IMO
Uluslararası Matematik Olimpiyatı

Soruları

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

İçindekiler

1. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1959

1 Hiçbir n doğal sayısı için $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin sadeleşmeyeceğini gösteriniz.

2

$$\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})}+\sqrt{(x-\sqrt{2x-1})}=A$$

denkleminin gerçel köklerini $(a) A=\sqrt{2}, (b) A=1, (c) A=2$ iken bulunuz. (Karekök içerisindeki ifadelerin negatif olmadığını varsayın.)

3 a, b, c gerçel sayılar olmak üzere,

$$a\ \cos^2 x + b\ \cos x + c = 0$$

denklemi $\cos x$ e göre ikinci dereceden bir denklem olsun. a, b, c sayılarını kullanarak kökleri başlangıçtaki denklemle aynı olan $\cos 2x$ e göre ikinci dereceden bir denklem oluşturunuz. $a=4, b=2, c=-1$ değerleri için $\cos x$ ve $\cos 2x$ türünden olan denklemleri karşılaştırınız.

4 Hipotenüsü $c=$ Sabit, hipotenüse ait kenarortayı da dik kenarlarının geometrik ortalamasına eşit olan dik üçgeni çiziniz.

5 AB doğru parçasının üzerinde bir M hareketli noktası alınıyor. $AMCD$ ve $MBEF$ kareleri, AB ye göre aynı tarafta yer alacak şekilde oluşturuluyor. Bu kareleri çevreleyen P ve Q merkezli çemberler, M haricinde bir N noktasında kesişiyor. AF ile BC doğrularının kesişimi N' ise,

(a) N ve N' noktalarının çakıştığını gösteriniz.

(b) MN doğrularının M seçiminden bağımsız sabit bir S noktasından geçtiğini gösteriniz.

(c) M, A ve B arasında değişirken, PQ doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

6 P ve Q düzlemleri bir p doğrusu boyunca kesişiyor. Hiçbirisi p üzerinde yer almayan, P düzleminde bir A ve Q düzleminde bir C noktası veriliyor. $AB \parallel CD$ olacak şekilde aynı zamanda teğetler dörtgeni olan $ABCD$ ikizkenar yamuğunu, B ve D sırasıyla P ve Q düzlemlerinde olacak şekilde çiziniz.

2. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1960

1 Rakamlarının kareleri toplamının 11 katına eşit olan tüm üç basamaklı sayıları bulunuz.

2

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

eşitsizliği sağlayan x değerlerini bulunuz.

3 Verilen bir ABC dik üçgeninde uzunluğu a olan BC hipotenüsü, n eşit parçaya (n tek tam sayı) bölünüyor. Hipotenüsün orta noktasını bulunduran parçayı gören A dar açısı α olsun. Hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu da h olsun.

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

olduğunu gösteriniz.

4 h_a, h_b (A ve B'den geçen yükseklikler) ve A köşesinden geçen m_a kenarortayı verilen ABC üçgenini çiziniz.

5 $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ yüzü doğruca $A'B'C'D'$ yüzünün üstünde olacak şekilde) küpünü ele alalım.

(a) X ve Y, sırasıyla AC ve $B'D'$ doğru parçalarının üzerinde rastgele noktalar olmak üzere; XY doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

(b) (a)'da tanımlanan XY doğru parçasının üzerinde $ZY = 2XZ$ olacak şekilde alınan Z noktalarının geometrik yerini bulunuz.

6 V_1 hacimli bir dik koninin içine tabanına teğet olacak şekilde en büyük hacimli küre çiziliyor. Tabanı koninin tabanı üzerinde yer alacak şekilde küreyi çevreleyen en küçük hacimli silindirin hacmi V_2'dir.

(a) $V_1 \neq V_2$ olduğunu gösteriniz.

(b) $V_1 = kV_2$ eşitliği sağlayan en küçük k sayısını bulunuz. Bu durumda, koninin tepesinden koninin taban çapını gören açıyı çiziniz.

7 Tabanları a ve c, yüksekliği h olan bir ikizkenar yamuk veriliyor.

(a) Yamuğun simetri ekseni üzerinde yer alan ve yamuğun kollarının ikisini de (tabanların dışındaki kenarları) dik açı ile gören tüm P noktalarını bulunuz.

(b) P'nin tabanlardan birinden uzaklığını hesaplayınız.

(c) Gerçekte, böyle P noktalarının hangi koşullar altında var olduğunu belirleyiniz. (Ortaya çıkabilecek değişik halleri irdeleyiniz.)

3. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1961

1 a ve b sabit sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz. Denklem sisteminin çözümleri olan x, y, z 'nin farklı pozitif sayılar olması için a ve b 'nin sağlaması gereken şartları belirtiniz.

2 Alanı T, kenarları a, b, c olan bir üçgende

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot T$$

olduğunu kanıtlayınız. Hangi koşullarda eşitlik sağlanır?

3 n doğal sayı olmak üzere, $\cos^n x - \sin^n x = 1$ denklemini çözünüz.

4 P, $P_1P_2P_3$ üçgeni içerisinde bir noktadır. P_1P, P_2P, P_3P doğruları karşı kenarları sırasıyla Q_1, Q_2, Q_3 noktalarında kesiyor.

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

sayılarından en az birinin ≤ 2, ve en az birinin ≥ 2 olduğunu gösteriniz.

5 M, BC doğru parçasının orta noktası ve $\omega < 90^\circ$ olmak üzere; $AC = b$, $AB = c$ ve $\angle AMB = \omega$ verilen ABC üçgenini çiziniz. Bu şekilde bir çizimin yapılabilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$b \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

olduğunu gösteriniz. Hangi halde eşitlik geçerlidir?

6 Bir ϵ düzlemi ile bu düzleme paralel olmayan bir düzlem üzerinde yer alan, ϵ'a göre aynı tarafta bulunan ve doğrusal olmayan A, B, C noktalarını ele alalım. A', B', C' noktaları ϵ üzerinde rastgele üç nokta olsun. L, M, N sırasıyla AA', BB', CC' doğru parçalarının orta noktaları ve G de LMN üçgeninin ağırlık merkezi olsun. (L, M, N nin üçgen oluşturmadığı A', B', C' noktalarını ele almıyoruz.) A', B', C' noktaları ϵ üzerinde bağımsız olarak değişirken, G noktasının geometrik yeri nedir?

4. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1962

1 Aşağıdaki şartları sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

(a) Ondalık yazılımında son basamağı 6 dır.

(b) Son basamağı silinip başa yazılırsa, oluşan sayı ilk baştaki n sayısının dört katı oluyor.

2

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarını belirleyiniz.

3 $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ ve $A'B'C'D'$ sırasıyla üst ve alt tabanlar, AA', BB', CC', DD' kenarları birbirlerine paralel) küpünü ele alalım. X noktası sabit bir hızla $ABCD$ karesinin çevresinde $ABCDA$ yönünde hareket ediyor. Y noktası da aynı hızla $B'C'CB$ karesinin çevresinde $B'C'CBB'$ yönünde hareket ediyor. X ve Y noktları, hareketlerine aynı anda sırasıyla A ve B' noktasında başlıyor. Buna göre, XY doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yerini belirleyiniz ve çiziniz.

4 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ denklemini çözünüz.

5 K çemberi üzerinde üç farklı nokta, A, B, C, veriliyor. K üzerinde dördüncü bir D noktasını, oluşan dörtgen teğetler dörtgeni olacak şekilde (sadece cetvel ve pergel kullanarak) oluşturun.

6 Çevrel çemberinin yarıçapı r, içteğet çemberinin yarıçapı ρ olan bir ikizkenar üçgen veriliyor. Bu iki çemberin merkezleri arası uzaklık d ise,

$$d = \sqrt{r(r-2\rho)}$$

olduğunu gösteriniz.

7 Her biri SA, SB, SC, BC, CA, AB doğrularına teğet olan beş kürenin bulunabildiği $SABC$ dörtyüzlüsü veriliyor.

(a) $SABC$ dörtyüzlüsünün düzgün olduğunu gösteriniz.

(b) Karşıt olarak, her düzgün dörtyüzlü için bu şekilde beş kürenin bulunabildiğini kanıtlayınız.

5. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1963

1 p gerçel bir parametre olmak üzere,

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

2 A noktası ve BC doğru parçası veriliyor. Uzayda, bir kolu A'dan geçen, diğer kolu da BC doğru parçasını kesen dik açıların köşelerinin geometrik yerini belirleyiniz.

3 Tüm iç açıları eşit olan bir n-genin, ardışık kenarlarının uzunlukları arasında

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

bağıntısı varsa, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ olduğunu kanıtlayınız.

4 y bir parametre olmak üzere,

$$x_5 + x_2 = yx_1$$
$$x_1 + x_3 = yx_2$$
$$x_2 + x_4 = yx_3$$
$$x_3 + x_5 = yx_4$$
$$x_4 + x_1 = yx_5$$

sistemini sağlayan tüm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sayılarını bulunuz.

5 $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

6 A, B, C, D, E öğrencileri bir yarışmaya katılıyor. Tahminlerden biri sıralamanın $ABCDE$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin tutmadı. Aslında, hiçbir yarışmacı tahmindeki sırada yarışmayı bitiremedi. Dahası, birbiri ardına sıralanır diye düşünülen hiçbir yarışmacı birbiri ardına sıralanmamıştır. Bir diğer tahminde, sıralamanın $DAECB$ şeklinde olacağı idi. Bu tahmin ilkinden daha iyiydi. Yarışmacılardan tam olarak ikisi, yarışmayı tahmin edilen sırada bitirdi. Dahası, tahminde birbiri ardına sıralanır diye düşünülen çiftlerden tam olarak ayrık ikisi yarışmayı birbiri ardında bitirdi. Buna göre, yarışmanın nasıl sonuçlandığını belirleyiniz.

6. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1964

1 (a) $2^n - 1$ sayısının 7 ile bölünebildiği tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

(b) $2^n + 1$ sayısının 7 ile bölünmesini sağlayan bir n pozitif tam sayısının olmadığını gösteriniz.

2 a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere;

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

olduğunu kanıtlayınız.

3 Kenarları a, b, c olan bir ABC üçgeninin içteğet çemberi çiziliyor. Bu çembere teğet ve kenarlara paralel olan doğrular $\triangle ABC$'den birer üçgen kesiyor. Bu üçgenlerin içteğet çemberleri çiziliyor. Bu dört içteğet çemberin alanları toplamını a, b, c cinsinden bulunuz.

4 On yedi kişi aralarında, herkes bir diğerine yazacak şekilde mektuplaşıyorlar. Mektuplarda sadece üç konu üzerine, her çift sadece bir konu üzerine olacak şekilde yazışıyorlar. Birbirlerine aynı konu üzerine yazmış üç kişinin bulunabileceğini gösteriniz.

5 Düzlemde beş nokta, bu noktaların belirttiği doğrulardan herhangi ikisi birbirine paralel, dik veya çakışık olmayacak şekilde seçiliyor. Her noktadan, diğer dört noktanın belirttiği doğrulara dikler çiziliyor. Bu dikmelerin en fazla kaç noktada kesiştiğini belirleyiniz?

6 $ABCD$ dörtyüzlüsünde, D köşesi $\triangle ABC$'nin ağırlık merkezi olan D_0 ile birleştiriliyor. A, B, C noktalarından DD_0'a paraleller çiziliyor. Bu doğrular, BCD, CAD, ABD düzlemlerini sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kesiyor. $ABCD$'nin hacminin $A_1B_1C_1D_0$'nın hacminin üçte biri olduğunu kanıtlayınız. D_0, $\triangle ABC$ içerisinde herhangi bir nokta olsa, aynı oran sağlanır mı?

7. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1965

1

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

eşitsizliğini sağlayan $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığındaki tüm x değerlerini bulunuz.

2 Bilinmeyenleri x_1, x_2, x_3 olan

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

denklem sisteminin katsayıları aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} pozitiftir,

(b) kalan katsayılar negatif,

(c) her denklemde katsayılar toplamı pozitiftir.

Buna göre verilen sistemin tek çözümünün $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ olduğunu gösteriniz.

3 AB ve CD ayrıtlarının uzunlukları sırasıyla a ve b olan $ABCD$ dörtyüzlüsü veriliyor. AB ve CD aykırı doğruları arasındaki mesafe d, aralarındaki açı ω'dır. AB ve CD doğrlarına paralel olan ϵ düzlemi, $ABCD$ dörtyüzlüsünü iki katı cisme bölüyor. ϵ düzleminin AB ve CD'ye olan uzaklıkları oranı k ya eşittir. Buna göre elde edilen iki katı cismin hacimleri oranını hesaplayınız.

4 Herhangi biri ile, diğer üçünün çarpımının toplamı 2 ye eşit olan tüm x_1, x_2, x_3, x_4 gerçel sayılarını bulunuz.

5 AOB açısı dar olan $\triangle OAB$ yi ele alalım. $M \neq O$ noktasından OA ve OB ye çizilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q dur. $\triangle OPQ$ nin yükseklikleri H de kesişiyor. M,

(a) AB kenarı üzerinde

(b) $\triangle OAB$ içerisinde

değişirken, H'nin geometrik yeri nedir?

6 Düzlemde n nokta ($n \geq 3$) veriliyor. Her nokta çifti, doğru parçaları ile birleştiriliyor. Bu doğru parçalarının en uzununun uzunluğu d olsun. Uzunluğu d olan doğru parçalarının kümesinin eleman sayısının n'den çok olamayacağını gösteriniz.

8. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1966

1 25 yarışmacıdan her biri A, B, C problemlerinden en az birisini çözmüştür. A'yı çözemeyip B'yi çözenlerin sayısı, A'yı çözemeyip C'yi çözenlerin sayısının iki katıdır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı, A'yı çözüp B ve C'den en az birini çözenlerin sayısından bir fazladır. Sadece A'yı çözenlerin sayısı sadece B'yi çözenler ile sadece C'yi çözenlerin toplamına eşitse, sadece B'yi çözen kaç kişi vardır?

2 Bir üçgenin kenarları a, b, c; bu kenarların karşılarındaki açılar da sırasıyla α, β, γ dır.

$$a + b = \tan \frac{\gamma}{2}(a \tan \alpha + b \tan \beta)$$

ise, bu üçgenin ikizkenar olduğunu kanıtlayınız.

3 Bir düzgün dörtyüzlünün köşelerinin bu dörtyüzlünün çevrel küresinin merkezinden olan uzaklıkları toplamının, uzaydaki başka bir noktanın bu köşelere olan uzaklıkları toplamından az olduğunu kanıtlayınız.

4 Her n doğal sayısı ve her $x \neq k\pi/2^t (t = 0, 1, \cdots, n; k \in \mathbb{Z})$ gerçel sayısı için,

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

olduğunu gösteriniz.

5 a_1, a_2, a_3, a_4 dört farklı gerçel sayı olmak üzere;

$$|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1$$

sistemini çözünüz.

6 ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M noktaları alınıyor. AML, BKM, CLK üçgenlerinin en az birinin alanının ABC üçgeninin alanının dörtte birinden çok olmadığını gösteriniz.

9. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1967

1 Kenarları $AB = a$ ve $AD = 1$ olan $ABCD$ paralelkenarında $\angle BAD = \alpha$ dır. $\triangle ABD$ dar açılı ise, A, B, C, D merkezli ve 1 yarıçaplı dört çember ile paralelkenarın kaplanabilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 Bir dörtyüzlünün sadece bir kenarının uzunluğu 1 den büyükse, hacminin $\leq 1/8$ olduğunu kanıtlayınız.

3 k, m, n doğal sayılar olmak üzere; $m + k + 1$ sayısı $n + 1$'den büyük bir asal sayıdır.$c_s = s(s + 1)$ olsun.Bu durumda,

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k)$$

çarpımının $c_1c_2\cdots c_n$ çarpımı ile bölündüğünü gösteriniz.

4 $A_0B_0C_0$ ve $A_1B_1C_1$ üçgenleri dar açılıdır. $\triangle A_1B_1C_1$ ile benzer olan (A_1, B_1, C_1 köşeleri sırasıyla A, B, C köşeleri ile eşleşiyor) ve $A_0B_0C_0$ üçgenini çevreleyen (A_0, B_0, C_0 sırasıyla BC, CA, AB üzerinde yer alıyor) tüm ABC üçgenlerini ele alalım. Bu tip üçgenler arasından en büyük alanlısını belirleyiniz, bu üçgeni çiziniz.

5 $a_1, a_2, \ldots, a_8$ hepsi birden sıfıra eşit olmayan gerçel sayılar olmak üzere;

$$c_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$$

$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2$$

$$\cdots$$

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n$$

$$\cdots$$

şeklinde tanımlanan $\{c_n\}$ dizisini ele alalım. $\{c_n\}$ dizisinin sonsuz sayıda teriminin sıfıra eşit olduğunu varsayın. $c_n = 0$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

6 Bir spor müsabakasında, peşpeşe $n > 1$ günde m madalya dağıtılıyor. İlk gün, bir madalya ve kalan $m - 1$ madalyanın 1/7'si dağıtılıyor. İkinci gün, iki madalya ve kalan madalyaların 1/7'si dağıtılıyor. Bu böyle devam ediyor. n. gün, yani sonuncu gün, geriye kalan n madalya dağıtılıyor. Müsabaka kaç gün sürdü, müsabakada toplamda kaç madalya dağıtıldı?

10. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1968

1 Kenar uzunlukları ardışık tam sayılar olan ve açılarından biri diğerinin iki katı olan, bir ve yalnız bir üçgenin bulunduğunu kanıtlayınız.

2 Ondalık yazımındaki rakamların çarpımı, $x^2 - 10x - 22$ ye eşit olan tüm x doğal sayılarını bulunuz.

3 $a \neq 0, b, c$ gerçel sayılar olmak üzere; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri için

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ &\cdots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c &= x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

tanımlanan denklem sistemini ele alalım. $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ olsun. Bu sistemin,

(a) $\Delta < 0$ ise, çözümünün olmadığını,

(b) $\Delta = 0$ ise, tam olarak bir çözümünün olduğunu,

(c) $\Delta > 0$ ise, birden fazla çözümünün olduğunu gösteriniz.

4 Her dörtyüzlüde, uzunlukları bir üçgenin kenarları olabilen, üç ayrıtının birleştiği bir köşenin varlığını kanıtlayınız.

5 Tüm gerçel x sayıları için tanımlı, gerçel değerli f fonksiyonu, bir a sabiti için ve tüm x sayıları için

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

eşitliğini sağlıyor.

(a) f fonksiyonunun periyodik olduğunu (tüm x sayıları için $f(x+b) = f(x)$ olacak şekilde bir b pozitif sayısının bulunduğu) gösteriniz.

(b) $a = 1$ için, gerekli şartları sağlayan sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

6 Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$$

toplamını hesaplayınız.($[x]$ ile, x i aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

11. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1969

1 Şu özelliği sağlayan sonsuz çoklukta a doğal sayısının olduğunu gösteriniz: $z = n^4 + a$ sayısı, n doğal sayısının hiçbir değeri için asal değildir.

2 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sabitleri ve x gerçel değişkeni için

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

şeklinde tanımlanıyor. $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ise, $x_2 - x_1 = m\pi$ olacak şekilde bir m tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

3 Her $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değeri için, k tane ayrıtının uzunluğu a ve geri kalan $6 - k$ ayrıtının uzunluğu 1 olan bir dörtyüzlünün var olması için; $a > 0$ sayısı hakkında gerek ve yeter koşulları bulunuz.

4 AB çaplı γ yarım çemberi veriliyor. C, γ üzerinde A ve B den farklı bir nokta; D de C den AB ye inilen dikmenin ayağıdır. Üçü de AB doğrusuna teğet olan γ_1, γ_2, γ_3 çemberlerini ele alalım. Bunlardan γ_1, $\triangle ABC$'nin kenarlarına teğet, γ_2 ve γ_3 de γ ve CD ye teğet olup CD ye göre farklı taraflarda yer almaktadır. γ_1, γ_2 ve γ_3 ün ikinci bir ortak teğetinin olduğunu kanıtlayınız.

5 Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan $n > 4$ nokta veriliyor. Bu noktaların oluşturduğu en az $\binom{n-3}{2}$ dışbükey çokgenin bulunabileceğini gösteriniz.

6 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ şartını sağlayan tüm $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ gerçel sayıları için

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşulları veriniz.

12. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1970

1 M, $\triangle ABC$ nin AB kenarı üzerinde bir nokta olsun. r_1, r_2 ve r sırasıyla AMC, BMC ve ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları olsun. q_1, q_2 ve q da, sırasıyla aynı üçgenlerin ACB açıları üzerinde yer alan dışteğet çemberlerinin yarıçapları olsun.

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{p}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 a, b ve n tam sayıları 1 den büyük olup a ve b iki sayı sisteminin tabanlarıdır. a tabanındaki A_{n-1} ve A_n sayıları ile, b tabanındaki B_{n-1} ve B_n sayıları arasında

$$\begin{array}{rcl} A_n &=& x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ B_n &=& x_n x_{n-1} \dots x_0, \quad B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0, \\ x_n &\neq& 0, \quad x_{n-1} \neq 0. \end{array}$$

bağıntısı vardır.

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \Leftrightarrow a > b$$

olduğunu gösteriniz.

3 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ gerçel sayıları arasında

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \dots$$

bağıntısı vardır. $b_1, b_2, \dots, b_n, \cdots$ sayıları

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

şeklinde tanımlanıyor.

(a) Her n için $0 \leq b_n < 2$ eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz.

(b) $0 \leq c < 2$ şartını sağlayan bir c sayısı verildiğinde, $b_n > c$ şartını sağlayan yeterince büyük n ler için, yukarıdaki özellikleri sağlayana $a_0, a_1, \dots$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

4 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ kümesinin birideki elemanların çarpımının, diğerindeki elemanların çarpına eşit olacak şekilde iki parçaya ayrılmasını mümkün kılan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5 $ABCD$ dörtyüzlüsünde BDC açısı dik açıdır. D den ABC düzlemine inilen dikmenin ayağı olan H, aynı zamanda $\triangle ABC$ nin yüksekliklerinin kesişim noktasıdır.

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

olduğunu kanıtlayınız. Eşitlik hangi dörtyüzlü için geçerlidir?

6 Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 100 nokta veriliyor. Bu noktaları köşe kabul eden tüm üçgenleri ele alalım. Bu üçgenlerin %70 inden daha fazlasının dar açılı olamayacağını gösteriniz.

13. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1971

1 Aşağıdaki iddianın $n = 3$ ve $n = 5$ için doğru, bunun haricinde her $n > 2$ doğal sayısı için yanlış olduğunu gösteriniz.

Her $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları için,

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n) + \cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

2 Köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_9$ olan bir P_1 çokyüzlüsünü ele alalım. $i = 2, 3, \ldots, 9$ olmak üzere; P_i ile, P_1 çokyüzlüsünün A_1 den A_2 ye ötelenmesi ile elde edilen çokyüzlüyü gösterelim. $P_1, P_2, \ldots, P_9$ çokyüzlülerinden en az ikisinin ortak bir iç noktaya sahip olduğunu kanıtlayınız.

3 $2^k - 3$ $(k = 2, 3, \ldots)$ biçimdeki tam sayılar kümesinin herhangi iki elemanı aralarında asal olan sonsuz elemanlı bir alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

4 $ABCD$ dörtyüzlüsünün yüzlerinden her biri dar açılı üçgendir. X, AB kenarı üzerinde A ve B den farklı bir noktadır. Benzer şekilde Y, Z, T sırasıyla BC, CD, DA kenarlarının iç noktalarıdır. Tüm $XYZTX$ kapalı çokgensel yollarını ele alalım.

(a) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, çokgensel yollar arasından en kısa yola sahip olanın bulunmadığını gösteriniz.

(b) $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$ ise, sonsuz çoklukta en kısa çokgensel yol olduğunu, $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$ olmak üzere; bu en kısa yolun uzunluğunun da $2 \cdot AC \cdot \sin(\alpha/2)$ olduğunu gösteriniz.

5 Her m doğal sayısı için, düzlemde şu özelliği sağlayan bir S noktalar kümesinin var olduğunu gösteriniz: S deki her A noktası için, S de, A dan birim uzaklıkta olan tam olarak m nokta vardır.

6 $i, j = 1, 2 \ldots, n$ olmak üzere; $A = (a_{ij})$ elemanları negatif olmayan tam sayılar olan bir kare matris olsun. Herhangi bir eleman $a_{ij} = 0$ olduğunda i-inci satır ile j-inci sütundaki elemanların toplamının $\geq n$ olduğunu biliyoruz. Matristeki tüm elemanların toplamının $\geq n^2/2$ olduğunu gösteriniz.

14. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1972

1 Onluk sistemde, iki basamaklı on farklı sayıdan oluşan bir kümeden, elemanları toplamları aynı olan iki ayrık altküme seçilebileceğini gösteriniz.

2 $n \geq 4$ olmak üzere; her kirişler dörtgeninin her biri kirişler dörtgeni olan n dörtgene ayrılabileceğini kanıtlayınız.

3 Negatif olmayan her m ve n tam sayıları için,

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

kesrinin bir tam sayıya eşit olduğunu gösteriniz. ($0! = 1$.)

4 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitif gerçel sayılar olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0
\end{aligned}$$

eşitsizlik sisteminin sağlayan tüm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ beşlilerini bulunuz.

5 Tüm x, y gerçel sayıları için tanımlı gerçel değerli f ve g fonksiyonları, her x, y için

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(x)$ tamamiyle sıfır değilse ve her x için $|f(x)| \leq 1$ ise, her y için $|g(y)| \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

6 Dört farklı paralel düzlem veriliyor. Her bir düzlem üzerinde bir köşesi bulunan düzgün bir dörtyüzlünün var olduğunu kanıtlayınız.

15. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1973

1 g doğrusu üzerinde O noktası; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktaları g ile aynı düzlemde, g nin aynı tarafında ve $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ vektörleri birim vektör olacak şekilde alınıyor. $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ ile $\overrightarrow{OM}$ vekötürünün uzunluğu gösterilmek üzere; n tek ise,

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 M; uzayda, hepsi birden aynı düzlemde yer almayan sonlu noktalar kümesi olsun. M kümesindeki herhangi iki A ve B noktası için, AB ile CD paralel olacak; ama çakışık olmayacak şekilde M kümesinden C ve D noktaları seçilebiliyorsa, bu şekilde bir M kümesinin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

3 a ve b gerçel sayıları olmak üzere;

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

denkleminin en az bir gerçel çözümü olsun. Bu şekildeki tüm (a, b) sayı çifti için, $a^2 + b^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4 Bir asker, eşkenar üçgen şeklindeki bir bölgede mayın taraması yapıyor. Kullandığı mayın tarayıcı, eşkenar üçgenin yüksekliğinin yarısı kadar bir yarıçaplı bir dairenin içerisini tarayabiliyor. Asker üçgenin köşelerinden birinden başlayarak tüm bölgeyi taramak amacıyla yola koyuluyor. Askerin görevini en kısa mesafede tamamlayabileceği yolu bulunuz.

5 G; gerçel x değişkeninin

$$f(x) = ax + b, a \text{ ve } b \text{ gerçel sayılar}$$

biçimindeki sabit olmayan fonksiyonlarının kümesi olup, aşağıdaki özellikleri taşımaktadır:

(a) f ve g fonksiyonları G de ise, $g \circ f$ fonksiyonu da G dedir. (Burada $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ oluyor.)

(b) f, G de ise, tersi olan f^{-1} de G dedir. (Burada $f(x) = ax + b$ nin tersi $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ oluyor.)

(c) G deki her f için, $f(x_f) = x_f$ olacak şekilde x_f gerçel sayısı vardır.

G deki her f için $f(k) = k$ olacak şekilde bir k gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

6 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif sayılar, q da $0 < q < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir gerçel sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sayılarını bulunuz:

(a) $k = 1, 2, \ldots, n$ için $a_k < b_k$,

(b) $k = 1, 2, \ldots, n-1$ için $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$,

(c) $b_1 + b_2 + \ldots b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

16. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1974

1 Üç oyuncu A, B ve C aralarında şöyle bir oyun oynuyor: Üç kartın her birine bir tam sayı yazılıyor. Bu üç p, q, r sayısı $0 < p < q < r$ koşulunu sağlıyor. Üç kart karıştırıldıktan sonra, her bir oyuncuya bir kart veriliyor. Her bir oyuncu, elindeki kartta yazılı sayı kadar fiş alıyor.

Bu süreç (kartların karıştırılması, dağıtılması, fişlerin alınması) en az iki tur sürüyor. Son tur sonunda A nın 20, B nin 10 ve C nin de 9 fişi vardır. Son turda B, r fiş almıştır. Buna göre, hangi oyuncu ilk turda q fiş almıştır?

2 ABC üçgeninin AB kenarı üzerinde bir D noktası alındığında, CD nin AD ile DB nin geometrik ortası olması için gerek ve yeter koşulun

$$\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

3 Hiçbir $n \geq 0$ tam sayısı için, $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ sayısının 5 ile bölünmediğini kanıtlayınız.

4 8×8 bir satranç tahtasının p adet kesişmeyen dikdörtgene aşağıdaki koşullarda bölündüğü durumları ele alalım:

(i) Her dikdörtgen, siyah kareler kadar beyaz kare içeriyor.

(ii) i. dikdörtgendeki beyaz karelerin sayısı a_i ise, $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

Bu şekilde bir parçalanmayı mümkün kılan en büyük p sayısını bulunuz. Bu p değeri için, mümkün olan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_p$ dizilerini belirleyiniz.

5 a, b, c, d rastgele seçilmiş pozitif sayılar olmak üzere,

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

toplamının alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

6 P; tam katsayılı, sabit olmayan bir polinom olsun. $(P(k))^2 = 1$ eşitliğini sağlayan farklı k tam sayılarının sayısı $n(P)$ ise, $\deg(P)$ ile P polinomunun derecesi gösterilmek üzere, $n(P) - \deg(P) \leq 2$ olduğunu kanıtlayınız.

17. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1975

1 x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \text{ ve } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

olacak şekilde gerçel sayılar olsun. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nin herhangi bir permütasyonu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ise,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 $a_1, a_2, a_3, \ldots$; pozitif tam sayıların artan sonsuz bir dizisi olsun. x, y pozitif tam sayılar ve $q > p$ olmak üzere; her $p \geq 1$ için

$$a_m = xa_p + ya_q$$

şeklinde yazılabilen sonsuz çoklukta a_m sayısının bulunduğu kanıtlayınız.

3 Keyfi bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde, üçgenin dışına doğru, $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$ olacak şekilde ABR, BCP ve CAQ üçgenleri çiziliyor. $\angle QRP = 90°$ ve $QR = RP$ olduğunu kanıtlayınız.

4 4444^{4444} sayısı onluk sistemde yazılırsa, rakamları toplamı A dır. A nın rakamları toplamı B olsun. B nin rakamları toplamını bulunuz. (A ve B, onluk sistemde yazılmıştır.)

5 Birim çember üzerinde, herhangi ikisinin arasındaki uzaklık bir rasyonel sayı olacak şekilde 1975 nokta alınıp alınamayacağını, ispatlayarak, belirleyiniz.

6 Aşağıdaki özelliklere sahip tüm iki değişkenli P polinomlarını bulunuz:

(i) Bir n tam sayısı ve t, x, y gerçel sayıları için P, n. dereceden homojendir. Yani

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)$$

(ii) Tüm a, b, c gerçel sayıları için

$$P(b + c, a) + P(c + a, b) + P(a + b, c) = 0$$

(iii) $P(1, 0) = 1$

18. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1976

1 Düzlemde, alanı 32 olan bir dışbükey dörtgenin karşılıklı iki kenarı ile bir köşegeninin uzunlukları toplamı 16 dır. Diğer köşegenin uzunluğunun alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

2 $P_1(x) = x^2 - 2$ ve $j = 2, 3, \dots$ için $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ olsun. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için, $P_n(x) = x$ denkleminin tüm köklerinin gerçel ve farklı olduğunu gösteriniz.

3 Birim küplerle tamamen doldurulabilen dikdörtgen şeklinde bir kutu veriliyor. Kenarları kutunun kenarlarına paralel olacak şekilde her biri 2 hacimli küplerle bu kutunun en fazla tam olarak %40 ı doldurulabiliyorsa, böyle kutuların sahip olabileceği tüm boyutları belirleyiniz.

4 Toplamları 1976 olan pozitif tam sayıların çarpımı şeklinde ifade edilebilecek en büyük sayıyı (ispatlayarak) belirleyiniz.

5 $q = 2p$ ve her a_{ij} katsayısının $\{-1, 0, 1\}$ kümesinin bir elemanı olduğu, $x_1, x_2, \dots, x_q$ bilinmeyenli p denklemli aşağıdaki denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q &= 0 \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q &= 0 \end{aligned}$$

Sistemin

(a) tüm x_j ler ($j = 1, 2, \dots, q$) birer tam sayı,

(b) en az bir j değeri için $x_j \neq 0$,

(c) $|x_j| \leq q$ ($j = 1, 2, \dots, q$)

olacak şekilde bir $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ çözümünün olduğunu kanıtlayınız.

6 $\{u_n\}$ dizisi

$$u_0 = 2, u_1 = 5/2 \text{ ve } n = 1, 2, \dots \text{ için } u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2)$$

şeklinde tanımlanıyor. $[x]$ ile $\leq x$ olan en büyük tam sayı gösterilmek üzere; n pozitif tam sayıları için

$$[u_n] = 2^{[2^n - (-1)^n]/3}$$

olduğunu kanıtlayınız.

19. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1977

1 $ABCD$ karesinin içerisine ABK, BCL, CDM, DAN eşkenar üçgenleri çiziliyor. KL, LM, MN, NK doğru parçaları ile AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN doğru parçalarının orta noktalarının düzgün bir onikigenin köşeleri olduğunu kanıtlayınız.

2 Sonlu bir gerçel sayılar dizisinin herhangi ardışık yedi teriminin toplamı negatif, herhangi ardışık on bir teriminin toplamı ise pozitiftir. Buna göre, bu dizinin terim sayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

3 $n > 2$ olarak verilen bir tam sayı ve V_n, $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $1 + kn$ formundaki tam sayıların kümesi olsun. $m \in V_n$ sayısına; $pq = m$ olacak şekilde $p, q \in V_n$ sayıları bulunamıyorsa, V_n de *bölünemez* (çarpanlara ayrılamaz) denir. V_n de bölünemeyen elemanların çarpımı olarak birden fazla şeklinde ifade edilebilen bir $r \in V_n$ sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

4 a, b, A, B gerçel değişmezleri ve

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta$$

veriliyor. Her θ gerçel sayısı için $f(\theta) \geq 0$ ise,

$$a^2 + b^2 \geq 2 \text{ ve } A^2 + B^2 \leq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

5 a ve b pozitif tam sayılar olsun. $a^2 + b^2$ sayısı $a + b$ ile bölündüğü zaman, bölüm q ve kalan r oluyor. $q^2 + r = 1977$ olmasını sağlayan tüm (a, b) çiftlerini bulunuz.

6 $f(n)$, tüm pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı ve bu kümedeki tüm değerleri alan bir fonksiyon olsun. Her pozitif n tam sayısı için

$$f(n+1) > f(f(n))$$

ise, her n için

$$f(n) = n$$

olduğunu kanıtlayınız.

20. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1978

1 m ve n, $1 \leq m < n$ koşulunu sağlayan doğal sayılardır. 1978^m ile 1978^n sayılarının ondalık gösterimlerindeki son üç rakam eşittir. $m+n$ nin en küçük değerini almasını sağlayan m ve n yi bulunuz.

2 Bir kürenin içerisindeki bir P noktası veriliyor. P den çıkan ve ikişerli olarak birbirine dik olan üç ışın küreyi U, V ve W da kesiyor. PU, PV ve PW doğruları tarafından belirlenmiş paralelyüzlünün P köşesinin köşegence karşısındaki köşesi Q olsun. Yukarıda anlatıldığı gibi P den çıkan tüm üçlü ışınlar için, Q noktalarının geometrik yerini bulunuz.

3 Pozitif tam sayılar kümesi

$$\begin{array}{ccccccccc} f(1) & < & f(2) & < & \dots & < & f(n) & < & \dots, \\ g(1) & < & g(2) & < & \dots & < & g(n) & < & \dots \end{array}$$

ve her $n \geq 1$ için,

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

olacak şekilde iki ayrık $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$, $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ kümelerinin birleşimi ise, $f(240)$ ı belirleyiniz.

4 ABC üçgeninde $AB = AC$ dir. AB ve AC ye sırasıyla P ve Q da teğet olan çember, ABC üçgeninin çevrel çemberine de içten teğettir. PQ doğru parçasının orta noktasının ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olduğunu gösteriniz.

5 $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, 3 \dots, n, \dots)$, farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir dizi olsun. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

olduğunu gösteriniz.

6 Uluslararası bir topluluğun üyeleri altı farklı ülkeden gelmiştir. Üye listesi $1, 2, \dots, 1978$ ile numaralandırılmış 1978 isim içermektedir. Numarası kendi ülkesinden gelen iki üyenin numaralarının toplamına eşit olan veya numarası kendi ülkesinden gelen bir üyenin numarasının iki katı olan en az bir üyenin bulunduğunu ispatlayınız.

21. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1979

1 p ve q,

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

koşulunu sağlayan doğal sayılar olsun. p nin 1979 ile bölündüğünü kanıtlayınız.

2 $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgenini tepe, $B_1B_2B_3B_4B_5$ beşgenini de taban yüzü olarak kabul eden bir prizma veriliyor. Bu iki beşgenin her kenarı ile her $i, j = 1, \ldots, 5$ için tanımlanan A_iB_j doğru parçaları kırmızı ya da yeşile boyanıyor. Köşeleri, prizmanın köşeleri olan ve tüm kenarları boyanmış olan her üçgenin farklı renge boyanmış iki kenarı vardır. Tepe ve taban yüzlerindeki 10 kenarın da aynı renkte olduğunu gösteriniz.

3 Düzlemde, iki noktada keşisen iki çemberin kesişim noktalarından biri A olsun. Sabit hızlarla hareket eden iki nokta, A dan aynı anda başlayarak, kendi çemberlerinin üzerinde bir tam tur atarak aynı anda A ya gelmektedir. Düzlemde, herhangi bir anda, hareket eden noktalara eşit uzaklıkta yer alan sabit bir P noktasının bulunduğunu kanıtlayınız.

4 π düzlemi ile, bu düzlemde bir P noktası ile bu düzlemde yer almayan bir Q noktası veriliyor. $(QP+PR)/QR$ oranını en büyük yapan ve π düzleminde yer alan tüm R noktalarını bulunuz.

5

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$$

koşulunu sağlayan negatif olmayan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sayılarının bulunmasını sağlayan tüm gerçel a sayılarını bulunuz.

6 A ve E düzgün bir sekizgenin karşı iki köşesi olsun. Bir kurbağa, A dan başlayarak zıplıyor. Kurbağa, sekizgenin E hariç her köşesinden, komşu köşelerden birine zıplayabiliyor. E ye gelince ise zıplamayı bırakıyor. a_n ile tam olarak n zıplama sonucu E ye gelebilmeyi mümkün kılan farklı yolların sayısını gösterelim. $x = 2 + \sqrt{2}$ ve $y = 2 - \sqrt{2}$ olmak üzere; $a_{2n-1} = 0$ ve her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

Not: n zıplamalı bir yol, köşelerden oluşan bir $(P_0, \ldots, P_n)$ dizisi olup aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$,

(ii) her $0 \leq i \leq n-1$ için, $P_i \neq E$,

(iii) her $0 \leq i \leq n-1$ için, P_i ile P_{i+1} komşudur.

22. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1981

1 ABC üçgeninin içerisinde hareketli bir P noktası alınıyor. P den BC, CA, AB kenarlarına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F olmak üzere;

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

yi en küçük yapan tüm P noktalarını bulunuz.

2 $1 \leq r \leq n$ olmak üzere, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin r elemanlı tüm alt kümelerini ele alalım. Bu alt kümelerin her birinin en küçük bir elemanı var. Bu en küçük sayıların aritmetik ortalamasını $F(n, r)$ ile gösterirsek,

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$$

olduğunu gösteriniz.

3 $m, n \in \{1, 2 \ldots, 1981\}$ ve $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ koşullarını sağlayan m ve n tam sayıları için $m^2 + n^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

4 (a) Hangi $n > 2$ değerleri için, en büyük elemanı diğer $n - 1$ elemanın en küçük ortak katını bölecek şekilde n ardışık pozitif sayıdan oluşan bir küme bulunur?

(b) Hangi $n > 2$ değerleri için, bu özelliği sağlayan tam olarak bir küme vardır?

5 Verilen bir üçgenin içerisinde ortak bir O noktasına sahip üç eş çember, her biri üçgenin iki kenarına teğet olacak şekilde alınıyor. Üçgenin iç merkezi, çevrel merkezi ve O noktasının doğrudaş olduğunu kanıtlayınız.

6 $f(x, y)$ fonksiyonu, her negatif olmayan x, y tam sayıları için

(1) $f(0, y) = y + 1$,

(2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$,

(3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

koşullarını sağlıyor. $f(4, 1981)$ i belirleyiniz.

23. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1982

1 $f(n)$, tüm pozitif n tam sayıları için tanımlanmış, negatif olmayan tam sayı değerler alan bir fonksiyondur. Ayrıca, her m, n için

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ veya } 1$$

$$f(2) = 0, f(3) > 0, \text{ ve } f(9999) = 3333$$

dir. $f(1982)$ yi belirleyiniz.

2 Kenarları a_1, a_2, a_3 (a_i, A_i nin karşısındaki kenar) olan ikizkenar olmayan $A_1A_2A_3$ üçgeni veriliyor. Her $i = 1, 2, 3$ için; M_i ile a_i kenarının orta noktasını, T_i ile içteğet çemberin a_i kenarına dokunduğu noktayı gösteriyoruz. T_i nin A_i açısının iç açıortayına göre simetriğini S_i ile gösteriyoruz. M_1S_1, M_2S_2 ve M_3S_3 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

3 Aşağıdaki özelliklere sahip sonsuz pozitif gerçel sayılar dizisi x_n i ele alalım:

$x_0 = 1,$ ve her $i \geq 0$ için, $x_{i+1} \leq x_i$

(a) Bu tipteki her dizi için,

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$$

olacak şekilde bir $n \geq 1$ sayının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b)

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

eşitsizliğini sağlayan, yukarıda anlatılan şekilde bir dizi bulunuz.

4 n pozitif tam sayısı için,

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

denkleminin tam sayılarda bir (x, y) çözümü varsa, denklemin en az üç çözümünün olduğunu kanıtlayınız. $n = 2891$ için, denklemin çözümünün olmadığını gösteriniz.

5 $ABCDEF$ düzgün altıgeninin AC ve CE köşegenleri üzerinde

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

olacak şekilde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. B, M, N noktaları doğrudaş ise, r yi belirleyiniz.

6 S bir kenarı 100 olan bir kare olsun. L, bu kare içerisinde kendini kesmeyen ve $A_0 \neq A_n$ olmak üzere A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ doğru parçalarının birleşiminden oluşan bir yol olsun. S nin üzerindeki her P noktası için, L nin üzerinde P ye olan uzaklığı $1/2$ den büyük olmayan bir nokta bulunabildiğini varsayalım. L üzerinde, aralarındaki uzaklık 1 den büyük olmayan ve aralarındaki (L deki) yol 198 den küçük olmayan X ve Y noktalarının bulunduğunu kanıtlayınız.

24. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1983

1 Aşağıdaki koşulları sağlayan, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlanmış ve pozitif gerçel değerler alan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

(i) Tüm pozitif x, y sayıları için, $f(xf(y)) = yf(x)$;

(ii) $x \to \infty$ iken $f(x) \to 0$.

2 Eş olmayan, sırasıyla O_1 ve O_2 merkezli düzlemdeş C_1 ve C_2 çemberlerinin kesiştiği iki farklı noktadan biri A olsun. Bu çemberlerin ortak teğetlerinden biri C_1 e P_1 de, C_2 ye P_2 de; diğeri de C_1 e Q_1 de, C_2 ye Q_2 de dokunmaktadır. M_1, P_1Q_1 in orta noktası; M_2, P_2Q_2 nin orta noktası olsun. $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ olduğunu gösteriniz.

3 a, b, c; herhangi ikisinin 1 den büyük bir ortak böleni olmadığı pozitif tam sayılar olsun. x, y, z negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $xbc + yca + zab$ şeklinde ifade edilemeyen en büyük tam sayının $2abc - ab - bc - ca$ olduğunu gösteriniz.

4 ABC bir eşkenar üçgen ve $\mathcal{E}$ AB, BC ve CA doğru parçalarının üzerindeki (A, B, C dahil) tüm noktaların kümesi olsun. $\mathcal{E}$ nin her iki ayrık alt kümeye parçalanışı için, bu alt kümelerden en az birinin bir dik üçgenin köşelerini içerip içermediğini belirleyiniz. Cevabınızı açıklayınız.

5 Herhangi üçü bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olmayacak şekilde, her biri 10^5 e eşit ya 10^5 ten küçük 1983 tane pozitif tam sayı bulmak mümkün müdür? Cevabınızı açıklayınız.

6 a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olsun.

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin ne zaman sağlandığını belirtiniz.

25. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1984

1 $x+y+z=1$ eşitliğini sağlayan x, y, z negatif olmayan tam sayıları için, $0 \le yz+zx+xy-2xyz \le 7/27$ olduğunu kanıtlayınız.

2 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir a, b pozitif tam sayı ikilisi bulunuz:

(i) $ab(a+b)$ sayısı 7 ile bölünmez;

(ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ sayısı 7^7 ile bölünür.

Cevabınızı açıklayınız.

3 Düzlemde farklı O ve A noktası veriliyor. Düzlemdeki O dan farklı her X noktası için, $a(X)$ ile OA ve OX doğruları arasındaki, OA dan saat yönünün tersi yöndeki $(0 \le a(X) < 2\pi)$ açının radyan cinsinden değerini gösterelim. $C(X)$, O merkezli ve $OX + a(X)/OX$ uzunluktaki yarıçaplı çember olsun. Düzlemdeki her nokta, sonlu sayıdaki renklerden biri ile boyanıyor. $a(Y) > 0$ olmak üzere, $C(Y)$ çemberinin üzerindeki en az bir nokta ile aynı renge sahip bir Y noktasının bulunduğunu gösteriniz.

4 $ABCD$, CD doğrusu AB çaplı çembere teğet olan bir dörtgen olsun. AB doğrusunun CD çaplı çembere teğet olması için gerek ve yeter koşulun BC ile AD doğrularının paralel olması olduğunu kanıtlayınız.

5 Düzlemde, $n > 3$ köşeli bir dışbükey çokgenin tüm köşegenlerinin uzunlukları toplamı d olsun. $[x]$ ile x i aşmayan en büyük tam sayı gösterilmek üzere;

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

6 a, b, c, d; $0 < a < b < c < d$ ve $ad = bc$ şartlarını sağlayan tek tam sayılar olsun. Bazı k ve m tam sayıları için $a+d = 2^k$ ve $b+c = 2^m$ ise, $a = 1$ olduğunu kanıtlayınız.

26. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1985

1 Merkezi, $ABCD$ kirişler dörtgeninin AB kenarı üzerinde bulunan çembere, dörtgenin diğer kenarları teğettir. $AD + BC = AB$ olduğunu gösteriniz.

2 n ve k sayıları $k < n$ eşitsizliğini sağlayan aralarında asal iki doğal sayı olsun. $M = \{1, 2, \ldots n-1\}$ kümesindeki her sayı ya maviye ya da beyaza boyanıyor.

(i) Her $i \in M$ için, i ile $n - i$ aynı renkte;

(ii) her $i \in M$ için, $i \neq k$ olmak üzere, i ile $|i - k|$ aynı rekte

olduğu bilgisi veriliyor. M deki tüm sayıların aynı renkte olması gerektiğini kanıtlayınız.

3 Tam sayı katsayılı herhangi bir $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ polinomu için, $w(P)$ ile tek katsayıların sayısını gösterelim. $i = 0, 1, \ldots$ için, $Q_i(x) = (1+x)^i$ olsun. $i_1, i_2, \ldots, i_n$, $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ şeklinde tam sayılarsa;

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

4 Hiçbirinin 26 dan büyük bir asal çarpanı olmadığı 1985 farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir M kümesi veriliyor. M nin elemanları çarpımı bir tam sayının dördüncü kuvveti olan dört elemanlı en az bir alt kümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

5 ABC üçgeninin A ve C köşelerinden geçen O merkezli çember AB ve BC doğru parçalarını tekrardan, sırasıyla farklı K ve N noktalarında kesiyor. ABC ve KBN üçgenlerinin çevrel çemberleri B ve M gibi iki farklı noktada kesişiyor. OMB açısının dik açı olduğunu kanıtlayınız.

6 Her x_1 gerçel sayısı için, $x_1, x_2, \ldots$ dizisini

$$\text{her } n \geq 1 \text{ için}, x_{n+1} = x_n \left(x_n \frac{1}{n} \right)$$

olacak şekilde oluşturalım. Her n için

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

olacak şekilde tek bir x_1 değerinin olduğunu kanıtlayınız.

27. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1986

1 d; 2, 5 veya 3 sayılarına eşit olmayan herhangi bir pozitif tam sayı olsun. $\{2, 5, 13, d\}$ kümesinde, $ab - 1$ bir tam kare olmayacak şekilde farklı a, b sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

2 $A_1A_2A_3$ üçgeni ile aynı düzlemde bir P_0 noktası veriliyor. Her $s \geq 4$ için $A_s = A_{s-3}$ tanımlanıyor. ($k = 0, 1, 2, \ldots$ için) P_{k+1}, P_k nın saat yönünde A_{k+1} merkezli $120°$ döndürülmesi ile elde edilen görüntüsü olmak üzere; $P_1, P_2, P_3, \ldots$ noktalar kümesini oluşturuyoruz. $P_{1986} = P_0$ ise, $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar olduğunu kanıtlayınız.

3 Düzgün bir beşgenin her köşesine, bu beş sayının toplamı pozitif olacak şekilde tam sayılar veriliyor. Üç ardışık köşeye $y < 0$ olmak üzere, sırasıyla x, y, z sayıları verilmiş ise, x, y, z sayılarının sırasıyla $x + y$, $-y$, $z + y$ sayıları ile değiştirimesine izin veriliyor. Bu işlem, beş sayıdan en az biri negatif oluncaya kadar tekrarlanıyor. Bu işlemin sonlu sayıda adım sonunda sonlanıp sonlanmayacağını belirleyiniz.

4 A ve B, düzlemde, O merkezli düzgün bir n-genin ($n \geq 5$) iki ardışık köşesi olsun. OAB üçgenine eş XYZ üçgeni; başlangıçta OAB üçgeni ile çakışık olup, Y ile Z çokgenin kenarları üzerinde, X de çokgenin iç bölgesinde yer alacak şekilde düzlemde hareket ediyor. X in geometrik yerini bulunuz.

5 Negatif olmayan gerçel sayılarda tanımlı, negatif olmayan gerçel değerler alan ve

(i) her $x, y \geq 0$ için $f(xf(y))\, f(y)$,

(ii) $f(2) = 0$,

(iii) $0 \leq x < 2$ için $f(x) \neq 0$

koşullarını sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

6 Düzlemde her biri tam sayı koordinatlı bir noktalar kümesi veriliyor. Kümedeki noktalardan bazılarını kırmızıya geri kalanlarını da beyaza; koordinat eksenlerinden birine paralel herhangi bir düz L doğrusu için L üzerindeki beyaz ve kırmızı noktaların sayılarının farkı (mutlak değerce) 1 den büyük olmayacak şekilde boyamak her zaman mümkün müdür?

28. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1987

1 $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ kümesinin sabit noktalarının sayısı tam olarak k'ya eşit olan permütasyonlarının sayısı $p_n(k)$ olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

olduğunu gösteriniz.

(Not: Bir $S \neq \emptyset$ kümesinden kendi üzerine tanımlı ve bire-bir olan bir f fonksiyonuna S'nin bir permütasyonu denir. S'nin bir i elemanı için $f(i) = i$ ise i f'nin bir sabit noktasıdır denir.)

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde A açısının açıortayı BC kenarını L'de ve daha sonra ABC üçgeninin çevrel çemberini N'de kesmektedir. L noktasından AB ve AC kenarlarına çizilen dik doğrular AB kenarını K'da ve AC kenarını M'de kesmektedir. $AKNM$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

3 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ olan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gerçek sayıları veriliyor. Her $k \geq 2$ tam sayısı için hepsi birden sıfır olmayan öyle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının varlığını gösteriniz ki her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|a_i| \leq k - 1$ ve

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

olsun.

4 Negatif olmayan tam sayılar kümesinden kendi içine tanımlı ve her n için $f\left(f(n)\right) = n + 1987$ şartını sağlayan bir f fonksiyonunun olmadığını ispat ediniz.

5 Öklid düzleminde (iki boyutlu koordinat düzlemi) her $n \geq 3$ için n noktadan oluşan öyle bir küme bulunuz ki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık irrasyonel olsun ve her üç nokta dejenere olmayan ve alanı bir rasyonel sayıya eşit olan bir üçgen belirlesin.

6 $n \geq 2$ bir tam sayı olsun. Eğer $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$ şartını sağlayan her k tam sayısı için $k^2 + k + n$ bir asal tam sayı ise $k = 0, 1, \ldots, n-2$ için $k^2 + k + n$ sayılarının hepsinin asal olduğunu ispat ediniz.

29. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1988

1 Aynı düzlemde bulunan ve merkezleri aynı olan R ve r ($R > r$) yarıçaplı iki çember veriliyor. P küçük çember üzerinde sabit bir nokta ve B büyük çember üzerinde değişken bir nokta olsun. BP doğrusu büyük çemberi C noktasında kesiyor. BP'ye P noktasında dik olan l doğrusu küçük çemberi A noktasında kesiyor. (Eğer l, P noktasında çembere teğet ise $A = P$ dir.)

(i) $BC^2 + CA^2 + AB^2$ ifadesinin aldığı değerlerin kümesini bulunuz.

(ii) AB'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2 n bir pozitif tam sayı ve $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ bir B kümesinin alt kümeleri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(a) Her bir A_i'nin tam $2n$ tane elemanı vardır.

(b) Her bir $A_i < A_j$ $(1 \le i < j \le 2n+1)$ yalnızca bir tek eleman içerir.

(c) B'nin her bir elemanı en az iki tane A_i'de vardır.

B'nin her bir elemanını 0 veya 1 ile göstermek istiyoruz. Böyle bir gösterilimin, A_i'lerin her birinin tam n tane 0 içerecek şekilde yapılabilmesi için n'nin değeri ne olmalıdır?

3 Bir f fonksiyonu pozitif tam sayılar kümesinden, pozitif tam sayılar kümesine, her n pozitif tam sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3 \\ f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

$f(n) = n$ koşuluna uyan ve 1988'den küçük ya da 1988'e eşit olan n pozitif tam sayılarını bulunuz.

4

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \ge \frac{5}{4}$$

eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesinin, uzunluları toplamı 1988 olan ayrık aralıkların birleşimi olduğunu gösteriniz.

5 ABC, dik açısı A köşesinde olan bir dik üçgen ve D, A'dan çizilen yüksekliğin ayağı olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin iç çemberlerinin merkezlerinin birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kesmektedir. S ve T sırasıyla ABC ve AKL üçgenlerinin alanları ise, $S \ge 2T$ olduğunu gösteriniz.

6 a ve b pozitif tam sayıları, $ab+1$ sayısı a^2+b^2'yi tam olarak bölecek şekilde seçilsin. $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ ifadesinin, bir pozitif tam sayının karesi olduğunu gösteriniz.

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1989

1 $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ kümesinin aşağıdaki özelliklere uyan, ikişer ayrık A_i $(i = 1, 2, \ldots, 117)$ altkümelerinin birleşimi olarak yazılabildiğini ispatlayınız.

(i) Her bir A_i kümesinde 17 tane eleman bulunsun,

(ii) A_i kümelerinin her birindeki elemanlarının toplamı aynı olsun.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde, A açısının iç açıortayı ABC üçgeninin çevrel çemberi ile A_1 noktasında kesişmektedir. B_1 ve C_1 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. B ve C açılarının dış açıortaylarının AA_1 doğrusu ile kesişme noktası A_0 olsun. B_0 ve C_0 noktaları da benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(i) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, $AC_1BA_1CB_1$ altıgeninin alanının iki katına eşittir.

(ii) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının en az dört katıdır.

3 n ve k pozitif tam sayılar olsun. S bir düzlem üzerinde bulunan ve aşağıdaki iki koşula uyan n tane noktanın oluşturduğu küme olsun.

(i) S'deki herhangi üç nokta aynı doğru üzerinde değildir,

(ii) S'nin her bir P noktası için, bu P noktasına olan uzaklıkları aynı olan ve S'de bulunan en az k tane nokta vardır.

Bu koşullar altında

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

olduğunu ispatlayınız.

4 $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun ve $|AB|$, $|AD|$, $|BC|$ kenar uzunlukları

$$|AB| = |AD| + |BC|$$

koşulunu sağlasın. Bu dörtgenin içinde aşağıdaki özelliklere uyan bir P noktası vardır.

(i) P noktasının CD kenarına olan uzaklığı h kadardır.

(ii) $|AP| = h + |AD|$ ve $|BP| = h + |BC|$'dir.

Bu takdirde

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

olduğunu gösteriniz.

5 Her n pozitif tam sayısı için, her biri bir asal sayının tam kuvveti olmayan, ardışık n tane pozitif tam sayının var olduğunu ispatlayınız.

6 n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ kümesinin bir permütasyonu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ olsun. Eğer bu permütasyonda en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ için $|x_i - x_{i+1}| = n$ koşulu sağlanıyorsa, permütasyona P özelliğine sahiptir diyelim.

Her n için, P özelliğine sahip olan permütasyonların sayısının, P özelliğine sahip olmayanlardan daha fazla olduğunu gösteriniz.

31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1990

1 Bir çemberin AB ve CD kirişleri, çemberin içerisindeki E noktasında kesişiyor. M, EB doğru parçası üzerinde bir nokta olsun. D, E, M noktalarından geçen çembere E de teğet olan doğru BC ve AC doğrularını sırasıyla F ve G de kesiyor.

$$\frac{AM}{AB} = t$$

ise

$$\frac{EG}{EF}$$

ifadesinin t cinsinden değerini bulunuz.

2 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere; E kümesi, bir çember üzerindeki farklı $2n-1$ noktadan oluşan bir küme olsun. Bu noktalardan tam olarak k tanesi siyaha boyanıyor. Aralarındaki yaylardan biri üzerinde E kümesinden tam olarak n nokta olacak şekilde en az bir çift siyah noktanın bulunduğu boyamalara "iyi" diyeceğiz. E nin k noktasının her boyamasının iyi olduğu en küçük k değerini bulunuz.

3

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

ifadesinin tam sayı olmasını sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.

4 Pozitif rasyonel sayıların kümesini $\mathbb{Q}^+$ ile gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için,

$$f\left(xf(y)\right) = \frac{f(x)}{y}$$

koşulunu sağlayan bir $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonu bulunuz.

5 Başlangıçta verilmiş bir $n_0 > 1$ tam sayısı için, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ oyuncuları, $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sayılarını sırayla değişerek aşağıda tanımlanan şekilde seçiyor:

(n_{2k} sayısını bilerek) $\mathcal{A}$,

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

olacak şekilde bir n_{2k+1} sayısını;

(n_{2k+1} sayısını bilerek) $\mathcal{B}$,

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

sayısı bir asal sayının pozitif kuvveti olacak şekilde bir n_{2k+2} sayısını seçiyor.

$\mathcal{A}$ oyuncusu 1990 sayısını, $\mathcal{B}$ oyuncusu da 1 sayısını seçtiği takdirde oyunu kazanıyor. Hangi n_0 sayıları için:

(a) $\mathcal{A}$ nın kazanan bir stratejisi vardır?

(b) $\mathcal{B}$ nin kazanan bir stratejisi vardır?

(c) İki oyuncunun da kazanan bir stratejisi yoktur?

6 Aşağıdaki iki özelliğe sahip dışbükey bir 1990−genin bulunduğunu gösteriniz:

(a) Tüm açıları eşittir.

(b) 1990 kenarın uzunlukları $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1990^2$ sayılarının bir dizilişidir.

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1991

1 Verilen bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olsun. A, B, C açılarına ait içaçıortaylar karşı kenarları sırasıyla A', B', C' noktalarında kesiyor.

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 $n > 6$ bir tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sayıları n den küçük ve n ile aralarında asal tüm doğal sayılar olsun.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

ise, n sayısının ya bir asal sayı ya da 2 nin bir kuvveti olacağını kanıtlayınız.

3 $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$ olsun. S nin n elemanlı her altkümesi ikişerli olarak aralarında asal beş eleman içerdiğine göre, en küçük n tam sayısını bulunuz.

4 G nin k kenarlı bağlı bir çizge olduğunu varsayalım. Kenarları, her köşe iki veya daha çok kenara ait olacak ve bu kenarların etiketlerinin en büyük ortak böleni 1 olacak şekilde, $1, 2, \ldots, k$ sayıları ile etiketlendirmenin mümkün olduğunu kanıtlayınız.

[Bir *çizge*, *uçlar* diye adlandırılan noktalar kümesi ile bu uçlardan bazı çiftleri birleştiren *kenarlar* kümesinden oluşur. Her u, v uç çifti, en fazla bir kenara aittir. Her farklı x, y uçları için, her v_i, v_{i+1} $(0 \leq i < m)$ çifti G nin bir kenarı tarafından birleştirilecek ve $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$ olacak şekilde bir uçlar dizisi varsa, G çizgesi *bağlıdır* diyoruz.]

5 ABC bir üçgen ve P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta olsun. $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ açılarından en az birinin $30°$ ye eşit ya da $30°$ den küçük olduğunu gösteriniz.

6 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gerçel sayılarından oluşan sonsuz bir diziye, her $i \geq 0$ için $|x_i| \leq C$ olacak şekilde bir C sabiti varsa, *sınırlı* denir.

Herhangi bir $a > 1$ gerçel sayısı verildiğinde, her negatif olmayan farklı i, j tam sayı çifti için

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$$

olacak şekilde bir $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sınırlı sonsuz dizisi oluşturun.

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1992

1 $1 < a < b < c$ olmak üzere, $abc - 1$ tam sayısının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünmesini sağlayan tüm a, b, c tam sayılarını bulunuz.

2 $\mathbf{R}$ ile reel sayılar kümesini gösterelim. Her reel x, y için

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

bağıntısını sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 Uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Her bir nokta çifti bir kenar (yani bir doğru parçası) ile birleştiriliyor ve her kenar ya mavi ya kırmızıya boyanıyor ya da hiç boyanmadan bırakılıyor. Aşağıdaki koşulu sağlayan en küçük n sayısını bulunuz:

Kenarlardan tam olarak n tanesi boyandığında, boyalı kenarların kümesi içinde mutlaka üç kenarı da aynı renkte olan bir üçgen bulunur.

4 Düzlemde, C bir çember; L, C çemberine teğet olan bir doğru ve M ise L doğrusu üstünde bir nokta olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm P noktalarının geometrik yerinin bulunuz:

L doğrusu üstünde Q ve R gibi öyle iki nokta vardır ki, M, QR nin orta noktası ve C de PQR üçgeninin iç çemberi olur.

5 S, üç boyutlu uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan bir küme olsun. S_x, S_y ve S_z ile S deki noktaların sırasıyla yz düzlemi, zx düzlemi ve xy düzlemi üstüne dik izdüşümlerinden oluşan kümeleri gösterelim. Bu durumda

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

olduğunu kanıtlayınız. Burada $|A|$ ile sonlu bir A kümesindeki eleman sayısı gösterilmektedir.

(Not: Bir noktanın bir düzlem üstüne dik izdüşümü, o noktadan düzleme çizilen dikmenin ayağıdır.)

6 Her n pozitif tam sayısı için $S(n)$ sayısını aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük tam sayı olarak tanımlıyoruz: Her $k < S(n)$ pozitif tam sayısı için, n^2 sayısı k tane pozitif tam karenin toplamı olarak yazılabilir.

(a) Her $n > 4$ için $S(n) < n^2 - 14$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan bir n tam sayısı bulunuz.

(c) $S(n) = n^2 - 14$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1993

1 $n > 1$ bir tam sayı ve $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ olsun. $f(x)$ in, herbirinin derecesi en az 1 olan ve tüm katsayıları tam sayılar olan iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.

2 Daraçılı bir ABC üçgeni içindeki bir D noktası, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90°$ ve $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ koşullarını sağlamaktadır.

(a) $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ oranının değerini bulunuz.

(b) ACD ve BCD üçgenlerinin çevrel çemberlerine C noktasında çizilen teğetlerin dik olduklarını kanıtlayınız.

3 Sonsuz bir satranç tahtası üzerinde aşağıdaki oyun oynanıyor. Başlangıç durumunda, n^2 tane taş her karede bir taş olmak üzere birbirine bitişik karelerden oluşan $n \times n$ büyüklüğündeki bir blokta bulunmaktadırlar. Oyundaki bir hamle, dolu bir komşu kare üzerinden yatay veya düşey doğrultuda geçerek hemen ardındaki boş kareye atlamaktadır. Üzerinden atlanan taş tahtadan kaldırılmaktadır.

Hangi n değerleri için oyunun tahta üzerinde yalnızca bir taş kalacak şekilde sonuçlanacağını bulunuz.

4 Düzlemde verilen P, Q, R gibi üç nokta için, $m(PQR)$, PQR üçgeninin yüksekliklerinin minimumu olarak tanımlanıyor. (P, Q, R nin doğrusal olması durumunda $m(PQR) = 0$)

A, B, C düzleminde verilmiş noktalar olsun. Düzlemdeki herhangi bir X noktası için

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

olduğunu kanıtlayınız.

5 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $f(1) = 2$, ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $f(f(n)) = f(n) + n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) < f(n+1)$ koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun var olup olmadığını belirleyiniz.

6 $n > 1$ bir tam sayı olsun. Bir çember üzerine n tane lamba $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ yerleştirilmiştir. Her lamba **AÇIK** ya da **KAPALI**dır. $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ işlemler dizisi uygulanmaktadır. İşlem S_j yalnızca L_j'nin durumunu (diğer tüm lambalarının durumunu koruyarak) şu şekilde etkiler:

Eğer L_{j-1} **AÇIK** ise, S_j, L_j'nin durumunu **AÇIK**tan **KAPALI**ya ya da **KAPALI**dan **AÇIK**a çevirir. Eğer L_{j-1} **KAPALI** ise, S_j, L_j'nin durumunu değiştirmez.

Lambalar n moduna göre şöyle sıralanmıştır:

$$L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_1 = L_{n+1}, \text{vs.}$$

Başlangıçta bütün lambalar **AÇIK** durumdadır. Aşağıdakileri gösteriniz.

(a) Öyle bir pozitif tam sayı $M(n)$ vardır ki, $M(n)$ işlemden sonra tüm lambalar tekrar **AÇIK** duruma gelmektedir.

(b) Eğer n, 2^k şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

(c) Eğer n, $2^k + 1$ şeklindeyse, tüm lambalar $n^2 - n + 1$ işlemden sonra **AÇIK** duruma gelmektedir.

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1994

1 m ve n pozitif tam sayılar olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin farklı öyle elemanları olsun ki, $1 \le i \le j \le m$ olmak üzere $a_i + a_j \le n$ olduğu her durumda, $a_i + a_j = a_k$ olacak şekilde bir k $(1 \le k \le m)$ bulunsun.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2 ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olsun.

(a) M, BC'nin orta noktası; O da, AM doğrusu üstünde bulunan ve OB'nin AB'ye dik olmasını sağlayan nokta olsun.

(b) Q, BC kenarı üstünde, B ve C'den farklı herhangi bir nokta olsun.

(c) E, Q ve F aynı doğru üstünde bulunan farklı noktalar olmak üzere, E'nin AB doğrusu, F'nin de AC doğrusu üstünde bulunduğunu kabul edelim.

OQ'nun EF'ye dik olmasının, $|QE| = |QF|$ olması için gerek ve yeter bir koşul olduğunu kanıtlayınız.

3 Her k pozitif tam sayısı için, $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ kümesine ait ve 2 tabanına göre yazılımlarında tam olarak üç tane 1'in geçtiği elemanların sayısı $f(k)$ olsun.

(a) Her m pozitif tam sayısı için, $f(k) = m$ olacak şekilde en az bir k pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $f(k) = m$ eşitliğinin tam olarak bir k için sağlandığı tüm m pozitif tam sayılarını bulunuz.

4 $\dfrac{n^3 + 1}{mn - 1}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

5 S, -1'den kesin büyük reel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan tüm $f : S \to S$ fonksiyonlarını bulunuz:

(a) S'ye ait her x, y için, $f\left(x + f(y) + xf(y)\right) = y + f(x) + yf(x)$ olup,

(b) $\dfrac{f(x)}{x}$, $-1 < x < 0$ ve $0 < x$ aralıklarının her birinde kesin artan bir fonksiyondur.

6 Aşağıdaki koşulu sağlayan ve pozitif tam sayılardan oluşan bir A kümesinin var olduğunu gösteriniz:

Tüm elemanları asal sayılar olan sonsuz her S kümesi için, m ve n sayılarından her birinin S'ye ait k farklı elemanın çarpımı olmasını sağlayacak biçimde $K \le 2$, $m \in A$ ve $n \notin A$ pozitif tam sayıları vardır.

36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1995

1 A, B, C, D bir doğru üstünde belirtilen sırada dört farklı nokta olsun. AC ve BD çaplı çemberler X ve Y de kesişiyor. XY doğrusu BC yi Z de kesiyor. P, XY doğrusu üzerinde Z den farklı bir nokta olsun. CP doğrusu AC çaplı çemberi C ve M de, BP doğrusu BD çaplı çemberi B ve N de kesiyor. AM, DN, XY doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

2 a, b, c; $abc = 1$ koşulunu sağlayan pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

3 Düzlemde $1 \leq i < j < k \leq n$ için $\triangle A_iA_jA_k$ nın alanının $r_i + r_j + r_k$ olduğu herhangi üçü doğrusal olmayan $A_1, \ldots, A_n$ noktalarının ve $r_1, \ldots, r_n$ gerçel sayılarının bulunmasını sağlayan tüm $n > 3$ tam sayılarını bulunuz.

4 $i = 1, \ldots, 1996$ için

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

ve $x_0 = x_{1995}$ olacak şekilde $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ pozitif gerçel sayılar dizisi bulunduğuna göre, x_0 ın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

5 $ABCDEF$ dışbükey altıgeninde $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ ve $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ olsun. G ve H ın altıgenin iç bölgesinde $\angle AGB = \angle DHE = 2\pi/3$ olacak şekilde alınan noktalar olduğunu varsayalım. $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ olduğunu kanıtlayınız.

6 p tek bir asal sayı olsun. $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ kümesinin, elemanları toplamı p ile bölünecek şekilde p elemanlı kaç A alt kümesi vardır?

37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1996

1 Gerçel r sayısı ile $|AB| = 20$, $|BC| = 12$ boyutlarında bir $ABCD$ dikdörtgeni veriliyor. Dikdörtgen, 20×12 birim karelik ızgaraya bölünüyor. Bir kareden diğer kareye hareket edebilmek için, bu iki karenin merkezleri arasındaki uzaklığın $\sqrt{r}$ olması gerekiyor. Görevimiz, A köşesine sahip birim kareden başlayıp B köşesine sahip birim kareye giden bir hareketler dizisini bulmak.

(a) r, 2 veya 3 ile bölünüyorsa; görevin tamamlanamayacağını gösteriniz.

(b) $r = 73$ ise, görevin tamamlanabileceğini kanıtlayınız.

(c) $r = 97$ olduğunda, görev tamamlanabilir mi?

2 P, ABC üçgeninin iç bölgesinde

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

olacak şekilde bir nokta olsun. APB ve APC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla D ve E olsun. AP, BD, CE nin bir noktada kesiştiklerini gösteriniz.

3 S, negatif olmayan tam sayılar kümesini göstersin. S den kendisine

$$f\left(m + f(n)\right) = f\left(f(m)\right) + f(n) \qquad \forall m, n \in S$$

şeklinde tanımlanan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

4 a ve b pozitif tam sayıları $15a + 16b$ ve $16a - 15b$ sayıları birer pozitif tam sayının karesi olacak şekilde alınıyor. Bu tam karelerden küçük olanın alabileceği en küçük değer nedir?

5 $ABCDEF$ dışbükey altıgeninde AB, DE ye paralel; BC, EF ye paralel; CD de FA ya paraleldir. R_A, R_C, R_E; sırasıyla FAB, BCD, DEF üçgenlerinin çevrel yarıçapları ve P de altıgenin çevresi olsun.

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

6 p, q, n; $p+q < n$ olacak şekilde alınan üç pozitif tam sayı olsun. $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, aşağıdaki koşulları sağlayan bir tam sayı $(n+1)$ lisi olsun:

(a) $x_0 = x_n = 0$.

(b) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her i için ya $x_i - x_{i-1} = p$ ya da $x_i - x_{i-1} = -q$ dur.

$x_i = x_j$ olacak şekilde $(i, j) \neq (0, n)$ şartını sağlayan $i < j$ indislerinin bulunduğunu gösteriniz.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1997

1 Köşeleri düzlemdeki tam sayı koordinatlı noktalar olan birim karelere bakalım. Bu kareler (satranç tahtasındaki gibi) sırayla siyah ve beyaza boyanmış olsun. Her (m, n) pozitif tam sayı çifti için, köşeleri tam sayı koordinatlı noktalar olan ve m ve n uzunluğundaki dik kenarları yukarıdaki karelerin kenarları üstünde bulunan bir dik üçgen alalım. S_1 ile bu üçgendeki siyah bölgelerin toplam alanını; S_2 ile de aynı üçgendeki beyaz bölgelerin toplam alanını gösterelim.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

olsun.

(a) Her ikisi de tek veya her ikisi de çift pozitif m ve n tam sayıları için $f(m, n)$ değerini hesaplayınız.

(b) Her m ve n için $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

(c) $f(m, n) < C$ koşulunu m ve n'nin tüm değerleri için sağlayan bir C sabitinin bulunmadığını gösteriniz.

2 A açısı ABC üçgenindeki açıların en küçüğüdür. B ve C noktaları bu üçgenin çevrel çemberini iki yaya ayırıyor. U, B ve C arasındaki, A noktasını içermeyen yayın bir iç noktası olsun. $[AB]$ ile $[AC]$'nin orta dikmeleri AU doğrusunu sırasıyla V ve W noktalarında kesiyor. BV ile CW doğruları da T noktasında kesişiyor.

$$|AU| = |TB| + |TC|$$

olduğunu gösteriniz.

3 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olsun.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$'nin

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşulu sağlanacak biçimde bir $y_1, y_2, \ldots, y_n$ permüstasyonu bulunduğunu gösteriniz.

4 Elemanları $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ kümesine ait bir $n \times n$ matrise (n sütun ve n satırdan oluşan kare biçimindeki bir tabloya), eğer her $i = 1, \ldots, n$ için i-inci satır ile i-inci sütun birlikte S'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa, bir *gümüş matris* diyoruz.

(a) $n = 1997$ için hiç bir gümüş matrisin bulunmadığını;

(b) n'nin sonsuz sayıda değeri için gümüş matrislerin bulunduğunu gösteriniz.

5 $a \geq 1$, $b \geq 1$ olmak üzere,

$$a^{(b^2)} = b^a$$

eşitliğini sağlayan tüm (a, b) tam sayı sıralı ikililerini bulunuz.

6 Her n pozitif tam sayısı için, n'nin, 2'nin negatif olmayan tam sayı kuvvetlerinin toplamı olarak yazılış biçimlerinin sayısını $f(n)$ ile gösterelim. Toplamda geçen terimlerin yalnızca sırasının değişik olduğu yazılış biçimlerinini aynı sayıyoruz. Örneğin 4 sayısı; 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1 olarak dört şekilde yazılabileceğinden $f(4) = 4$ olur. Her $n \geq 3$ tam sayısı için

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

olduğunu kanıtlayınız.

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1998

1 $ABCD$ konveks dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine dik olup, AB ve DC kenarları paralel değildir. AB ve DC'nin orta dikmelerinin kesiştiği P notkasının $ABCD$'nin iç bölgesinde yer aldığı bilinmektedir. $ABCD$'nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olması olduğunu gösteriniz.

2 Bir yarışmada, $b \geq 3$ bir tek sayı olmak üzere, a yarışmacı ve b hakem bulunmaktadır. Her hakem her yarışmacıyı ya "başarılı" ya da "başarısız" olarak değerlendiriyor. k aşağıdaki özelliğe sahip bir sayı olsun: Herhangi iki hakemin en çok k yarışmacı hakkındaki değerlendirmeleri çakışmaktadır.

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğunu gösteriniz.

3 Her pozitif n tam sayısı için, $d(n)$ ile n'nin (1 ve n dahil olmak üzere) bölenlerinin sayısını gösterelim.

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

olmasını sağlayacak biçimde bir n sayısının bulunduğu tüm pozitif k tam sayılarını bulunuz.

4 $ab^2 + b + 7$'nin $a^2b + a + b$'yi bölmesini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

5 I ile, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini gösterelim. ABC'nin iç çemberinin BC, CA ve AB kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla K, L ve M olsun. B'den geçen ve MK'ya paralel olan doğru, LM ve LK doğrularını sırasıyla R ve S noktalarında kesiyor. $\angle RIS$'nin bir dar açı olduğunu gösteriniz.

6 $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesini göstersin. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $\mathbb{N}$'ye ait her s, t için

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını ele alalım. $f(1998)$'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.

40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 1999

1 Düzlemde aşağıdaki şartı sağlayan en az üç noktalı tüm S sonlu kümelerini belirleyiniz:

S deki herhangi iki farklı A ve B noktası için, AB doğru parçasının orta dikmesi, S nin bir simetri eksenidir.

2 $n \geq 2$ sabit bir tam sayı olsun.

(a) Aşağıdaki eşitsizliği, her $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ gerçel sayılarını için sağlayan en küçük C sabitini bulunuz.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

(b) Bu C sabiti için, eşitliğin hangi durumda sağlandığını belirleyiniz.

3 n sabit bir pozitif çift sayı olmak üzere; $n \times n$ kareli bir tahta ele alalım. Tahta n^2 birim kareden oluşuyor. Ortak kenara sahip karelere komşu kareler diyoruz.

Tahtanın N tane birim karesini, tahtadaki her kare (işaretli ya da değil) en az bir işaretlenmiş komşu kareye sahip olacak şekilde işaretliyoruz.

N nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4 Aşağıdaki koşulları sağlayan tüm (n, p) pozitif tam sayı çiftlerini belirleyiniz:

p asal,

$n \leq 2p$,

$(p-1)^n + 1$ sayısı n^{p-1} ile bölünüyor.

5 G_1 ve G_2 çemberleri, G çemberine sırasıyla, farklı M ve N noktalarında içten teğettir. G_1, G_2 nin merkezinden geçmektedir. G_1 ve G_2 nin kesiştiği noktalardan geçen doğru G yi A ve B de kesmektedir. MA ve MB doğruları, G_1 ile sırasıyla C ve D de kesişmektedir. CD nin G_2 ye teğet olduğunu kanıtlayınız.

6 Tüm x, y gerçel sayıları için

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2000

1 Γ_1 ve Γ_2 çemberleri M ve N de keşisiyor. ℓ, Γ_1 ve Γ_2 nin M ye yakın olan ortak teğeti olsun. ℓ, Γ_1 e A da, Γ_2 ye de B de değmektedir. M de geçen ve ℓ ye paralel olan doğru Γ_1 çemberini C de, Γ_2 çemberini de D de kesmektedir. CA doğrusu ile DB doğrusu E de, AN doğrusu ile CD doğrusu P de, BN doğrusu ile CD doğrusu Q da kesiştiğine göre, $EP = EQ$ olduğunu gösteriniz.

2 $abc = 1$ olacak şekilde alınan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

3 $n \geq 2$ pozitif tam sayı olmak üzere, başlangıçta n adet pire, yatay bir doğru boyunca, hepsi birlikte aynı noktada olmayacak şekilde yer almaktadır.

λ pozitif gerçel sayısı için, bir adım şu şekilde tanımlanıyor:

A, B nin solunda olacak şekilde alınan A ve B noktalarındaki herhangi iki pire için, A daki pire; doğru üzerinde B nin sağında ve $BC/AB = \lambda$ şartını sağlayan C noktasına atlıyor.

Doğru üzerindeki herhangi bir M noktası için, başlangıçtaki n pirenin dizilişi ne olursa olsun, tüm pireleri M nin sağına taşımayı mümkün kılan tüm λ değerlerini belirleyiniz.

4 Bir sihirbaz 1 den 100 kadar numaralanmış yüz kartı, biri kırmızı, diğeri beyaz, öteki mavi üç kutuya her kutuda en az bir kart olacak şekilde yerleştiriyor.

İzleyicilerden biri bu kutulardan ikisini seçtikten sonra, her iki kutudan da bir kart çekerek, bu kartların üzerinde yazan sayıların toplamını söylüyor. Bu toplama göre, sihirbaz içinden kart alınmayan kutuyu belirleyebiliyor.

Tüm kartlar bu kutulara, yukarıda anlatılan numara her zaman işleyecek şekilde kaç farklı biçimde dağıtılabilir? (Kartlardan en az biri farklı bir kutuya konmuşsa, bu iki yol farklı sayılacak.)

5 n, tam olarak 2000 asal sayı tarafından bölünecek ve $2^n + 1$ sayısı n ile bölünecek şekilde bir n pozitif tam sayısının bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

6 AH_1, BH_2, CH_3 doğru parçaları dar açılı ABC üçgeninin yükseklikleri olsun. ABC üçgeninin içteğet çemberi BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla T_1, T_2, T_3 noktalarında dokunsun. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları sırasıyla H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 doğrularının sırasıyla T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 doğrularına göre simetriği olsun.

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ün köşeleri ABC üçgeninin içteğet çemberi üzerinde olan bir üçgen belirttiğini kanıtlayınız.

42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2001

1 Dar açılı ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. BC üzerindeki P, A dan geçen yüksekliğin ayağı olsun.

$\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$ olduğunu kabul edelim.

$\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

2 Her pozitif gerçel a, b, c sayıları için

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

3 Yirmi bir kız ile yirmi bir erkek bir matematik yarışmasına katılıyor.

- Her yarışmacı en fazla altı soru çözmüştür.
- Her kız ve erkek için, ikisinin de çözdüğü en az bir soru vardır.

Buna göre, en az üç kız ve en az üç erkek tarafından çözülen bir sorunun bulunduğunu kanıtlayınız.

4 n, 1 den büyük tek bir tam sayı olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tam sayıları verilsin. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının her $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permütasyonu için

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

şeklinde tanımlanıyor. $n!$, $S(b) - S(c)$ yi bölecek şekilde b ve c permütasyonlarının ($b \neq c$) olduğunu kanıtlayınız.

5 ABC üçgeninde, BC üzerine P noktası, CA üzerinde Q noktası, AP doğrusu $\angle BAC$ nin açıortayı, BQ doğrusu da $\angle ABC$ nin açıortayı olacak şekilde alınıyor. $\angle BAC = 60^\circ$ ve $AB + BP = AQ + QB$ olduğunu biliniyor. Buna göre, ABC üçgeninin açılarının alabileceği değerleri bulunuz?

6 a, b, c, d tam sayıları $a > b > c > d > 0$ eşitsizliğini sağlasın.

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

ise, $ab + cd$ nin asal olmadığını kanıtlayınız.

43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2002

1 n pozitif bir tam sayı olsun. x, y $x+y<n$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tam sayılar olmak üzere; T ile düzlemdeki (x,y) noktalarının kümesini gösterelim. T deki her nokta kırmızı ya da maviye boyanıyor. Bir (x,y) noktası kırmızı ise, T deki $x' \leq x$ ve $y' \leq y$ eşitsizliklerinin ikisini de sağlayan (x',y') noktaları da kırmızıdır. Farklı x-koordinatına sahip n mavi noktadan oluşan bir kümeye X kümesi, farklı y-koordinatına sahip n mavi noktadan oluşan bir kümeye Y kümesi diyelim. X kümelerinin sayısı ile Y kümelerinin sayısının eşit olduğunu kanıtlayınız.

2 BC, O merkezli Γ çemberinin bir çapı olsun. A, Γ üzerinde $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. D, C yi içermeyen AB yayının orta noktası olsun. O dan geçen ve AD ye paralel olan doğru, AC ile J de kesişiyor. AO nun orta dikmesi Γ yı E ve F de kesiyor. J nin CEF üçgeninin iç merkezi olduğunu kanıtlayınız.

3 Sonsuz sayıda a pozitif tam sayısı için

$$\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$$

sayısını tam sayı yapan tüm $m,n \geq 3$ tam sayı ikililerini bulunuz.

4 n, 1 den büyük bir tam sayı olsun. n nin pozitif tam bölenleri

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

ve $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$ olsun.

(a) $D < n^2$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) D nin n^2 nin bir böleni olduğu tüm n sayılarını belirleyiniz.

5 Her x,y,z,t gerçel sayıları için

$$(f(x)+f(z))\,(f(y)+f(t)) = f(xy-zt) + f(xt+yz)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

6 $n \geq 3$ olmak üzere; düzlemde, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ 1 yarıçaplı çemberler olsun. Sırasıyla, $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ile bu çemberlerin merkezlerini gösterelim. Hiçbir doğrunun ikiden fazla çemberi kesmediğini varsayalım.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

olduğunu kanıtlayınız.

44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2003

1 A kümesi $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ kümesinin 101 elemanlı bir alt kümesi olsun.

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

kümeleri ikişerli olarak ayrık olacak şekilde S ye ait $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.

2

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

sayısının pozitif bir tam sayı olmasını sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

3 Her karşılıklı kenarları için, bu iki kenarın orta noktaları arasındaki uzaklık, bu iki kenarın uzunlukları toplamının $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşit olan dışbükey bir altıgenin tüm açılarının eşit olduğunu kanıtlayınız.
(Dışbükey $ABCDEF$ altıgeninin üç çift karşılıklı kenarı vardır: AB ile DE, BC ile EF, CD ile FA)

4 $ABCD$ kirişler dörtgeninde, D noktasından BC, CA, AB doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla P, Q, R olsun. $PQ = QR$ olması için gerek ve yeter koşulun $\angle ABC$ ile $\angle ADC$ açısının açıortaylarının AC ile noktadaş olması olduğunu gösteriniz.

5 n pozitif bir tam sayı ve $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayılar olsun.

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

olduğunu kanıtlayınız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşulun $x_1, \ldots, x_n$ in aritmetik bir dizi olması olduğunu gösteriniz.

6 p bir asal sayı olsun. q sayısı, hiçbir n tam sayısı için, $n^p - p$ sayısını bölmeyecek şekilde bir q asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2004

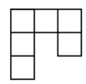
1 ABC, kenarları arasında $AB \neq AC$ bağıntısı olan dar açılı bir üçgen olsun. BC çaplı çember, AB ve AC kenarlarını sırasıyla M ve N noktalarında kesiyor. BC kenarının orta noktasını O ile gösterelim. $\angle BAC$ ve $\angle MON$ açılarının iç açıortayları R de kesişmektedir. BMR ve CNR üçgenlerinin çevrel çemberlerinin BC kenarı üzerinde yer alan ortak bir noktalarının olduğunu kanıtlayınız.

2 $ab + bc + ca = 0$ eşitliğini sağlayan her a, b, c gerçel sayıları için

$$f(a - b) + f(b - c) + f(c - a) = 2f(a + b + c)$$

bağıntısının sağlandığı tüm gerçel katsayılı polinomları bulunuz.

3 Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi altı birim kareden oluşan şekle, ya da bu şeklin döndürülmesi ya da yansıtılması ile oluşabilecek şekle "kanca" diyoruz.



Herhangi iki kanca üst üste binmeyecek ve hiçbir kanca dikdörtgenin dışına taşmayacak şekilde kancalar kullanarak tamamen kaplanabilecek tüm $m \times n$ dikdörtgenleri belirleyiniz.

4 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere; $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pozitif gerçel sayıları

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

koşulunu sağlasın. $1 \leq i < j < k \leq n$ koşulunu sağlayan her i, j, k sayıları için t_i, t_j, t_k sayılarının bir üçgenin kenarları olduğunu gösteriniz.

5 $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, BD köşegeni ABC açısının da CDA açısının da açıortayı değildir. P noktası, $ABCD$ nin iç bölgesinde

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ ve } \angle PDC = \angle BDA$$

olacak şekilde bir noktadır. $ABCD$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun $AP = CP$ olduğunu kanıtlayınız.

6 Ondalık yazılımında ardışık herhangi iki basamağı teklik-çiftlik açısından farklı olan pozitif tam sayıya *değişimli sayı* diyoruz. n pozitif tam sayısının değişimli bir tam kata sahip olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2005

1 ABC eşkenar üçgeninin BC kenarı üzerinde A_1, A_2; CA kenarı üzerinde B_1, B_2; AB kenarı üzerinde C_1, C_2 noktaları $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dışbükey altıgeninin tüm kenarları eşit olacak şekilde seçiliyor. A_1B_2, B_1C_2 ve C_1A_2 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

2 $a_1, a_2, \ldots$ tam sayılar dizisi, sonsuz çoktuklukta pozitif ve sonsuz çoklukta negatif elemandan oluşmaktadır. Her n pozitif tam sayısı için, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının n ile bölününce n farklı kalan bıraktığını varsayalım. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots$ dizisinde her tam sayının tam olarak bir kez geçtiğini kanıtlayınız.

3 x, y, z pozitif gerçel sayıları için $xyz \geq 1$ olmak üzere;

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

4

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n \geq 1$$

sonsuz dizisinin tüm terimleri ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayıları belirleyiniz.

5 $ABCD$, BC ile DA paralel olmayacak ve $BC = DA$ olacak şekilde sabit bir dışbükey dörtgen olsun. E ve F sırasıyla BC ve DA kenarları üzerinde $BE = DF$ koşulunu sağlayan hareketli noktalar olsun. AC ile BD doğrusu P de, BD ile EF doğrusu Q da, EF ile AC doğrusu da R de kesişiyor.

E ve F değişirken, PQR üçgenlerinin çevrel çemberlerinin P den başka ortak bir noktaya sahip olduklarını kanıtlayınız.

6 Katılımcılara 6 soru yöneltilen bir matematik yarışmasında, herhangi iki soruyu yarışmacıların $\frac{2}{5}$ sinden daha fazlası çözmüştür. Ayrıca, 6 soruyu da çözen bir yarışmacı çıkmamıştır. Tam olarak 5 soruyu çözen en az 2 yarışmacının bulunduğunu gösteriniz.

47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2006

1 İçteğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninin içinde,

$$m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})$$

olacak şekilde bir P noktası seçiliyor. $|AP| \geq |AI|$ olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $P = I$ olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

2 Bir P düzgün 2006-geni veriliyor. P nin bir köşegenine, uçları P nin çevresini, her birisi P nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor. P nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.

P, herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

3 Tüm a, b, c reel sayıları için

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük M reel sayısını bulunuz.

4 $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı ikililerini belirleyiniz.

5 Katsayıları tam sayı ve derecesi $n > 1$ olan bir $P(x)$ polinomu ile bir $k > 0$ tam sayısı veriliyor. $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, P nin k kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere, $Q(t) = t$ eşitliğini sağlayan t tam sayılarının sayısının en fazla n olacağını ispatlayınız.

6 Dışbükey bir P çokgeninin her b kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi b olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor. P nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının, P nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2007

1 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları verilmiş olsun. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için,

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun.

(a) Tüm $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayıları için,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \qquad (*)$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) $(*)$ da eşitliğin gerçekleşmesini sağlayan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2 A, B, C, D ve E den oluşan beş nokta, $ABCD$ bir paralelkenar ve $BCED$ konveks bir kirişler dörtgeni olacak biçimde verilmiş olsun. A dan geçen bir ℓ doğrusu, $[DC]$ doğru parçasını bir F iç noktasında ve BC doğrusunu da bir G noktasında kessin. $|EF| = |EG| = |EC|$ olduğunu varsayalım. ℓ nin, $\widehat{DAB}$ açısının açı ortayı olduğunu kanıtlayınız.

3 Bir matematik yarışmasına katılan yarışmacılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık her zaman karşılıklıdır. Bir yarışmacı grubundaki her yarışmacı çifti arkadaşsa, bu gruba bir *klik* diyelim. (Özellikle, ikiden az yarışmacıdan oluşan her grup bir kliktir.) Bir kliğin eleman sayısına bu kliğin *büyüklüğü* diyelim.

Bu yarışmadaki kliklerin büyüklüklerinin aldığı en büyük değer bir çift sayı olsun. Tüm yarışmacıların, bir odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değeri, diğer odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değerine eşit olacak biçimde iki odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

4 Bir ABC üçgeninde, $\widehat{BCA}$ açısının açı ortayı, üçgenin çevrel çemberini ikinci kez R de, $[BC]$ nin orta dikmesini P de ve $[AC]$ nin orta dikmesini de Q da kesiyor. $[BC]$ nin orta noktası K ve $[AC]$ nin orta noktası L olsun. RPK ve RQL üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu kanıtlayınız.

5 a ve b pozitif tam sayılar olsun. $4ab - 1$, $(4a^2 - 1)^2$ yi bölüyorsa, $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

6 n pozitif bir tam sayı olsun. Üç boyutlu uzayda $(n+1)^3 - 1$ noktadan oluşan

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kümesi veriliyor. Birleşimleri S kümesini kapsayan, ama $(0, 0, 0)$ noktasını içermeyen düzlemlerin sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2008

1 Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H olsun. Merkezi BC nin orta noktası olup H den geçen çember BC doğrusunu A_1 ve A_2 noktalarında kesiyor. Benzer şekilde, merkezi CA nin orta noktası olup H den geçen çember CA doğrusunu B_1 ve B_2 noktalarında ve merkezi AB nin orta noktası olup H den geçen çember AB doğrusunu C_1 ve C_2 noktalarında kesiyor. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ noktalarının aynı çember üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

2 (a) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan sonsuz tane x, y, z rasyonel sayı üçlüsü için yukarıdaki eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğünü gösteriniz.

3 Sonsuz tane n doğal sayısı için $n^2 + 1$ sayısının $2n + \sqrt{2n}$ den büyük asal böleninin olduğunu kanıtlayınız.

4 $wx = yz$ olmak üzere, tüm w, x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f\left(y^2\right) + f\left(z^2\right)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

koşulunu sağlayan tüm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (diğer deyişle f, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve pozitif değerler alan bir fonksiyondur) fonksiyonlarını bulunuz.

5 n ve k pozitif tam sayı olmak üzere, $k \geq n$ ve $k - n$ çift sayıdır. $1, 2, \ldots, 2n$ sayılarıyla numaralandırılmış $2n$ tane lambanın herbiri *açık* veya *kapalı* durumda olabiliyor. Başlangıçta lambaların hepsi kapalı durumdadır. Her hamlesinde bir lamba seçilerek, seçilen lambanın durumunu değistiren (açıktan kapalıya veya kapalıdan açığa) *hamleler* dizileri tanımlayalım.

Sonucunda 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren tüm hamleler dizilerinin sayısı N olsun.

Sonucunda yine 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n+1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren, fakat $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambalarla hiç hamle yapmayan tüm hamleler dizilerinin sayısı M olsun.

N/M oranının değerini bulunuz.

6 $|BA| \neq |BC|$ olmak üzere, $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. ABC ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberleri sırasıyla ω_1 ve ω_2 olsun. BA ışınınına A dan sonraki bir noktada ve BC ışınınına C den sonraki bir noktada teğet olan ve aynı zamanda AD ve CD doğrularına da teğet olan bir ω çemberinin olduğunu varsayalım. ω_1 ve ω_2 çemberlerinin ortak dış teğetlerinin ω çemberi üzerinde kesiştigini kanıtlayınız.

50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2009

1 n pozitif bir tam sayı; $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ de, $\{1, \ldots, n\}$ kümesine ait olan ve, her $i = 1, \ldots, k-1$ için, n sayısının $a_i(a_{i+1} - 1)$ sayısını bölmediğini kanıtlayınız.

2 O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi; P ve Q da, sırasıyla, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları üstünde, köşelerden farklı iki nokta olsun. K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M den geçen çembere Γ diyelim. PQ doğrusu Γ çemberine teğet ise, $|OP| = |OQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

3 Pozitif tam sayılardan oluşan ve kesin artan $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ ve } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

altdizilerinin her ikisi de birer artimetik dizi ise, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin kendisinin de bir aritmetik dizi olduğunu kanıtlayınız.

4 $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\widehat{CAB}$ ve $\widehat{ABC}$ açılarının açıortayları $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. K, ADC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olmak üzere; $m(\widehat{BEK}) = 45°$ ise, $m(\widehat{CAB})$ nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

5 Pozitif tamsayılar kümesinden pozitif tamsayılar kümesine tanımlı olan ve tüm a ve b pozitif tamsayıları için, yoz olmayan ve kenar uzunlukları

$$a, f(b) \text{ ve } f\left(b + f(a) - 1\right)$$

olan bir üçgenin bulunmasını sağlayan bütün f fonksiyonlarını belirleyiniz.

(*Yoz* üçgen, köşeleri doğrudaş olan üçgendir.)

6 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirinden farklı pozitif tamsayılar; M de, $n-1$ tane pozitif tam sayıdan oluşan ve $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sayısını içermeyen bir küme olsun. Bir çekirge, gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak sağa doğru, uzunlukları kendi seçtiği bir sırada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n sıçrayış yapacaktır. Çekirgenin sıçrayışlarının uzunluklarının sırasını, hiçbir sıçrayışta M ye ait bir noktaya düşmeyecek biçimde seçebileceğini kanıtlayınız.

51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2010

1 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları belirleyiniz. (Burada $\lfloor z \rfloor$ ile, z yi aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

2 Bir ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ve çevrel çemberi Γ dır. AI doğrusu Γ yı ikinci kez D de kesiyor.

$$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{CAE}) < \frac{1}{2} m(\widehat{BAC})$$

koşullarını sağlayacak biçimde, BDC yayı üstünde E ve $[BC]$ kenarı üstünde F noktası alınıyor. $[IF]$ doğru parçasının orta noktası G olsun. DG ve EI doğrularının Γ ya ait bir noktada kesiştiğini kanıtlayınız.

3 $\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

sayısının tam kare olmasını sağlayan tüm $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonskiyonlarını belirleyiniz.

4 P, ABC üçgeninin içinde yer alan bir nokta olsun. AP, BP ve CP doğruları, ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ yı ikinci kez sırasıyla, K, L ve M noktalarında kesiyor. Γ ya C noktasında teğet olan doğru da, AB doğrusunu S noktasında kesiyor. $|SC| = |SP|$ ise, $|MK| = |ML|$ olduğunu kanıtlayınız.

5 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ile gösterilen altı kutunun her birinde başlangıçta birer madenî para bulunuyor. İki tip işleme izin veriliyor:

Tip 1: $1 \le j \le 5$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_j kutusu seçiyoruz. B_j den bir madenî para çıkarıyoruz ve B_{j+1} e iki madenî para koyuyoruz.

Tip 2: $1 \le k \le 4$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_{k+1} ile B_{k+2} kutularının içeriklerini birbiriyle değiştiriyoruz.

Sonucunda, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 kutularının boş olmasını ve B_6 kutusunda da tam olarak $2010^{2010^{20}}$ madenî para olmasını sağlayan sonlu bir işlemler dizisi bulunup bulunmadığını belirleyiniz. (Burada $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ dir.)

6 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir pozitif gerçel sayılar dizisi olsun. Her $n > s$ için,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

olmasını sağlayan bir s pozitif tam sayısı bulunduğunu varsayalım. $\ell \le s$ ve her $n \ge N$ için $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ olacak biçimde bir ℓ ve N pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2011

1 Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi için, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ toplamını s_A ile gösteriyoruz. $1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere, $a_i + a_j$ nin s_A yı böldüğü (i, j) ikililerinin sayısını da n_A ile gösterelim. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan ve n_A nın alabileceği en büyük değeri almasını sağlayan tüm A kümelerini bulunuz.

2 $\mathcal{S}$ düzlemde en az iki noktadan oluşan sonlu bir küme olsun. $\mathcal{S}$ nin herhangi üç noktasının doğrudaş olmadığını varsayalım. Bir *yeldeğirmeni*, $\mathcal{S}$ ye ait tek bir P noktasından geçen bir ℓ doğrusu ile başlayan bir süreçtir. Bu doğru, *dönme merkezi* P olmak üzere, $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönüyor. Bu ikinci noktaya Q dersek, bundan sonra doğru, yeni dönme merkezi Q olmak üzere, tekrar $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönmeyi sürdürüyor. Bu süreç sonsuza kadar devam ediyor.

Oluşan yeldeğirmeninin $\mathcal{S}$ nin her noktasını sonsuz kez dönme merkezi olarak kullanmasını sağlayacak biçimde, $\mathcal{S}$ ye ait bir P noktası ve P den geçen bir ℓ doğrusu seçebileceğimizi gösteriniz.

3 Gerçel sayılar kümesinden kendisine tanımlı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

koşulunu sağlıyor. Her $x \leq 0$ için, $f(x) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

4 $n > 0$ bir tam sayı olsun. İki kefeli bir terazimiz ve ağırlıkları $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ olan n tane ağırlığımız var. Bu ağırlıkları n hamlede birer birer ve hiçbir aşamada sağ kefe sol kefeden daha ağır olmayacak biçimde teraziye yerleştirmemiz gerekiyor. Tüm ağırlıklar teraziye konulana kadar her hamlede, teraziye henüz konulmamış ağırlıklarda birini seçerek bunu sol veya sağ kefeye yerleştiriyoruz. Bu hamleler dizisini kaç farklı biçimde yapabileceğimizi belirleyiniz.

5 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini ve $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesini göstermek üzere; $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olsun. Tüm m, n tam sayıları için, $f(m) - f(n)$ farkının $f(m - n)$ ile bölündüğünü varsayalım. $f(m) \leq f(n)$ koşulunu sağlayan tüm m, n tam sayıları için, $f(n)$ sayısının $f(m)$ ile bölündüğünü kanıtlayınız.

6 ABC, çevrel çemberi Γ olan dar açılı bir üçgen olsun. ℓ, Γ ya teğet olan bir doğru ve ℓ nin BC, CA ve AB doğrularına göre yansıtılmasıyla elde edilen doğrular da sırasıyla, ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c olsun. ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c doğrularının belirlediği üçgenin çevrel çemberinin Γ çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2012

1 Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çemberin merkezi J noktası olsun. Bu dışteğet çember BC kenarına M, AB ve AC doğrularına ise sırasıyla K ve L noktalarında teğettir. LM ve BJ doğruları F noktasında, KM ve CJ doğruları ise G noktasında kesişiyor. AF ve BC doğrularının kesişim noktası S, AG ve BC doğrularının kesişim noktası ise T olsun. M'nin $[ST]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.

(ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki *dışteğet çember*; BC kenarına, B'nin ötesinde $[AB$ ışınına ve C'nin ötesinde $[AC$ ışınına teğet olan çemberdir.)

2 $n \geq 3$ bir tam sayı ve $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ olsun.

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n$$

olduğunu gösteriniz.

3 *Yalancının sayısını tahmin etme oyunu*, A ve B oyuncuları arasında oynanan bir oyundur. Oyun, her iki oyuncuya da önceden bildirilen k ve n pozitif tam sayılarına göre oynanıyor.

Oyunun başında A oyuncusu $1 \leq x \leq N$ olacak şekilde x ve N tam sayılarını seçer ve N sayısının ne olduğunu B oyuncusuna dürüstçe söyler, fakat x sayısını gizli tutar. Daha sonra B oyuncusu A oyuncusuna sorular sorarak x sayısı hakkında bilgi edinmeye çalışır. Her defasında B oyuncusu pozitif tam sayılardan oluşan bir S kümesi belirler (bu küme daha önceki bir soruda geçen küme de olabilir) ve A oyuncusuna "x sayısı S kümesinin elemanı mıdır?" diye sorar. B oyuncusu istediği kadar soru sorabilir. A oyuncusu istediği kadar yalan söyleyebilir, fakat herhangi ardışık $k + 1$ cevabından en az biri doğru olmak zorundadır.

B oyuncusu istediği kadar soru sorduktan sonra en fazla n pozitif tam sayıdan oluşan bir X kümesi belirlemelidir. Eğer x sayısı X kümesinin elemanı ise B oyunu kazanır, aksi durumda kaybeder.

(a) $n \geq 2^k$ ise, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantileyebileceğini kanıtlayınız.

(b) Yeterince, büyük her k tam sayısı için, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantilemesinin mümkün olmadığı bir $n \geq 1,99^k$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

4 $a + b + c = 0$ olmak üzere, tüm a, b, c tam sayıları için

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Burada $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesidir.)

5 Bir ABC üçgeninde $\angle BCA = 90°$ ve C köşesinden indirilen yüksekliğin ayağı D olsun. $[CD]$ doğru parçası üzerinde C ve D noktalarından farklı bir X noktası alınıyor. $[AX]$ doğru parçası üzerinde $|BK| = |BC|$ olacak şekilde bir K noktası ve benzer şekilde $[BX]$ doğru parçası üzerinde $|AL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası seçiliyor. AL ve BK doğrularının kesişim noktası M olsun. $|MK| = |ML|$ olduğunu gösteriniz.

6 Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan tam sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2013

1 Her k ve n pozitif tam sayı ikilisi için,

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

eşitliğini sağlayan $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (farklı olmaları gerekmeyen) pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2 Düzlem üzerindeki 4027 noktanın herhangi üçü doğrusal olmayıp, 2013 tanesi kırmızı ve 2014 tanesi mavi ise, bu 4027 noktaya bir *Kolombiya* konfigürasyonu diyelim. Düzlemde çizilen birkaç doğru düzlemi bölgelere ayırır. Bir doğrular kümesi, bir Kolombiya konfigürasyonu için aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, bu küme bu konfigürasyon için *iyi* kabul ediliyor.

- doğrulardan her biri, konfigürasyonun hiçbir noktasından geçmemektedir;
- her iki rengi birden içeren bölge bulunmamaktadır.

4027 noktalı herhangi bir Kolombiya konfigürasyonu verildiğinde, bu konfigürasyon için iyi olan ve k doğrudan oluşan bir küme bulunuyorsa, k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

3 Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çember BC kenarına A_1 noktasında teğet olsun. Benzer şekilde, B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberleri kullanarak CA kenarı üzerinde B_1 ve AB kenarı üzerinde C_1 noktalarını tanımlayalım. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel merkezi ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde ise, ABC üçgeninin bir dik üçgen olduğunu gösteriniz.

ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki dışteğet çember; BC kenarına, B'nin ötesinde AB ışınına ve C'nin ötesinde AC ışınına teğet olan çemberdir. B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberler de benzer biçimde tanımlanıyor.

4 Diklik merkezi H olan bir dar açılı ABC üçgeninde W, BC kenarı üzerinde B ve C den farklı bir nokta olsun. M ve N noktaları, sırasıyla B ve C ye ait yükseklik ayağı olsun. BWN nin çevrel çemberi w_1 olmak üzere; w_1 üzerinde bir X noktası, $[WX]$ doğru parçası w_1 in bir çapı olacak şekilde seçiliyor. Benzer biçimde CWM nin çevrel çemeri w_2 olmak üzere; w_2 üzerinde bir Y noktası, $[WY]$ doğru parçası w_2 nin bir çapı olacak şekilde seçiliyor. X, Y ve H noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

5 Pozitif rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}_{>0}$ ile gösterelim. Bir $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlamaktadır:

(i) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) $f(a) = a$ olacak şekilde bir $a > 1$ rasyonel sayısı vardır.

Her $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ için $f(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

6 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, bir çember üzerinde çemberi eşit yaylara bölen $n+1$ nokta işaretlenmiştir. $0, 1, \ldots, n$ sayılarının her biri tam olarak bir kez kullanılarak işaretli noktalara yazılmasına numaralandırma diyelim. Biri diğerinden çemberin döndürülmesi ile elde edilen iki numaralandırma aynı sayılmaktadır. Bir numaralandırmada, $a+d=b+c$ koşulunu sağlayan her $a<b<c<d$ için uçlarında a ve d yazan kiriş ile uçlarında b ve c yazan kiriş kesişmiyorsa, bu numaralandırmaya *güzel* diyelim.

Güzel numaralandırmaların sayısı M, $x+y \leq n$ ve $obeb(x, y) = 1$ koşullarını sağlayan (x, y) pozitif tam sayı sıralı ikililerinin sayısı N olsun.

$$M = N + 1$$

olduğunu gösteriniz.

55. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2014

1 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ sonsuz pozitif tam sayılar dizisi olsun. Tam olarak bir tane $n \geq 1$ tam sayısı için

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2 $n \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere, n^2 birim kareden oluşan $n \times n$ satranç tahtası verilmiştir. n kalenin; her satırda ve her sütunda tam olarak bir kale olmak üzere, bu satranç tahtasına yerleşimine *barışçıl* konfigürasyon diyelim. k nın en büyük hangi pozitif tam sayı değeri için; n kalenin her barışçıl konfigürasyonunda, üzerinde kale olmayan bir $k \times k$ karesi bulunur (yani bu $k \times k$ karesinin toplam sayısı k^2 olan birim karelerin hiçbirinde kale yoktur)?

3 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninde $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ dir. A dan BD ye çizilen dikmenin ayağı H olsun. S ve T noktaları sırasıyla $[AB]$ ve $[AD]$ kenarları üzerinde olmak üzere, H noktası SCT üçgeninin içinde ve

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°$$

ise, BD doğrusunun TSH üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

4 Dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerindeki P ve Q noktaları için $\angle PAB = \angle BCA$ ve $\angle CAQ = \angle ABC$ dir. M ve N noktaları sırasıyla AP ve AQ doğruları üstünde olmak üzere, P noktası $[AM]$ nin ve Q noktası $[AN]$ nin orta noktasıdır. BM ve CN doğrularının ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde kesiştiklerini gösteriniz.

5 Cape Town bankası her n pozitif tam sayısı için değeri $\frac{1}{n}$ olan madeni paralar basmaktadır. Sonlu sayıda madeni paradan oluşan ve toplam değeri en fazla $99 + \frac{1}{2}$ olan her madeni para koleksiyonunu (koleksiyonda değerleri aynı olan madeni paralar da bulunabilir) her birinin toplam değeri en fazla 1 olan 100 veya daha az sayıda gruba ayırabileceğimizi kanıtlayınız.

6 Düzlemde herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü noktadaş olmayan doğrulara *genel durum* özelliği olan doğrular diyelim. Genel durum özelliği olan doğrular, düzlemi bazılarının alanları sonlu olan bölgelere ayırıyor; alanı sonlu olan her bölgeye *sonlu bölge* diyelim. n nin yeterince büyük tüm değerleri için, genel durum özelliği olan herhangi n doğrunun en az $\sqrt{n}$ tanesinin mavi renge; hiçbir sonlu bölgenin tüm sınırları mavi olmayacak biçimde boyanabileceğini gösteriniz.

Not: Soruyu $\sqrt{n}$ yerine $c\sqrt{n}$ için çözenlere c sabitinin değerine göre puan verilecektir.

56. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2015

1 Düzlemin sonlu sayıda noktasından oluşan bir $\mathcal{S}$ kümesindeki herhangi iki farklı A ve B noktaları alındığında; $|AC| = |BC|$ olacak şekilde, $\mathcal{S}$ nin elemanı olan bir C noktası bulunabiliyorsa, $\mathcal{S}$ kümesine *dengeli* diyelim. $\mathcal{S}$ deki herhangi üç birbirinden farklı A, B ve C noktaları alındığında; $|PA| = |PB| = |PC|$ olacak şekilde, $\mathcal{S}$ nin elemanı olan bir P noktası bulunamıyorsa, $\mathcal{S}$ kümesine *merkezciksiz* diyelim.

(a) Her $n \geq 3$ tam sayısı için, n noktadan oluşan dengeli bir küme bulunduğunu gösteriniz.

(b) Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, n noktadan oluşan dengeli ve merkezciksiz bir küme bulunabilir?

2 a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

sayılarının her birinin 2 nin tam kuvveti olmasını sağlayan tüm (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

(n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, 2^n şeklindeki sayılara 2 nin tam kuvveti deniyor.)

3 $|AB| > |AC|$ koşulunu sağlayan bir ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberi Γ, diklik merkezi H, A dan geçen yüksekliğin ayağı ise F olsun. $[BC]$ nin orta noktasına Mdiyelim. Γ çemberi üzerinde $\angle HQA = 90°$ olacak şekilde bir Q ve yine Γ çemberi üzerinde $\angle HKQ = 90°$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. A, B, C, K ve Q noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve Γ üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor.

KQH ve FKM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirlerine teğet olduklarını gösteriniz.

4 Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi O merkezli Ω çemberidir. A merkezli bir Γ çemberi $[BC]$ kenarını D ve E noktalarında kesiyor. B, D, E ve C noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve BC doğrusu üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. Γ ve Ω çemberlerinin kesişim noktaları F ve G olmak üzere A, F, B, C ve G noktalarının Ω üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. BDF üçgeninin çevrel çemberi $[AB]$ kenarını ikinci kez K noktasında kesiyor. CGE üçgeninin çevrel çemberi ise $[CA]$ kenarını ikinci kez L noktasında kesiyor.

FK ve GL doğrularının farklı olduklarını ve bir X noktasında kesiştiklerini varsayalım. Bu X noktasının AO doğrusu üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

5 Gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim. Tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

6 Tam sayılarından oluşan $a_1, a_2, \ldots$ dizisi

(i) her $j \geq 1$ için $1 \leq a_j \leq 2015$;

(ii) her $1 \leq k < l$ için $k + a_k \neq \ell + a_\ell$

koşullarını sağlıyor. $n > m \geq N$ koşulunu sağlayan tüm m ve n tam sayıları için

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

olmasını sağlayan b ve N pozitif tam sayılarının bulunabileceğini kanıtlayınız.

57. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2016

1 Bir BCF üçgeninin B açısı diktir. CF doğrusu üzerinde bir A noktası $|FA| = |FB|$ olacak ve F noktası A ile C arasında kalacak şekilde seçiliyor. D noktası, $|DA| = |DC|$ olacak ve $\angle DAB$ nin açıortayı AC olacak şekilde seçiliyor. E noktası, $|EA| = |ED|$ olacak ve $\angle EAC$ nin açıortayı AD olacak şekilde seçiliyor. $[CF]$ nin orta noktası M olsun. X noktası, $AMXE$ bir paralelkenar ($AM \parallel EX$ ve $AE \parallel MX$) olacak şekilde seçiliyor. BD, FX, ve ME doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

2 n bir pozitif tamsayı olmak üzere nn lik bir satranç tahtasının her birim karesine I,M ve O harflerinden biri yazılıyor;

$\Longrightarrow$ Her satırda ve her sütunda harflerin üçte biri I üçte biri M ve üçte biri O dur.

$\Longrightarrow$ Üzerindeki birim kare sayısı 3 ün katı olan her köşegende harflerin üçte biri I üçte biri M ve üçte biri O dur.

Şartlarına uygun olarak yazılabiliyorsa n nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

3 $P = A_1A_2 \dots A_k$ kordinat düzleminde bir dışbükey çokgen olsun. A_1, A_2, $\dots$, A_k köşeleri tamsayı kordinatlıdır ve hepsi bir çember üzerindedir. P nin alanı S olsun. P nin kenar uzunluklarının her birinin karesini tam bölen bir n pozitif tamsayısı veriliyor. $2S$ nin n ile tam bölünen bir sayı olduğunu gösteriniz.

4 Pozitif tamsayılardan oluşan en az 2 elemanlı bir alt kümede.Her eleman en az 1 diğer elemanla ortak bir asal.bölene sahipse bu kümeye *misgibi* diyelim $P(n)$=n[sup]2[/sup]+$n+1$ olsun

P(a+1),P(a+2),...,P(a+b)

kümesi mis gibi olacak şekilde bir a negatif olmayan tam sayısı bulunuyorsa b nin alabileceği en küçük değer nedir?

5 Tahtaya

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

denklemi yazılmıştır (denklemin her iki tarafında 2016 şar lineeer çarpan bulunuyor).Bu 4032 lineer çarpandan tam olarak k tanesi, her iki tarafta en az birer çarpan kalacak ve geriye kalan denklemin hiç reel çözümü olmayacak şekilde, silinebiliyorsa k nin alabileceği en küçük değer nedir?

6 Düzlemde verilen $n \geq 2$ adet doğru parçasının herhangi ikisi iç noktalarda kesişiyor, ve herhangi üçü noktadaş değildir. Aslı her doğru parçasının bir ucunu seçip oraya bir kurbağayı, yüzü diğer uca dönük olarak, yerleştirecektir. Daha sonra $n-1$ defa el çırpacaktır. Elini her çırptığında, kurbağaların her biri hemen ileri atlayıp kendi doğru parçası üzerindeki bir sonraki kesişim noktasına konacaktır. Bu kurbağalar atlama yönlerini hiç bir zaman değiştirmezler. Aslı bu kurbağaları, herhangi iki kurbağa asla aynı anda aynı kesişim noktasında buluşmayacak şekilde yerleştirmek istiyor.

Doğru parçaları, şartlara uygun olarak nasıl verilmiş olursa olsun,

(a) n tekse, Aslı'nın amacına ulaşabileceğini gösteriniz.

(b) n çiftse, Aslı'nın amacına ulaşamayacağını gösteriniz.

58. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2017

1 Her $a_0 > 1$ tam sayısı için $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dizisi şu şekilde tanımlanıyor:

$$\text{her } n \geq 0 \text{ için } a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{eğer } \sqrt{a_n} \text{ tam sayı ise} \\ a_n + 3 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

a_0 ın hangi değerleri için öyle bir A tam sayısı vardır ki sonsuz çoklukta n değeri için $a_n = A$ olsun?

2 Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. Tüm x, y gerçel sayıları için

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 Bir avcı ve bir görünmez tavşan düzlemde bir oyun oynuyorlar. Tavşanın başlama noktası A_0 ile avcının başlama noktası B_0 aynıdır. Oyunun $(n-1)$'inci turunun sonunda tavşan A_{n-1} noktasında, avcı ise B_{n-1} noktasında bulunsun. Oyunun n'inci turunda, şu üç işlem sırayla gerçekleşiyor:

(i) Tavşan A_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir A_n noktası seçip görünmez kalarak A_n ye yerleşiyor.

(ii) Bir takip cihazı avcıya bir P_n noktası bildiriyor. Takip cihazının avcıya verdiği tek garanti P_n ile A_n arasındaki uzaklığın 1 birimden fazla olmadığıdır.

(iii) Avcı B_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir B_n noktası seçip görünür kalarak B_n ye yerleşiyor.

Tavşan nasıl hareket ederse etsin ve takip cihazı hangi noktaları bildirirse bildirsin, avcı kendi hareketlerini öyle seçebilir mi ki 10^9 tur sonunda kendisiyle tavşan arasındaki uzaklığın 100 den fazla olmayacağını garantilesin?

4 Bir Ω çemberi üzerinde birbirinden farklı R ve S noktaları RS çap olmayacak şekilde alınıyor. Ω ya R de teğet olan doğru ℓ olsun. T noktası, $[RT]$ doğru parçasının orta noktası S olacak şekilde alınıyor. Ω nın kısa RS yayı üzerinde bir J noktası, JST üçgeninin çevrel çemberi Γ ile ℓ doğrusu iki farklı noktada kesişecek şekilde alınıyor. Γ ve ℓ in kesişim noktalarının R ye daha yakın olanı A olsun. AJ doğrusu Ω yı ikinci kez K da kessin. KT nin Γ ya teğet olduğunu gösteriniz.

5 $N \geq 2$ verilmiş bir tam sayı olsun. Herhangi ikisinin boyları birbirinden farklı olan $N(N+1)$ futbolcu bir şekilde yan yana sıraya dizilmiştir. Takımın antrenörü bu sıradan $N(N-1)$ futbolcuyu öyle çıkarmak istiyor ki geriye kalan $2N$ futbolcudan oluşan yeni sıra aşağıdaki N adet şartı sağlasın:

(1) En uzun futbolcu ile ikinci en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

(2) Üçüncü en uzun futbolcu ile dördüncü en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

$\vdots$

(N) İkinci en kısa futbolcu ile en kısa futbolcu arasında kimse olmayacak.

Antrenörün bunu her zaman yapabileceğini gösteriniz.

6 x ve y tam sayıları aralarında asalsa (x, y) sıralı ikilisine *temel ikili* diyelim. Sonlu sayıda temel ikiliden oluşan herhangi bir S kümesi verilmiş olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan bir n pozitif tam sayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz:

$$S \text{ deki her } (x, y) \text{ için } a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1 \text{ dir.}$$

59. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2018

1 Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ olsun. $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçaları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları $|AD| = |AE|$ olacak şekilde alınıyor. $[BD]$ ve $[CE]$ nin orta dikmeleri Γ nın küçük $\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{AC}$ yaylarını sırasıyla F ve G noktalarında kesiyor. DE ve FG doğrularının paralel olduklarını veya aynı doğru olduklarını gösteriniz.

2 Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, $a_{n+1} = a_1$ ve $a_{n+2} = a_2$ olup her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

eşitliğini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ gerçel sayıları bulunur?

3 Eşkenar üçgen şeklindeki bir sayı dizilişinde en alttaki satır dışındaki her bir sayı kendisinin hemen altındaki iki sayının farkının mutlak değerine eşitse bu dizilişe bir *tuhaf Pascal üçgeni* diyelim. Örneğin, aşağıda 1 den 10 a kadar tüm tam sayıları içeren dört satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

1 den $1 + 2 + \cdots + 2018$ sayısına kadar tüm sayıları içeren 2018 satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni var mıdır?

4 Koordinat düzleminde, x ve y nin 20 den küçük veya eşit pozitif tam sayılar olduğu her (x, y) noktasına *yuva* diyelim.

Başlangıçta, 400 yuvanın hiç biri taş içermiyor. İlk hamleyi Aslı yapmak üzere Aslı ve Burcu sırayla hamle yapıyorlar. Aslı her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir kırmızı taşı, kırmızı taş içeren herhangi iki yuvanın arasındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten farklı olmak koşuluyla yerleştiriyor. Burcu her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir mavi taş yerleştiriyor. (Mavi taş içeren bir yuva ile diğer herhangi bir yuvanın arasındaki uzaklık ile ilgili herhangi bir koşul yoktur.) Sırası gelen kişi hamle yapamıyorsa, iki kişi de taş yerleştirmeyi bırakıyor.

Burcu mavi taşlarını nasıl yerleştirirse yerleştirsin, Aslı en az K adet kırmızı taş yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, K nin alabileceği en büyük değer nedir?

5 Bir $a_1, a_2, \ldots$ sonsuz pozitif tam sayı dizisi ile bir $N > 1$ tam sayısı için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ifadesi, her $n \geq N$ için bir tam sayıya eşit oluyor. Her $m \geq M$ için $a_m = a_{m+1}$ olacak şekilde bir M pozitif tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

6 Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ eşitliği sağlanıyor. $ABCD$ nin iç bölgesindeki bir X noktası

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ve} \angle XBC = \angle XDA$$

eşitliklerini sağlıyor. $\angle BXA + \angle DXC = 180°$ olduğunu gösteriniz.

60. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2019

1 Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilsin. Tüm a ve b tam sayıları için

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

2 Bir ABC üçgeninde, $[BC]$ kenarı üzerinde A_1 ve $[AC]$ kenarı üzerinde B_1 noktaları alınıyor. Sırasıyla $[AA_1]$ ve $[BB_1]$ doğru parçaları üzerinde P ve Q noktaları, PQ ile AB parallel olacak şekilde alınıyor. PB_1 doğrusu üzerinde P_1 noktası, B_1 noktası P ile P_1 arasında kalacak ve $\angle PP_1C = \angle BAC$ olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde, QA_1 doğrusu üzerinde Q_1 noktası, A_1 noktası Q ile Q_1 arasında kalacak ve $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ olacak şekilde alınıyor.

P, Q, P_1 ve Q_1 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3 Sanal alemdeki bir sosyal şebekede 2019 kullanıcı bulunuyor. Bu kullanıcılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık karşılıklıdır, yani A kullanıcısı B ile arkadaş ise, B kullanıcısı A ile arkadaştır. Bu sosyal şebekedeki arkadaşlık durumlarını değiştiren aşağıdaki türden olaylar, her defada sadece bir kere olmak üzere, çok defa meydana gelebiliyor:

Olay: A, B ve C; A hem B, hem de C ile arkadaş olacak, fakat B ile C birbirleriyle arkadaş olmayacak şekilde üç kullanıcı olmak üzere, arkadaşlık durumları değişip B ile C birbirleriyle arkadaş olmaya, A ise hem B, hem de C ile arkadaş olmamaya başlıyor. Diğer arkadaşlık durumları ise değişmiyor.

Başlangıçta, 1010 adet kullanıcının her birinin 1009 arkadaşı, 1009 adet kullanıcının ise her birinin 1010 arkadaşı bulunuyor. Her kullanıcının en çok 1 arkadaşının olmasıyla sonuçlanacak olaylar dizisinin bulunduğunu gösteriniz.

4

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

denklemini sağlayan tüm (k, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

5 Bath Bankası bir yüzünde H, diğer yüzünde T yazan madeni paralar basmıştır. Bu paralardan n tanesi soldan sağa dizilmiş olarak Giray'ın önünde duruyor. Giray şu işlemi tekrar tekrar uyguluyor: önündeki paralardan tam olarak $k > 0$ tanesinin H yüzü üstteyse, soldan k-inci sıradaki parayı ters çeviriyor; aksi halde, yani tüm paraların T yüzü üstteyse, duruyor. Örneğin, $n = 3$ durumunda THT dizilişiyle başlayan süreç $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ olarak devam edip üç işlem sonunda durur.

(a) Başlangıçtaki diziliş nasıl olursa olsun, Giray'ın sonlu sayıda işlem sonunda duracağını gösteriniz.

(b) Her C başlangıç dizilişi için, $L(C)$ ile Giray'ın durana kadar yaptığı işlem sayısı gösterilsin. Örneğin, $L(THT) = 3$ ve $L(TTT) = 0$ dır. Her bir C başlangıç dizilişi için $L(C)$ değerinin ayrı ayrı belirlenmesiyle elde edilen 2^n adet sayının ortalamasını bulunuz.

6 $|AB| \neq |AC|$ koşulunu sağlayan dar açılı bir ABC üçgeninin iç teğet çember merkezi I dır. ABC nin iç teğet çemberi ω; $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında teğettir. D den geçip EF ye dik olan doğru ω ile ikinci kez R noktasında kesişiyor. AR doğrusu ω ile ikinci kez P noktasında kesişiyor. PCE ve PBF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez Q noktasında kesişiyor.

DI ve PQ doğrularının, A dan geçip AI ya dik olan doğru üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

61. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2020

1 $ABCD$ dışbükey bir dörtgen olsun. P noktası, $ABCD$ nin iç bölgesindedir. Aşağıdaki oran eşitlikleri sağlanmaktadır:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

$\angle ADP$ açısının iç açıortayının, $\angle PCB$ açısının iç açıortayının ve $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesinin aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

2 a, b, c, d gerçel sayıları için $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ve $a + b + c + d = 1$ sağlanmaktadır.

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

olduğunu gösteriniz.

3 Ağırlıkları $1, 2, 3, \ldots, 4n$ olan $4n$ tane taş bulunmaktadır. Her taş n renkten birine boyanmıştır ve her bir renk için o renge boyalı dört taş bulunmaktadır. Aşağıdaki her iki koşul aynı anda sağlanacak şekilde bu taşları iki öbeğe ayırabileceğimizi gösteriniz:

- İki öbeğin toplam ağırlıkları birbirine eşittir.
- Her bir öbekte her bir renkten tam olarak iki taş vardır.

4 Bir $n > 1$ tam sayısı verilmiştir. Bir dağın yamacında farklı yüksekliklerde n^2 istasyon bulunmaktadır. A ve B teleferik şirketlerinin her biri k teleferik seferi düzenlemektedir. Her teleferik seferi bir istasyondan başlayıp daha yüksekte bulunan başka bir istasyona aradaki hiçbir istasyonda durmadan yapılmaktadır. A şirketinin k seferinin başlangıç istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin k seferinin bitiş istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin iki teleferik seferinden başlangıç istasyonu daha yüksekte olanın bitiş istasyonu da daha yüksektedir. Aynı koşullar B şirketi için de sağlanmaktadır. İki istasyondan alçakta olandan yüksekte olana, aynı şirketin bir veya birden fazla seferi kullanılarak ulaşılabiliyorsa, bu iki istasyona *o şirketle bağlı* diyelim.

Hem A şirketiyle bağlı hem de B şirketiyle bağlı olan iki istasyonun bulunmasını garanti eden en küçük k pozitif tam sayısını belirleyiniz.

5 $n > 1$ karttan oluşan bir deste verilmiştir. Her kartın üzerinde bir pozitif tam sayı yazılıdır. Herhangi iki kartın üzerindeki sayıların aritmetik ortalaması, destedeki bir veya birkaç kartın üzerindeki sayıların geometrik ortalamasına eşittir.

Hangi n tam sayıları için kartların üzerindeki sayıların hepsi eşit olmak zorundadır?

6 Aşağıdaki önermeyi doğru kılan pozitif bir c sabiti bulunduğunu gösteriniz:

Düzlemde herhangi ikisinin arasındaki uzaklık en az 1 olan $n > 1$ noktadan oluşan herhangi bir $\mathcal{S}$ kümesi alındığında, $\mathcal{S}$ kümesindeki her noktadan uzaklığı en az $cn^{-1/3}$ olan ve $\mathcal{S}$ deki noktaları ayıran bir ℓ doğrusu bulunur.

(Bir ℓ doğrusu, uçları $\mathcal{S}$ de olan en az bir doğru parçasını kesiyorsa ℓ doğrusu $\mathcal{S}$ deki noktaları ayırır.)

Not. Bir $\alpha > 1/3$ gerçel sayısı için, $cn^{-1/3}$ yerine $cn^{-\alpha}$ için elde edilen sonuçlara α nın değerine göre puan verilebilir.

62. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2021

1 $n \geqslant 100$ bir tam sayı olsun. Aslı $n, n+1, \ldots, 2n$ sayılarının her birini farklı bir karta yazıyor. Daha sonra bu $n+1$ kartı karıştırarak iki gruba ayırıyor. Bu gruplardan en az birinde, üzerindeki sayıların toplamı tam kare olan iki kartın bulunduğunu gösteriniz.

2 Tüm $x_1, \ldots, x_n$ gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

3 $|AB| > |AC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $\angle DAB = \angle CAD$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. $[AC]$ kenarı üzerinde $\angle ADE = \angle BCD$ olacak şekilde bir E noktası, $[AB]$ kenarı üzerinde $\angle FDA = \angle DBC$ olacak şekilde bir F noktası ve AC doğrusu üzerinde $|CX| = |BX|$ olacak şekilde bir X noktası alınıyor. ADC ve EXD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. BC, EF ve O_1O_2 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

4 Γ çemberinin merkezi I olsun. $ABCD$ dişbükey dörtgeninin $[AB], [BC], [CD]$ ve $[DA]$ kenarlarının her biri Γ çemberine teğettir. AIC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. $[BA]$ nin A yönünde uzantısı Ω ile X noktasında, $[BC]$ nin C yönünde uzantısı Ω ile Z noktasında kesişiyor. $[AD]$ ve $[CD]$ nin D yönünde uzantıları Ω ile sırasıyla Y ve T noktalarında kesişiyor.

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|$$

olduğunu gösteriniz.

5 Tüylü ve Zıplak isimli iki sincap kış için 2021 tane ceviz toplamıştır. Zıplak, cevizleri 1 den 2021 e kadar olan sayılarla numaralandırıyor ve en sevdikleri ağacın etrafında çembersel bir düzende 2021 tane küçük delik açıyor. Ertesi sabah Zıplak, Tüylü'nün her deliğe bir ceviz yerleştirdiğini, fakat yerleştirirken cevizlerin numaralarına hiç dikkat etmediğini fark ediyor. Bundan mutsuz olan Zıplak, 2021 hamleden oluşan bir hamleler dizisi uygulayarak cevizlerin yerlerini değiştirmeye karar veriyor. k ıncı hamlede Zıplak, k numaralı cevizin iki komşusunun yerlerini birbirleriyle değiştiriyor. Öyle bir k sayısının var olduğunu gösteriniz ki; Zıplak, k ıncı hamlede $a < k < b$ koşuluna uyan a ve b numaralı cevizlerin yerlerini değiştirmiş olsun.

6 $m \geqslant 2$ bir tam sayı, A (pozitif olmak zorunda olmayan) tam sayılardan oluşan bir sonlu küme ve $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ kümeleri A nın alt kümeleri olsun. Her $k = 1, 2, \ldots, m$ için B_k kümesinin elemanlarının toplamı m^k dır. A kümesinin en az $m/2$ eleman içerdiğini gösteriniz.

63. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2022

1 Oslo Bankası, iki tür madeni para basmaktadır: alüminyum (A ile belirtilecektir) ve bronz (B ile belirtilecektir). n adet alüminyum ve n adet bronz parası olan Aslı, başlangıçta bu paraları herhangi bir sırayla yan yana dizmiştir. Ardışık olarak dizilmiş ve aynı tür paralardan oluşan diziye *zincir* diyelim. $k \leq 2n$ verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Aslı, aşağıda tanımlanan hamleyi tekrar tekrar yapmaktadır: soldan k. sıradaki parayı içeren en uzun zinciri alıyor ve bu zincirdeki tüm paraları dizinin en soluna taşıyor. Örneğin, $n = 4$ ve $k = 4$ durumunda $AABBBABA$ sıralamasıyla başlayan bir süreç aşağıdaki gibi ilerler

$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$.

Başlangıçtaki sıralama nasıl olursa olsun, bu sürecin bir noktasında en soldaki n paranın aynı türden olmasını sağlayan tüm (n, k), $1 \leq k \leq 2n$ ikililerini bulunuz.

2 $\mathbb{R}^+$ ile pozitif gerçel sayıların kümesi gösterilmektedir. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz: Her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$xf(y) + yf(x) \leq 2$

koşulunu sağlayan tam olarak bir tane $y \in \mathbb{R}^+$ vardır.

3 k bir pozitif tam sayı ve S tek asal sayılardan oluşan sonlu bir küme olsun. S kümesinin tüm elemanlarının bir çember etrafına, yan yana olan herhangi iki elemanın çarpımının bir x pozitif tam sayısı için $x^2 + x + k$ formunda olması koşuluyla en fazla bir farklı şekilde dizilebileceğini gösteriniz (rotasyon ve yansımalar sonucu birbirinden elde edilebilen dizilimler aynı sayılmaktadır).

4 Bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $|BC| = |DE|$ dir. $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesinde bulunan bir T noktasının $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ ve $\angle ABT = \angle TEA$ olacak şekilde alındığını varsayalım. AB doğrusunun CD ve CT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla P ve Q olsun. P, B, A, Q noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. AE doğrusunun CD ve DT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla R ve S olsun. R, E, A, S noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. P, S, Q, R noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

5 a, b pozitif tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere

$a^p = b! + p$

denklemini sağlayan tüm (a, b, p) üçlülerini bulunuz.

6 n pozitif bir tam sayı olsun. $n \times n$ boyutunda, 1'den n^2'ye kadar olan tüm sayıları içeren ve her birim karede tam olarak bir tane sayının yazıldığı satranç tahtasına ***İskandinav*** kare diyelim. Ortak kenarı paylaşan iki birim kareye komşu diyelim. Bir birim karede yazılan sayı, bu karenin tüm komşularında yazılan sayılardan küçükse bu birim kareye ***vadi*** diyelim. Aşağıdaki şartları sağlayan, bir veya birkaç kareden oluşan birim kare dizisine ***yokuş yukarı yol*** diyelim:

(i) Bu dizideki ilk birim kare bir vadidir,

(ii) Bu dizideki her birim kare, kendinden önce gelen birim kare ile komşudur,

(iii) Bu dizinin birim karelerinde yazılan sayılar artan sıradadır.

Bir İskandinav tüm yokuş yukarı yolların toplam sayısının alabileceği en küçük değeri n cinsinden bulunuz.

64. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2023

1 Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm $n > 1$ bileşik tam sayılarını belirleyiniz:

$d_1, d_2, ..., d_k$ sayıları n sayısının tüm pozitif bölenleri ve $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ ise her $1 \leq i \leq k-2$ için d_i sayısı $d_{i+1} + d_{i+2}$ sayısını böler.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninde $|AB| < |AC|$ olsun. ABC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. Ω çemberinin A noktasını içeren CB yayının orta noktası S olsun. A dan BC ye inilen dikme BS ile D noktasında ve Ω ile ikinci kez $E \neq A$ noktasında kesişiyor. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan doğru BE doğrusu ile L noktasında kesişiyor. BDL üçgeninin çevrel çemberi ω olsun. ω ile Ω ikinci kez $P \neq B$ noktasında kesişiyor.

ω çemberine P noktasında teğet olan doğrunun BS doğrusu ile $\angle BAC$ açısının iç açıortayı üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

3 $k \geq 2$ tam sayı olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm $a_1, a_2, ...$ sonsuz pozitif tam sayı dizilerini belirleyiniz:

$a_1, a_2, ...$ dizisi için öyle bir P polinomu vardır ki $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ formundadır ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

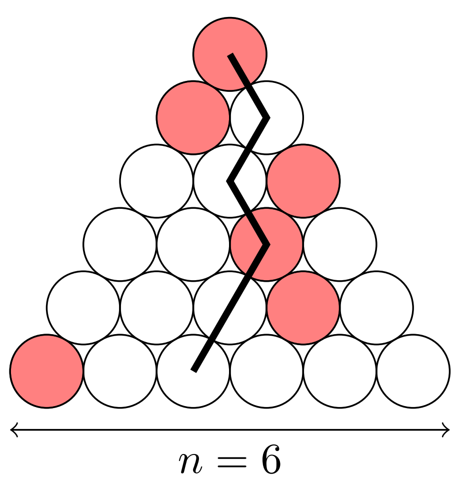
koşulu sağlanır.

4 Herhangi ikisi birbirinden farklı olan $x_1, x_2, ...x_{2023}$ pozitif gerçel sayıları için,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

sayısı her $n = 1, 2, ..., 2023$ için bir tam sayıdır. Buna göre, $a_{2023} \geq 3034$ olduğunu gösteriniz.

5 n bir pozitif tam sayı olsun. Bir *Japon üçgeni*, $1+2+\cdots+n$ adet çemberin, eşkenar üçgen şeklinde ve her $i = 1, 2, ..., n$ için i. satırda tam olarak bir tanesi kırmızı olan i tane çember bulunacak şekilde yerleştirilmesiyle oluşmaktadır. Japon üçgenindeki bir *ninja yolu*, en tepedeki çemberden başlayıp her defasında bulunduğu çemberin hemen altındaki iki çemberden birine giderek en alt satırda biten, n adet çemberden oluşan bir dizidir. Aşağıda, $n = 6$ durumunda bir Japon üçgeni ve iki adet kırmızı çember içeren bir ninja yolunun örneği verilmiştir:



Her Japon üçgeninde en az k adet kırmızı çember içeren bir ninja yolu bulunuyorsa, k sayısının alabileceği en büyük değeri n cinsinden belirleyiniz.

6 ABC bir eşkenar üçgen olsun. A_1, B_1, C_1 noktaları ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BA_1| = |A_1C|,\ |CB_1| = |B_1A|,\ |AC_1| = |C_1B|$ ve

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

olacak şekilde alınıyor. BC_1 ve CB_1 doğruları A_2 noktasında, CA_1 ve AC_1 doğruları B_2 noktasında, AB_1 ve BA_1 doğruları C_2 noktasında kesişiyor.

$A_1B_1C_1$ çeşitkenar üçgen ise, öyle iki nokta bulunduğunu gösteriniz ki $AA_1A_2,\ BB_1B_2$ ve CC_1C_2 üçgenlerinin her birinin çevrel çemberi bu iki noktadan da geçer.

65. Uluslararası Matematik Olimpiyatı - 2024

1 Aşağıdaki şartı sağlayan tüm α gerçel sayılarını bulunuz:
Her n pozitif tam sayısı için

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

tam sayısı n sayısının bir katıdır. ($\lfloor z\rfloor$ ifadesi, z sayısından küçük veya ona eşit olan en büyük tam sayıyı göstermektedir. Örneğin, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ ve $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

(Kolombiya)

2 Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz:
(a, b) ikilisi için, öyle g ve N pozitif tam sayıları vardır ki, tüm $n \geq N$ tam sayıları için

$$\text{ebob}\,(a^n + b, b^n + a) = g$$

eşitliği sağlanır. (ebob(x, y) ifadesi, x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir.)

(Endonezya)

3 Pozitif tam sayılardan oluşan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sonsuz dizisi ve N pozitif tam sayısı verilmiştir. Bu dizide her $n > N$ için a_n terimi; $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimlerinden a_{n-1} terimine eşit olanların sayısına eşittir.

$a_1, a_3, a_5, \ldots$ ve $a_2, a_4, a_6, \ldots$ dizilerinin en az bir tanesinin bir yerden sonra periyodik olduğunu ispatlayınız.

($b_1, b_2, b_3, \ldots$ sonsuz dizisi; her $m \geqslant M$ için $b_{m+p} = b_m$ olacak şekilde p and M pozitif tam sayıları varsa *bir yerden sonra periyodik*tir.)

(Avustralya)

4 ABC üçgeninde $AB < AC < BC$ ve iç teğet çember merkezi ile iç teğet çemberi sırasıyla I ile ω olsun. BC kenarı üzerinde C noktasından farklı X noktası, X noktasından AC doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde BC kenarı üzerinde B noktasından farklı Y noktası, Y noktasından AB doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. AI doğrusu, ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez $P \neq A$ noktasında kesiyor. AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla K ve L olsun.

$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.

(Polonya)

5 Salyangoz Turbo, 2024 satır ve 2023 sütundan oluşan bir satranç tahtasında bir oyun oynuyor. Tahtanın 2022 adet birim karesinde birer canavar saklanmıştır. Başlangıçta Turbo, hangi birim karelerde canavar bulunduğunu bilmiyor fakat ilk ve son satır dışındaki her satırda tam olarak bir canavar bulunduğunu ve her sütunda en fazla bir canavar bulunduğunu biliyor. Turbo, ilk satırdan son satıra ulaşmak için birkaç deneme yapıyor. Her bir denemede, ilk satırdaki istediği bir birim kareden başlıyor ve her adımda, bulunduğu birim kareyle ortak kenar paylaşan komşu bir birim kareye geçiyor (Turbo'nun daha önceden ziyaret ettiği bir birim kareye dönme hakkı vardır). Turbo, içinde canavar bulunan bir birim kareye ulaştığı an o anki denemesi sonlanıyor ve yeni bir denemeye başlamak için ilk satıra geri ışınlanıyor. Canavarlar yer değiştirmiyor ve Turbo, daha önceden ziyaret ettiği birim karelerde canavar olup olmadığını aklında tutuyor. Turbo, son satırdaki herhangi bir kareye ulaştığı an oyun bitiyor.

n sayısının en küçük hangi değeri için Turbo, canavarların tahtadaki konumları nasıl olursa olsun en fazla n deneme yaparak oyunu bitirmeyi garantileyebilir?

(Hong Kong)

6 Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilsin. Bir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Q}$ için

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ve} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

eşitliklerinden en az birini sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna *iyi* diyelim.

Öyle bir c tam sayısının bulunduğunu gösteriniz ki her f iyi fonksiyonu için r rasyonel sayı olmak üzere $f(r) + f(-r)$ şeklinde ifade edilebilen birbirinden farklı rasyonel sayıların sayısı en fazla c dir. c sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Japonya)