterlidir.

$3|a_0$ olsun. $a_0 \geq 9$ ise serinin $3, 6, 9$ döngüsüne gireceği açıktır. $a_0 > 9$ olsun, $(3k-3)^2 < a_0 < (3k)^2$ olmak üzere $k > 1$ ise serideki sonraki tamkare $(3k)^2$ den sonraki terim $3k < (3k-3)^2$ olacaktır, yani seri her tamkareye vurduktan sonra önceki aldığı değerlerden daha düşük bir değere varmaktadır, bu da pozitif tamsayılarda sonlu kez tekrarlanabileceğinden bir süre sonra $k = 1$ olur, dizi $3, 6, 9$ döngüsüne girer.

Dizinin bir terimi $3k+2$ formatında olursa dizinin sürekli artmaya başlayacağı, dolayısıyla sonsuz kez geçen bir terim bulunamayacağı açıktır. Şimdi dizide $3k+1$ formatında bir terim varsa $3k+2$ formatında bir terim de bulunacağını gösterelim.

$(3k)^2 < a_t$ olan en büyük k sayısını alalım. Eğer dizideki bir sonraki tamkare $(3k+2)^2$ ise sonraki terim $3k+2$ olur, istenen elde edilir. Eğer $(3k+1)^2$ ve $k > 1$ ise $3k+1 < (3k-3)^2$ olur, benzer şekilde bu küçültmeyi sonlu kez uygulayabileceğimizden bir süre sonra $k = 1$, $a_x = 16$, $a_{x+2} = 2$ olur, istenen elde edilir ve ispat biter.

2 Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. Tüm x, y gerçel sayıları için

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 Bir avcı ve bir görünmez tavşan düzlemde bir oyun oynuyorlar. Tavşanın başlama noktası A_0 ile avcının başlama noktası B_0 aynıdır. Oyunun $(n-1)$'inci turunun sonunda tavşan A_{n-1} noktasında, avcı ise B_{n-1} noktasında bulunsun. Oyunun n'inci turunda, şu üç işlem sırayla gerçekleşiyor:

(i) Tavşan A_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir A_n noktası seçip görünmez kalarak A_n ye yerleşiyor.

(ii) Bir takip cihazı avcıya bir P_n noktası bildiriyor. Takip cihazının avcıya verdiği tek garanti P_n ile A_n arasındaki uzaklığın 1 birimden fazla olmadığıdır.

(iii) Avcı B_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir B_n noktası seçip görünür kalarak B_n ye yerleşiyor.

Tavşan nasıl hareket ederse etsin ve takip cihazı hangi noktaları bildirirse bildirsin, avcı kendi hareketlerini öyle seçebilir mi ki 10^9 tur sonunda kendisiyle tavşan arasındaki uzaklığın 100 den fazla olmayacağını garantilesin?

4 Bir Ω çemberi üzerinde birbirinden farklı R ve S noktaları RS çap olmayacak şekilde alınıyor. Ω ya R de teğet olan doğru ℓ olsun. T noktası, $[RT]$ doğru parçasının orta noktası S olacak şekilde alınıyor. Ω nın kısa RS yayı üzerinde bir J noktası, JST üçgeninin çevrel çemberi Γ ile ℓ doğrusu iki farklı noktada kesişecek şekilde alınıyor. Γ ve ℓ in kesişim noktalarının R ye daha yakın olanı A olsun. AJ doğrusu Ω yı ikinci kez K da kessin. KT nin Γ ya teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Öncelikle $RK//AT$ olduğunu gösterelim. $JSTA$ kirişler dörtgeni olduğundan $\angle STA = \alpha$ dersek $\angle KJS = \alpha$ olur. Aynı yayı gören çevre açılar eşit olduğundan $\angle KRS = \alpha$ olur. Sonuç olarak $RK//AT$

Şimdi $PT//RA$ olacak biçimde bir P noktası alalım. Bu durumda $PTAR$ paralelkenar olur. S noktasında köşegenler kesişeceğinden A, S, P noktaları doğrusaldır ve paralelkenarın diğer köşegenidir.

$\angle RKS = \beta$ diyecek olursak teğet kiriş açıdan $\angle SRA = \beta$ olur. Şekil paralelkenar olduğundan $\angle PTR = \beta$ olur. $\angle PKS = 180 - \beta$ olduğundan $PKST$ çemberseldir. Bu durumda $\angle KTS = \theta = \angle KPS = \angle PAT$ olacaktır. Bu ise ispatı bitirir.

$\boxed{5}$ $N \geq 2$ verilmiş bir tam sayı olsun. Herhangi ikisinin boyları birbirinden farklı olan $N(N+1)$ futbolcu bir şekilde yan yana sıraya dizilmiştir. Takımın antrenörü bu sıradan $N(N-1)$ futbolcuyu öyle çıkarmak istiyor ki geriye kalan $2N$ futbolcudan oluşan yeni sıra aşağıdaki N adet şartı sağlasın:

(1) En uzun futbolcu ile ikinci en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

(2) Üçüncü en uzun futbolcu ile dördüncü en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

$\vdots$

(N) İkinci en kısa futbolcu ile en kısa futbolcu arasında kimse olmayacak.

Antrenörün bunu her zaman yapabileceğini gösteriniz.

Çözüm:

Oyuncuların boy sıralamalarını düşünelim, kısadan uzuna her biri $N+1$ kişi içeren N gruba ayıralım. Şimdi solda sağa dizilişteki ilk kişilere bakalım, aynı gruptan iki kişi bulduğumuz anda duralım, bu iki kişiyi seçelim, geldiğimiz yere kadar olan kişileri, bu iki kişinin bulunduğu gruptaki kalan kişileri atalım. Gözlemleyelim ki bazı boy gruplarından 1 kişi attık, bazılarından hiç atmadık. Hiç atmadıklarımızdan da rastgele seçtiğimiz bir kişiyi atalım.

Tam olarak $2N$ kişi atmış oluruz, ayrıca başta oluşturduğumuz N boy grubundan $N-1$ tanesi N kişiyle hala durmaktadır, dolayısıyla tümevarımsal olarak aynı işlemi tekrarlarsak her boy grubundan bir ikiliyi sırada birbiriyle kesişmeyecek şekilde seçmiş oluruz, ispat biter.

$\boxed{6}$ x ve y tam sayıları aralarında asalsa (x, y) sıralı ikilisine *temel ikili* diyelim. Sonlu sayıda temel ikiliden oluşan herhangi bir S kümesi verilmiş olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan bir n pozitif tam sayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz:

$$S \text{ deki her } (x, y) \text{ için } a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1 \text{ dir.}$$

59. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2018

1 Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ olsun. $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçaları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları $|AD| = |AE|$ olacak şekilde alınıyor. $[BD]$ ve $[CE]$ nin orta dikmeleri Γ nın küçük $\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{AC}$ yaylarını sırasıyla F ve G noktalarında kesiyor. DE ve FG doğrularının paralel olduklarını veya aynı doğru olduklarını gösteriniz.

Çözüm 1:

Çemberin merkezi O orta dikmelerin büyük yayaları kestiği noktalar F' ve G' olsun. $|AD| = |AE| = 2x$ olsun. O'dan AB ve AC'ye inen dikme ayakları sırasıyla K, L ve $FF' \cap AB = T, GG' \cap AC = R$ olsun. K ve L, AB ve AC'yi ortalayacağından $|KT| = |LR| = x$ olur. O'dan FF' ve GG''ne inen dikme ayakları sırasıyla S ve Q olmak üzere $SOKT$ ve $LOQR$ dörtgenlerinin dikdörtgen olduğu açıktır. Buradan $|OS| = |OQ| = x$ olur. $FF' \cap GG' = P$ olsun. Deminki eşitlikten $\triangle POS$ ve $\triangle POQ$ eştir. $|SP| = |PQ| = a$ olur. $|PG'| = b$ ve $|PF'| = c$ olsun. S ve Q sırasıyla FF' ve GG''nü ortaladığından $|FP| = 2a + c$ ve $|GP| = 2a + b$ olur. Şimdi P'ye göre kuvvet yazarsak $(2a + c)c = b(2a + b) \Rightarrow 2ac + c^2 = 2ab + b^2 \Rightarrow (c - b)(c + b + 2a) = 0$ olur. İkinci çarpan 0 olmayacağından $b = c$ olur. $\angle FPG = 2\alpha$ olsun. FPG ikizkenarlığından $\angle PFG = \angle PGF = 90° - \alpha$ olur. $FG \cap AB = X$ olmak üzere $\angle FXT = \alpha$ olur. Zaten $\angle TAR = 180° - 2\alpha$ olduğundan ADE ikizkenar üçgeninde $\angle ADE = \alpha$'dır. Bu durumda FG doğrusu ya DE'ye paraleldir yada bu iki doğru aynı doğrudur.

Çözüm 2:

Bir önceki çözümün aynısını şöyle ifade edebiliriz.

$SOKT$ ve $LOQR$ birer dikdörtgendir. $OS = KT = LR = OQ$ olduğu için FF' ve GG' kirişleri O dan eş uzaklıkta oldukları için $FF' = GG'$, dolayısıyla $FP = GP$.

$\angle FPG = 2\alpha$ dersek, $\angle AXG = \angle ADE = \alpha \Longrightarrow DE \parallel BC$ olacaktır.

2 Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, $a_{n+1} = a_1$ ve $a_{n+2} = a_2$ olup her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

eşitliğini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ gerçel sayıları bulunur?

3 Eşkenar üçgen şeklindeki bir sayı dizilişinde en alttaki satır dışındaki her bir sayı kendisinin hemen altındaki iki sayının farkının mutlak değerine eşitse bu dizilişe bir *tuhaf Pascal üçgeni* diyelim. Örneğin, aşağıda 1 den 10 a kadar tüm tam sayıları içeren dört satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

1 den $1 + 2 + \cdots + 2018$ sayısına kadar tüm sayıları içeren 2018 satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni var mıdır?

Çözüm:

<u>İddia:</u> $n > 36$ tam sayısı için 1 den $1 + 2 + \ldots + n$ sayısına kadar tüm sayıları içeren n satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni yoktur. ($n = 2018$ için aşağıdaki çözüm çok daha kaba ve basit sınırlarla yapılabilir)

Böyle bir üçgen bulunduğunu varsayalım.

$1, 2, \ldots, n$ sayılarına beyaz sayı diyelim.

Gözlem 1: Beyaz sayıların hepsi farklı satırlardadır.

İspat: Üçgenin en üstündeki sayıya a_1 diyelim. Bu sayının farkı olduğu bir alttaki satırdaki büyük sayıya b_2, küçük sayıya a_2 diyelim. Benzer şekilde $a_3, \ldots, a_n$ ve $b_3, \ldots, b_n$ tanımlayalım. Şimdi görelim ki

$1 + 2 + \ldots + n \geq b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq 1 + 2 + \ldots + n$

Dolayısıyla $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmalıdır.

Ayrıca bu demektir ki $b_n = 1 + 2 + \ldots + n$ en alt satırda olmak zorundadır.

Şimdi $b_n, b_n - 1, \ldots, b_n - n$ sayılarına kırmızı sayı diyelim.

Gözlem 2: n. satırda en fazla $\frac{n}{2} + 1$ kırmızı sayı bulunabilir.

İspat: Aksini varsayalım. Bu durumda n. satırda öyle iki yan yana sayı çifti bulunur ki ikisi de kırmızı sayıdır (bu sayı çiftleri çakışabilir, sıkıntı yok) Ayrıca iki kırmızı sayının farkı beyaz sayı olduğundan, bu iki sayı çiftinin farkından gelen bir üst satırdaki sayılar beyaz olacaktır, yalnız birinci gözlemden dolayı bir satırda iki beyaz sayı bulunamaz, çelişki.

Gözlem 3: n. satır haricindeki satırlarda en fazla iki kırmızı sayı bulunabilir.

İspat: Eğer son satır harici bir satırda kırmızı sayı bulunuyorsa, bu kırmızı sayı iki sayının farkı olmak zorundadır. Görelim ki bu iki sayıdan küçük olanı beyaz sayı olmak zorundadır. Bir satırda tam olarak bir beyaz sayı bulunduğundan, bu satırın üst satırındaki kırmızı sayılar bu sayıya çaprazdan komşu olmak zorundadır, dolayısıyla en fazla iki kırmızı sayı bulunabilir.

Gözlem 4: m. satırdaki en büyük sayı $a_m = b_n - a_n - a_{n-1} - \ldots - a_{m+1} \leq b_n - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}$ olur.

İspat: m. satırdaki en büyük sayıyı alıp, bu sayıdan başlayarak bu sayının farkı olduğu iki sayıdan büyük olanı takip edersek her seferinde sayımız bir alt satırdaki en küçük sayı kadar artar. Bu en küçük sayı da en az o satırdaki beyaz sayı olacağından yukarı çıktıkça en büyük sayı bir alt satırdaki beyaz sayı kadar azalır.

Gözlemden dolayı $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2} > n$ şartını sağlayan bir m sayısı için m. satır ve üstünde kırmızı sayı bulunamaz. Bu şartı sağlamayan en büyük m tam sayısı için üçgende bulunabilecek kırmızı sayıların sayısı en fazla $\frac{n}{2} + 1 + 2(n - m)$ veya daha az olur, eğer $m > \frac{3n}{4}$ olduğunu gösterirsek tüm kırmızı sayıları yerleştirmeyeceğimizi elde ederiz, bu da böyle bir üçgen olmadığını kanıtlar.

Eğer ifadede m yerine $\frac{3n}{4}+1$ koyduğumuzda sol taraf büyük oluyorsa isteneni elde etmiş oluruz, koyduğumuzda ise

$n^2 - 4n > 32n$ elde ederiz, $n > 36$ olduğu için doğrudur, ispat tamamlanır.

Not: Daha uygun bir ispat ile sınır $n > 5$ e kadar çekilebiliyor, buradaki makalede ispatı ve bazı tuhaf Pascal üçgenleri sıralanıyor.

4 Koordinat düzleminde, x ve y nin 20 den küçük veya eşit pozitif tam sayılar olduğu her (x, y) noktasına *yuva* diyelim.

Başlangıçta, 400 yuvanın hiç biri taş içermiyor. İlk hamleyi Aslı yapmak üzere Aslı ve Burcu sırayla hamle yapıyorlar. Aslı her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir kırmızı taşı, kırmızı taş içeren herhangi iki yuvanın arasındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten farklı olmak koşuluyla yerleştiriyor. Burcu her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir mavi taş yerleştiriyor. (Mavi taş içeren bir yuva ile diğer herhangi bir yuvanın arasındaki uzaklık ile ilgili herhangi bir koşul yoktur.) Sırası gelen kişi hamle yapamıyorsa, iki kişi de taş yerleştirmeyi bırakıyor.

Burcu mavi taşlarını nasıl yerleştirirse yerleştirsin, Aslı en az K adet kırmızı taş yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, K nin alabileceği en büyük değer nedir?

5 Bir $a_1, a_2, \ldots$ sonsuz pozitif tam sayı dizisi ile bir $N > 1$ tam sayısı için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ifadesi, her $n \geq N$ için bir tam sayıya eşit oluyor. Her $m \geq M$ için $a_m = a_{m+1}$ olacak şekilde bir M pozitif tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

İfadeye S_n diyelim. Her $n > N$ için $S_{n+1} - S_n \in \mathbb{Z}$ olacaktır. Bu da

$a_1 \cdot a_{n+1} \mid a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) - a_1 \cdot a_n$ olmasına denktir.

Gözlem 1: $a_{n+1} \mid a_1 \cdot a_n$ olduğundan dolayı $(a_n)_{n \geq N}$ dizisinin elemanlarından en az birini bölen asalların kümesi sonludur.

Gözlem 2: Bir $p \nmid a_1$ asal sayısı aldığımızda, $v_p(a_{n+1}) \leq v_p(a_n)$ olur. Dolayısıyla bu asallar için $v_p(a_n)$ dizisi bir yerden sonra sabitlenmek zorundadır (sıfırın altına inemez, sonlu kez azalabilir).

İddia: Bir $q \mid a_1$ asalı alırsak, $v_q(a_n)$ dizisi bir yerden sonra sabitlenmek zorundadır.

İspat: Varsayalım ki bir q asalı için bu dizi sabitlenmiyor olsun.

İspatlayacağız ki bir K tam sayısı ve her $n > K$ için $v_q(a_n) \geq v_q(a_1)$ olur.

Öncelikle $v_q(a_k) \geq v_q(a_1)$ olan bir k tam sayısının varlığını görelim. Eğer bu dizi azalmayansa ve sabitlenmiyorsa bir yerde $v_q(a_k) \geq v_q(a_1)$ olacaktır.

Eğer $v_q(a_{k-1}) > v_q(a_k)$ olan bir k varsa, $a_1 \cdot a_k \mid a_k(a_k - a_{k-1}) - a_1 \cdot a_{k-1}$ olduğundan iki taraftaki q asalının kuvvetlerini incelersek:

$v_q(a_k(a_k - a_{k-1})) = 2v_q(a_k)$ olduğundan eğer $v_q(a_k) < v_q(a_1)$ ise

$2v_q(a_k) < v_q(a_1 \cdot a_{k-1})$ olacağından $v_q(RHS) = 2v_q(a_k) < v_q(a_1 \cdot a_k) = v_q(LHS)$ olur, ama $LHS \mid RHS$, çelişki.

Gözlemleyelim ki aynı zamanda burada ispatlamış olduğumuz şekilde eğer dizi bir noktada azalıyorsa, o noktada $v_q(a_1)$ in altına inemez. Dolayısıyla her $n \geq k$ için $v_q(a_k) \geq v_q(a_1)$ olur, alt iddiayı ispatlamış olduk.

Son olarak $n > k$ için $v_q(a_n)$ dizisinin artmayan olduğunu gösterirsek sonlu kez azalabileceğinden bir yerde sabitlenir ve iddiayı ispatlamış oluruz.

Aksini varsayalım, $v_q(a_{v+1}) > v_q(a_v) \geq v_q(a_1)$ olsun. Yine $a_1 \cdot a_{v+1} \mid a_{v+1}(a_{v+1} - a_v) - a_1 \cdot a_v$ ifadesinde iki taraftaki q asalının kuvvetlerini incelersek:

$v_q(a_1 \cdot a_v) < v_q(a_{v+1}) + v_q(a_v)$ olduğundan $v_q(RHS) = v_q(a_1 \cdot a_v) < v_q(a_1 \cdot a_{v+1}) = v_q(LHS)$, çelişki.

İspatladığımız iki gözlem ve iddiayı birleştirdiğimizde (a_n) dizisinin de bir yerden sonra sabitlenmesi gerektiğini görürüz, **q.e.d.**

$\boxed{6}$ Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ eşitliği sağlanıyor. $ABCD$ nin iç bölgesindeki bir X noktası

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ve} \angle XBC = \angle XDA$$

eşitliklerini sağlıyor. $\angle BXA + \angle DXC = 180°$ olduğunu gösteriniz.

60. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2019

1 Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilsin. Tüm a ve b tam sayıları için

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

Yanıt: n **herhangi bir tam sayı olmak üzere** $f(x) = 0$ **veya** $f(x) = 2x + n$

$a = 0$ ve $b = n + 1$ alalım.

$$f(0) + 2f(n+1) = f(f(n+1))$$

$a = 1$ ve $b = n$ alalım.

$$f(2) + 2f(n) = f(f(n+1))$$

Bu iki eşitlik birbirine eşitlenirse

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2}.(f(2) - f(0))$$

elde edilir.

$f(n+1) - f(n)$ bir sabit olması ancak ve ancak $f(n)$ in doğrusal olması ile mümkündür.

$f(n) = xn + y$ olsun. Yerine yazalım.

$$x.2a + y + 2.(xb + y) = f(x.(a+b) + y) = x.(x.(a+b) + y) + y$$

$$2ax + 2bx + 3y = x^2.(a+b) + xy + y$$

$$2.(x.(a+b) + y) = x.(x.(a+b) + y)$$

$$(x-2).(x.(a+b) + y) = 0$$

Buradan $x = 2$ veya $x.(a+b) + y = 0$ elde edilir.

a) $x = 2$ ise $f(n) = 2n + y$, $y \in Z$ olduğu görülebilir.

b) $a+b = -\dfrac{y}{x}$ yani $a+b$ sabit olması gerekir ancak her a, b sayısı için çözüm aradğımızdan mümkün değildir. Fakat $x = 0$ durumu tanımsızdır. Bunu $f(n) = y$ koyarak incelemeliyiz.

$$f(a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

$$y + 2y = f(y) = y$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

yani $f(n) = 0$ çözümü de görülür.

2 Bir ABC üçgeninde, $[BC]$ kenarı üzerinde A_1 ve $[AC]$ kenarı üzerinde B_1 noktaları alınıyor. Sırasıyla $[AA_1]$ ve $[BB_1]$ doğru parçaları üzerinde P ve Q noktaları, PQ ile AB parallel olacak şekilde alınıyor. PB_1 doğrusu üzerinde P_1 noktası, B_1 noktası P ile P_1 arasında kalacak ve $\angle PP_1C = \angle BAC$ olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde, QA_1 doğrusu üzerinde Q_1 noktası, A_1 noktası Q ile Q_1 arasında kalacak ve $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ olacak şekilde alınıyor.

P, Q, P_1 ve Q_1 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Çizim: https://www.geogebra.org/graphing/hr5zsd4y

QA_1 doğrusu AB ve AC yi sırasıyla Q_2 ve A_3 te kessin.

PB_1 doğrusu AB ve BC yi sırasıyla P_2 ve B_3 te kessin.

QA_1 ile PB_1, S de kesişsin.

$\triangle APP_2$ de Q_2, A_1, S noktaları için Menelaus

$$\frac{AQ_2}{Q_2P_2}\frac{PA_1}{A_1A}\frac{P_2S}{SP} = 1 \tag{1}$$

$\triangle APP_2$ de B, A_1, B_3 noktaları için Menelaus

$$\frac{AB}{BP_2}\frac{PA_1}{A_1A}\frac{P_2B_3}{B_3P} = 1 \tag{2}$$

$\triangle BQQ_2$ de P_2, B_1, S noktaları için Menelaus

$$\frac{BP_2}{P_2Q_2}\frac{QB_1}{B_1B}\frac{Q_2S}{SQ} = 1 \tag{3}$$

$\triangle BQQ_2$ de A, B_1, A_3 noktaları için Menelaus

$$\frac{BA}{AQ_2}\frac{QB_1}{B_1B}\frac{Q_2A_3}{A_3Q} = 1 \tag{4}$$

(1) ile (4) ü (2) ile de (3) ü taraf tarafa çarpıp eşitleyelim.

$$\frac{AQ_2}{Q_2P_2}\frac{PA_1}{A_1A}\frac{P_2S}{SP}\frac{BA}{AQ_2}\frac{QB_1}{B_1B}\frac{Q_2A_3}{A_3Q} = \frac{AB}{BP_2}\frac{PA_1}{A_1A}\frac{P_2B_3}{B_3P}\frac{BP_2}{P_2Q_2}\frac{QB_1}{B_1B}\frac{Q_2S}{SQ} \tag{5}$$

Ayrıca paralellikten $\frac{Q_2S}{SQ} = \frac{P_2S}{SP}$ olduğu için gerekli sadeleştirmeleri yaptıktan sonra $\frac{Q_2A_3}{A_3Q} = \frac{P_2B_3}{B_3P}$ elde ederiz. Bu da $QP \parallel A_3B_3$ demektir.

Soruya geri dönersek $\angle CP_1P = \angle BAC = \angle CA_3B_3$ olduğu için C, P_1, B_3, A_3 çemberseldir. Benzer şekilde $\angle CQ_1Q = \angle ABC = \angle CB_3A_3$ olduğu için C, Q_1, B_3, A_3 çemberseldir. Bu durumda çembersellikten elde ettiğimiz $\angle CP_1Q_1 = \angle CA_3Q$ eşitliğini kullanarak basit açı hesaplarıyla

$$\angle PP_1Q = \angle B_1P_1C + \angle CP_1Q = \angle P_2AB_1 + \angle Q_2AA_3 = \angle BQ_2Q_1 = \angle Q_2QP$$

elde edilir. Bu da P, Q, P_1, Q_1 in çembersel olduğu anlamına gelir.

Çözüm 2:

ABC üçgeninin çevrel çemberi w_1 olsun.
$[BQ \cap w_1 = \{W\}$, $B \neq Q$ olacak şekilde bir W noktası alalım.
$[AP \cap w_1 = \{Z\}$, $A \neq Z$ olacak şekilde bir Z noktası alalım.

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BWC}) = m(\widehat{PP_1C})$$

olduğundan dolayı B_1, W, P_1, C çemberdeştir.

$$m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{AZC}) = m(\widehat{QQ_1C})$$

olduğundan dolayı A_1, Z, Q_1, C çemberdeştir.
$m(\widehat{WCB_1}) = \alpha$ olsun.
$\alpha = m(\widehat{WCB_1}) = m(\widehat{ABW}) = m(\widehat{PQW}) = m(\widehat{B_1P_1W})$ olduğundan dolayı Q, P, W, P_1 çemberdeştir.

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AZC}) = m(\widehat{QQ_1C})$$

olduğundan dolayı A_1, Z, Q_1, C çemberdeştir.

$$m(\widehat{ZQ_1A_1}) = m(\widehat{ZCB}) = m(\widehat{BAZ}) = m(\widehat{QPZ})$$

olduğundan P, Q, Z, Q_1 çemberdeştir.
Dikkat edersek

$$m(\widehat{PQW}) = m(\widehat{PZW}) = \alpha$$

olduğundan dolayı P, Q, Z, W çemberdeştir.
Dolayısıyla P_1, W, P, Q, Z, Q_1 çemberdeştir. İspat biter.
Şekli bilgisayarda çizdiğim zaman ekleyeceğim.

$\boxed{3}$ Sanal alemdeki bir sosyal şebekede 2019 kullanıcı bulunuyor. Bu kullanıcılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık karşılıklıdır, yani A kullanıcısı B ile arkadaş ise, B kullanıcısı A ile arkadaştır. Bu sosyal şebekedeki arkadaşlık durumlarını değiştiren aşağıdaki türden olaylar, her defada sadece bir kere olmak üzere, çok defa meydana gelebiliyor:

Olay: A, B ve C; A hem B, hem de C ile arkadaş olacak, fakat B ile C birbirleriyle arkadaş olmayacak şekilde üç kullanıcı olmak üzere, arkadaşlık durumları değişip B ile C birbirleriyle arkadaş olmaya, A ise hem B, hem de C ile arkadaş olmamaya başlıyor. Diğer arkadaşlık durumları ise değişmiyor.

Başlangıçta, 1010 adet kullanıcının her birinin 1009 arkadaşı, 1009 adet kullanıcının ise her birinin 1010 arkadaşı bulunuyor. Her kullanıcının en çok 1 arkadaşının olmasıyla sonuçlanacak olaylar dizisinin bulunduğunu gösteriniz.

$\boxed{4}$

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

denklemini sağlayan tüm (k, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm 1:

Bu denklemde n ifadesi için eşitsizlik kurmaya çalışalım. Öncelikle küçük değerler için biraz hesaplar yapalım.

$n = 1$ için $k = 1$ olur.

$n = 2$ için $k = 3$ olur.

$n = 3$ için uygun k değeri olmaz.

Not: $v_p(x)$ ifadesi p nin üssünün x e eşit olduğunu gösterir.

Eşitliğin sağ tarafı uzun olduğu için kısaltma amaçlı EST şeklinde yazacağım.$v_2(k!) = v_2(EST) = 0 + 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{(n-1).n}{2}$ olur.

$EST = 2^{\frac{(n-1).n}{2}}.(2-1).(2^2-1)...(2^n-1)$ şeklinde yazılabilir. $3 \mid 2^n - 1$ olacak şekilde $n \in Z^+$ olması için $n \geq 2$ olmalıdır.

Şimdi bu tarz sayılar için $n = 2n'$ dönüşümü yapılabilir.

Kuvvet Kaydırma Teoremi ile $v_3(4^{n'} - 1) = v_3(4^{n'} - 1^{n'}) = v_3(4-1) + v_3(n') = 1 + v_3(n')$ olur.

Daha sonra

$$v_3(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2.3^i} \rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2.3^i} = \frac{n}{2}.\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

Bu ifadede ise bilinen seri toplamı olduğu için kolaylıkla $v_3(k!) < \frac{3n}{4}$ olur.

De polignac formülünden dolayı

$$v_p(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor$$

olduğunu biliyoruz. Bu formülü iki eşitsizlik arasına sıkıştıralım.

$\lfloor \frac{k}{p} \rfloor < v_p(k!) < \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \frac{k}{p^3} + ... = \frac{k}{p}.\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{k}{p-1}$

Şimdi

$$v_2(k!) = \frac{n.(n-1)}{2} < k$$

olur. Aynı zamanda $\frac{k}{3} - 1 < v_3(k!) < \frac{3n}{4}$ olduğundan dolayı

$$k < \frac{9n}{4} + 3$$

O halde

$$\frac{n.(n-1)}{2} < \frac{9n}{4} + 3$$

yani $2n^2 - 11n + 3 < 0$ elde edilir. $f(n) = 2n^2 - 11n + 3$ olsun. $n \geq 7$ için $f(n) = 24 > 0$ ve $f'(n) = 4n - 11 \geq 17 > 0$ olduğundan dolayı daima pozitiftir. O halde $n \leq 6$ olmalıdır.

Zaten $n \leq 3$ için denemiştik. O halde

$n = 4$ için $k! = 7!.4$ olacağından dolayı çözümü yoktur.

$n = 5$ için EST $2^5 - 1 = 31$ asal çarpanına sahip olacağından dolayı $k! \geq 31!$ olur. buradan ise eşitliğin sol tarafı 23 ile bölünürken sağ taraf bölünemez.

$n = 6$ için de eşitliğin sol tarafı 23 ile bölünürken EST 23 ile bölünmez.

O halde denklemin çözümleri $\{(3, 2), (1, 1)\}$ olarak bulunur.

Çözüm 2:

Yukarıda elde ettiğimiz $\dfrac{n.(n-1)}{2} < k$,

$$(\frac{n.(n-1)}{2})! < k!$$

olduğunu kullanalım

$(\dfrac{n.(n-1)}{2})! < k! = (2^n-1).(2^n-2)....(2^n-2^{n-1}) < (2^n)^n = 2^{n^2}$ Yani

$$2^{n^2} > (\frac{n.(n-1)}{2})!$$

eşitsizliği gelir.

$n = 6$ için yanlış olduğunu görebiliriz .

$n \geq 7$ için ispatlayalım.

$(\dfrac{n.(n-1)}{2})! = 15!.16.17.....(\dfrac{n.(n-1)}{2}) > 2^{36}.2^{\frac{n.(n-1)}{2}} = 2^{2n.(n-1)-24} = 2^{n^2}.2^{n^2-n-24} > 2^{n^2}$ olduğundan sorudan elde ettiğimiz eşitsizlik ile çelişir.

$n = 6$ için de eşitsizliğin geçerli olduğunu elle test etmiştik. $n \leq 5$ olmalıdır.

geri kalanı diğer çözümle aynıdır.

Çözüm 3:

$n \geq 5$ sayıları için ifade 31 ile bölünecektir.

$v_{31}(EST) = \lfloor \dfrac{n}{5} \rfloor$ tir. $(31 \mid 2^{5k}-1)$

$\dfrac{n}{10} \leq \lfloor \dfrac{n}{5} \rfloor \leq v_{31}(EST) = v_{31}(k!) = \sum_{n=1}^{\infty} \lfloor \frac{k}{31^j} \rfloor < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{31^j} = \dfrac{k}{30}$

$3n < k$ elde edilir.

1. Çözümde ispatladığımız $k < \dfrac{9n}{4} + 3$ eşitsizlikleri birleştirilirse

$12n < 9n + 12$ yani $n \geq 5$ için $n < 4$ gelir. Çelişki olduğundan $n < 5$ olmalıdır.

Geri kalanı diğer çözümlerle aynıdır.

Not: Neredeyse seçeceğimiz her tek p asal sayısı için bu tarz bir eşitsizlik yakalamak mümkündür.

5 Bath Bankası bir yüzünde H, diğer yüzünde T yazan madeni paralar basmıştır. Bu paralardan n tanesi soldan sağa dizilmiş olarak Giray'ın önünde duruyor. Giray şu işlemi tekrar tekrar uyguluyor: önündeki paralardan tam olarak $k > 0$ tanesinin H yüzü üstteyse, soldan k-inci sıradaki parayı ters çeviriyor; aksi halde, yani tüm paraların T yüzü üstteyse, duruyor. Örneğin, $n = 3$ durumunda THT dizilişiyle başlayan süreç $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ olarak devam edip üç işlem sonunda durur.

(a) Başlangıçtaki diziliş nasıl olursa olsun, Giray'ın sonlu sayıda işlem sonunda duracağını gösteriniz.

(b) Her C başlangıç dizilişi için, $L(C)$ ile Giray'ın durana kadar yaptığı işlem sayısı gösterilsin. Örneğin, $L(THT) = 3$ ve $L(TTT) = 0$ dır. Her bir C başlangıç dizilişi için $L(C)$ değerinin ayrı ayrı belirlenmesiyle elde edilen 2^n adet sayının ortalamasını bulunuz.

6 $|AB| \neq |AC|$ koşulunu sağlayan dar açılı bir ABC üçgeninin iç teğet çember merkezi I dır. ABC nin iç teğet çemberi ω; $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında teğettir. D den geçip EF ye dik olan doğru ω ile ikinci kez R noktasında kesişiyor. AR doğrusu ω ile ikinci kez P noktasında kesişiyor. PCE ve PBF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez Q noktasında kesişiyor.

DI ve PQ doğrularının, A dan geçip AI ya dik olan doğru üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

61. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2020

1 $ABCD$ dışbükey bir dörtgen olsun. P noktası, $ABCD$ nin iç bölgesindedir. Aşağıdaki oran eşitlikleri sağlanmaktadır:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

$\angle ADP$ açısının iç açıortayının, $\angle PCB$ açısının iç açıortayının ve $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesinin aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

Çözüm:

$\angle ADP$ nin açıortayı ile $\angle PCB$ nin açıortayının kesişim noktası Q olsun. $[AD]$ ve $[BC]$ üzerinden sırasıyla T ve R noktaları alalım öyle ki $\angle TPA = \angle TAP$ ve $\angle RPB = \angle RBP$ olsun. Açıları yazarak basitçe $PT \perp DQ$ ve $PR \perp CQ$ olduğu görülebilir. O halde $DTQP$ ve $CRQP$ deltoidleri oluşur. $|QR| = |QP| = |QT|$ bulunur. Aynı zamanda açılar isimlendirilirse

$\angle PTA + \angle PBA = 180°$ ve $\angle PRB + \angle PAB = 180°$ olur. O halde $PTAB$ ve $ABRP$ kirişler dörtgenleri elde edilir. Yani

$ABRPT$ kirişler beşgeni olarak bulunur. Aynı zamanda $|QR| = |QP| = |QT|$ eşitliğinden dolayı Q nun merkez olacağını söyleyebiliriz Yani $|QA| = |QB|$ buradan da AB ye yükseklik çizilirse ortaladığı görülür.

2 a, b, c, d gerçel sayıları için $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ve $a + b + c + d = 1$ sağlanmaktadır.

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Öncelikle soruda verilen $a^a b^b c^c d^d$ ifadesini Ağırlıklı aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğiyle düzenleyelim.

$$\frac{a.a + b.b + c.c + d.d}{a + b + c + d} \geq \sqrt[a+b+c+d]{a^a.b^b.c^c.d^d}$$

Buradan

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a^a.b^b.c^c.d^d$$

bulunur. Verilen eşitsizliğin sol tarafını düzenleyelim

$$(a + 2b + 3c + 4d).a^a.b^b.c^c.d^d \leq (a + 2b + 3c + 4d).(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Denklemi homojen yapmak için 1 gördüğümüz yere $(a + b + c + d)^3$ yazalım

$$(a + 2b + 3c + 4d).(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}(a + 2b + 3c + 4d).(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)^3 &= -a^2b + a^2d - 2ab^2 - 6abc - 6abd - 2ac^2 - 6acd - 2ad^2 \\ &\quad + b^3 + b^2d - bc^2 - 6bcd - bd^2 + 2c^3 + c^2d + 3d^3 \\ &< 0\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliği düzenlersek:

$$a^2d + b^3 + b^2d + 2c^3 + c^2d + 3d^3 < a^2b + 2ab^2 + 6abc + 6abd + 2ac^2 + 6acd + 2ad^2 + bc^2 + 6bcd + bd^2$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizlikleri $a \geq b \geq c \geq d > 0$ verilişi yardımıyla gösterelim.

$a^2b \geq a^2d$
$ab^2 \geq b^3$
$ab^2 \geq b^2d$
$6abc > 2c^3$
$2ac^2 > c^2d$
$6bcd > 3d^3$ olur ve sağ tarafta hala terim kalmaya devam ettiğinden bu eşitsizliklerin alt alta toplanmasını da dikkate alırsak

$$(a+2b+3c+4d).(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3$$

eşitsizliği ispatlanır ve ispat biter.

Çözüm 2:

Denklemi homojen yapmak için 1 gördüğümüz yere $(a+b+c+d)^3$ yazalım.

$$(a+2b+3c+4d).(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3$$

olduğunu göstermeliyiz.

Aslında buradan sonra AoPS forumundan bir çözüm yapılabilir:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+b+2c+3d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) &= (a+b+c+d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \\ &\quad + (b+2c+3d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \\ &\leq (a+b+c+d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2+2\textstyle\sum_{sym} ab\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (b+2c+3d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \leq (a+b+c+d)\left(2\sum_{sym} ab\right)$$

$(b+2c+3d)(a.a+b.b+c.c+d.d) \leq (b+2c+3d)(a.a+b.a+c.a+d.a) = (b+2c+3d)\,a\,(a+b+c+d)$ olduğundan aşağıdaki eşitsizliğin ispatı soruyu tamamlayacaktır.

$(b+2c+3d)\,a\,(a+b+c+d) < (a+b+c+d)\left(2\sum_{sym} ab\right)$

$\Longrightarrow ab+2ac+3ad < 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$\Longrightarrow ad < ab+2(bc+bd+cd)$

Bu ifade ise $b \geq d$ olması sonucu doğrudur. İspat biter.

Eşitsizliğin zayıf olmasına rağmen güçlendirilebileceğini düşünüyorum.

3 Ağırlıkları $1, 2, 3, \ldots, 4n$ olan $4n$ tane taş bulunmaktadır. Her taş n renkten birine boyanmıştır ve her bir renk için o renge boyalı dört taş bulunmaktadır. Aşağıdaki her iki koşul aynı anda sağlanacak şekilde bu taşları iki öbeğe ayırabileceğimizi gösteriniz:

- İki öbeğin toplam ağırlıkları birbirine eşittir.
- Her bir öbekte her bir renkten tam olarak iki taş vardır.

4 Bir $n > 1$ tam sayısı verilmiştir. Bir dağın yamacında farklı yüksekliklerde n^2 istasyon bulunmaktadır. A ve B teleferik şirketlerinin her biri k teleferik seferi düzenlemektedir. Her teleferik seferi bir istasyondan başlayıp daha yüksekte bulunan başka bir istasyona aradaki hiçbir istasyonda durmadan yapılmaktadır. A şirketinin k seferinin başlangıç istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin k seferinin bitiş istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin iki teleferik seferinden başlangıç istasyonu daha yüksekte olanın bitiş istasyonu da daha yüksektedir. Aynı koşullar B şirketi için de sağlanmaktadır. İki istasyondan alçakta olandan yüksekte olana, aynı şirketin bir veya birden fazla seferi kullanılarak ulaşılabiliyorsa, bu iki istasyona *o şirketle bağlı* diyelim.

Hem A şirketiyle bağlı hem de B şirketiyle bağlı olan iki istasyonun bulunmasını garanti eden en küçük k pozitif tam sayısını belirleyiniz.

5 $n > 1$ karttan oluşan bir deste verilmiştir. Her kartın üzerinde bir pozitif tam sayı yazılıdır. Herhangi iki kartın üzerindeki sayıların aritmetik ortalaması, destedeki bir veya birkaç kartın üzerindeki sayıların geometrik ortalamasına eşittir.

Hangi n tam sayıları için kartların üzerindeki sayıların hepsi eşit olmak zorundadır?

6 Aşağıdaki önermeyi doğru kılan pozitif bir c sabiti bulunduğunu gösteriniz:

Düzlemde herhangi ikisinin arasındaki uzaklık en az 1 olan $n > 1$ noktadan oluşan herhangi bir $\mathcal{S}$ kümesi alındığında, $\mathcal{S}$ kümesindeki her noktadan uzaklığı en az $cn^{-1/3}$ olan ve $\mathcal{S}$ deki noktaları ayıran bir ℓ doğrusu bulunur.

(Bir ℓ doğrusu, uçları $\mathcal{S}$ de olan en az bir doğru parçasını kesiyorsa ℓ doğrusu $\mathcal{S}$ deki noktaları ayırır.)

Not. Bir $\alpha > 1/3$ gerçel sayısı için, $cn^{-1/3}$ yerine $cn^{-\alpha}$ için elde edilen sonuçlara α nın değerine göre puan verilebilir.

62. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2021

1 $n \geqslant 100$ bir tam sayı olsun. Aslı $n, n+1, \ldots, 2n$ sayılarının her birini farklı bir karta yazıyor. Daha sonra bu $n+1$ kartı karıştırarak iki gruba ayırıyor. Bu gruplardan en az birinde, üzerindeki sayıların toplamı tam kare olan iki kartın bulunduğunu gösteriniz.

2 Tüm $x_1, \ldots, x_n$ gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

3 $|AB| > |AC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $\angle DAB = \angle CAD$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. $[AC]$ kenarı üzerinde $\angle ADE = \angle BCD$ olacak şekilde bir E noktası, $[AB]$ kenarı üzerinde $\angle FDA = \angle DBC$ olacak şekilde bir F noktası ve AC doğrusu üzerinde $|CX| = |BX|$ olacak şekilde bir X noktası alınıyor. ADC ve EXD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. BC, EF ve O_1O_2 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

4 Γ çemberinin merkezi I olsun. $ABCD$ dişbükey dörtgeninin $[AB], [BC], [CD]$ ve $[DA]$ kenarlarının her biri Γ çemberine teğettir. AIC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. $[BA]$ nin A yönünde uzantısı Ω ile X noktasında, $[BC]$ nin C yönünde uzantısı Ω ile Z noktasında kesişiyor. $[AD]$ ve $[CD]$ nin D yönünde uzantıları Ω ile sırasıyla Y ve T noktalarında kesişiyor.

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|$$

olduğunu gösteriniz.

5 Tüylü ve Zıplak isimli iki sincap kış için 2021 tane ceviz toplamıştır. Zıplak, cevizleri 1 den 2021 e kadar olan sayılarla numaralandırıyor ve en sevdikleri ağacın etrafında çembersel bir düzende 2021 tane küçük delik açıyor. Ertesi sabah Zıplak, Tüylü'nün her deliğe bir ceviz yerleştirdiğini, fakat yerleştirirken cevizlerin numaralarına hiç dikkat etmediğini fark ediyor. Bundan mutsuz olan Zıplak, 2021 hamleden oluşan bir hamleler dizisi uygulayarak cevizlerin yerlerini değiştirmeye karar veriyor. k ıncı hamlede Zıplak, k numaralı cevizin iki komşusunun yerlerini birbirleriyle değiştiriyor. Öyle bir k sayısının var olduğunu gösteriniz ki; Zıplak, k ıncı hamlede $a < k < b$ koşuluna uyan a ve b numaralı cevizlerin yerlerini değiştirmiş olsun.

6 $m \geqslant 2$ bir tam sayı, A (pozitif olmak zorunda olmayan) tam sayılardan oluşan bir sonlu küme ve B_1, B_2, B_3, …, B_m kümeleri A nın alt kümeleri olsun. Her $k = 1, 2, \ldots, m$ için B_k kümesinin elemanlarının toplamı m^k dır. A kümesinin en az $m/2$ eleman içerdiğini gösteriniz.

63. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2022

1 Oslo Bankası, iki tür madeni para basmaktadır: alüminyum (A ile belirtilecektir) ve bronz (B ile belirtilecektir). n adet alüminyum ve n adet bronz parası olan Aslı, başlangıçta bu paraları herhangi bir sırayla yan yana dizmiştir. Ardışık olarak dizilmiş ve aynı tür paralardan oluşan diziye *zincir* diyelim. $k \le 2n$ verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Aslı, aşağıda tanımlanan hamleyi tekrar tekrar yapmaktadır: soldan k. sıradaki parayı içeren en uzun zinciri alıyor ve bu zincirdeki tüm paraları dizinin en soluna taşıyor. Örneğin, $n = 4$ ve $k = 4$ durumunda $AABBBABA$ sıralamasıyla başlayan bir süreç aşağıdaki gibi ilerler

$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$.

Başlangıçtaki sıralama nasıl olursa olsun, bu sürecin bir noktasında en soldaki n paranın aynı türden olmasını sağlayan tüm (n, k), $1 \le k \le 2n$ ikililerini bulunuz.

2 $\mathbb{R}^+$ ile pozitif gerçel sayıların kümesi gösterilmektedir. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz: Her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$xf(y) + yf(x) \le 2$

koşulunu sağlayan tam olarak bir tane $y \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Çözüm:

$\mathbb{R}^+$ üzerinde R bağıntısını tanımlayalım.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid xf(y) + yf(x) \le 2\}$$

Bu bağıntının simetrik olduğu, yani $(x, y) \in R$ ise $(y, x) \in R$ olduğu barizdir. Bununla birlikte xRy ve xRz ise $y = z$ olduğunu görelim. Ayrıca

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x = y\}$$

bağıntısını da tanımlayalım. İddiamız $A = R$ olduğudur. Aksini varsayalım. Bu durumda $R - A$ kümesi boş küme olmayacaktır çünkü fonksiyonun verilen özelliği gereği her $x \in \mathbb{R}^+$ için $(x, y) \in R$ olacak şekilde bir y vardır ve eğer $A \ne R$ ise en az bir tanesi için $x \ne y$'dir. $(x, y) \in R - A$ olsun. $x \ne y$ olduğundan

$$xf(x) + xf(x) > 2 \implies f(x) > \frac{1}{x}$$

olacaktır. Benzer şekilde $f(y) > \frac{1}{y}$'dir. Dolayısıyla

$$2 \ge xf(y) + yf(x) > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$$

olacaktır. Bu bir çelişkidir. $R - A$ boş kümedir. Bu da $A = R$ olduğu anlamına gelir. Her x için xRx olduğundan, verilen eşitsizlikten

$$x = y \to f(x) \le \frac{1}{x}$$
$$x \ne y \implies xf(y) + yf(x) > 2$$

sonuçları çıkar. Eğer $f(x) \ne \frac{1}{x}$ olan bir $x \in \mathbb{R}^+$ varsa $f(x) = \frac{1}{x} - \epsilon$ olacak şekilde bir $\frac{1}{x} > \epsilon > 0$ vardır. $x \ne y$ olan herhangi bir $y \in \mathbb{R}^+$ için

$$xf(y) + y\left(\frac{1}{x} - \epsilon\right) > 2 \implies \frac{x}{y} \ge xf(y) > 2 - \frac{y}{x} + y\epsilon \implies \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} > y\epsilon \implies \frac{(x-y)^2}{xy^2} > \epsilon$$

Burada ϵ ne olursa olsun, $\lim\limits_{y \to x} \frac{(x-y)^2}{xy^2} = 0$ olduğundan y'yi x'e çok yakın seçerek $\frac{(x-y)^2}{xy^2} < \epsilon$ olmasını sağlayabiliriz. Bu bir çelişkidir çünkü her y için ϵ'dan büyük olması gerekiyordu.

Bu durumda $f(x) \ne \frac{1}{x}$ olan bir x olamaz. Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ olmalıdır. Bu fonksiyonun istenilen şartları sağladığı da yerine koyularak görülebilir.

3 k bir pozitif tam sayı ve S tek asal sayılardan oluşan sonlu bir küme olsun. S kümesinin tüm elemanlarının bir çember etrafına, yan yana olan herhangi iki elemanın çarpımının bir x pozitif tam sayısı için $x^2 + x + k$ formunda olması koşuluyla en fazla bir farklı şekilde dizilebileceğini gösteriniz (rotasyon ve yansımalar sonucu birbirinden elde edilebilen dizilimler aynı sayılmaktadır).

4 Bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $|BC| = |DE|$ dir. $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesinde bulunan bir T noktasının $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ ve $\angle ABT = \angle TEA$ olacak şekilde alındığını varsayalım. AB doğrusunun CD ve CT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla P ve Q olsun. P, B, A, Q noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. AE doğrusunun CD ve DT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla R ve S olsun. R, E, A, S noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. P, S, Q, R noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

5 a, b pozitif tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere

$a^p = b! + p$

denklemini sağlayan tüm (a, b, p) üçlülerini bulunuz.

Çözüm:

Eğer $b < p$ ise $p \not| a$ olacaktır. Ayrıca $b! + p = a^p > 1$ olduğundan $a > 1$'dir ve asal böleni vardır. q asalı a'yı bölsün. $q \neq p$ olduğundan ve $q \mid b! + p$ olduğundan $q \not| b!$ olur ve $q > b$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$b! + p = a^p \geq q^p > b^p$$

olur. $b^p - b!$ ifadesi artandır çünkü

$$(b+1)^p - (b+1)! > b^p - b! \iff (b+1)^p - b^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} b^k > pb^{p-1} > b^p \geq b \cdot b^b > (b+1)! - b! = b \cdot b!$$

Dolayısıyla $b \geq 2$ ise $p > b^p - b! \geq 2^p - 2$ olacaktır. 2^p üstel ama $p + 2$ linear olduğundan eşitsizlik $p \geq 3$ için sağlanmayacaktır. Dolayısıyla $b = 2$ ise $p = 2$'dir ancak $b < p$ değildir. Eğer $b = 1$ ise ana denklemde $1 + p = a^p \geq 2^p$ elde edilir. Bu eşitsizlik ise $p \geq 2$ için doğru değildir. Dolayısıyla çözüm yoktur.

Eğer $b \geq p$ ise $p \mid b! + p$ olacaktır ve buradan $p \mid a$ bulunur. $p \geq 2$ olduğundan $p^2 \mid a^p = b! + p$ olacaktır. Buradan $p^2 \not| b!$ elde edilir. Dolayısıyla $b < 2p$ olmalıdır.

$$a^p = b! + p \leq (2p-1)! + p < (2p)^p$$

olduğunu iddia ediyoruz. Yukarıda $b^p - b!$ ifadesinin artan olduğunu göstermiştik, dolayısıyla

$$(2p)^p - (2p-1)! > (2p-1)^p - (2p-1)! \geq 3^p - 3!$$

olacaktır.

$$p \geq 2 \implies 3^p - 6 > p$$

olduğundan $(2p)^p - (2p-1)! > p$ olacaktır. Dolayısıyla $(2p)^p > a^p$ olmalıdır, aynı zamanda $p \mid a$ olduğundan $a = p$ çıkar. Denklem

$$p^p - p = b!$$

halini alır. $p = 2$ ise $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ çözümünü buluruz. $p = 3$ ise $b = 4$ çıkar ve $(a, b, p) = (3, 4, 3)$ çözümü elde edilir. $p = 5$ için çözüm çıkmaz.

$p > 5$ ise ifadelerdeki 2 kuvvetlerine bakalım. $v_2(p^p - p) = v_2(b!) \geq v_2((p+1)!)$ olacaktır. Ayrıca p tek olduğundan

$$v_2(p^p - p) = v_2(p^{p-1} - 1) \geq v_2((p+1)!) = v_2(p+1) + v_2(p!)$$

2 için kuvvet kaydırma teoremi şu şekildedir.

Lemma: $2 \mid x - y$ ve n çiftse

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$$

$p-1$ çift olduğundan

$$v_2(p^{p-1}-1) = v_2(p-1)+v_2(p+1)+v_2(p-1)-1 = 2v_2(p-1)+v_2(p+1)-1 \geq v_2(p+1)+v_2(p!)$$

$$\implies 2v_2(p-1)-1 \geq v_2(p!) = v_2((p-1)!) \implies v_2(p-1)-1 \geq v_2((p-2)!)$$

Ancak $p-2 > \dfrac{p-1}{2} > 2$ olduğundan

$$v_2(p-1)-1 \geq v_2((p-2)!) \geq v_2\left(\frac{p-1}{2}\right)+v_2(2) = v_2(p-1)$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. $p>5$ için çözüm yoktur. Tüm çözümler $(a,b,p)=(2,2,2),(3,4,3)$'dür.

$\boxed{6}$ n pozitif bir tam sayı olsun. $n\times n$ boyutunda, 1'den n^2'ye kadar olan tüm sayıları içeren ve her birim karede tam olarak bir tane sayının yazıldığı satranç tahtasına ***İskandinav*** kare diyelim. Ortak kenarı paylaşan iki birim kareye komşu diyelim. Bir birim karede yazılan sayı, bu karenin tüm komşularında yazılan sayılardan küçükse bu birim kareye ***vadi*** diyelim. Aşağıdaki şartları sağlayan, bir veya birkaç kareden oluşan birim kare dizisine ***yokuş yukarı yol*** diyelim:

(i) Bu dizideki ilk birim kare bir vadidir,

(ii) Bu dizideki her birim kare, kendinden önce gelen birim kare ile komşudur,

(iii) Bu dizinin birim karelerinde yazılan sayılar artan sıradadır.

Bir İskandinav tüm yokuş yukarı yolların toplam sayısının alabileceği en küçük değeri n cinsinden bulunuz.

64. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2023

1 Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm $n > 1$ bileşik tam sayılarını belirleyiniz:

$d_1, d_2, ..., d_k$ sayıları n sayısının tüm pozitif bölenleri ve $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ ise her $1 \le i \le k-2$ için d_i sayısı $d_{i+1} + d_{i+2}$ sayısını böler.

Çözüm:

p asal sayı ve $m > 1$ bir tam sayı olmak üzere, $n = p^m$ şeklindeki sayılar sorudaki şartı sağlar.

n nin birden fazla asal böleni olduğunu varsayalım.

p ve q $(p < q)$, n nin en küçük iki asal böleni olsun.

$\alpha \ge 1$ tam sayı olmak üzere, n nin bölenleri sırasıyla $1, p, \dots, p^\alpha, q, \dots, \frac{n}{q}, \frac{n}{p^\alpha}, \dots, \frac{n}{p}, n$ olacaktır.

Sorudaki tanım gereği $\frac{n}{q} \mid \left(\frac{n}{p^\alpha} + \frac{n}{p^{\alpha-1}}\right)$ olacaktır. Eşdeğer olarak (k tam sayı) $q = \frac{kp^\alpha}{p+1}$ elde ederiz. Bu durumda $p \mid q$ olacaktır. Bu da baştaki kabulümüz ile çelişir.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde $|AB| < |AC|$ olsun. ABC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. Ω çemberinin A noktasını içeren CB yayının orta noktası S olsun. A dan BC ye inilen dikme BS ile D noktasında ve Ω ile ikinci kez $E \ne A$ noktasında kesişiyor. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan doğru BE doğrusu ile L noktasında kesişiyor. BDL üçgeninin çevrel çemberi ω olsun. ω ile Ω ikinci kez $P \ne B$ noktasında kesişiyor.

ω çemberine P noktasında teğet olan doğrunun BS doğrusu ile $\angle BAC$ açısının iç açıortayı üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

Çözüm:

Kolaylık olması için çözüm boyunca bir X noktasının antipoduna X' diyelim.

Gözlem: P, D, A' doğrusaldır.

İspat: $\angle EBC = \angle EAC$ olduğu açıktır. Paralellikten bu açılar aynı zamanda $\angle BLD$ açısına eşittir. Buda $PDBL$ çemberselliginden $\angle BPD$'ye eşittir. $PD \cap \Omega = R$ olsun. A' noktası için $\angle AEA' = 90°$ olacağından $A'E || BC$ olur. $BEA'C$ ikizkenar yamuk olduğundan EC yayının ölçüsü BA' yayının ölçüsüne eşittir. R ve A' çakışıktır. $\square$

$SS' \cap PA' = T$, $AS' \cap BS = K$ olsun.

ES' yayının AS yayına eşit olduğu açıktır. $\angle ABS = \angle EAS'$ olur. Buradan $|KA|^2 = |KD| \cdot |KB|$ olur. Eğer KP $PDBL$ çemberine teğetse ispat bitecektir ve bu doğruysa $|KP|^2 = |KD| \cdot |KB|$ olacağından $|KP| = |KA|$ olur. Bunu ispatlarsak soru biter.

Bunun varlığında OK doğrusu, $[AP]$'na bu doğru parçasının orta noktasında dik olacaktır. Dolayısıyla $OK || PD$ ise ispat biter. Bu doğruysa benzerlikten $\frac{|SK|}{|KD|} = \frac{|SO|}{|OT|}$ olacaktır. $ADS'S$ dörtgeninde kelebekten $\frac{|SK|}{|KD|} = \frac{|SS'|}{|AD|}$'dir. $AA'D$ üçgeninde OT orta taban olduğundan $|AD| = 2|OT|$'dir. Ayrıca $|SS'| = 2|OS|$ olduğu açıktır. Buradan $\frac{|SK|}{|KD|} = \frac{|SO|}{|OT|}$ elde edilir. İspat biter.

3 $k \ge 2$ tam sayı olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm $a_1, a_2, ...$ sonsuz pozitif tam sayı dizilerini belirleyiniz:

$a_1, a_2, ...$ dizisi için öyle bir P polinomu vardır ki $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ formundadır ve her $n \ge 1$ tam sayısı için

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

koşulu sağlanır.

4 Herhangi ikisi birbirinden farklı olan $x_1, x_2, ...x_{2023}$ pozitif gerçel sayıları için,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

sayısı her $n = 1, 2, ..., 2023$ için bir tam sayıdır. Buna göre, $a_{2023} \geq 3034$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a_1 = 1$ olduğu basitçe görülebilir.

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

$$\overbrace{\geq}^{Cauchy-Schwarz} \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}}\right)} + \sqrt{(x_{n-1} + x_n)\left(\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}\right)}$$

olduğunu gösterelim

$$\left(\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}}\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}}} + \sqrt{x_{n-1} + x_n}\sqrt{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}\right)^2$$

$$\leq \left[\left(\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}}\right)^2 + \left(\sqrt{x_{n-1} + x_n}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}\right)^2\right]$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

olduğundan her iki tarafın da karekökünü alıp yukarıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$a_{n-2} + \sqrt{(x_{n-1} + x_n)\left(\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}\right)} \overbrace{>}^{AGO} a_{n-2} + 2$$

Herhangi iki x_i nin birbirine eşit olmaması eşitlik durumunun olmaması anlamına gelir çünkü sonda aritmetik-geometrik ortalama kullandık.

Şayet a_i ler tam sayı olduğundan

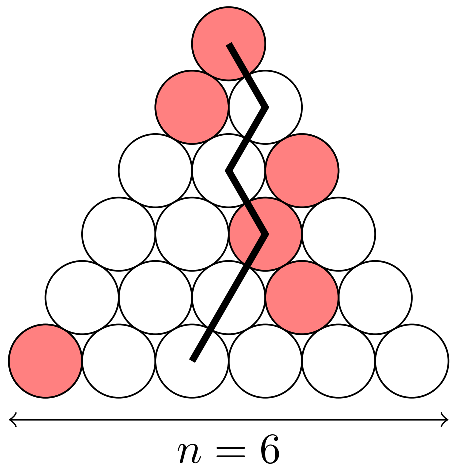
$$a_n > a_n + 2$$

$$\rightarrow a_n \geq a_{n-2} + 3$$

elde edilir. $a_1 = 1$ olduğundan $n = 2023$ verildiğinde

$$\frac{2023 - 1}{2}.3 + 1 = \boxed{3034}$$

5 n bir pozitif tam sayı olsun. Bir *Japon üçgeni*, $1+2+\cdots+n$ adet çemberin, eşkenar üçgen şeklinde ve her $i = 1, 2, ..., n$ için i. satırda tam olarak bir tanesi kırmızı olan i tane çember bulunacak şekilde yerleştirilmesiyle oluşmaktadır. Japon üçgenindeki bir *ninja yolu*, en tepedeki çemberden başlayıp her defasında bulunduğu çemberin hemen altındaki iki çemberden birine giderek en alt satırda biten, n adet çemberden oluşan bir dizidir. Aşağıda, $n = 6$ durumunda bir Japon üçgeni ve iki adet kırmızı çember içeren bir ninja yolunun örneği verilmiştir:



Her Japon üçgeninde en az k adet kırmızı çember içeren bir ninja yolu bulunuyorsa, k sayısının alabileceği en büyük değeri n cinsinden belirleyiniz.

6 ABC bir eşkenar üçgen olsun. A_1, B_1, C_1 noktaları ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ ve

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

olacak şekilde alınıyor. BC_1 ve CB_1 doğruları A_2 noktasında, CA_1 ve AC_1 doğruları B_2 noktasında, AB_1 ve BA_1 doğruları C_2 noktasında kesişiyor.

$A_1B_1C_1$ çeşitkenar üçgen ise, öyle iki nokta bulunduğunu gösteriniz ki AA_1A_2, BB_1B_2 ve CC_1C_2 üçgenlerinin her birinin çevrel çemberi bu iki noktadan da geçer.

65. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2024

1 Aşağıdaki şartı sağlayan tüm α gerçel sayılarını bulunuz:

Her n pozitif tam sayısı için

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

tam sayısı n sayısının bir katıdır. ($\lfloor z \rfloor$ ifadesi, z sayısından küçük veya ona eşit olan en büyük tam sayıyı göstermektedir. Örneğin, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ve $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

(Kolombiya)

Çözüm 1:

α şartı sağlasın. $\lfloor (\alpha+2)n \rfloor = 2n + \lfloor n\alpha \rfloor$ olduğundan $\alpha + 2$'de şartı sağlar. $0 \leq \alpha < 2$ aralığında bulunan çözümler ve z tamsayı olmak üzere bu çözümlerin $2z$ fazlası çözümdür. Bu aralığa bakalım. $\alpha = 0$ ise durumun sağlandığı açıktır. Bunun $2z$ fazlası da çözüm olacağından tüm çift tamsayılar bir çözümdür. $0 < \alpha < 1$ olsun. $x\alpha = 1$ ve n tamsayı olmak üzere $n < x < n+1$ olsun. Zaten $x = n \in \mathbb{Z}^+$ oldugu durumda $n|1$ olur. Çelişki. Heryeri α ile çarparsak $n\alpha < 1 < (n+1)\alpha$ olur. $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor (n+1)\alpha \rfloor$ ifadesinde son terim hariç terimler sıfır olduğundan $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor$ $n+1$'in katıdır. Halbuki bu ifade $n+1$'den küçüktür. Çelişki. Bu aralıkta çözüm yoktur. $\alpha = 1$ olursa n çift olduğunda ifade $n|\frac{n}{2} \cdot (n+1)$ olmasını gerektirir. Sağlamaz. Son olarak $1 < \alpha < 2$ durumuna bakalım. Bu durumun $-1 < \alpha < 0$ durumuna denk olduğu açıktır. Bu aralığın çözümü yöntem bakımından deminkinden farksızdır. Negatif degerler için aynı işlemlerin simetriği geçerlidir. Buradan da çözüm gelmez. Tek çözüm deminde dediğimiz gibi $\boxed{\text{çift tamsayılardır.}}$

Çözüm 2:

$$S = \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

olsun. Tam değer fonksiyonuyla daha ilişik bir çözüm verelim. Benzer bir şekilde

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha \rfloor \equiv \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha + 2 \rfloor \pmod{n}$$

olduğunu söyleyebiliriz. O zaman $\alpha \in [0,2]$ aralığını yani $0 \leq \alpha \leq 2$ durumunu incelemek yeterli olacaktır. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 2$ durumunda tüm n için $n \mid S$'tir ve bu durum çift tam sayıların usteneni sağladığını ifade eder. $\alpha = 1$ durumunda ise $n \nmid S$'tir ve istenen koşulu tek tam sayılar sağlamaz. Diğer durumları inceleyelim

$i)$ $0 < \alpha < 1:$ Bu durumda $n = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil$ alalım. Buna göre $n\alpha = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil .\alpha \geq \frac{1}{\alpha}.\alpha = 1$ olduğu açıktır. Öte taraftan

$$n\alpha = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil .\alpha < \alpha\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) = 1 + \alpha < 2$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bundan dolayı $\lceil n\alpha \rceil = 1$ olacaktır. Ayrıca

$$n\alpha = (n-1)\,\alpha + \alpha < (n-1)\alpha + 1 < 2 \Longleftrightarrow (n-1)\alpha < 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \lfloor i\alpha \rfloor = 0$$

elde edilir. Buna göre $S = 1$ olur ve her n değeri için $n \nmid 1$ sağlanmaz. Dolayısıyla bu durum elenir.

$ii)$ $1 < \alpha < 2:$ Bu durum bir önceki duruma dönüştürebilir. Zira $\alpha = b + 1$ olsun.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lfloor i\alpha \rfloor = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \lfloor ib \rfloor$$

olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $0 < b < 1$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \lfloor b \rfloor$ toplamı $i)$ durumundaki toplama denktir ve $n = \left\lceil \frac{1}{b} \right\rceil$ alındığında $\sum_{i=1}^{n} \lceil ib \rceil = 1$ elde edilir. Dolayısıyla bu durumda

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lfloor i\alpha \rfloor = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \lfloor ib \rfloor = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

ki bu ifade her n pozitif tam sayısı tarafından bölünmez ve $n \nmid S$ durumları da elde edilir.

Sonuç olarak hem $(0, 2)$ aralığında S toplamı her n pozitif tam sayısı tarafından bölünmez. $\alpha \in [0, 2]$ için sadece $\alpha = 0$ ve $\alpha = 2$ durumlarında, tüm çift tam sayıları kapsamak üzere toplam n'in bir tam katıdır.

Not: Problemin Hermite Özdeşliği ile de çözülebileceğine inanıyorum. Hermite Özdeşliği (Hermite's Identity) herhangi bir n doğal sayısı ve x reeli için

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor$$

olduğunu söyler. S toplamındaki tüm tam değer fonksiyonları $\lfloor \alpha \rfloor$'a indirgenip $\pmod{n}$'de götürülebilir. Sonrasında ise benzer bir durum incelemesi yapılabilir.

2 Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz:

(a, b) ikilisi için, öyle g ve N pozitif tam sayıları vardır ki, tüm $n \geq N$ tam sayıları için

$$\text{ebob}\,(a^n + b, b^n + a) = g$$

eşitliği sağlanır. (ebob(x, y) ifadesi, x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir.)

(Endonezya)

3 Pozitif tam sayılardan oluşan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sonsuz dizisi ve N pozitif tam sayısı verilmiştir. Bu dizide her $n > N$ için a_n terimi; $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimlerinden a_{n-1} terimine eşit olanların sayısına eşittir.

$a_1, a_3, a_5, \ldots$ ve $a_2, a_4, a_6, \ldots$ dizilerinin en az bir tanesinin bir yerden sonra periyodik olduğunu ispatlayınız.

$(b_1, b_2, b_3, \ldots$ sonsuz dizisi; her $m \geqslant M$ için $b_{m+p} = b_m$ olacak şekilde p and M pozitif tam sayıları varsa *bir yerden sonra periyodik*tir.)

(Avustralya)

4 ABC üçgeninde $AB < AC < BC$ ve iç teğet çember merkezi ile iç teğet çemberi sırasıyla I ile ω olsun. BC kenarı üzerinde C noktasından farklı X noktası, X noktasından AC doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde BC kenarı üzerinde B noktasından farklı Y noktası, Y noktasından AB doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. AI doğrusu, ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez $P \neq A$ noktasında kesiyor. AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla K ve L olsun.

$\angle KIL + \angle YPX = 180°$ olduğunu gösteriniz.

(Polonya)

Çözüm 1:

Y'den çizilen teğetin değme noktası Y' olsun. (BC üzerinde olmayan teğet.) AB'nin çembere değme noktası E olsun. EY''nün çap olduğu açıktır. Buradan $I = EY' \cap AP$ olur. $YY' \cap AP = T$ olsun. $\triangle TY'I \sim \triangle AEI$ ve $|EI| = |Y'I|$ olduğundan bu iki üçgen eştir. $|IT| = |AI|$ olur. Benzer işlem X'teki teğet içinde yapılırsa bu doğrunun da T'den geçtiği görülür. Ve deminki eşitlikten T, A'nın I'ya göre simetriğidir. A'nın K ve L'ye göre simetrikleri B ve C olacağından $\angle KIL = \angle BTC$ olur. $\angle BTC + \angle YPX = 180°$ olduğunu ispatlamalıyız. Paralellikten $\angle XTA = \angle PAC$ olduğunu söyleyebiliriz. Çemberde açıdan $\angle PCA = \angle PBC$ olduğuda açıktır. Buradan $\angle ATX = \angle PBX$ gelir ve $BXTP$'nin kirişler dörtgeni olduğu anlaşılır. $\angle TBC = \angle XPT$ olur. Benzer şekilde $PTYC$'de bir kirişler dörtgenidir ve $\angle TPY = \angle TCB$ olur. $\angle YPX = \angle TPY + \angle TPX = \angle TBC + \angle TCB = 180° - \angle BTC$ olur. İspat biter.

Çözüm 2:

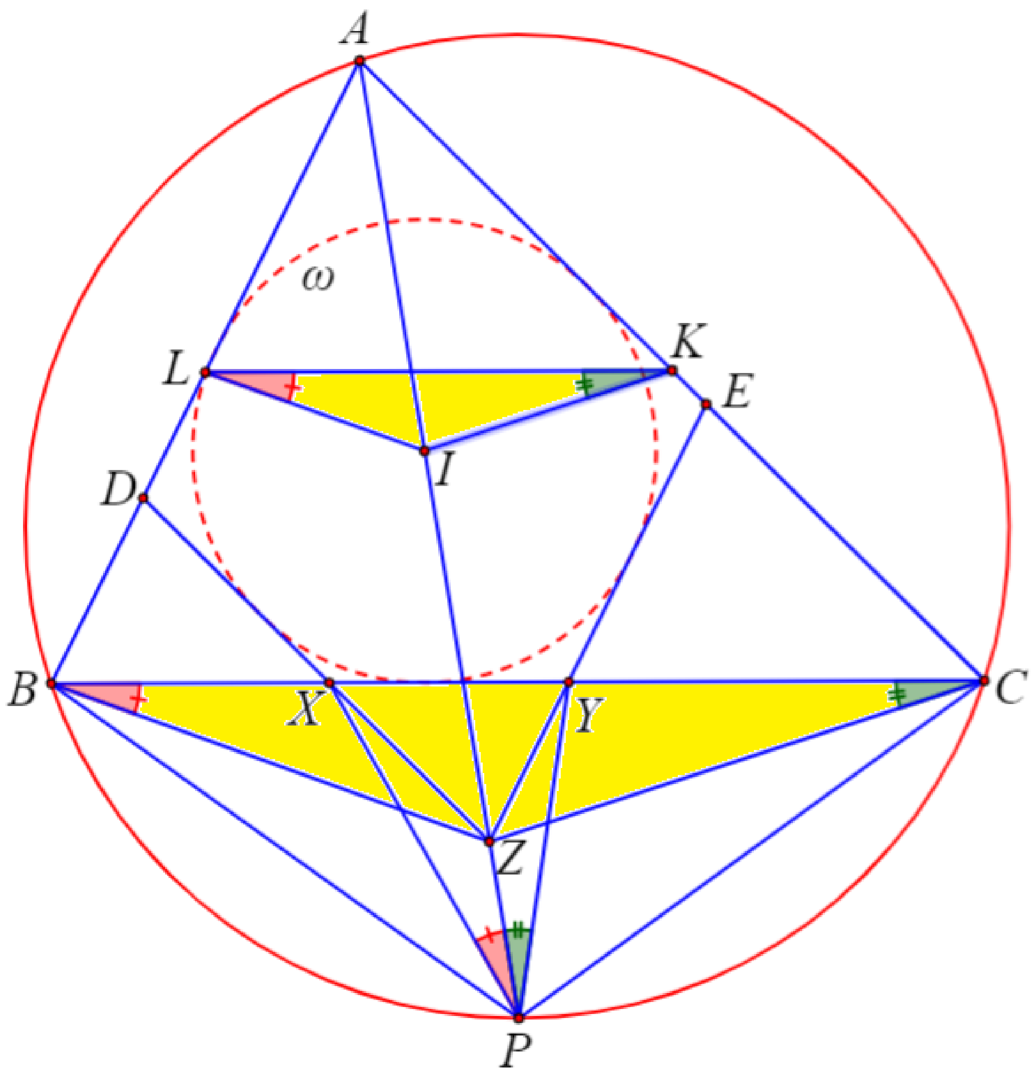
X ve Y noktalarından ω çemberine çizilen sözü edilen teğetlerin kesim noktasına Z, AB ve AC'yi kestiği noktalara da sırasıyla D ve E diyelim. $AD \parallel EZ$ ve $AE \parallel DZ$ olduğundan $ADZE$ bir paralelkenardır. Ayrıca bir içteğet çembere de sahip olduğundan eşkenar dörtgendir. I noktası içteğet çemberin ve dolayısıyla eşkenar dörtgenin merkezi olduğu için A, I, Z doğrusal olur.

$\angle AZX = \angle PAC = \angle PBC \implies B, P, Z, X$ noktaları çemberseldir. Bu çemberden $\angle ZBX = \angle ZPX$

$\angle AZY = \angle PAB = \angle PCB \implies C, P, Z, Y$ noktaları çemberseldir. Bu çemberden $\angle ZCY = \angle ZPY$

Diğer taraftan L, I, K noktaları $[AB], [AZ], [AC]$ doğru parçalarının orta noktaları olduğundan $LI \parallel BZ$, $KI \parallel CZ$ ve $LK \parallel BC$ dir. KIL ve CBZ üçgenlerinin kenarlarının paralelliğinden bu iki üçgenin benzer yani açılarının eşit olduğu sonucuna varırız.

Buradan da açı özellikleriyle $\angle KIL + \angle YPX = \angle KIL + \angle ZPY + \angle ZPX = \angle KIL + \angle ZCY + \angle ZBX = \angle KIL + \angle IKL + \angle ILK = 180°$ elde ederiz.



5 Salyangoz Turbo, 2024 satır ve 2023 sütundan oluşan bir satranç tahtasında bir oyun oynuyor. Tahtanın 2022 adet birim karesinde birer canavar saklanmıştır. Başlangıçta Turbo, hangi birim karelerde canavar bulunduğunu bilmiyor fakat ilk ve son satır dışındaki her satırda tam olarak bir canavar bulunduğunu ve her sütunda en fazla bir canavar bulunduğunu biliyor. Turbo, ilk satırdan son satıra ulaşmak için birkaç deneme yapıyor. Her bir denemede, ilk satırdaki istediği bir birim kareden başlıyor ve her adımda, bulunduğu birim kareyle ortak kenar paylaşan komşu bir birim kareye geçiyor (Turbo'nun daha önceden ziyaret ettiği bir birim

kareye dönme hakkı vardır). Turbo, içinde canavar bulunan bir birim kareye ulaştığı an o anki denemesi sonlanıyor ve yeni bir denemeye başlamak için ilk satıra geri ışınlanıyor. Canavarlar yer değiştirmiyor ve Turbo, daha önceden ziyaret ettiği birim karelerde canavar olup olmadığını aklında tutuyor. Turbo, son satırdaki herhangi bir kareye ulaştığı an oyun bitiyor.

n sayısının en küçük hangi değeri için Turbo, canavarların tahtadaki konumları nasıl olursa olsun en fazla n deneme yaparak oyunu bitirmeyi garantileyebilir?

(Hong Kong)

6 Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilsin. Bir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Q}$ için

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ve} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

eşitliklerinden en az birini sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna *iyi* diyelim.

Öyle bir c tam sayısının bulunduğunu gösteriniz ki her f iyi fonksiyonu için r rasyonel sayı olmak üzere $f(r) + f(-r)$ şeklinde ifade edilebilen birbirinden farklı rasyonel sayıların sayısı en fazla c dir. c sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Japonya)