

TÜBİTAK  
Uluslararası Matematik Olimpiyatları  
Takım Seçme Sınavı

*Soruları ve Çözümleri*

[geomania.org](http://geomania.org)

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

## ÖNSÖZ

Lise düzeyinde olimpiyatlara hazırlanan hemen her öğrencinin sorduğu bir soru vardır:

Gireceğimiz ikinci aşama sınavının eski yıllarının soru ve çözümlerine neden ulaşamıyoruz?

Gerçekten de, İkinci Aşama'ya hazırlanan bir öğrencinin eski yıllardaki soruları çözmesi, hem genel olimpiyat tekniklerine hâkim olması, hem de sınavın kendine has tarzına alışması açısından önemlidir.

İşte elinizdeki bu doküman, bu konudaki eksikliği gidermek adına çok sayıda tecrübeli olimpiyatçı ve hocanın sarf ettiği iki yıllık titiz emek ve gayretlerinin bir sonucudur. Bu çalışma için kolları sıvadığımızda, eski yılların orijinal sorularına ulaşmakta bile çok zorluk çektik; yıllar var olan kaynakları eskitmiş, 90lı yılların soruları olimpiyat arşivlerinin derinliklerinde kalmıştı. Soruları elde ettikçe, bir yandan [geomania.org](http://geomania.org) forumunda ilk yılların soru ve çözümlerini toplarken, diğer taraftan [matematikolimpiyati.com](http://matematikolimpiyati.com) üzerinden 2000'li yıllarda yapılmış İkinci Aşamaların soru ve çözümlerini yüklemeye yönelik bir sistemle son yılların çözümlerini derledik.

Son olarak, elimizdeki soru ve çözümleri [geomania.org](http://geomania.org) da açtığımız “**Yarışma Soruları**” bölümüne aktardık. Doküman bu halini almadan önce, elimizdeki çözümleri tecrübeli olimpiyatçı arkadaşlarımızın yardımıyla titizce tashih ettik. Bu bağlamda başta Mehmet Efe Akengin ve [geomania.org](http://geomania.org) forumundan Lokman Gökçe olmak üzere, bu çalışmada emeği geçen tüm olimpiyatçı ve hocalarımıza gayretlerinden ötürü teşekkürü bir borç biliyoruz.

Bu emek ve gayretler sonucunda, Türkiye matematik olimpiyatları camiası, yıllardır hasretini çektiği bu dokümana kavuştu. Fakat ikinci aşama seferberliğimiz henüz nihayete ermedi. Göreceğiniz üzere, hala çok sayıda sorunun çözümü eksik veya [geomania.org](http://geomania.org) forumunda tashih edilmeyi bekliyor. Sorulara yapmış olduğunuz farklı çözümleri, çözümler hakkında düşünce, önerileri ve düzeltmelerinizi, lütfen [geomania.org Yarışma Forumu](http://geomania.org) üzerinden paylaşmanızı rica ediyoruz.

Bir başka çalışmada görüşmek dileğiyle,

[geomania.org](http://geomania.org)  
Yarışma Soruları Ekibi

## İçindekiler

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1989	1
31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1990	5
32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1991	9
33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1992	12
34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1993	16
35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1994	20
36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1995	24
37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1996	30
38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1997	38
39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1998	42
40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1999	46
41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2000	53
42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2001	60
43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2002	67
44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2003	69
45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2004	74
46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2005	79
47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2006	84
48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2007	89
49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2008	93
50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2009	96
51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2010	102
52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2011	105
53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2012	109
54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2013	113
55. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2014	117
56. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2015	123
57. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2016	126
58. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2017	128
59. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2018	131

<b>60. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2019</b>	<b>135</b>
<b>61. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2020</b>	<b>141</b>
<b>62. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2021</b>	<b>146</b>
<b>63. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2022</b>	<b>149</b>
<b>64. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2023</b>	<b>152</b>
<b>65. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2024</b>	<b>154</b>

### 30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1989

1  $\mathbb{Z}^+$  pozitif tamsayılar kümesini gösterebilirsin. Her  $m, k \in \mathbb{Z}^+$  için,

(i)  $f(m, m) = m$

(ii)  $f(m, k) = f(k, m)$

(iii)  $f(m, m+k) = f(m, k)$

koşullarını sağlayan tüm  $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  fonksiyonlarını bulunuz.

#### Çözüm:

$EBOB(m, k)$  fonksiyonunun bu verilen şartları sağladığını görmek kolaydır. Şimdi bunu ispatlayalım. Öncelikle  $m \mid k$  durumunu inceleyelim. Bu durumda  $k = ma$  olarak yazarsak

$$f(m, k) = f(m, ma) = f(m, m(a-1)) = \dots = f(m, m) = m = EBOB(m, k)$$

olacaktır. Şimdi  $m \neq k$  için ebob'a ulaşana kadar Öklit algoritması uygulayalım. Genelliği bozmadan  $m > k$  kabul edebiliriz.

$$m = q_0k + r_0$$

$$k = q_1r_0 + r_1$$

$$r_0 = q_2r_1 + r_2$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3$$

⋮

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

ve  $r_n = EBOB(m, k)$  diyebiliriz. Burada  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $0 \leq r_i < r_{i-1}$  ve  $0 < r_0 < k$ 'dir. Daha fazla devam edemediğimizden  $r_n \mid r_{n-1}$ 'dir (Öklit algoritmasında en son ebob'a ulaşabiliriz, devam edersek 0 kalanı vermeye başlayacaktır). Şimdi ikinci ve üçüncü şartı kullanalım. Aşağıdaki eşitliklerde üçüncü şartı birden fazla defa kullanıyoruz bu yüzden direkt sonucunu yazıyorum.

$$f(m, k) = f(k, m) = f(k, q_0k + r_0) = f(k, r_0) = f(r_0, k) = f(r_0, q_1r_0 + r_1) = f(r_0, r_1)$$

ve bu şekilde devam edersek

$$\dots = f(r_n, r_{n-1}) = r_n = EBOB(m, k)$$

olacaktır çünkü  $r_n \mid r_{n-1}$ 'dir. Dolayısıyla her  $m, k \in \mathbb{Z}^+$  için  $f(m, k) = EBOB(m, k)$ 'dir.

Örnek verelim.  $f(12, 9)$ 'u hesaplayalım,

$$f(12, 9) = f(9, 12) = f(9, 3) = f(3, 9) = f(3, 6) = f(3, 3) = 3 = EBOB(12, 9)$$

2 Sıfırdan farklı bir rakamla başlayan bir rakam bloğunun art arda iki kez tekrarından oluşan pozitif tamsayılara "çift tekrarlı sayı" diyeceğiz (Örneğin 360360 "çift tekrarlı" bir sayı olup, 36036 değildir). Bir tamsayının karesine eşit olan sonsuz sayıda "çift tekrarlı" sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:**

$i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_i$ 'ler birer rakam olsun ( $a_1 \neq 0$ ).  $A^2 = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$  olsun. Bu formatta sonsuz tane  $A$  olduğunu göstermeye çalışıyoruz. Sayıyı düzenlersek

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot (10^n + 1)$$

olur. Özel olarak  $n$ 'yi 11'in katı olan bir tek sayı seçelim.  $v_{11}(m)$ 'yi  $m$ 'i bölen en büyük 11 kuvvetinin üssü olarak tanımlayalım. Kuvvet Kaydırma teoreminden (LTE),

$$v_{11}(10^n + 1) = v_{11}(10 + 1) + v_{11}(n) = 1 + v_{11}(n) \geq 2$$

olur, yani  $\frac{10^n + 1}{11^2}$  tamsayıdır.

$$10^{n-3} < \frac{10^n + 1}{11^2} < 10^{n-2} \quad (1)$$

olduğundan  $\frac{10^n + 1}{11^2}$  sayısı  $n-2$  basamaklıdır.  $\frac{10^n + 1}{11^2}$  sayısının sonuna iki adet 0 ekleyelim ve oluşan  $n$  basamaklı sayıyı  $a_1 a_2 \cdots a_n$  olarak seçelim.

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot (10^n + 1) = \frac{(10^n + 1)^2}{11^2} \cdot 10^2$$

olur yani sayı tamkare olacaktır. Dolayısıyla sonsuz tane bu formatta tamkare vardır.

**Not:** (1) eşitsizliğinin  $11^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$  yazıldığına oldukça kolay olduğu görülebilir.

- 3**  $C_1, C_2$  verilen iki çember,  $A_1$  noktası  $C_1$  üzerinde ve  $A_2$  noktası da  $C_2$  üzerinde bulunan sabit noktalardır.  $C_1$ 'in  $A_1 P_1$  kirişi,  $C_2$ 'nin  $A_2 P_2$  kirişine paralel olduğuna göre  $P_1 P_2$ 'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

**Çözüm 1:**

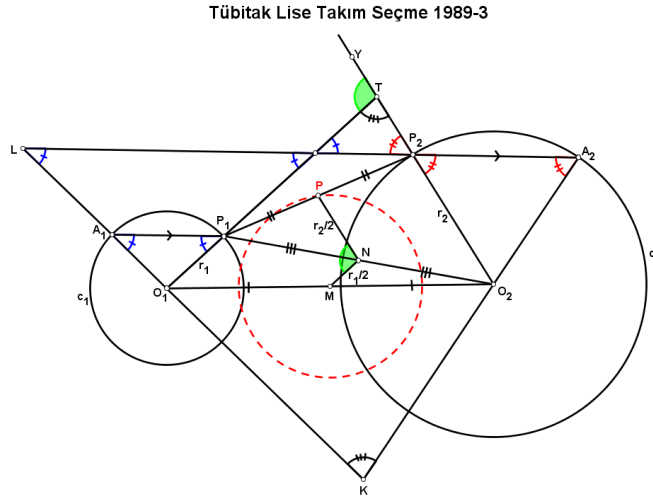
Çemberlerin merkezleri  $O_1$  ile  $O_2$ ,  $A_1 P_1$  in orta noktası  $M_1$ ,  $A_2 P_2$  nin orta noktası  $M_2$  olsun.  $A_1 A_2$  nin orta noktası  $A$ ,  $O_1 O_2$  nin orta noktası da  $M$  olsun.  $A$  ve  $M$  sabit noktalardır.  $P_1 P_2$  nin orta noktasına  $P$  diyelim. Bizden istenen  $P$  nin geometrik yeri.

$A_1 A_2 P_2 P_1$  yamuğunda  $AP$  orta tabandır.  $O_1$  den  $AP$  ye paralel çizilen doğru ile  $O_2 M_2$  doğrusu  $K$  da kesişsin.  $M$  den  $AP$  ye inilen dikme,  $AP$  yi  $N$  de,  $A_1 P_1$  i  $Q$  da,  $O_1 K$  yı da  $L$  de kessin.  $O_2 M$  doğrusu  $A_1 P_1$  yi  $R$  de,  $AP$  yi de  $S$  de kessin.

$O_1 M = M O_2$  olduğu için  $O_1 L = L K = Q R = Q M_1 = N S$  olacaktır.  $M_1 R = 2 \cdot N S$ ,  $R M_2 = 2 \cdot S M_2$  ve  $\angle M_1 R M_2 = \angle N S M_2 = 90^\circ$  olduğu için  $\triangle N S M_2 \sim \triangle M_1 R M_2$  (K.A.K). Yani  $M_2, N, M_1$  noktaları doğrusal.  $A_1 A_2 P_2 P_1$  yamuğunda  $M_1$  orta nokta ve  $M_2$  orta nokta olduğu için  $N$  de  $AP$  nin orta noktasıdır. Ayrıca  $M N \perp AP$  olduğu için  $AM = MP = \text{Sabittir}$ . Bu durumda  $P$  noktalarının geometrik yeri  $M$  merkezli  $A$  dan geçen çemberdir.

**Çözüm 2:**

$c_1$  in merkezi  $O_1$ ,  $c_2$  nin merkezi  $O_2$  olsun.  $O_1O_2$  nin orta noktası  $M$ ,  $P_1P_2$  nin orta noktası  $P$  olsun.  $A_1O_1 \cap A_2O_2 = K$  diyelim.



$\angle A_2KA_1$  sabittir. Son olarak  $O_1A_1 \cap A_2P_2 = L$  ve  $O_1P_1 \cap O_2P_2 = T$  diyelim. Açılar yazılınca  $\angle A_2KL = \angle O_1TO_2$  olduğu görülür.  $c_1$  in yarıçapına  $r_1$ ,  $c_2$  nin yarıçapına  $r_2$ ,  $P_1O_2$  nin orta noktasına  $N$  dersek,  $MN = r_1/2$ ,  $PN = r_2/2$  olur.  $PN \parallel P_2O_2$  ve  $MN \parallel O_1P_1$  olduğundan  $\angle YTO_1 = \angle PNM$  olur.  $PN$ ,  $MN$  ve  $\angle PNM$  değerleri sabit olduğundan  $PM$  de sabittir. O zaman  $P_1P_2$  nin orta noktasının geometrik yeri, merkezi  $O_1O_2$  nin orta noktası olan ve  $P_1P_2$  nin orta noktasından geçen çemberdir.

- 4  $n \times n$  bir satranç tahtasının her karesinde bir taş duruyor.  $n^2$  taş toplanarak yine her kareye bir taş düşecek şekilde tekrar dağıtılıyor, öyle ki başlangıçta komşu olan taşlar yine komşu kalıyorlar. En az bir köşedeki taş yerini koruyorsa olabilecek tüm dağıtımları bulunuz (Not: Aralarında ortak kenar bulunan karelerdeki taşlara "komşu" diyoruz.).
- 5 Elimizde her biri pozitif bir tamsayı ağırlığından  $n$  ( $n > 2$ ) tane ağırlık vardır. Bunlardan her birinin ağırlığı  $n$ 'den küçük olduğu gibi, toplam ağırlıkları da  $2n$ 'den küçüktür. Bu ağırlıkların, toplam ağırlığı  $n$ 'ye eşit bir altkümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:**

Terimlerin karışmaması için ağırlık yerine taş diyelim. Taşların ağırlıkları  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < n$  olsun. Bu ağırlıklara denk gelen taşları da  $A_1, A_2, \dots, A_n$  olarak isimlendirelim.

$$S_k = \sum_{m=1}^k a_m$$

olarak tanımlarsak,  $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n < 2n$  artan dizisini elde etmiş oluruz. Eğer bu sayılardan biri  $n$ 'ye bölünüyorsa,  $n \mid S_k$ 'dan ve  $0 < S_k < 2n$  eşitsizliğinden  $n = S_k$  olduğunu buluruz. Böylece  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  kümesindeki taşların ağırlıkları toplamı  $n$  olduğunu göstermiş oluruz.

Eğer  $S_k$ 'ların hiçbiri  $n$  ile bölünmüyorsa, bu sayıların  $n$ 'ye bölündüğündeki kalanları  $1, 2, \dots, n-1$  olabilir ancak  $n$  tane  $S_k$  olduğundan güvercin yuvası ilkesi gereği  $S_i \equiv S_j \pmod{n}$  olacak şekilde  $0 < i < j \leq n$  tamsayıları olmalıdır. Buradan  $n \mid S_j - S_i$  ve yukarıdakine benzer şekilde  $S_j - S_i = n$  elde edilir. Yani  $\{A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_j\}$  taşlarının ağırlıkları toplamı tam olarak  $n$  olmalıdır. Her durumda ağırlıkları toplamı  $n$  olan taşlar bulabildiğimizden ispat biter.

- 6  $ABC$  ( $AB = AC$ ) ikizkenar üçgeninin çevrel çemberine dıştan teğet olan çember  $AB$  ve  $AC$  doğrularına  $P$  ve  $Q$  noktalarında teğettir.  $PQ$  doğru parçasının  $I$  orta noktasının, üçgenin  $BC$ 'ye dıştan teğet olan çemberinin (dış teğet çember) merkezi olduğunu ispat ediniz.

### Çözüm 1:

Çevrel çemberin merkezi  $O$ , diğer çemberin merkezi  $J$  olsun. Bu iki çember birbirlerine  $T$  de dokunsun.  $OA = r$ ,  $JT = R$  diyelim.

$O, T, J, I$  nin doğrusal olduğunu görmek çok zor olmasa gerek. Bu durumda  $\angle PBI = \angle IBC$  olduğunu gösterince  $I$  nin dış teğet çemberin merkezi olacağı da açık.

$\angle BAT = \alpha$  dersek,  $\angle TBC = \angle J PQ = \alpha$  olacaktır. Bu durumda,  $AB = 2r \cos \alpha$ ,  $AP = 2(r + R) \cos \alpha$  ve  $BP = 2R \cos \alpha$  olacaktır. Aynı zamanda  $\triangle IPJ$  de  $PI = PJ \cos \alpha = 2R \cos \alpha = BP$  dir.  $BC \parallel PQ$  ve  $\angle PBI = \angle PIB$  olduğu için  $\angle CBI = \angle PIB = \angle PBI$  olur. Yani  $BI$  bir dış açıortay,  $AI$  da bir iç açıortay olduğu için  $I$  bir dış merkezdir.

### Çözüm 2:

$BC$  nin orta noktasını  $K$ , çevrel çemberi  $c_1$ ,  $AB$  ve  $AC$  doğrularına  $P$  ve  $Q$  noktalarında teğet olan çemberi  $c_2$ , teğet noktasını  $L$  ve  $c_2$  nin merkezini  $M$  olarak adlandıralım.  $A, K, L, I, M$  doğrusal olur. Ayrıca  $BK = CK$  ve  $BC \perp AL$  olduğundan  $AL$  çaptır.  $\angle ACL = 90^\circ$  olur.  $\angle ACK = 2x^\circ$  dersek,  $\angle CLA = \angle QMA = 2x^\circ$  olur.  $MQ = ML$  olduğundan  $\angle MLQ = 90 - x^\circ$  olur.  $LCQI$  kirisler dörtgeninden  $\angle ILQ = \angle ICQ = 90 - x^\circ$  olur ve böylece  $\angle KCI = 90 - x^\circ$  olur.  $AI$  içaçıortay,  $CI$  dışaçıortay olduğundan,  $I$  noktası üçgenin  $BC$  ye ait dış teğet çemberinin merkezidir.

### 31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1990

- 1 Bir  $d$  doğrusuna sıra ile  $A, B, C$  noktalarında teğet olan ( $a > c > b$ )  $a, b, c$  yarıçaplı  $k_1, k_2, k_3$  çemberleri veriliyor.  $k_1$  çemberi  $k_2$  ye ve  $k_2$  çemberi de  $k_3$  çemberine teğettir.  $k_3$  çemberine  $E$  noktasında değen ve  $d$  ye paralel olan teğet,  $k_1$  çemberini  $D$  noktasında kesiyor.  $EB$  doğrusu,  $d$  doğrusuna  $A$  da dik olan doğruyu  $F$  noktasında kestiğine göre,  $AD = AF$  olduğunu ispat ediniz.

#### Çözüm 1:

Çemberlerin merkezleri  $O_1, O_2, O_3$  olsun.

$O_1O_2BA$  dik yamuğunda,  $AB = 2\sqrt{ab}$ .

$O_2O_3CB$  dik yamuğunda,  $BC = 2\sqrt{bc}$ .

$\triangle FAB \sim \triangle ECB$  (A.A) olduğu için

$$\frac{FA}{CE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow FA = 2\sqrt{ac}$$

$ED$  ile  $AF$  doğruları  $H$  de kesişsin.  $k_1$  çemberinin bir çapı  $AI$  olsun.

$CE = AH = 2c$  ve Öklit'ten

$$AI \cdot AH = AD^2 \Rightarrow 2a \cdot 2c = AD^2 \Rightarrow AD = 2\sqrt{ac} = FA$$

#### Çözüm 2:

$k_1 \cap k_2 = K, k_2 \cap k_3 = L$  olsun.  $BK$  doğrusu,  $FA$  ve  $EC$  doğrularını sırasıyla  $M$  ve  $N$  noktalarında kessin.  $\angle BKA = \angle CLB = 90^\circ$  olacağı açıktır. Aynı açılar işaretlenince  $F, A, K, L, C, N$  noktalarının çembersel olduğu görülür.  $AF \parallel CN$  paralel kirislerden  $AF = CN$  olur. Şimdi;

$$\triangle AFB \sim \triangle CEB \Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{AB}{CB}, \quad \triangle CBN \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{CN}{AM} = \frac{CB}{AB}$$

eşitliklerinden  $AF = CN$  olduğu göz önüne alınırsa  $AF^2 = CE \cdot AM$  olur.  $AM \cap DE = T$  dersek,  $\triangle ADM$  de öklitten:

$$AD^2 = AT \cdot AM = CE \cdot AM = AF^2 \Rightarrow AD = AF$$

olur.

- 2  $x_i$  reel sayıları için

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq 0$$

eşitsizliği her zaman doğrudur; (Kanıtlayınız.)

Hangi  $n \geq 4$  tam sayıları için

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0$$

eşitsizliği her zaman doğru olur? Yanıtınızı kanıtlayınız.

**Çözüm:**

İlk maddeyi ispatlayalım ;

Faydalı eşitsizlikten,

$$\sum x_1^2 \geq \sum x_1 x_2 \Rightarrow \sum x_1^2 = (\sum x_1)^2 - 2 \sum x_1 x_2 \geq \sum x_1 x_2 \text{ ve buradan da}$$

$$(\sum x_1)^2 \geq 3(\sum x_1 x_2) = 0 \geq \sum x_1 x_2 \text{ bulunur.}$$

İkinci madde;

$n = 2k, k \in \mathbb{Z}$  olarak alalım , Sayılar;

$$x_i = 0 \text{ veya } x_{n-1} = -x_n$$

$x_n = -x_1$  formunda olacaktır. (Herhangi 2'li 3'lü veya  $n$ 'li birbirinin zıt işaretlisi olacaktır.)

$$-(\sum x_1)^2 \geq \sum x_1 x_2 \text{ ve } 0 \geq -(\sum x_1^2) \text{ olduğundan, Her}$$

$n \geq 4, n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$  için eşitsizlik sağlanır.

Yanlış veya eksil yaptığım bir yer varsa lütfen düzeltin.

**3**  $n$ , 11'den büyük ve eşit olan bir tek, tam sayı olsun;  $k \in \mathbb{N}, k \geq 6, n = 2k - 1$ .

$T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$  ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T$  için

$$d(x, y) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_i \neq y_i\}|$$

diyelim.  $T$  nin aşağıdaki şartları sağlayan bir  $S$  alt kümesi varsa  $n = 23$  olduğunu gösteriniz.

(i)  $|S| = 2^k$

(ii) Her  $x \in T$  için  $d(x, y) \leq 3$  olacak şekilde tam bir tane  $y \in S$  vardır.

**4**  $ABCD$  konveks dörtgen ve

$$\begin{aligned} E, F &\in [AB], & AE = EF = FB \\ G, H &\in [BC], & BG = GH = HC \\ K, L &\in [CD], & CK = KL = LD \\ M, N &\in [DA], & DM = MN = NA \end{aligned}$$

dır.

$$[NG] \cap [LE] = \{P\}, [NG] \cap [KF] = \{Q\},$$

$$[MH] \cap [KF] = \{R\}, [MH] \cap [LE] = \{S\}$$

noktaları göz önüne alıyoruz. Buna göre,

(a)  $Alan(ABCD) = 9 \cdot Alan(PQRS)$

(b)  $NP = PQ = QG$

olduğunu ispat ediniz.

**Çözüm 1:**

$AFRM$  bir dışbükey dörtgen,  $AF$ ,  $FR$ ,  $RM$ ,  $AM$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $E$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $N$  olsun.  $ES \cap NQ = \{P\}$  olsun.

$EQ \parallel AR \parallel SN$  ve  $QS \parallel FM \parallel EN$  olduğu için  $EQSN$  bir paralelkenardır. Bu durumda

$$EP = PS, PQ = PN \quad (1)$$

elde edilir. Yani, herhangi bir dışbükey dörtgende karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçalarının birbirlerini ortaladığını söyleyebiliriz.

$E$  nin  $F$  ye göre simetriği  $B$ ;  $S$  nin  $R$  ye göre simetriği  $H$  olsun.  $BH$  nin orta noktası da  $G$  olsun.  $FR$  ile  $GP$  birbirini ortalayacağından ve  $FQ = QR$  olduğu için  $G, Q, P$  doğrusaldır.

$N$  nin  $M$  ye göre simetriği  $D$ ,  $Q$  nun  $R$  ye göre simetriği  $K$ ;  $P$  nin  $S$  ye göre simetriği  $L$ ,  $G$  nin  $H$  ye göre simetriği  $C$  olsun. Elde ettiğimiz şekil ile soruda verilen şekil özdeş olur. Bu durumda (b) şikkındaki  $NP = PQ = QG$  yi ispatlamış olduk. ■

$[AEPN] = A$ ,  $[EFQP] = B$ ,  $[FBGQ] = C$ ,  $[NPSM] = D$ ,  $[PQRS] = E$ ,  $[GQRH] = F$ ,  $[MSLD] = G$ ,  $[SRKL] = H$ ,  $[RHCK] = I$  olsun.

$ABGN$  dörtgeninde  $FQ$  ile  $EP$  doğru parçalarının belirlediği üç dörtgene odaklanalım.

$$3[BGQ] + 3[AEN] = [BGN] + [ABN] = [ABGN] = A + B + C \quad (2)$$

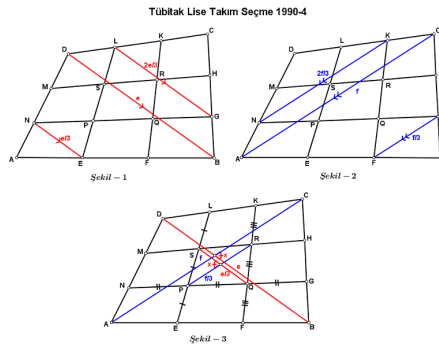
$$[EBQN] + [AEN] + [BQG] = 3([AEN] + [BQG]) \Rightarrow [EBQN] = \frac{2(A + B + C)}{3} \quad (3)$$

$$[EPN] = [EPQ], [FQE] = [BFQ] \Rightarrow 2[EFQP] = [EBNQ] \Rightarrow [EFQP] = \frac{A + B + C}{3} \quad (4)$$

Yani bir dörtgende karşılıklı iki kenar üçer eşit parçaya yukarıdaki gibi bölündüğünde, ortadaki parça dörtgenin alanının  $1/3$  ü oluyor. Bu durumda,  $[NGHM] = \frac{[ABCD]}{3}$  ve  $[PQRS] = \frac{[NGHM]}{3}$  olacağı için  $[PQRS] = \frac{[ABCD]}{9}$  dur. ■

**Çözüm 2:**

b)  $BD = e$ ,  $AC = f$  olsun. Şekil - 1 de  $EN \parallel BD \parallel GL$  olduğundan  $EN = e/3$ ,  $GL = 2e/3$  olur.  $\triangle PNE \sim \triangle PGL \Rightarrow PN/PG = 1/2$  olur. Şekil - 2 de  $FG \parallel AC \parallel NK$  olduğundan  $FG = f/3$ ,  $NK = 2f/3$  olur.  $\triangle QGF \sim \triangle QNK \Rightarrow QG/QN = 1/2$  olur.  $PN/PG = 1/2$  ve  $QG/QN = 1/2 \Rightarrow NP = PQ = QG$  olur. Benzer şekilde  $EP = PS = SL$ ,  $FQ = QR = RK$ ,  $HR = RS = SM$  eşitlikleri bulunabilir.



a) Şekil - 3 de benzer üçgenlerden rahatça görülebileceği üzere  $PR = f/3$ ,  $QS = e/3$  olur. Ayrıca  $AC$  ve  $BD$  köşegenleri arasındaki açığı  $x$  dersek, paralellikten  $PR$  ve  $QS$  köşegenleri arasındaki açı da  $x$  olur. O zaman:

$$\text{Alan}(ABCD) = \frac{e \cdot f \cdot \sin x}{2} = 9 \cdot \frac{(e/3) \cdot (f/3) \cdot \sin x}{2} = 9 \cdot \text{Alan}(PQRS)$$

olur.

- 5  $m$  pozitif tam sayısı için  $(m!)$  sayısındaki 2 çarpanlarının sayısını  $b_m$  ile gösterelim. (Yani  $2^{b_m} | m!$  ve  $2^{b_m+1} \nmid m!$ ).  $m - b_m = 1990$  koşulunu sağlayan en küçük  $m$  sayısını bulunuz.

### Çözüm:

Kullanmanın daha kolay olduğunu düşündüğümden  $b_m$  yerine  $v_2(m)$  gösterimini kullanacağım. Buradaki sorunun ispatındaki iki iddiayı kullanacağız. Burada iddiaları tekrar gösterelim ama ispatları bağlantısını verdiğim gönderide bulunabilir.

**İddia 1:**  $n$  pozitif tamsayısı için  $v_2\left(\binom{2n}{n}\right) = n - v_2(n!)$ 'dir.

**İddia 2:**  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$  için  $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$  ise  $v_2\left(\binom{2n}{n}\right) = k$  olacaktır.

Bu iki iddiayı kullanırsak aradığımız  $m$ 'nin  $a_{1990} > a_{1989} > \dots > a_1$  için  $m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_{1990}}$  formatında olması gerektiğini görebiliriz. En küçük  $m$  için  $a_i = i - 1$  olarak seçmeliyiz. Bu durumda

$$m = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{1989} = 2^{1990} - 1$$

olacaktır.

- 6  $k \geq 2$  ve  $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{Z}^+$  olsun. Eğer  $n_2 | (2^{n_1} - 1)$ ,  $n_3 | (2^{n_2} - 1)$ ,  $\dots$ ,  $n_k | (2^{n_{k-1}} - 1)$ ,  $n_1 | (2^{n_k} - 1)$  ise,  $n_1 = \dots = n_k = 1$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

Herhangi bir  $i$  için  $n_i = 1$  ise diğer değişkenlerin de 1 olması gerektiği görülebilir. O halde  $n_1 = \dots = n_k = 1$  doğru değilse her  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $n_i \neq 1$  olmalıdır. Çelişki bulmak için bölünebilmelerin doğru olduğunu ama  $n_i \neq 1$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $n_i$ 'lerin asal bölenleri vardır. Bu asalların en küçüğü  $q$  olsun ve  $q | n_j$  diyelim.  $q$  tek olmak zorundadır. Bu durumda

$$q | (2^{n_{j-1}} - 1)$$

olacaktır ( $n_0 = n_k$  olarak alalım).  $2$ 'nin  $q$  modunda mertebesi  $d$  olsun. Bu durumda  $d | n_{j-1}$  ve  $d | q - 1$  olacaktır.  $n_{j-1}$ 'in en küçük asal böleni bile  $q$ 'dan küçük olamaz. Bu yüzden  $d \leq q - 1$  olan  $d$ 'nin asal böleni olması imkansızdır. Yani  $d = 1$  olmalıdır. Bu durumda da

$$2^d - 1 \equiv 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

elde edilir ki bu da çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir  $q$  yoktur. Demek ki hiçbir  $n_i$ 'in asal böleni yoktur. Hepsisi 1 olmalıdır.

## 32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1991

- 1 Bir  $ABC$  üçgeninin  $AB, AC$  ve  $BC$  kenarları üzerinde sırası ile  $C', B'$  ve  $A'$  noktaları işaretleniyor.

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = k$$

olduğu bilindiğine göre,  $AA', BB'$  ve  $CC'$  doğrularının sınırladığı üçgenin alanının,  $ABC$  üçgeni alanına oranının

$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$

olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$AA' \cap CC' = \{K\}$ ,  $AA' \cap CB' = \{L\}$  ve  $BB' \cap CC' = \{M\}$  olsun.  $CL \cap AB = \{C''\}$  olsun.

Ceva teoremine göre  $\frac{AC''}{C''B} = \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = k^2$ .

$\frac{[CAL]}{[CLB]} = k^2$ ,  $\frac{[ALB]}{[BCL]} = k$  olduğuna göre  $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [BCL]$  olur.

Benzer şekilde  $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [AKC]$  ve  $[ABC] = (k^2 + k + 1) \cdot [BAL]$  elde edilir. Bu durumda  $[BCM] = [BAL] = [AKC]$  olur. Bu durumda  $[KLM] = [ABC] - [BAL] - [CAK] - [CMB] = [ABC] - 3k[BCL] = [BCL](k^2 - 2k + 1)$ .

$$\frac{[KLM]}{[ABC]} = \frac{[BCL](k^2 - 2k + 1)}{[BCL](k^2 + k + 1)} = \frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}.$$

**Not:** Bu sorunun genel hali **Routh Teoremi** olarak geçiyor:

$\frac{AB'}{B'C} = x$ ,  $\frac{BC'}{C'A} = y$ ,  $\frac{CA'}{A'B} = z$  ise  $AA', BB'$  ve  $CC'$  doğrularının sınırladığı üçgenin alanının,  $ABC$  üçgeni alanına oranı  $\frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(zx+x+1)}$  dir.

- 2  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$  denklemini sağlayacak şekilde  $a, b, c, d$  pozitif tam sayılarının bulunamayacağını gösterin.

### Çözüm:

Sayıların hepsi çift olmalı. Sayıların hepsi tek ise; sol taraf çift, sağ taraf tek olur. Sayılardan en az bir tanesi çift olduğunda, mod4 te sağ taraf 0 olacak. Sol tarafın mod4 te alabileceği değerler  $\{1, 2, 3\}$  kümesinden olabilir. Bu durumda sayıların hepsi çifttir.  $a, b, c, d > 0$  olduğu için  $a, b, c, d > 1$  dir. Pozitif çift sayılarda

$$\frac{y}{y-1} < 2 \leq x \Rightarrow y < xy - x \Rightarrow x + y < xy$$

bağıntısı vardır.

$$a^2 + b^2 < a^2b^2 \text{ ve } c^2 + d^2 < c^2d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < a^2b^2 + c^2d^2 < a^2b^2c^2d^2.$$

Buna göre  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$  denkleminin pozitif tamsayılarla çözümü yoktur.

- 3  $a_i$  katsayıları  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinden olmak üzere  $|x| < 1$  için tanımlı  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$  fonksiyonu için  $f\left(\frac{1}{10}\right)$  bir rasyonel sayıdır. Tamsayı katsayılı uygun  $p(x)$  ve  $q(x)$  polinomları ile fonksiyonun ( $|x| < 1$  için)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

### Çözüm:

$f\left(\frac{1}{10}\right) = \overline{0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots}$  rasyonel olduğuna göre  $(a_i)$  dizisi bir yerden sonra periyodik.  $N$ -inci terimden sonra  $k$  terimlik periyodik olduğunu varsayalım. Her  $n > N$  için  $a_{k+n} = a_n$  olacaktır. Örneğin  $0, 12345674567456 \dots = 0, 1234\overline{567}$  sayısı için her  $n > N = 3$  için  $a_{4+n} = a_n$  olacaktır.  $g(x)$  ile tekrarlamayan kısmı  $h(x)$  ile de tekrarlayan kısmı gösterelim.

$$f(x) = g(x) + h(x), g(x) = a_1 x^1 + \dots + a_N x^N$$

ve

$$h(x) = a_{N+1} x^{N+1} + a_{N+2} x^{N+2} + \dots + a_{N+1} x^{N+k+1} + a_{N+2} x^{N+k+2} + \dots$$

olacaktır. Yeniden düzenlediğimizde

$$h(x) = a_{N+1} (x^{N+1} + x^{N+k+1} + x^{N+2k+1} + \dots) + a_{N+2} (x^{N+2} + x^{N+k+2} + x^{N+2k+2} + \dots) + \dots + a_{N+k} (x^{N+k} + x^{N+2k} + x^{N+3k} + \dots)$$

elde ederiz.  $(x^{N+i} + x^{N+k+i} + x^{N+2k+i} + \dots) \cdot (1 - x^k) = x^{N+i}$  olacağı için

$$h(x) \cdot (1 - x^k) = a_{N+1} x^{N+1} + a_{N+2} x^{N+2} + \dots + a_{N+k} x^{N+k}$$

sonlu katsayılı bir polinom elde edilir.

$f(x)(1 - x^k) = g(x)(1 - x^k) + h(x)(1 - x^k)$  eşitliğinde her tarafı  $(1 - x^k)$  ile bölelim.

$$f(x) = \frac{g(x)(1 - x^k) + h(x)(1 - x^k)}{1 - x^k} = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ eşitliğinden}$$

$p(x) = g(x)(1 - x^k) + h(x)(1 - x^k)$  ve  $q(x) = 1 - x^k$  şeklinde tam katsayılı sonlu terimli iki polinom bulunabilir.

- 4 Bir havuzun ortasında yanyana sıralanmış  $N$ -tane taşın üzerinde bir kurbağa sıçırıyor. Kurbağa bulunduğu taştan  $p$  olasılıkla soldaki,  $1 - p$  olasılıkla ise sağdaki taşa sıçırıyor. En soldaki taştan sola, ya da en sağdaki taştan sağa sıçrayan kurbağa suya düşüyor. Sol baştan  $k$ -ıncı taşa bulunan kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığını  $p_k$  ile gösterirsek;  $p < \frac{1}{3}$  için  $p_1 > \frac{1}{2}$  olduğunu kanıtlayınız.

### Çözüm:

Kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığı  $p_k$ ,  $p$  olasılıkla sola atlayacağı için,  $p \cdot p_{k-1}$ ;  $(1 - p)$  olasılıkla sağa atlayacağı için  $(1 - p) \cdot p_{k+1}$  ifadelerinin toplamına eşittir.  $p_k = pp_{k-1} + (1 - p)p_{k+1}$  elde edilir. Sorunun doğası gereği  $p_0 = 0$ ,  $p_{N+1} = p_{N+2} = \dots = 1$  dir.  $(1 - p)p_{k+1} - p_k + pp_{k-1} = 0$  doğrusal

indirgemeli dizisinde  $r_1 = 1$  ve  $r_2 = \frac{p}{1 - p}$  çıkacaktır.  $p_k = \left(\frac{p}{1 - p}\right)^k c_1 + c_2$  dizisindeki sabit terimleri

bulmaya çalışalım.  $p_0 = 0$  olduğu için  $c_2 = -c_1$  dir.  $p_k = \left(\frac{p}{1 - p}\right)^k c_1 - c_1 = c_1 \left(\left(\frac{p}{1 - p}\right)^k - 1\right)$ .  $p_{N+1} = 1$

olduğu için  $c_1 = \frac{(1 - p)^{N+1}}{p^{N+1} - (1 - p)^{N+1}}$  elde edilir.

$$p_k = \frac{(1 - p)^{N+1}}{p^{N+1} - (1 - p)^{N+1}} \frac{(p^k - (1 - p)^k)}{(1 - p)^k} \Rightarrow p_1 = \frac{(1 - p)^{N+1}}{p^{N+1} - (1 - p)^{N+1}} \left(\frac{2p - 1}{1 - p}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1 &= \frac{1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1} - 1} \left(\frac{1}{1-p} - 2\right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}} \left(2 - \frac{1}{1-p}\right) > \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}} \left(2 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &> \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N+1}} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

- 5  $p$  yolcu,  $n$  vagondan oluşan bir trene içinde yolculuk edecekleri vagonu rastgele seçerek binerler. Her vagona en az bir yolcu bulunması olasılığını hesap ediniz.

### Çözüm:

Her yolcu için  $n$  seçenek olduğu için toplamda  $n^p$  seçenek vardır.

$S_0$  : 0, 1, 2, ...  $n-1$  adet vagonun boş kaldığı durumlar.

$S_1$  : 1, 2, ...  $n-1$  adet vagonun boş kaldığı durumlar.

$S_k$  :  $k, k+1, \dots, n-1$  adet vagonun boş kaldığı durumlar.

$S_{n-1}$  :  $n-1$  adet vagonun boş kaldığı durumlar.

İçerme-Dışarma prensibine göre  $S = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}$  kümesi boş vagonun kalmadığı durumları verir. Dağıtım yapılacak vagonlar  $\binom{n}{a}$  şekilde seçilebilir. Bu  $a$  vagona  $p$  kişi  $a^p$  şekilde dağıtılabilir.

Bu durumda  $S_k = \binom{n}{n-k} (n-k)^p$  olacaktır. Aradığımız değer  $S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^p$ .

Bu durumda her vagona en az bir yolcu bulunması olasılığı  $\frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^p}{n^p}$  dir. Aslında yu-

karıdaki ifade saymada bilinen bir sayının özel bir hali. **Stirling sayısı**,  $S(p, n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^p$

şeklinde tanımlanan bir sayı. Bu durumda soruda bahsi geçen olasılık  $P = \frac{S(p, n) n!}{n^p}$  olacaktır.

- 6 Köşeleri  $O, A, B, C$  olan bir dörtyüzlünün (üçgen piramidin) kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden (dışbükey) cismin hacmi  $V$  ve bütün kenarlarının uzunlukları toplamı  $U$  ise

$$V \leq \frac{(U - |OA| - |BC|)(U - |OB| - |AC|)(U - |OC| - |AB|)}{2^7 \cdot 3}$$

olacağını gösteriniz.

### 33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1992

- 1 Her terimi,  $2 \leq p \leq 11$  koşulunu sağlayan  $p$  asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.

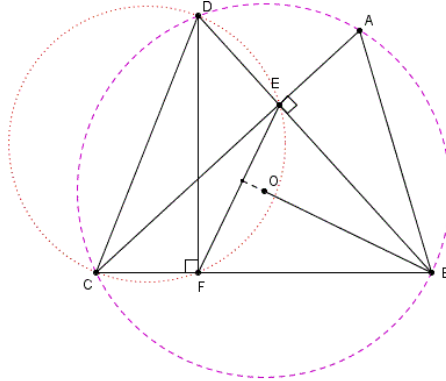
#### Çözüm:

14 ardışık sayının 7 tanesi tektir. Bunlardan en fazla 1 tanesi 7 ile bölünür. En fazla 1 tanesi 11 ile bölünür. En fazla 2 tanesi 5 ile bölünür. En fazla 3 tanesi 3 ile bölünür. Hiçbiri 2 ile bölünmez.  $1 + 1 + 2 + 3 + 0 = 7$  olduğu için her bir sayının sadece bir asal sayı ile bölünmesi gerekir. Aksi durumda en az bir sayı  $2 \leq p \leq 11$  arasındaki asal sayılardan en az biri ile bölünmez. En fazla 3 tanesi 3 ile bölünür demiştik. Bu durumda en baştaki ve en sondaki sayılar 3 ile bölünmek zorunda. En fazla 2 tanesi 5 ile bölünür demiştik. (Daha iyi anlamak için 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 dizisi üzerinden sayıları seçebilirsiniz.) Bu durumda ya ilk sayı ile sondan ikincisi, ya da ikinci sayı ile son sayı 5 ile bölünmek zorunda. Demek ki bu sayılardan en az bir tanesi  $2 \leq p \leq 11$  arasındaki asal sayılardan en az biri ile bölünmez.

- 2  $ABC$  üçgeninin  $B$  köşesinden geçerek  $AC$  kenarına  $E$  noktasında dik olan doğru, bu üçgenin  $O$  merkezli çevrel çemberini  $D$  noktasında kesiyor.  $D$  den  $BC$  kenarına inilen dikmenin ayağı  $F$  noktası olduğuna göre  $BO$  doğrusunun  $EF$  doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

#### Çözüm 1:

$m(\widehat{OBC}) = \alpha$  olsun.  $O$  çevrel çemberin merkezi ve  $|BE| \perp |AC|$  olduğundan  $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ - \alpha$ ,  $m(\widehat{CAB}) = \alpha$  olur.



$C - B - A - D$  çembersel olduğundan  $m(\widehat{CAB}) = \alpha$  dir. Ayrıca  $m(\widehat{CFD}) = m(\widehat{CED}) = 90^\circ$  olduğundan  $D - C - F - E$  çembersel olup  $m(\widehat{DFE}) = \alpha$ ,  $m(\widehat{EFB}) = 90^\circ - \alpha$  olur. Bu durumda  $BO$  doğrusunun  $EF$  doğrusuna dik olur.

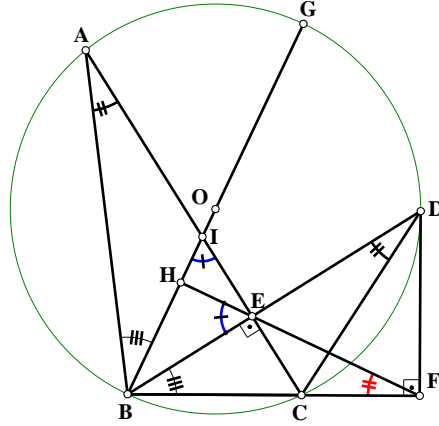
#### Çözüm 2:

$BO$  ile  $AC$ ,  $I$  da;  $EF$  ile  $BO$  da  $H$  noktasında kesişsin.  $EDFC$  dörtgeni karşılıklı açıları ( $E$  ve  $F$ ) toplamı  $180^\circ$  olduğu için kirişler dörtgenidir.

$$\angle EDC = \angle EFC = \angle BAC \quad (1)$$

$$\angle ABO = \angle DBC = 90^\circ - \angle ACB \quad (2)$$

$\angle BIE = \angle BAC + \angle ABO$  ve  $\angle HEB = \angle DBC + \angle EFC$  olduğu için  $\angle BIE = \angle HEB \Rightarrow \angle EHB = 90^\circ$  olur.

**Not:**

$AC, G$  nin Simson doğrusu;  $EF, D$  nin Simson doğrusudur. İki noktanın Simson doğruları arasındaki açı, bu iki noktanın belirlediği yayın ölçüsünün yarısı kadardır. Bir başka deyişle, bu yayı göre çevre açının ölçüsüne eşittir. Bu durumda  $\angle OEH = \angle GBD$  ve  $BO \perp EF$  olacaktır.

**3**  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  pozitif reel sayıları

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

koşulunu sağlıyorsa

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$y_i = \frac{1}{1+x_i}$  dediğimizde soru  $y_1 + y_2 + \dots + y_{n+1} = 1$  ve  $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = \frac{1-y_1}{y_1} \frac{1-y_2}{y_2} \dots \frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}} \geq n^{n+1}$  şekline dönüştü.

$$\frac{1-y_1}{y_1} \frac{1-y_2}{y_2} \dots \frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{(y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1})}{y_1} \frac{(y_1 + y_3 + \dots + y_{n+1})}{y_2} \dots \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{y_{n+1}}$$

olacaktır.  $n$  terimli  $y_i$  toplamları için  $A.O \geq G.O$  uygularsak;

$$\frac{y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{y_2 y_3 \dots y_{n+1}} \Rightarrow \frac{y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1}}{y_1} \geq \frac{n \sqrt[n]{y_2 y_3 \dots y_{n+1}}}{y_1}$$

elde ederiz.  $n+1$  adet terim için  $A.O \geq G.O$  uyguladıktan sonra taraf tarafa çarparsak

$$\frac{(y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1})}{y_1} \frac{(y_1 + y_3 + \dots + y_{n+1})}{y_2} \dots \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{y_{n+1}} \geq n^{n+1} \frac{y_1 y_2 \dots y_{n+1}}{y_1 y_2 \dots y_{n+1}} = n^{n+1}$$

elde edilir.

Eşitlik durumu  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n+1} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$  olduğunda elde edilir.

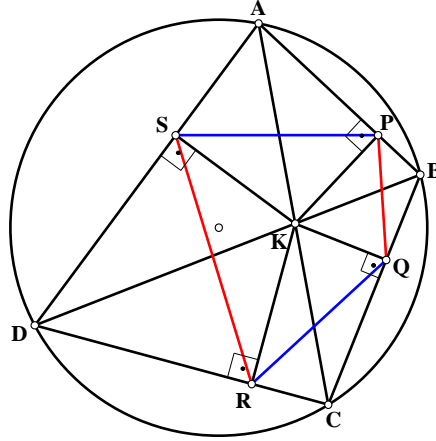
**4**  $ABCD$  konveks kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktasından  $AB, BC, CD, DA$  kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile  $P, Q, R, S$  noktaları olduğuna göre,

$$PQ + RS = QR + SP$$

eşitliğini ispatlayınız.

**Çözüm 1:**

Köşegenlerin kesişim noktası  $K$  olsun.  $ABCD$  nin çemberinin yarıçapı  $R$  olsun.  $KQCR$ ,  $KPBQ$ ,  $KPAS$ ,  $KSDR$  dörtgenleri çevrel yarıçapları sırasıyla  $KC$ ,  $KB$ ,  $AK$ ,  $BK$  olan birer kirişler dörtgenidir.



$ABCD$  dörtgenin iki köşegeni, diğer dört dörtgenin çap olmayan köşegenleri için Sinüs Teoremini uygulayalım.

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R, \frac{BD}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow AC \cdot \sin \hat{A} = BD \cdot \sin \hat{B} \quad (*)$$

$$\frac{RQ}{\sin \hat{C}} = \frac{RQ}{\sin \hat{A}} = KC \Rightarrow RQ = KC \cdot \sin \hat{A}.$$

Benzer şekilde  $PS = AK \cdot \sin \hat{A}$ ,  $PQ = KB \cdot \sin \hat{B}$  ve  $RS = DK \cdot \sin \hat{B}$ . Buna göre  $PQ + SR = BD \cdot \sin \hat{B}$  ve  $PS + RQ = AC \cdot \sin \hat{A}$  olur.

(\*) e göre  $PQ + RS = QR + SP$  dir.

**Çözüm 2:**

Köşegenlerin kesişim noktası  $K$  olsun.  $\angle CAB = \angle CDB$ ,  $\angle KAP = \angle KSP$  ve  $\angle KSR = \angle KDR$  eşitlikleri  $\angle PSK = \angle KSR$  yani  $PQRS$  dörtgeninde  $SK$  yı açıortay yapar. Benzer şekilde  $RK$ ,  $PK$ ,  $QK$  da açıortaydır. Bu durumda  $PQRS$  bir teğetler dörtgeni yani  $PQ + RS = QR + SP$  olur.

- 5 1 den  $n$  ye kadar numaralanmış  $n$  kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi  $m$  toptan ( $m \geq n$ ) bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

**Çözüm:**

**Çözüm:** Önce  $n$  kutuya  $n$  tane topu istenen şarta uygun olarak dağıtalım. Çünkü  $n$  inci top da uygun bir kutuya koyulduktan sonra tüm kutular açılmış olacaktır.

$n$  topu dağıtırken herhangi bir anda açık olan kutu sayısı, kutulara dağıtılmış olan top sayısından daha az olmamalıdır. Bu ise bizi  $n$  inci Catalan sayısına götürür ve  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  yolla bu işlem yapılabilir.

Şimdi geriye kalan  $m - n$  özdeş topu  $n$  kutuya dağıtalım. Dağılım prensibi gereğince bu işlem  $\binom{m-1}{n-1}$  yolla yapılabilir.

Çarpma prensibinden  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \binom{m-1}{n-1}$  elde ederiz. (L. Gökçe)

- 6 Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

251 noktayı merkez kabul eden 251 tane 1 yarıçaplı daireleri çizelim. 5 yarıçaplı ve merkezi 4 yarıçaplı daireyle kesişen bir daire, bu 251 dairenin hepsini içine alabilir. Söz konusu büyük dairenin alanı  $25\pi$  iken küçük dairelerin toplam alanı  $251\pi$ . Demek ki öyle bir nokta var ki, 11 daire tarafından da içeriliyor. Bu noktayı merkez kabul eden 1 yarıçaplı daire, söz konusu 11 çemberin merkezlerini içereceğine göre soruda bahsi geçen daire çizilebilir.

### 34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1993

- 1 Pozitif tamsayılardan oluşan, ilk terimi 16 olan ve her teriminin farklı pozitif bölenlerinin sayısı 5 ile bölünen sonsuz bir aritmetik dizinin var olduğunu gösteriniz. Bu tür diziler içinde ortak farkı en küçük olanını bulunuz.

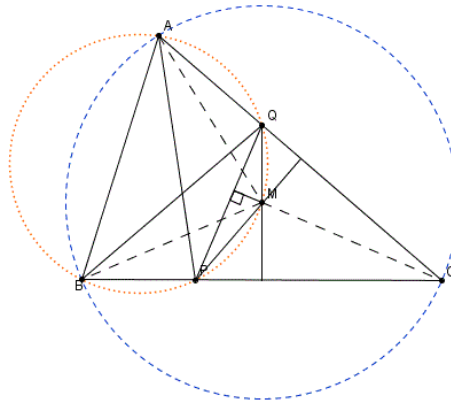
#### Çözüm:

$16 = 2^4$  sayısının 5 pozitif böleni var. 16 dan sonra 5 bölenli en küçük sayı  $3^4 = 81$ . 10 bölenli en küçük sayı  $2^4 \times 3 = 48$ . Bu durumda ilk adayımız  $16, 48, \dots, 16 + 32k$  dizisi. Gerçekten de  $16 + 32k = 16(2k + 1) = 2^4(2k + 1)$  sayılarının bölen sayısı her zaman 5 e bölünür. Bundan sonra bu özelliği sağlayan dizi varsa, ortak farkı 32 den büyük olacağı için bu tarzdaki diziler arasından en küçük ortak farka sahip olanı  $16 + 32k$  dizisidir.

- 2 Dar açılı  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $M$  noktası olup,  $(BMA)$  çemberi  $BC$  kenarını  $P$ ,  $AC$  kenarını  $Q$  noktasında kesiyor. Buna göre,  $CM$  doğrusunun  $PQ$  doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

#### Çözüm 1:

$M$  çevrel çemberin merkezi olduğundan  $m(\widehat{BMA}) = 2m(\widehat{ACB})$  dir.  $A - Q - M - P$  çembersel olduğundan



$m(\widehat{AQP}) = m(\widehat{BPA}) = 2m(\widehat{ACB})$  dir. Bu durumda  $|AP| = |PC|$  ve  $|BQ| = |QC|$  olur.

$M$  çevrel çemberin merkezi olduğundan  $[OM \perp BC]$  ve  $[PM \perp AC]$  olur. Bu durumda  $M$   $QPC$  üçgeninin diklik merkezi olup  $CM \perp PQ$  olur

#### Çözüm 2:

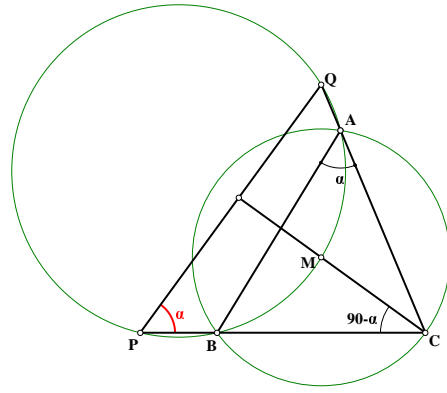
$$\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC \Rightarrow \angle MCB = 90^\circ - \angle BAC.$$

$AQPB$  kirişler dörtgeninde

$$\angle BPQ = 180^\circ - \angle QAB = \angle BAC$$

olacağından

$$\angle QPC + \angle PCM = \angle BAC + 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ.$$

**Not:**

Soru çok basit. Biraz terim kullanarak karmaşıktır.  $AB$  ile  $PQ$  doğruları anti-paraleldir.  $ABC$  üçgeninde  $CM$  doğrusu  $C$  den geçen yüksekliğin izogonal eşleniğidir (isogonal conjugate). Bu durumda  $CM$  doğrusu  $CQP$  üçgeninde yüksekliktir.

- 3 Her  $n \geq 1$  için  $b_{n+1}^2 \geq \frac{b_1^2}{1^3} + \frac{b_2^2}{2^3} + \dots + \frac{b_n^2}{n^3}$  koşulunu sağlayan bir  $(b_n)$  pozitif reel sayı dizisi veriliyor.

$$\sum_{n=1}^K \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} > \frac{1993}{1000}$$

olacak şekilde bir  $K$  tamsayısı bulunabileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

Verilen eşitsizliğe faydalı eşitsizlik uygularsak,

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &\geq \frac{b_1^2}{1^3} + \frac{b_2^2}{2^3} + \dots + \frac{b_n^2}{n^3} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} \\ \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} &\geq \frac{1}{\sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}} = \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^K \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \geq \sum_{n=1}^K \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^K \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 - \frac{2}{K+1}$$

olacaktır. Eğer  $K \geq 285$  alırsak,

$$\sum_{n=1}^K \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \geq 2 - \frac{2}{K+1} > \frac{1993}{1000}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $K \geq 285$  olan her  $K$  tamsayısı için istenilen eşitsizlik sağlanır.

- 4 İki şehir arasında en fazla bir yol bulunmak şartı ile,  $v$  adet şehrin kimileri bir yol ile birbirine bağlanmıştır.  $e$ , bu yolların sayısını göstermek üzere

- (a)  $e < v - 1$  olması halinde birinden diğerine seyahat edemeyeceğimiz en az bir çift şehrin bulunduğunu;  
 (b)  $2e > (v-1)(v-2)$  olması halinde herhangi iki şehir arasında bir seyahatın mümkün olduğunu gösteriniz.

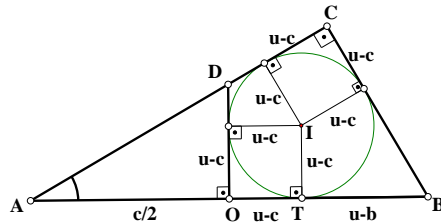
**Çözüm:**

- (a) 2 şehir için en az 1 yol gerekli. 3 şehir için en az 2 yol gerekli.  $v - 1$  şehir için en az  $v - 2$  yol gereksin.  $v$  şehir için en az  $v - 1$  yol gerekeceğini tümevarımla göstereceğiz. Çizge kuramında  $\sum d(v) = 2|E|$  şeklinde köşelere ait derecelerin toplamı kenar sayısının iki katıdır diye bir kural var. Buna takılı kalmadan, her şehirden geçen yol sayısına o şehrin derecesi diyelim. Her yol iki köşeden geçtiğine göre, derecelerin toplamı yol sayısının iki katı kadar olacaktır. Tümevarıma geri dönersek, her şehrin derecesi 1 den büyük olsaydı,  $\frac{2v}{2} = v$  yol olurdu. Demek ki en az 1 tane şehrin derecesi 1. (Derecenin 0 olması demek, o şehrin diğer şehirlerle bağlantısı yok demektir.) Bu şehrin bağlantısını diğer şehirlerden kopardığımızda, diğer şehirlerden birbirlerine gidilebilme koşulunda bir değişiklik yapmamış oluyoruz. Çünkü çıkardığımız şehir üzerinden başka bir şehre gidilemiyor. Bu  $v - 1$  şehir için en az  $v - 2$  yol gerekeceği tümevarım hipotezinde belirtildi. Şimdi bu çıkardığımız şehri,  $v - 1$  şehirli yol dağıtımına eklediğimizde en az  $(v - 2) + 1 = v - 1$  yol gerekmiş olacak. Bu durumda  $e < v - 1$  için en az bir şehir çifti için güzergah yoktur.
- (b) Şehirler arasında böyle bir ulaşımın olmadığını varsayalım. Çizge kuramı üzerinden konuşursak,  $G$  nin birbirinden bağımsız iki bileşenini ele alalım.  $A = \frac{V(G)}{B}$ ,  $B \subset V(G)$ ,  $v - 1 \geq |B| = k \geq 1$  ise  $|A| = v - k$ .  $B$  deki şehirler ile  $A$  nın herhangi bir şehrini bağlayan yol yok.  $A$  da en fazla  $\binom{v-k}{2}$ ,  $B$  de de en fazla  $\binom{k}{2}$  kadar yol bulunabilir. Toplamda en fazla  $\binom{k}{2} + \binom{v-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(v-k)(v-k-1)}{2} = \frac{v^2 - 2vk + 2k^2}{2}$  yol bulunabilir. Bu ifade  $k = v - k$  olduğunda en küçük değerini, dolayısıyla da  $k = 1$  veya  $k = v - 1$  olduğunda en büyük değerini alacak. Demek ki bağlantısız bir çizge en fazla  $\binom{1}{2} + \binom{v-1}{2} = \frac{(v-1)(v-2)}{2}$  adet kenar içerebiliyor. Bunun üzerine bir yol daha eklediğimizde,  $e > \frac{(v-1)(v-2)}{2}$  şartı sağlanmış, çizge bağlı olmuş olacak. Bu durumda herhangi bir şehirden diğerine gitmek mümkün olmuş olacak.

- 5  $AB$  çaplı,  $O$  merkezli yarım çemberin  $OE \perp AB$  olmak üzere çizilen  $OE$  yarıçapı bir  $AC$  kirisini yarı çemberin iç bölgesinde  $D$  noktasında kesmektedir.  $OBCD$  dörtgeninin teğetler dörtgeni olabilmesi için  $\widehat{CAB}$  açısının alabileceği bütün değerleri belirleyiniz.

**Çözüm:**

$DCBO$  teğetler dörtgeninin çemberi, üçgeninin içteğet çemberidir.



$AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$  ve  $u = \frac{a+b+c}{2}$  dersek, içteğet çember  $AB$  ye  $T$  de dokunuyorsa  $OT = r = u - c$  ve  $BT = u - b$  elde edilir.  $OT + TB = 2u - b - c = a = \frac{c}{2}$  olduğundan  $\sin \frac{\angle CAB}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CAB = 30^\circ$  olur.

- 6 Her  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  için,

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$

koşulunu gerçekleyen tüm  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  fonksiyonlarını bulunuz.

**Çözüm:**

$k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere;  $y = kx^2$  değeri ile fonksiyonel denklemi tekrar yazalım.  $f((k+1)x) = f(x) + f(kx) + 2kx^2$ .  $f(kx)$  dizisinin genel terimi

$$f(kx) = kf(x) + k(k-1)x^2 \quad (1)$$

olacaktır. ( $k = 1, 2, \dots, k-1$  değerleri için denklemleri alt alta toplayın).  $x = 1$  değeri için

$$f(k) = kf(1) + k^2 - k \quad (2)$$

elde etmiş olduk. Yani en azından tam sayılar da  $f$  nin davranışını belirledik. Tüm pozitif tam sayılarda bu şekilde davranan bir fonksiyon, pozitif rasyonel sayılarda da bu şekilde davranır mı? Hislerimiz evet diyor; ama matematiksel olarak henüz bu yargıya varamıyoruz. Her rasyonel sayı iki tam sayının bölümü şeklinde yazılabileceği için  $m \in \mathbb{N}_0$  ve  $k \in \mathbb{N}^+$  için  $x = \frac{m}{k}$  değerini (1) numaralı bağıntıda yerine yazarsak  $f(m) = kf\left(\frac{m}{k}\right) + m^2 - \frac{m^2}{k}$  elde edilir.  $m$  tam sayı olduğu için  $f(m)$  değerini (2) den hesaplayabiliriz.

$$f(m) = mf(1) + m^2 - m = kf\left(\frac{m}{k}\right) + m^2 - \frac{m^2}{k}.$$

Bu durumda  $f\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{m}{k}\right)^2 - \frac{m}{k} + f(1)\frac{m}{k}$  elde edilir.  $x = \frac{m}{k}$  olduğuna göre her  $x \in \mathbb{Q}^+$  için  $f(x) = x^2 - x + f(1)x$  elde edilir.  $f(1) = C \in \mathbb{Q}^+$  için

$$f(x) = x^2 - x + Cx$$

elde edilir.

### 35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1994

- 1 Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir  $f$  fonksiyonu tüm  $x$  tam sayıları için  $f(x) + f(x+3) = x^2$  eşitliğini sağlamaktadır.  $f(19) = 94$  olduğuna göre  $f(94)$  değerini hesaplayınız.

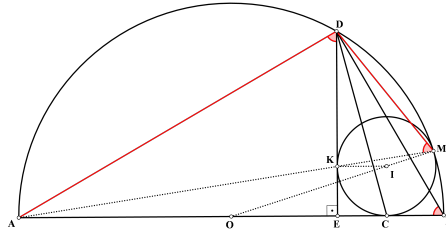
**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 f(x+3) &= x^2 - f(x) \\
 f(22) &= 19^2 - f(19) = 19^2 - 94 \\
 f(25) &= 22^2 - 19^2 + 94 \\
 &\vdots \\
 f(94) &= 91^2 - 88^2 + 85^2 - 82^2 + \dots + 25^2 - 22^2 + 19^2 - 94 \\
 f(94) &= 3(91 + 88 + 85 + \dots + 25 + 22) + 19^2 - 94 \\
 f(94) &= 3 \cdot 12 \cdot 113 + 361 - 94 = 4335
 \end{aligned}$$

- 2  $O$  merkezli  $[AB]$  çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde  $O$  ile  $B$  arasındaki bir  $E$  noktasından  $[AB]$  çapına çıkılan dikme, çemberi  $D$  noktasında kesiyor.  $[DE]$  ve  $[EB]$  doğru parçalarına sıra ile  $K$  ve  $C$  noktalarında teğet olan bir çember  $BD$  yayına da  $F$  noktasında içten teğettir. Buna göre  $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm 1:**

$KI \parallel OA$ ,  $\frac{KI}{OA} = \frac{IF}{OF}$  olduğu için  $A, K, F$  doğrusaldır.  $\angle ADE = \angle ABD = \angle AFD$  olduğu için  $AD^2 = AK \cdot AF$ .



$A$  noktasının  $I$  merkezli çembere göre kuvvetinden  $AC^2 = AK \cdot AF$  olduğu için  $AD = AC$  elde edilir. Bu durumda  $\angle ADC = \angle ACD \Rightarrow \angle ADE + \angle EDC = \angle CDB + \angle DBC \Rightarrow \angle EDC = \angle BDC$  olur.

**Çözüm 2:**

$OA = R$  ve  $IC = r = 1$  olsun. Açığortay teoreminden  $\frac{DE}{EC} = \frac{DB}{BC}$  elde edileceği için

$$\frac{DE^2}{BD^2} = \frac{EC^2}{BC^2} = \frac{1}{BC^2}$$

olduğunu göstermemiz gerekecek.

$$\begin{aligned}
 BD^2 &= DE^2 \cdot BC^2 \Rightarrow BE^2 = BD^2 - DE^2 = DE^2 (BC^2 - 1) = DE^2 (BC - 1)(1 + BC) \\
 &= DE^2 (BC - 1) BE \Rightarrow BE = 1 + BC = DE^2 (BC - 1)
 \end{aligned}$$

olduğunu göstereceğiz.

$$OI = R - r = R - 1, OC = \sqrt{R^2 - 2R} \Rightarrow BC = R - \sqrt{R^2 - 2R}$$

$$\begin{aligned}
DE^2 &= OD^2 - OE^2 = R^2 - \left(\sqrt{R^2 - 2R} - 1\right)^2 = 2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R - 1. \\
DE^2 \cdot (BC - 1) &= \left(2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R - 1\right) \left(R - \sqrt{R^2 - 2R} - 1\right) \\
&= 2R\sqrt{R^2 - 2R} - 2(R^2 - 2R) - 2\sqrt{R^2 - 2R} + 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - 2R} - 2R - R + \sqrt{R^2 - 2R} + 1 \\
&= R - \sqrt{R^2 - 2R} + 1 = BC
\end{aligned}$$

olur.

- 3** Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

### Çözüm:

Her çift renkli üçgenin tam olarak 2 köşesinden çıkan kenarların biri beyaz, diğeri kırmızıdır. Her  $i$  köşesinden  $a_i$  kırmızı kenar çıkıyorsa,  $24 - a_i$  beyaz kenar çıkar. Her köşeden  $a_i(24 - a_i)$  adet çift renkli üçgen elde edilir. Her çift renkli üçgenin tam olarak bir tane daha çift renkli köşesi olduğundan toplam çift renkli üçgen sayısı  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{25} a_i(24 - a_i)$  olacaktır. Bu değer en çok  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{25} 12(24 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 25 = 1800$  tane çift renkli üçgen olabilir. 25 köşe  $\binom{25}{3} = 2300$  üçgen belirteceği için, bunlardan en az  $2300 - 1800 = 500$  tanesi tek renklidir.

- 4**  $ABC$  üçgeninin kenarları üzerinde  $P \in [AB], Q \in [BC], R \in [CA]$  ve

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \quad \left(k < \frac{1}{2}\right)$$

olacak biçimde  $P, Q, R$  noktaları alınıyor.  $G$ ,  $ABC$  üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre

$$\frac{\text{Alan}(PQG)}{\text{Alan}(PQR)}$$

değerini bulunuz.

### Çözüm:

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  şeklinde tanımlansın.  $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$  olacaktır.

$P\left(\frac{x_2 - x_1}{k} + x_1, \frac{y_2 - y_1}{k} + y_1\right), Q\left(\frac{x_3 - x_2}{k} + x_2, \frac{y_3 - y_2}{k} + y_2\right)$  ve  $R\left(\frac{x_1 - x_3}{k} + x_3, \frac{y_1 - y_3}{k} + y_3\right)$  olur.

$PQR$  üçgeninin ağırlık merkezi  $G'\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$  olacağı için  $G = G'$  olur. Bu durumda

$$\frac{\text{Alan}(PQG)}{\text{Alan}(PQR)} = \frac{1}{3} \text{ olacaktır.}$$

- 5**  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$  olacak şekilde  $n_i, m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

### Çözüm:

Önce Analizde bilinen bir teoremi hatırlatalım.

**Teorem:** Her irrasyonel  $a$  sayısı için ona yakınsayan ve her  $i \in \mathbf{N}$  için

$$\left| \frac{n_i}{m_i} - a \right| < \frac{1}{m_i^2},$$

eşitsizliğini sağlayan  $\left\{ \frac{n_i}{m_i} \right\}$ ,  $i \geq 1$  bir rasyonel sayı dizisi vardır.

Teoremden dolayı,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i}{m_i} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

eşitliğini sağlayan her  $i$  için

$$\left| \frac{n_i}{m_i} - \frac{\ln 3}{\ln 2} \right| < \frac{1}{m_i^2} \quad (*)$$

özelliğine sahip bir rasyonel sayı dizisi  $\left\{ \frac{n_i}{m_i} \right\}$  vardır. (\*) dan:

$$\begin{aligned} |n_i \ln 2 - m_i \ln 3| < \frac{\ln 2}{m_i} &\iff |\ln 2^{n_i} - \ln 3^{m_i}| < \frac{\ln 2}{m_i} \\ &\iff \left| \ln \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} \right| < \frac{\ln 2}{m_i} \\ &\iff e^{-\frac{\ln 2}{m_i}} < \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} < e^{\frac{\ln 2}{m_i}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\lim_{i \rightarrow \infty} e^{\pm \frac{\ln 2}{m_i}} = e^0 = 1$  olduğundan, Sandwich teoreminden  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$  olur.

**Kaynak:** Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, 2003, Problem 3.43 Syf. 95-96.

**6**  $a^2 + b^2 + 3$  sayısının  $a \cdot b$  ile bölünebilmesini sağlayan tüm  $(a, b)$  tam sayı ikililerini bulunuz.

**Çözüm:**

İfadenin tam sayı olması istendiğinden

$$a^2 + b^2 + 3 = abc$$

$c \in \mathbb{Z}$  olmalıdır.

Bu soruyu çözerken  $c$  herhangi bir tam sayı olduğu için genelliği bozmadan pozitif tam sayılarda çözümleri bulursak geri kalan çözümleri bulmak kolaydır.

Bu soruyu  $\frac{a^2 + b^2 + 3}{ab} \in \mathbb{Z}$  olarak düşünebiliriz.  $a = b$  olduğunu varsayarsak  $2 + \frac{3}{a^2}$  gelir ve  $a = 1$  olmalıdır.  $a = b = 1$  yerine koyulursa  $c = 5$  elde edilir.

Genelliği bozmadan  $a > b$  kabul edebiliriz.

$$a^2 - abc + (b^2 + 3) = 0$$

denkleminin diğer çözümü  $x$  olsun.

$$a + x = bc$$

$$ax = b^2 + 3$$

elde edilir. Buradan  $x$  in de tam sayı olacağı görülür.

Genelliği bozmadan  $x \geq a$  olsun. O halde

$$a^2 + 3 > b^2 + 3 = ax \geq a^2$$

$a \geq 3$  için

$$a^2 > b^2 \geq a^2 - 3 > (a - 1)^2$$

olduğundan dolayı çözüm yoktur.

$a = 2$  için  $a > b$  kabulünden dolayı olası tek çözüm  $(2, 1)$  dir ki sağlar  $c = 4$  bulunur. Geri kalan çözümler ise bunların işaretlerinin ve  $a$  ile  $b$  nin değerlerinin yer değiştirmeleriyle gelecektir.

$(1, 1)$  ikilisinden yararlanarak  $(1, 1, 5)$   $(-1, 1, -5)$  ,  $(1, -1, -5)$  ,  $(-1, -1, 5)$  çözümü gelir.

$(2, 1)$  ikilisinden yararlanarak  $(2, 1, 4)$  ,  $(1, 2, 4)$  ,  $(2, -1, -4)$  ,  $(-1, 2, -4)$  ,  $(-2, 1, -4)$  ,  $(1, -2, -4)$  çözümlerini söyleriz. Bu denklemin 10 çözümü vardır.

### 36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1995

**1**  $b \geq a$  olmak üzere verilen  $a, b$  gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 &= x_2 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 &= x_n \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 &= x_1 \end{aligned}$$

**Not:** Andreescu, Kedlaya, Zeitz e ait Mathematical Contests 1995-1996, Olympiad Problems and Solutions from around the World kitabında  $b \geq a > 0$  olarak düzeltilmiş.

#### Çözüm 1:

Düzeltilmiş versiyona göre çözelim.

$b \geq a > 0$  olduğu için  $b^2 \geq a^2$  dir. Bu durumda sistemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} (x_1 + a)^2 + b^2 - a^2 &= x_2 \\ (x_2 + a)^2 + b^2 - a^2 &= x_3 \\ &\vdots \\ (x_{n-1} + a)^2 + b^2 - a^2 &= x_n \\ (x_n + a)^2 + b^2 - a^2 &= x_1 \end{aligned}$$

Bu da  $x_i \geq 0$  olduğu anlamına gelir. Bu durumda  $x_i + a > 0$  olacağı için  $x_{(i \bmod n)+1} > 0$  olmalı.

$x_i$  sayılarından en büyüğü  $x_1$  olsun. Son denklemden ilk denkleme çıkarırsak  $(x_n + a)^2 - (x_1 + a)^2 = x_1 - x_2 \geq 0$  elde ederiz. Bu durumda  $x_n \geq x_1$  olacağı için  $x_n = x_1$  olmalı. O zaman  $x_1 - x_2 = 0$ , dolayısıyla  $x_1 = x_2 = x_n$  olmalı.

İkinci denklemden  $x_2 = x_1$  yazarsak  $x_3 = x_2 = x_1$  elde edilir. Bu durumda  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$  olacaktır.

İlk denkleme yeniden yazarsak  $x^2 + (2a-1)x + b^2 = 0$  elde ederiz. Denklemin kökleri  $\frac{1 - 2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 1 - 4b^2}}{2}$  dir.

$(2a - 1)^2 = (1 - 2a)^2 \geq 4b^2$  olduğu için  $1 - 2a \geq 2b \implies a + b \leq \frac{1}{2}$  elde edilir.

$a + b = \frac{1}{2}$  iken  $x = \frac{1}{2} - a$  tek çözüm olacaktır.

Diğer durumlarda  $(a + b < \frac{1}{2})$  iki çözüm gelecektir.

**Not:**  $a = 0$  olduğunda da, yani soru  $b \geq a \geq 0$  şeklinde düzeltildiğinde de yukarıdaki cevap geçerli oluyor.

#### Çözüm 2:

**1. Adım:**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gibi bir çözüm varsa, her bir  $x_i$  pozitifdir. Çünkü  $a > 0$  olduğu için,  $x^2 + 2ax + b^2 > 0$  eşitsizliği her  $x$  reel sayısı için sağlanır. Dolayısıyla, her denklemin sol tarafındaki sayı pozitif, ve bu nedenle sağ tarafındaki sayı yani, her bir  $x_i$  pozitif olmak zorundadır.

**2. Adım:**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  herhangi bir çözüm olsun.  $x_1$  ve  $x_2$  aşağıdakilerden birini sağlamak zorundadır:

$$1) x_1 = x_2 ; \quad 2) x_2 > x_1 ; \quad 3) x_2 < x_1$$

$x_1 = x_2$  ise,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  olacaktır.

Gerçekten, ikinci eşitlikten birincisini taraf tarafa çıkarırsak,

$$x_3 - x_2 = (x_2^2 - x_1^2) + 2a(x_2 - x_1) \quad (1)$$

benzer şekilde,

$$x_4 - x_3 = (x_3^2 - x_2^2) + 2a(x_3 - x_2) \quad (2)$$

⋮

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + 2a(x_{n-1} - x_{n-2}) \quad (n-2)$$

$$x_1 - x_n = (x_n^2 - x_{n-1}^2) + 2a(x_n - x_{n-1}) \quad (n-1)$$

$x_1 = x_2$  olması durumunda (1), (2), ..., (n-2), (n-1) eşitliklerinden  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  olduğu görülür.

Yine (1) - (n-1) eşitliklerinden  $x_2 > x_1$  veya  $x_1 > x_2$  durumlarının mümkün olmadığı görülür. Örneğin,  $x_2 > x_1$  olursa,

$$x_3 > x_2, x_4 > x_3, \dots, x_n > x_{n-1} \text{ ve } x_1 > x_n$$

eşitsizlikleri ve dolayısıyla,

$$x_1 > x_n > x_{n-1} > \dots > x_3 > x_2 > x_1 \implies x_1 > x_1$$

şeklinde bir çelişki elde edilir. Böylece, sistemin  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  çözümü varsa,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  olmak zorundadır. Bu çözümü bulalım.

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_1 &\implies x_1^2 + (2a-1)x_1 + b^2 = 0 \\ &\implies x_1 = \frac{(1-2a) \mp \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2} \\ &= \frac{(1-2a) \mp \sqrt{[1-2(a+b)][1+2(b-a)]}}{2}. \end{aligned}$$

Karekök içindeki ifade negatif olmamalıdır. Bu nedenle  $1 - 2(a+b) \geq 0$ ,  $a+b \leq \frac{1}{2}$  olmalıdır. Buradan

$$a+a \leq a+b \leq \frac{1}{2} \implies a \leq \frac{1}{4} \implies 1-2a \geq \frac{1}{2} > 0$$

olduğu da görülür. Sonuç olarak,  $a+b \leq \frac{1}{2}$  koşulunun sağlanması halinde sistemin sadece iki çeşit çözümü vardır:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{(1-2a) + \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2}$$

ve

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{(1-2a) - \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2}$$

(sağdaki sayıların pozitif olduğu açıktır).  $a+b > \frac{1}{2}$  olduğunda, sistemin çözümü yoktur.

**Kaynak:** Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, 2003, Syf. 78-70.

- 2**  $n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $\sigma(j) \geq j$  koşulunu sağlayan tam olarak iki  $j$  nin bulunduğu  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  permütasyonlarının sayısını bulunuz.

### Çözüm 1:

Çözüm (Lokman GÖKÇE):

Öncelikle  $\sigma(2) \neq 1$  durumuyla ilgilenelim.

$\sigma(2) \neq 1$  ise  $\sigma(2) \geq 2$  olur. Ayrıca açıkça  $\sigma(1) \geq 1$  olduğundan aranan özellikteki iki  $j$  değeri 1 ve 2 olmuş olur. O halde  $\sigma(1), \sigma(2)$  değerlerinden biri  $n$  e eşit olmak zorundadır. Böyle olmasa  $\sigma(x) = n$  denklemini sağlayan  $x$  sayısı aranan özellikteki 3. bir  $j$  sayısı olmuş olur ki bu bir çelişkidir.

$\sigma(1), \sigma(2) \in \{n-1, n\}$  olsun. 2 seçim yapılabilir.  $\sigma(3) \in \{1, 2\}$  olup 2 seçim vardır.  $\sigma(4) \in \{1, 2, 3\}$  olup 2 seçim vardır...  $\sigma(n-1) \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  olup 2 seçim vardır.  $\sigma(n)$  için 1 tek seçim kalır. Çarpma prensibiyle  $2^{n-2}$  farklı fonksiyon yazabiliriz.

$\sigma(1), \sigma(2) \in \{n-2, n\}$  olsun. Bu durumda da benzer işlemlerle  $2^{n-3}$  farklı fonksiyon yazabiliriz.

Benzer işlemlere devam ederek sondan önceki adımda  $\sigma(1), \sigma(2) \in \{2, n\}$  olup 2 seçim vardır.  $\sigma(3) = 1$  olmak zorundadır. Bundan sonraki değerlerde  $\sigma(4) = 3, \dots, \sigma(n) = n-1$  elde edilir. Tek türlü seçim vardır. Çarpma prensibiyle  $1 \cdot 2 = 2$  fonksiyon yazabiliriz.

Son adımda ise  $\sigma(1), \sigma(2) \in \{1, n\}$  olsun.  $\sigma(1) = 1$  ve  $\sigma(2) = n$  olmak zorundadır.  $\sigma(3) = 2, \dots, \sigma(n) = n-1$  olacağından yalnız 1 fonksiyon vardır.

Tüm bu değerlerin toplamını hesaplayalım:

$$2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + 1 = 2^{n-1} - 1 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi de  $\sigma(2) = 1$  durumuna bakalım.

Başlangıç olarak  $\sigma(1), \sigma(3) \in \{2, n\}$  olsun.  $\sigma(1) = 2, \sigma(3) = n$  tek yolla belirlenebilir. Diğer elemanların görüntüleri için  $\sigma(2) = 1, \sigma(4) = 2, \dots, \sigma(n) = n-1$  olması gerekir. Yani bu halde 1 fonksiyon yazılabilir.  $\sigma(1), \sigma(3) \in \{3, n\}$  durumlarını hesaplayalım. 2 fonksiyon yazılabilir.  $\sigma(1), \sigma(3) \in \{4, n\}$  durumlarını hesaplayalım.  $2^2$  fonksiyon yazılabilir...vs son adımda  $2^{n-3}$  ve toplamda ise  $2^{n-2} - 1$  fonksiyon vardır.

$\sigma(1), \sigma(4) \in \{3, n\}$  durumlarını hesaplayalım. 1 fonksiyon yazılabilir.  $\sigma(1), \sigma(4) \in \{4, n\}$  durumlarını hesaplayalım. 2 fonksiyon yazılabilir. son adımda  $2^{n-4}$  fonksiyon yazılabilir...vs toplamda  $2^{n-3} - 1$  fonksiyon vardır.

Bu tür alt durumları inceleyerek toplamda  $2^{n-1} - 1$  fonksiyon yazılabileceğini göstereceğiz. (Bu kısımda küçük bir hata yapıyorum ama henüz göremedim. ispatın son adımlarını daha sonra detaylandıracağım)

Sonuç olarak genel toplam  $2^{n-1} - 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 2$  olmalıdır.

### Çözüm 2:

Her permütasyon, tek bir şekilde başkaları ile kesişmeyen çevrimlerin bir çarpımı olarak yazılabilir ve her çevrimde en az bir  $j$  için  $\sigma(j) \geq j$  olacaktır (yani, çevrimin en küçük elemanı). Bu nedenle  $\sigma$  yalnızca bir veya iki çevrim içerebilir.

Eğer  $\sigma$  iki çevrim içeriyorsa, her biri elemanlarını en büyükten başlayarak azalan sırayla içermelidir. Bu durumda,  $\{1, \dots, n\}$ 'yi iki boş olmayan kümeye ayırmanın yollarının sayısı, basitçe  $2^{n-1} - 1$ 'dir.

Şimdi,  $\sigma$ 'nın bir çevrim içerdiğini düşünelim. Bu çevrim, 1'e kadar azalan bir eleman dizisi ile başlar ve ardından bir  $k > 1$ 'e kadar azalan bir dizi içerir. Elemanlar  $2, \dots, k-1$ 'in ilk dizide yer alması gerektiğinden,  $k+1, \dots, n$  elemanlarını ilk veya ikinci diziyi seçmek dışında başka seçenek yoktur. Bu durumda  $2^{n-k}$  tane permütasyon elde edilir.  $k$  her biri için  $2, \dots, n$  olabileceğinden, toplamda  $1 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$  adet bir çevrim içeren permütasyon elde edilir.

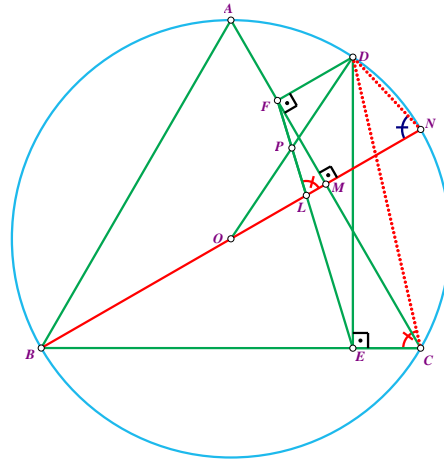
Bu nedenle toplamda  $2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 2$  adet permütasyon bulunur.

**Kaynak:** Mathematical Contests 1995-1996 Olympiad Problems and Solutions from around the World, 1997, Syf 124-125.

- 3 Bir  $ABC$  eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin  $O$  merkezli çevrel çemberinin  $\widehat{AC}$  (küçük) yayı üzerinde  $A$  ve  $C$  den farklı bir  $D$  noktası alınıyor.  $D$  den  $BC$  ve  $AC$  doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla  $E$  ve  $F$  olmak üzere,  $EF$  ile  $OD$  nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

### Çözüm:

Söz konusu nokta  $P$  olsun.  $BO$  doğrusu  $AC$  yi  $M$  de, çemberi  $N$  de kessin. Kolaylık olsun diye  $D$  yi  $AN$  küçük yayı üzerinde alalım.  $DF \perp AC$  ve  $BN \perp AC$  olduğu için  $DF \parallel BN$ , dolayısıyla da  $\angle DFL + \angle NLF = 180^\circ$  olacaktır.  $DFEC$  dörtgeninde  $\angle DFC = \angle DEC = 90^\circ$  olduğu için,  $DFEC$  dörtgeni bir kirisler dörtgenidir, dolayısıyla da  $\angle DFE + \angle DCE = 180^\circ$  elde edilir. Bu durumda  $\angle NLF = \angle DCE$  bağıntısı elde edilir. Çembersel olan  $B, C, N, D$  noktaları için de  $\angle DCB = \angle DNB$  eşitliği söz konusu olduğu için  $\angle NLF = \angle DNL$  elde edilir.  $DF \parallel NL$  olduğu için  $DFLN$  bir ikizkenar yamuktur.

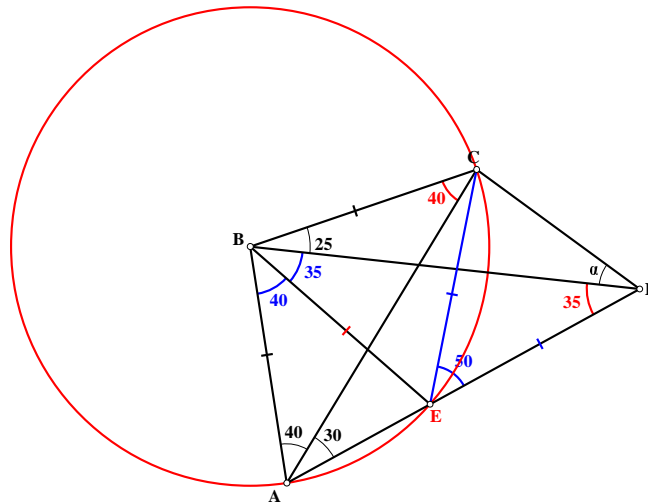


Bu durumda  $\angle FNL = \angle DLN$  eşitliği elde edilir.  $OM = MN$  olduğu için  $OF = NF$  ve  $\angle FOM = \angle FNM = \angle DLN$  olacaktır. Bu durumda  $DL \parallel OF$  elde edilir. Halihazırda  $DF \parallel OL$  olduğu için,  $DFOL$  bir paralelkenardır. Köşegenler birbirlerini ortalayacağı için  $OP = \frac{OD}{2} = \frac{ON}{2} = OM$  olacaktır.  $O$  ve  $M$  sabit noktalar olduğu için,  $P$  noktasının geometrik yeri,  $O$  merkezli  $M$  den geçen çember, yani içteğet çember üzerindedir.  $N$  noktası,  $AC$  küçük yayı üzerinde olduğu için, geometrik yer  $[AO]$  nun içteğet çemberi kestiği nokta ile  $[CO]$  nun içteğet çemberi kestiği nokta arasında kalan  $120^\circ$  lik içteğet çember yayıdır.

- 4  $ABCD$  dışbükey dörtgeninde  $m(\widehat{CAB}) = 40^\circ$ ,  $m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$ ,  $m(\widehat{DBA}) = 75^\circ$  ve  $m(\widehat{DBC}) = 25^\circ$  dir.  $m(\widehat{BDC})$  yi bulunuz.

### Çözüm 1:

$\angle BDA = 35^\circ$ .  $\angle BAC = \angle BCA = 40^\circ$  olduğu için  $BA = BC$  dir.  $B$  merkezli  $|BA|$  yarıçaplı çember  $AD$  yi  $E$  de kessin.  $BA = BE = BC$  ve  $\angle EBC = 2 \cdot \angle CAE = 60^\circ$  olacaktır.  $BEC$  üçgeni eşkenar olur.  $BE = EC = BC$ .



$\angle EBD = \angle EBC - \angle CBD = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ = \angle BDE$  olduğu için  $BE = ED = EC$  olur. Aşlında burada hemen  $E$  merkezli  $BE = EC = ED$  yarıçaplı çemberde  $\angle BDC = \frac{\angle BEC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$  elde edilebileceği gibi; basit açı hesapları ile  $\angle CED = 50^\circ$  bulunabilir.  $ECB$  ikizkenar üçgeninde taban açısı  $65^\circ$ ,  $\angle BDC$  de  $30^\circ$  olarak elde edilebilir.

**Çözüm 2:**

$BAC$  ikizkenar üçgeninde  $AC$  ait yükseklik  $AD$  yi  $E$  de kessin.  $\angle ABE = \angle CBE = 50^\circ$  ve  $\angle EBD = \angle CBD = 25^\circ$  olacaktır.  $BAEC$  deltoid olacağı için  $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$ .  $BCE$  üçgeninde  $BD$  bir iç açıortay,  $ED$  bir dış açıortay olduğu için  $CD$  de bir dış açıortaydır ( $D$  dış merkezdir.). Basit açı hesaplarıyla  $\angle BDC = 30^\circ$  olarak bulunur.

**Çözüm 3:**

$ABD$  üçgeninin dışarısındaki  $C$  noktası için Ceva Teoremi'nin Trigonometrik halini uygulayalım:

$$\frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle CAB} \cdot \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle CDA} \cdot \frac{\sin \angle CDB}{\sin \angle CBD} = 1$$

$\angle BDC = \alpha$  dersek;

$$\frac{\sin 100^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin(\alpha + 35^\circ)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 25^\circ} = 1$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \sin 100^\circ &= \sin 80^\circ \\ &= 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= 2 \sin 40^\circ \sin 50^\circ \\ &= 2 \sin 40^\circ \cdot 2 \sin 25^\circ \cos 25^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \sin 25^\circ \sin 65^\circ \end{aligned}$$

değerini yerine yazarsak

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 35^\circ)} = \frac{1}{2 \sin 65^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 65^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 35^\circ)}$$

eşitliğinden  $\alpha = 30^\circ$  elde edilir.

**5** Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız:

[Her  $a$  pozitif tamsayısı için  $n \mid a^n - a$ ]  $\iff$  [ $n$  nin her  $p$  asal böleni için  $p^2 \nmid n$  ve  $p - 1 \mid n - 1$ ].

**Çözüm:**

Her  $a$  pozitif tamsayısı için  $n \mid a^n - a$ 'nin tanımlı olabilmesi için  $n$ 'nin pozitif tamsayı olması gerekir.  $n \leq 0$  incelemesine gerek yoktur.

" $\implies$ " kısmıyla başlayalım.  $n = 1$  ise  $n$ 'nin asal böleni olmadığından sağ taraf her zaman doğru olacaktır.  $n > 1$  ve  $p$  asalı için  $p \mid n$  olsun.  $p$ 'nin  $n$ 'yi bölen en büyük kuvveti  $\alpha \geq 1$  olsun.  $a = p$  için

$$n \mid p^n - p \implies p^\alpha \mid p^n - p \implies p^n \equiv p \pmod{p^\alpha} \implies p^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-1}}$$

olacaktır.  $n - 1 \geq 1$  olduğundan  $\alpha \neq 1$  durumunda  $0 \equiv 1 \pmod{p}$  çelişkisi elde edilecektir. Dolayısıyla  $\alpha = 1$ 'dir ve  $p^2 \nmid n$  olacaktır.

$p$  bir asal sayı olduğundan  $p$  modunda ilkel kök vardır. Bunun ispatı için çeşitli kaynaklar vardır ama burada verirsem çok konu dışına çıkacağından dolayı eklemiyorum. Eğer başka bir gönderide paylaşırsa buraya linkini ekleyebiliriz.  $a$ 'yı  $p$  modunda ilkel kök olarak seçelim.  $(a, p) = 1$ 'dir  $a$ 'nın  $p$  modunda mertebesi  $\phi(p) = p - 1$ 'dir.  $p^2 \nmid n$  olduğundan  $p$  ve  $\frac{n}{p}$  aralarında asaldır ve Bezout teoreminden  $a + pk$  ve  $\frac{n}{p}$  aralarında asal olacak şekilde bir  $k$  pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla genelliği bozmadan  $a$ 'yı hem  $p$  hem de  $\frac{n}{p}$  ile aralarında asal seçebiliriz. Bu ilkel kök  $a$  için  $(a, n) = 1$  olduğundan

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \implies a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

olacaktır.  $a$ , ilkel kök olduğundan da  $p - 1 \mid n - 1$  olmak zorundadır.

Şimdi “ $\Leftarrow$ ” kısmını gösterelim.  $n = 1$  veya  $n$ 'nin asal sayısı olması durumunda küçük fermat teoreminden sol taraf doğru olacaktır. Dolayısıyla  $n \geq 4$  kabul edebiliriz. Bu durumda  $n$ 'nin tek asal böleni olmalıdır, aksi takdirde  $p^2 \mid n$  koşulundan dolayı  $n = 2$  olacaktır.  $p$  tek asal böleni için  $p - 1$  çift olduğundan  $2 \mid n - 1$  ve  $n$  tek sayı bulunur. Dolayısıyla farklı  $p_i$  tek asal bölenleri için  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  olarak yazılabilir.

Eğer  $a$  pozitif tamsayısı için  $(a, n) = d$  ise  $d$ 'nin (varsa) tüm asal bölenleri de  $p_1, p_2, \dots, p_k$  içerisinde ve karekalsız olmalıdır.  $d$ 'nin bölenleri olan  $p_i$  asallarını  $q_1, q_2, \dots, q_t$  ile olmayan asalları ise  $r_1, r_2, \dots, r_s$  ile gösterelim. Çin kalan teoreminden

$$a^n - a \equiv 0 \pmod{n} \iff (\text{her } i = 1, 2, \dots, k \text{ için } a^n - a \equiv 0 \pmod{p_i})$$

olacaktır.  $q_1, q_2, \dots, q_t$  için “ $a^n - a \equiv 0 \pmod{q_i}$ ” doğrudur çünkü  $a \equiv 0 \pmod{q_j}$  olacaktır. Diğer asallar için  $(a, r_i) = 1$  olduğundan

$$a^n \equiv a \pmod{r_i} \iff a^{n-1} \equiv 1 \pmod{r_i}$$

olacaktır.  $p - 1 \mid n - 1$  koşulundan dolayı bu da doğrudur çünkü

$$a^{n-1} \equiv (a^{r_i-1})^{\frac{n-1}{r_i-1}} \equiv 1^{\frac{n-1}{r_i-1}} \equiv 1 \pmod{r_i}$$

olacaktır. Dolayısıyla Çin kalan teoreminden her  $a$  pozitif tamsayısı için  $n \mid a^n - a$  elde edilir.

**6**  $(x_n)$  gerçel sayı dizisi

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \quad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanıyor.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{an^b} = 1$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

**Çözüm:**

$c_n = x_n n^{-3/2}$  olarak belirleyelim;  $c_n \rightarrow (2/3)^{3/2}$  olduğunu kanıtlayacağız.  $n \left[ (1 + 1/n)^{3/2} - 1 \right] \rightarrow 3/2$  olduğunu hatırlayalım, bu nedenle herhangi bir  $\epsilon > 0$  için,  $n \geq N$  için

$$3/2 - \epsilon < n \left[ (1 + 1/n)^{3/2} - 1 \right] < 3/2 + \epsilon.$$

Şimdi,  $n \geq N$  ve  $c_n < (3/2 + \epsilon)^{-3/2}$  ise,  $c_n^{2/3} < (3/2 + \epsilon)^{-1}$  ve bu nedenle  $(3/2 + \epsilon)c_n < c_n^{1/3}$  olur.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + x_n^{1/3} \\ &= c_n n^{3/2} + c_n^{1/3} n^{1/2} \\ &> c_n n^{3/2} + (3/2 + \epsilon) c_n n^{1/2} \\ &> c_n n^{3/2} + c_n n \left( (1 + 1/n)^{3/2} - 1 \right) n^{1/2} \\ &= c_n n^{3/2} (1 + 1/n)^{3/2} \\ &= c_n (n + 1)^{3/2}. \end{aligned}$$

Bu nedenle  $c_{n+1} > c_n$  dir.  $\{c_n\}$  dizisinin alt limitinin (limit inferior) her  $\epsilon > 0$  için en az  $(3/2 + \epsilon)^{-3/2}$  olduğu sonucuna varırız, yani en az  $(2/3)^{3/2}$ 'dir. Benzer bir argümanla, dizinin üst limitinin (limit superior) her  $\epsilon > 0$  için en fazla  $(3/2 - \epsilon)^{-3/2}$  olduğunu sonucuna varırız. Sonuç olarak, istediğimiz gibi,  $c_n \rightarrow (2/3)^{3/2}$  olduğu ortaya çıkar.

**Kaynak:** Mathematical Contests 1995-1996 Olympiad Problems and Solutions from around the World, 1997, Syf 126-127.

### 37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1996

- 1  $\prod_{n=1}^{1996} (1 + nx^{3^n})$  çarpımının,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sıfırdan farklı ve  $k_1 < k_2 < \dots < k_m$  olacak şekilde açılımını  $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_mx^{k_m}$  ile gösterelim.  $a_{1996}$  katsayısını hesaplayınız.

#### Çözüm:

Anlaşırlık açısından ilk birkaç parantezi hesaplamakta fayda var. İlk beş parantezin açılımına bakalım

$$\begin{aligned} & (1 + x^3)(1 + 2x^9)(1 + 3x^{27})(1 + 4x^{81}) \\ &= 30x^{282} + 30x^{279} + 15x^{273} + 15x^{270} + 10x^{255} + 10x^{252} + 5x^{246} + 5x^{243} \\ &+ 24x^{120} + 24x^{117} + 12x^{111} + 12x^{108} + 8x^{93} + 8x^{90} + 4x^{84} + 4x^{81} \\ &+ 6x^{39} + 6x^{36} + 3x^{30} + 3x^{27} + 2x^{12} + 2x^9 + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Parantez içindeki  $x$ 'li terimlerin kuvvetleri 3'ün kuvvetlerinden olduğundan açılımda elde edilen  $x$ 'in kuvvetleri de  $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$  sayılarından bazılarının toplamından oluşmaktadır. Örneğin  $24x^{117}$  terimini inceleyelim:  $117 = 3^4 + 3^3 + 3^2$  olduğundan bu terim  $(1 + 2x^9)(1 + 3x^{27})(1 + 4x^{81})$  çarpımındaki en büyük dereceli terimden üretilir. Bu ise  $2x^9 \cdot 3x^{27} \cdot 4x^{81} = 24x^{117}$  dir. Gerçekten yukarıdaki açılımdan da kontrol edilirse  $x^{117}$ 'nin katsayısı 24 tür.

Peki açılımda  $x$ 'in kuvvetleri artan sırada yazılırsa (1 sabit terimini hesaba katmadan)  $24x^{117}$  terimi, baştan kaçınıcı terimdir? Bunu araştıralım:  $117 = 3^4 + 3^4 + 3^2 = (11100)_3$  şeklinde 3 lük sistemde yazabiliriz. Bu yazılışların sonu daima 0 ile bitmelidir. Çünkü  $x$ 'in kuvvetleri de  $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$  sayılarından bazılarının toplamından oluşmaktadır demiştik. Diğer rakamlar ise ya 1 ya da 0 olur. O halde bu sondaki sabit 0 rakamını silerek geriye kalan (1110) sayısını 2 lik tabanda yazılmış olarak düşünebiliriz ve bu değer bize  $24x^{117}$  teriminin açılımdaki (1 sabit terimini hesaba katmadan) sıralamasını verir:  $(1110)_2 = 14$  olduğundan  $a_{14} = 24$  tür. Bu sonucun doğruluğu yukarıda yaptığımız açılımdan da kontrol edilebilir.

Bu düşünce ile  $1996 = (11111001100)_2$  yazıldıktan sonra  $a_{1996}x^{k_{1996}}$  terimini elde etmek için

$$(1 + 3x^{3^3})(1 + 4x^{3^4})(1 + 7x^{3^7})(1 + 8x^{3^8})(1 + 9x^{3^9})(1 + 10x^{3^{10}})(1 + 11x^{3^{11}})$$

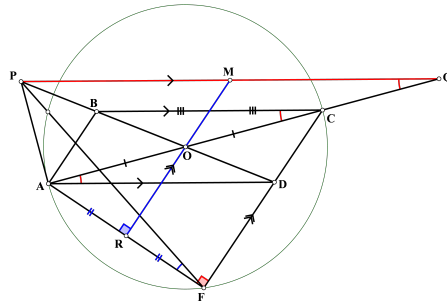
açılımdaki en büyük dereceli terimini hesaplamalıyız.  $a_{1996} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 665280$  ele edilir.

**Not:** Ayrıca  $a_{1996}$  terimindeki  $x$ 'in kuvveti sorulursa  $k_{1996} = (111110011000)_3 = 264735$  bulunur.

- 2 Bir  $ABCD$  paralelkenarında  $\widehat{A}$  açısı dar açı olup,  $[AC]$  köşegeni çap alınarak çizilen çember  $CB$  ve  $CD$  doğrularını  $E$  ve  $F$  noktalarında kesmektedir. Bu çemberin  $A$  noktasındaki teğeti,  $BD$  doğrusunu  $P$  noktasında kesiyorsa;  $P, F, E$  noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

#### Çözüm 1:

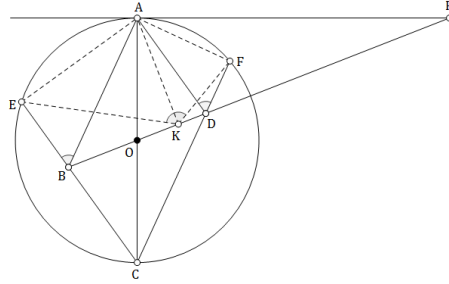
$BD$  ile  $AC$  nin kesişimi  $O$  olsun.  $BC$  ye paralel olan ve  $P$  den geçen doğru  $AC$  yi  $Q$  da kessin.  $CD$  ye paralel olan ve  $O$  dan geçen doğru  $PQ$  yu  $M$  de kessin.



$MO$  doğrusu  $BCO$  üçgeninde kenarortay,  $PQ \parallel BC$  olduğu için de  $PQO$  üçgeninde de kenarortay olacaktır.  $MO$  ile  $AF$ ,  $R$  de kesişsin.  $MR \parallel CD$  ve  $AO = OC$  olduğu için  $AR = RF$  ve  $MR \perp AF$  dir. Bu durumda

$MR$ ,  $AF$  nin orta dikmesidir. Dolayısıyla  $MA = MF$  dir.  $\angle PAQ = 90^\circ$  olduğu için  $PM = MQ = MA = MF$  yani  $M$  nin  $P, Q, F, A$  dan geçen çemberin merkezi olduğu sonucu çıkar. Paralel doğrulardan dolayı  $\angle CAD = \angle BCA = \angle PQA$ ,  $ECFA$  kirişler dörtgeni olduğu için  $\angle EFA = \angle BCA$ ,  $PQFA$  kirişler dörtgeni olduğu için de  $\angle PFA = \angle PQA$  olur. Son durumda  $\angle EFA = \angle PFA$  olduğu için  $P, F, E$  noktaları doğrusal olur.

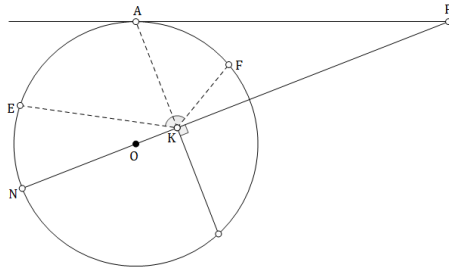
### Çözüm 2:



$PB$  doğrusuna  $[AK]$  dikmesini inelim.  $\angle AEC = m\angle AFC = 90^\circ$  olduğundan  $AEBK$  ve  $AEDK$  dörtgenleri birer kirişler dörtgenidir.

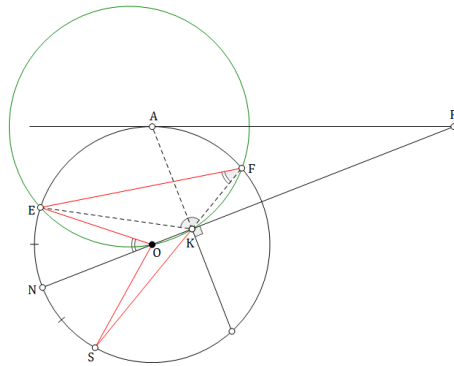
Buna göre;  $\angle AKE = \angle ABE = \angle ADE = \angle AKF$  dir.

Bu aşamadan sonra şekil-II deki probleme çözüm arayacağız.

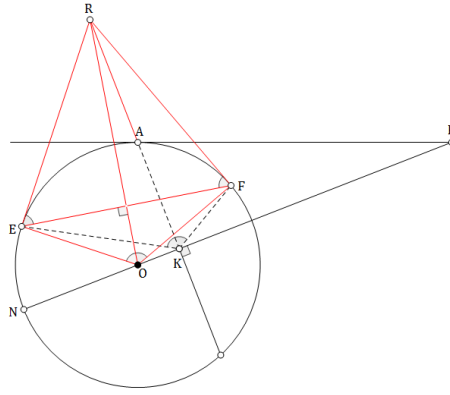


**Problem :**  $[PA, O]$  merkezli çemberin teğeti ve  $[AT]$  bir kirişi olmak üzere,  $[OP] \perp [AT]$  ve  $|AK| = |KT|$  dir.

Çember üzerinde alınan  $E$  ve  $F$  noktaları için,  $\angle AKE = \angle AKF$  ise,  $P - F - E$  noktaları doğrusaldır.



$OKE$  ve  $OKS$  üçgenlerinin eşliğinden  $\angle EON = \angle SON$  olur ve  $\angle EFS = \angle EON$  dir. Buna göre  $EOKF$  bir kirişler dörtgenidir.



$O$  dan  $[EF]$  ye çizilen dikme ile  $KA$  nın kesim noktası  $R$  olsun.  $|RE| = |RF|$  dir.  $KR$  ve  $OR$  açıortay olduğundan  $OERF$  bir kirişler dörtgenidir.  $\angle REF = \angle RFE = \angle ROE = \angle ROF$  olduğundan  $RE$  ve  $RF$  çembere teğettir.

Buna göre,  $EF$  doğrusu  $R$  nin kutup doğrusudur.  $R$  noktası  $P$  nin  $AK$  kutup doğrusu üzerinde olduğundan,  $P$  noktasında  $R$  nin  $EF$  kutup doğrusu üzerinde olmalıdır.

- 3**  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$  olacak şekilde  $x_i$  gerçel sayıları veriliyor. Her  $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$  için  $x_{i+1} - x_i \leq h$  ise,

$$\sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$

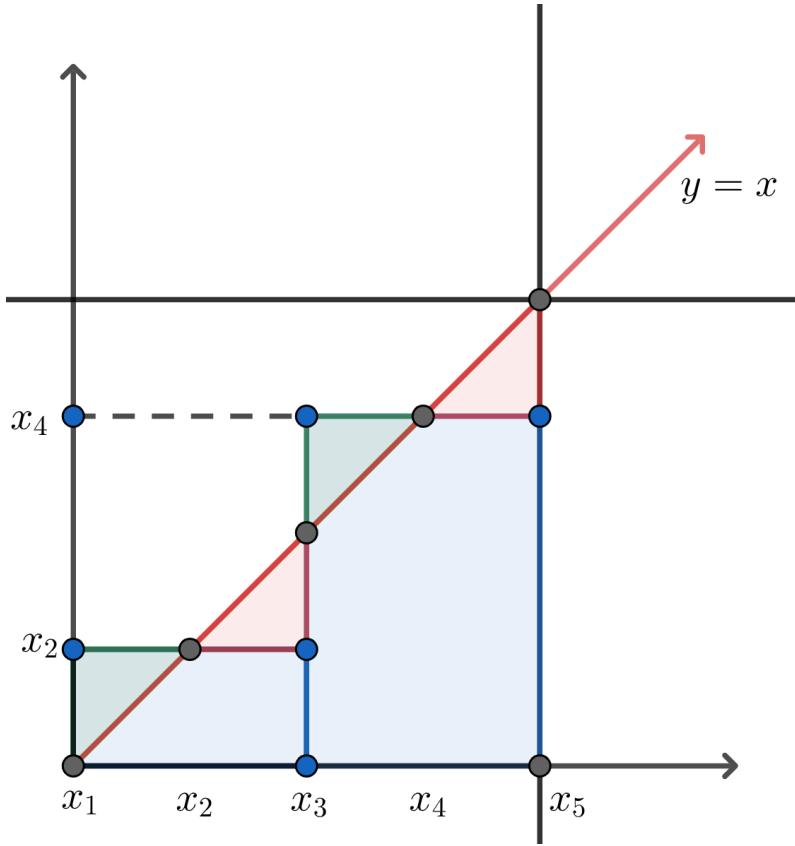
toplamının

$$\left( \frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2} \right)$$

aralığında olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:**

$n = 2$  için  $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 1$  ve  $S = \sum_{i=1}^2 x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) = x_2(x_3 - x_1) + x_4(x_5 - x_3)$  olacaktır.



$y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  doğrularının sınırladığı bölgenin alanı  $\frac{1}{2}$  dir.

$S$  toplamı, kenarları  $x_3 - x_1$  ve  $x_2$  olan dikdörtgenle kenarları  $x_5 - x_3$  ve  $x_4$  olan dikdörtgenin alanlarının toplamıdır.

Bu dikdörtgenlerin  $y = x$  üstünde kalan alanlarını yeşil ile gösterelim. Alanların toplamı  $Y$  olsun.

$y = x$  altında kalıp dikdörtgenler tarafından içerilmeyen alanları kırmızı ile gösterelim. Bu alanların toplamı  $K$  olsun.

$n = 2$  durumu için  $S - Y + K = \frac{1}{2}$  ve  $S = \frac{1}{2} + K - Y$  dir.

Biraz düzenlemeyle

$$\frac{1}{2} - Y - K < \frac{1}{2} + K - Y = S < \frac{1}{2} + K + Y \quad (1)$$

elde ederiz.

$K + Y$  toplamı, tüm kırmızı ve yeşil üçgenel bölgelerin toplamıdır. Bu üçgenlerin her birinin yüksekliği  $h_i = x_{i+1} - x_i \leq h$  olacaktır. Bu üçgenlerin diğer dik kenarlarının toplamı  $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_5 - x_4) = x_5 - x_1 = 1$  olduğu için  $K + Y \leq \frac{h}{2}$  dir. (1) i düzenlersek

$$\frac{1}{2} - \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2} - Y - K < S < \frac{1}{2} + K + Y \leq \frac{1}{2} + \frac{h}{2} \quad (2)$$

elde ederiz.

Diğer  $n$  değerleri için de; kenarları  $x_{2i+1} - x_{2i-1}$  ve  $x_{2i}$  olan dikdörtgenlerin toplamı  $S$ ,  $y = x$  üstünde kalan üçgenlerin alanı  $Y$ ,  $y = x$  altında kalan üçgenlerin alanı  $K$  şeklinde tanımlandığında  $S$  toplamının  $\frac{1}{2}$  den en fazla  $\frac{h}{2}$  kadar eksik ya da fazla olacağı görülür.

**Kaynak:** Mathematical Olympiads 1996-1997: Olympiad Problems from Around the World, Andreescu, Kedlaya, Syf 82.

- 4 Bir  $ABCD$  dışbükey dörtgeninde  $Alan(ABC) = Alan(ADC)$  olup,  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerinin kesim noktası  $E$ 'dir.  $E$

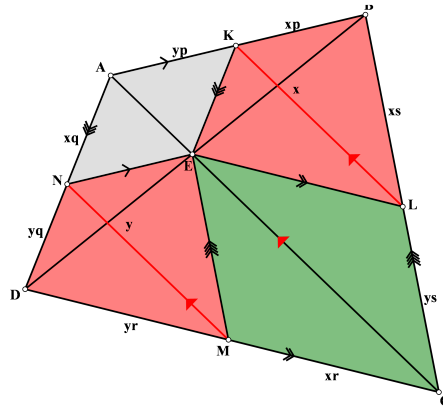
noktasından  $[AD]$ ,  $[DC]$ ,  $[BC]$ ,  $[AB]$  kenarlarına çizilen paralel doğrular  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$  kenarlarını sıra ile  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  noktalarında kestiğine göre,

$$\frac{Alan(KLMN)}{Alan(ABCD)}$$

oranını hesaplayınız.

**Çözüm:**

Paralellikten dolayı  $\frac{BE}{ED} = \frac{KB}{AK} = \frac{AN}{DN} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD}$ . Bu durumda  $AKNE$  ve  $ELMC$  birer paralelkenar,  $NM \parallel AC \parallel KL$  olur.



$[ANE] = [AKE] = [NEK] = A$ ,  $[EMC] = [ELC] = [EML] = C$ ,  $[DNM] = D$ ,  $[NEM] = B$  olur.  $[ADC] = [ABC]$  olduğu için  $[NEMD] = [KBLE] = B + D$  olacaktır.

$\frac{[NEM]}{[NEMD]} = \frac{B}{B+D} = \frac{AN}{AD} = \frac{BE}{BD}$  ve  $\frac{[KBL]}{[KBLE]} = \frac{[KBL]}{B+D} = \frac{KB}{AB} = \frac{BE}{BD}$  olduğu için  $[KBL] = [NEM] = B$  ve  $[DNM] = [KEL] = D$  olacaktır. Son durumda  $[KLMN] = A + B + C + D = \frac{[ABCD]}{2}$  elde edilir.

- 5 Her  $a, b \in \mathbb{Z}$  için  $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$  biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikiye ikiye ayrık olduğunu belirleyiniz.

**Çözüm:**

$n^2 + an + b$  formatındaki polinomu düzenleyelim.

$a$  çiftse ( $a = 2k$  ise)

$$n^2 + an + b = n^2 + 2kn + k^2 + (b - k^2) = (n + k)^2 + (b - k^2)$$

$a$  tekse ( $a = 2k + 1$  ise)

$$n^2 + an + b = n^2 + (2k + 1)n + b = n^2 + 2kn + k^2 + n + k + (b - k^2 - k) = (n + k)^2 + (n + k) + (b - k^2 - k)$$

olacaktır. Herhangi bir  $P$  polinomu ve sabit  $k$  tamsayısı için  $P(x + k) = Q(x)$  şeklinde bir  $Q$  polinom tanımlarsak  $P(\mathbb{Z}) = Q(\mathbb{Z})$  olacağından her  $a, b \in \mathbb{Z}$  için  $a$ 'nın tekliği ve çiftliğine göre

$$S_{a,b} = S_{0,b_1} \quad \text{veya} \quad S_{a,b} = S_{1,b_2}$$

olacak şekilde  $b_1$  veya  $b_2$  vardır. Bu yüzden sadece  $a = 0$  ve  $a = 1$  durumlarını ele almamız yeterlidir.

Eğer  $S_{0,u}$  ve  $S_{0,v}$  şeklinde iki tane küme alırsak,

$$n^2 + u = m^2 + v \implies m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = u - v$$

şeklinde  $m$  ve  $n$  tamsayısı olmaması gerekir. Bunun sağlanması için  $u - v \equiv 2 \pmod{4}$  olması gerekir. 3. bir  $S_{0,w}$  kümesi alamayız çünkü  $u, v, w$ 'nin herhangi ikisinin farkı aynı anda  $2 \pmod{4}$  olamaz. Dolayısıyla en fazla 2 tane  $S_{0,b}$  formatında küme alabiliriz.

Eğer  $S_{1,u}$  ve  $S_{1,v}$  şeklinde iki tane küme alırsak,

$$n^2 + n + u = m^2 + m + v \implies (m - n)(m + n - 1) = u - v$$

şeklinde  $m$  ve  $n$  olmaması gerekir.  $u - v$  çift olursa, uygun  $m$  ve  $n$  bulacağımızdan dolayı  $u - v$  tek sayı olmalıdır. Dolayısıyla 3. bir  $S_{1,w}$  formatında küme ekleyemeyiz çünkü  $u, v, w$ 'nin hepsi farklı paritede olması gerekirdi.

Eğer  $S_{0,u}$  ve  $S_{1,v}$  şeklinde iki kümeyi birlikte alırsak,

$$n^2 + u = m^2 + m + v \implies (2m + 1)^2 - (2n)^2 = (2m + 2n + 1)(2m - 2n + 1) = 4u - 4v + 1$$

denkleminin çözümü olmamalıdır. Ancak  $m = n = u - v$  alırsak eşitlik sağlandığından bu kümeler ayrık değildir. Yani  $S_{0,u}$  ve  $S_{1,v}$  formatındaki iki küme aynı anda alınmamalıdır.

Sonuç olarak en fazla iki tane  $S_{0,u}$  veya iki tane  $S_{1,u}$  formatında küme alabiliriz. En fazla  $\boxed{2}$  ayrık küme seçebiliriz. Örnek olarak  $S_{1,0}$  ve  $S_{1,1}$  kümelerini alabiliriz. Bir tanesi sadece çift sayılardan, diğeri sadece tek sayılardan oluşuyor.

**6** Hangi  $a, b$  pozitif gerçel sayıları için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_{n+1} - bx_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan her  $\{x_n\}$  dizisinin limiti 0 olur?

### Çözüm 1:

**Lemma:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ve  $t$  sayısı  $|t| < 1$  eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + t \cdot a_{n-1} + t^2 \cdot a_{n-2} + \dots + t^{n-1} \cdot a_1) = \frac{a}{1-t}$$

**İspat:**  $m < n$  olmak üzere, aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \left| a_n + t \cdot a_{n-1} + t^2 \cdot a_{n-2} + \dots + t^{n-1} \cdot a_1 - \frac{a}{1-t} \right| &= \left| a_n + t \cdot a_{n-1} + t^2 \cdot a_{n-2} + \dots + t^{n-1} \cdot a_1 - (1 + t + t^2 + \dots + t^m) \right. \\ &\quad \left. + (1 + t + t^2 + \dots + t^{m-1}) \cdot a - \frac{a}{1-t} \right| \\ &\leq (|a_n - a| + |t| \cdot |a_{n-1} - a| + \dots + |t|^{m-1} \cdot |a_{n-m+1} - a|) \\ &\quad + (|t|^m \cdot |a_{n-m}| + |t|^{m-1} \cdot |a_{n-m-1}| + \dots + |t|^{n-1} \cdot |a_1|) + |a| \cdot \left| \frac{1-t^{m+1}}{1-t} - \frac{1}{1-t} \right| \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Burada  $I_1$  ve  $I_2$ , sırası ile, birinci ve ikinci parantez içinde bulunan ifadelerdir ve

$$I_3 = |a| \cdot \left| \frac{1-t^m}{1-t} - \frac{1}{1-t} \right| = |a| \cdot \frac{|t|^m}{|1-t|} = |t|^m \cdot \frac{|a|}{|1-t|}.$$

Bir yakınsak dizi olması nedeniyle,  $\{a_n\}$  dizisi sınırlıdır ve dolayısıyla, her  $n \geq 1$  için  $|a_n| \leq c$  olacak biçimde bir  $c > 1$  sabiti vardır.

Şimdi herhangi  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin;  $m$  doğal sayısını

$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 &\leq |t|^m \cdot c + |t|^{m+1} \cdot c + \cdots + |t|^{n-1} \cdot c + |t|^m \cdot \frac{|a|}{|1-t|} \\
&= |t|^m \cdot \left( c + c|t| + \cdots + c|t|^{n-m-1} + \frac{|a|}{|1-t|} \right) \\
&= |t|^m \cdot \left( c \cdot \frac{1-|t|^{n-m}}{1-|t|} + \frac{|a|}{1-|t|} \right) \leq c \cdot |t|^m \cdot \frac{1+|a|}{1-|t|} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

sağlanacak biçimde seçelim.  $|t| < 1$  olduğu için bunu yapmak mümkündür.  $m$  yi böyle seçtikten sonra sabit tutalım.

Sabitleştirilmiş bu  $m$  sayısına göre doğal  $m_0$  sayısını öyle alalım ki, her  $n \geq m_0$  için

$$I_1 = |a_n - a| + |t| \cdot |a_{n-1} - a| + \cdots + |t|^{m-1} \cdot |a_{n-m+1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlansın (Toplananlar sayısı sonlu olduğundan ve toplananların her birisi  $n \rightarrow \infty$  için sifra yaklaştığından, söz konusu  $m_0$  sayısını seçmek mümkündür).

Böylece, vermiş herhangi  $\varepsilon > 0$  için

$$\left| a_n + t \cdot a_{n-1} + t^2 \cdot a_{n-2} + \cdots + t^{n-1} \cdot a_1 - \frac{a}{1-t} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eşitsizliğinin her  $n \geq m_0$  için sağlanmasını garanti eden  $m_0$  sayısını seçmek mümkündür.

Bu ise, limitin tanımı gereği,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + t \cdot a_{n-1} + t^2 \cdot a_{n-2} + \cdots + t^{n-1} \cdot a_1) = \frac{a}{1-t}$$

olması demektir. ■

$0 < a < b$  ise problemdeki eşitliğin sağlanması  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmasını gerektirmez. Örneğin,  $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \rightarrow \infty$  olmasına karşın  $ax_{n+1} - bx_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - b\left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$  olur ve dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} [ax_{n+1} - bx_n] = 0$  dir. Yani, sonuncu eşitliğin sağlanmasına rağmen  $\{x_n\}$  dizisi sifra yakınsamıyor.

$a = b$  ise, yine de eşitliğin sağlanması  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmasını gerektirmez. Örneğin, her  $n$  için  $x_n = 1$  dersek  $\lim_{n \rightarrow \infty} [ax_{n+1} - ax_n] = a - a = 0$  oluyor, fakat buna rağmen  $\{x_n\}$  dizisi sifra yakınsamıyor.

Nihayet,  $0 < b < a$  olsun.  $\frac{b}{a} = \varepsilon < 1$  diyelim.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [ax_{n+1} - bx_n] = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} [x_{n+1} - \varepsilon x_n] = 0$  olduğu açıktır.  $\delta_n = x_{n+1} - \varepsilon x_n$  dersek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  olur. Şimdi  $x_n$  yi  $\varepsilon$  ve  $\delta_n$  cinsinden ifade edelim:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \varepsilon x_n + \delta_n \Rightarrow x_2 = \varepsilon x_1 + \delta_1 \\
x_3 &= \varepsilon x_2 + \delta_2 = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon \delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \\
x_{n+1} &= \varepsilon^n x_1 + \varepsilon^{n-1} \delta_1 + \varepsilon^{n-2} \delta_2 + \cdots + \varepsilon \delta_{n-1} + \delta_n
\end{aligned}$$

$0 < \varepsilon < 1$  olduğu için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^n x_1 = 0$  dir. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varepsilon^{n-1} \delta_1 + \varepsilon^{n-2} \delta_2 + \cdots + \varepsilon \delta_{n-1} + \delta_n] = 0 \quad (*)$$

olduğunu gösterirsek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  eşitliğini kanıtlamış oluruz.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  ve  $0 < \varepsilon < 1$  olduğundan çözümün başında verilen lemmamızın hükmü gereği,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varepsilon^{n-1} \delta_1 + \varepsilon^{n-2} \delta_2 + \cdots + \varepsilon \delta_{n-1} + \delta_n] = \frac{0}{1-\varepsilon} = 0$$

olur.

Böylece, yalnız  $0 < b < a$  durumunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_{n+1} - bx_n) = 0$  eşitliğini sağlayan her  $\{x_n\}$  dizisinin limiti sifra olur.

**Kaynak:** Analiz ve Cebirde İlginç Problemler ve Çözümleri, 2003, Problem 3.52 ve Problem 3.50, Syf 103-104 ve 101-102.

**Çözüm 2:**

Bu durum, yalnızca  $b < a$  olduğunda geçerlidir. Eğer  $b > a$  ise,  $x_n = (b/a)^n$  dizisi sorudaki eşitliği sağlar; ancak sifıra gitmez. Eğer  $b = a$  ise,  $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$  dizisi aynı şekilde koşulu sağlar; ancak sifıra gitmez. Şimdi  $b < a$  olduğunu varsayalım. Verilen dizinin alt limiti (limit inferior'u) ve üst limiti (limit superior'u)  $L$  ve  $M$  ise, sorudaki eşitlik  $M \leq (b/a)L$  olmasını gerektirir; çünkü  $L \leq M$ ,  $M \leq (b/a)L$ 'yi elde ederiz ve bu da  $L, M \geq 0$  anlamına gelir. Benzer şekilde, sorudaki koşul  $L \geq (b/a)M$  olmasını gerektirir; çünkü  $M \geq L$ ,  $L \geq (b/a)M$ 'yi elde ederiz, bu da  $L, M \leq 0$  anlamına gelir. Bu nedenle  $L = M = 0$  olur ve dizi sifıra yaklaşır.

**Kaynak:** Mathematical Olympiads 1996–1997: Problems and Solutions from Around the World, Syf. 83.

### 38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1997

- 1 A açısı dik açı olan  $ABC$  üçgeninin hipotenüsüne ait yükseklik ayağı  $H$  dir.  $ABC$ ,  $ABH$  ve  $AHC$  üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları toplamının  $|AH|$  uzunluğuna eşit olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$r_{ABC} = u - a$  dir.  $r_{ABC} : r_{ABH} : r_{AHC} = a : c : b$  olacağından

$$r_{ABC} + r_{ABH} + r_{AHC} = (u - a) \left( 1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} \right) = (u - a) \left( \frac{a + b + c}{a} \right) = \frac{r \cdot 2u}{a} = \frac{2 \cdot \frac{ah}{2}}{a} = h$$

elde edilir.

- 2  $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$  ve her  $n \geq 1$  için

$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n, b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$$

şeklinde tanımlanan  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinde  $a_{1997} = b_1$  ve  $b_{1997} = a_1$  olacak biçimde kaç  $(\alpha, \beta)$  gerçel sayı sıralı ikilisi vardır?

**Çözüm:**

$S_n = a_n^2 + b_n^2$  olarak tanımlansın.  $S_1 = S_{1997} = \alpha^2 + \beta^2$  olacaktır.

Genel terim eşitliklerini, karelerini alarak toplayalım.

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \alpha^2 a_n^2 + \beta^2 b_n^2 - 2\alpha\beta a_n b_n \\ b_{n+1}^2 &= \beta^2 a_n^2 + \alpha^2 b_n^2 + 2\alpha\beta a_n b_n \\ a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 &= (\alpha^2 + \beta^2)(a_n^2 + b_n^2) \\ S_{n+1} &= (\alpha^2 + \beta^2)S_n \end{aligned}$$

$S_n$  dizisi;  $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$  için azalan,  $1 < \alpha^2 + \beta^2$  için artan olacaktır. Bu iki durumda  $S_1 \neq S_{1997}$  olacağı için buralardan çözüm gelmez.

$\alpha^2 + \beta^2 = 0$  için  $\alpha = \beta = 0$  bir çözümdür. ( $a_n = b_n = 0$ )

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$  için çözüm asıl şimdi başlıyor diyebiliriz:

$\alpha = \cos x$  ve  $\beta = \sin x$  olsun.

$a_2 = \alpha^2 - \beta^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  ve  $b_2 = 2\alpha\beta = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$  olacaktır.

$a_3 = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos 3x$  ve  $b_3 = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin 3x$  olur.

Sırayla devam ettirirsek  $a_n = \cos nx$  ve  $b_n = \sin nx$  elde ederiz. Alternatif olarak, tümevarımla  $a_{n+1} = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx = \cos(n+1)x$  ve  $b_{n+1} = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx = \sin(n+1)x$  iddiamızı doğrulayabiliriz.

$a_{1997} = b_1 \implies \cos 1997x = \sin x$  ve  $a_{1997} = b_1 \implies \sin 1997x = \cos x$  çözmemiz gereken denklemler.

$$\cos 1997x = \sin x = \cos(\pi/2 - x) = \cos(3\pi/2 + x) \quad (a)$$

$$1. \text{ durum: } 1997x = \pi/2 - x + 2k\pi \Rightarrow 1998x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{3996}$$

$$2. \text{ durum: } 1997x = 3\pi/2 + x + 2k\pi \Rightarrow 1996x = \frac{(4k+3)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+3)\pi}{3992}$$

$$\sin 1997x = \cos x = \sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 + x) \quad (b)$$

$$1. \text{ durum: } 1997x = \pi/2 - x + 2k\pi \Rightarrow 1998x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{3996}$$

$$2. \text{ durum: } 1997x = \pi/2 + x + 2k\pi \Rightarrow 1996x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{3992}$$

2. durumlardan ortak çözüm gelmez.

1. durumlar için  $x = \frac{(4k+1)\pi}{3996}$  ortak çözümdür.

$$(\alpha, \beta) \in \left\{ \left( \cos \frac{\pi}{3996}, \sin \frac{\pi}{3996} \right), \left( \cos \frac{5\pi}{3996}, \sin \frac{5\pi}{3996} \right), \dots, \left( \cos \frac{(4 \cdot 1997 + 1)\pi}{3996}, \sin \frac{(4 \cdot 1997 + 1)\pi}{3996} \right) \right\}$$

kümesi tam olarak 1998 elemanlıdır; çünkü bu kümenin herhangi iki elemanı  $\left( \cos \frac{(4k_1+1)\pi}{3996}, \sin \frac{(4k_1+1)\pi}{3996} \right)$  ve  $\left( \cos \frac{(4k_2+1)\pi}{3996}, \sin \frac{(4k_2+1)\pi}{3996} \right)$  için

$$\cos \frac{(4k_1+1)\pi}{3996} = \cos \frac{(4k_2+1)\pi}{3996} \text{ olması için } \frac{4k_1 + 1 + 4k_2 + 1}{3996} = 2\pi \text{ olması gerekir ki } 4 \nmid 4k_1 + 4k_2 + 2 \text{ olduğu için}$$

bu mümkün değildir.

O halde aradığımız yanıt;  $1 + 1998 = 1999$  dur.

**Kaynak:** Mathematical Olympiads 1997-1998 Problems and Solutions From Around The World

- 3** Bir futbol liginde  $x$  tane oyuncusu olan bir  $X$  takımından  $y$  tane oyuncusu olan bir  $Y$  takımına bir futbolcu transfer olduğunda,  $y \geq x$  ise federasyon  $Y$  takımından  $y - x$  milyar lira alıyor,  $x > y$  ise federasyon  $X$  takımına  $x - y$  milyar lira ödüyor. Bir sezon boyunca bir futbolcu istediği kadar takım değiştirebiliyor. 18 takımlık ligde sezona tüm takımlar 20 şer futbolcu ile başlar ve sezon sonunda bu takımlardan 12 sinde 20 şer, geri kalan 6 takımda ise sırasıyla 16, 16, 21, 22, 22, 23 futbolcu bulunursa, federasyon bu sezon süresince en çok kaç milyar lira kazanmış olabilir?

**Çözüm:**

En yüksek kazancın, bir oyuncunun daha küçük bir takıma gitmesine asla izin verilmeyerek elde edildiğini iddia ediyoruz. Kayıtları farklı bir şekilde tutabiliriz:  $x$  oyunculu bir takım, bir oyuncu takas edilmeden önce  $-x$ 'i veya bir oyuncu alındığında  $x$ 'i yazar ve federasyonun kazancı bu sayıların toplamıdır. Şimdi, süreç sonunda  $n > 20$  oyuncuya sahip olan bir takım tarafından yazılan sayıları düşünelim. Eğer takımın süreç boyunca maksimum boyutu  $k > n$  ise, o zaman sayılar  $k - 1$  ve  $-k$  birbirini takip eder ve bunları silmek toplamı artırır. Bu nedenle, bu takım için sayıların toplamı en az  $20 + 21 + \dots + n - 1$  olacaktır. Benzer şekilde,  $n < 20$  oyuncuya sahip bir takım için sayıların toplamı en az  $-20 - 19 - \dots - (n + 1)$  olacaktır. Bu sayılar, her zaman 20'den az oyuncuya sahip bir takımdan başlayarak daha fazlasına sahip bir takıma takas yaparak yazılanlar olduğundan, bu düzenleme en yüksek kazancı sağlar. Bu durumda, toplam şu şekildedir:

$$(20 + 20 + 21 + 20 + 21 + 20 + 21 + 22) - 2(20 + 19 + 18 + 17) = 17$$

**Kaynak:** Mathematical Olympiads 1997-1998: Problems and Solutions from Around the World, Syf. 118-119.

- 4** Köşeleri birim çember üzerinde bulunan bir  $ABCDE$  dışbükey beşgeninin  $[AE]$  kenarı bu çemberin merkezinden geçmektedir.  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = c$ ,  $|DE| = d$  ve  $ab = cd = \frac{1}{4}$  ise,  $|AC| + |CE|$  toplamının  $a, b, c, d$  türünden değeri ne olur?

**Çözüm:**

$AC = x$  ve  $CE = y$  olsun. Bu durumda,  $BE^2 = 4 - a^2$ ,  $AD^2 = 4 - d^2$  ve  $x^2 + y^2 = 4$  olacaktır.

$ABCE$  de Ptolemy'den

$$(ay + 2b)^2 = x^2(4 - a^2)$$

$$a^2y^2 + 4b^2 + 4aby = 4x^2 - a^2x^2$$

$ACDE$  de Ptolemy'den

$$(2c + dx)^2 = y^2(4 - d^2)$$

$$d^2x^2 + 4c^2 + 4cdx = 4y^2 - d^2y^2$$

Taraf tarafa topladığımızda,

$$4b^2 + 4c^2 + a^2y^2 + a^2x^2 + d^2x^2 + d^2y^2 + 4aby + 4cdx = 4x^2 + 4y^2$$

$x^2 + y^2 = 4$ ,  $ab = cd = 1/4$  değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + x + y &= 16 \\ x + y &= 16 - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2 - 4d^2 = 4(4 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2) \end{aligned}$$

elde ederiz.

**Not:**

$|AC| + |CE|$  toplamı birden farklı şekilde  $a, b, c, d$  cinsinden yazılabilir. Bunlardan bazıları birkaç işlemden sonra elde edilebiliyor; ama çok güzel durmuyor. Büyük ihtimalle, cevap olarak beklenen yukarıda bulunan ifade. Sorunun "... olduğunu gösteriniz." şeklinde bir kalıpla sorulması daha doğru olurmuş.

**5** Her  $p \geq 7$  asal sayısı için,

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p}$$

$$x_2^2 + y_2^2 \equiv x_3^2 \pmod{p}$$

...

$$x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 \equiv x_n^2 \pmod{p}$$

$$x_n^2 + y_n^2 \equiv x_1^2 \pmod{p}$$

denklik sistemi sağlanacak biçimde bir  $n$  pozitif tam sayısı ile  $p$  ye bölünmeyen  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

Bir dizi inşa edelim.  $x_1 = 3$  seçersek,  $p \geq 7$  olduğundan  $(p, 5) = (p, 3) = 1$ 'dir ve 3'ün  $p$  modunda tersi vardır.  $\alpha \equiv 5 \cdot 3^{-1} \pmod{p}$  olsun.  $(x_1, y_1) = (3, 4)$  seçersek,  $x_2 = 5$  diyebiliriz.  $(x_2, y_2, x_3) = (3\alpha, 4\alpha, 5\alpha)$  seçebiliriz. Benzer şekilde  $(x_3, y_3, x_4) = (3\alpha^2, 4\alpha^2, 5\alpha^2)$  seçebiliriz. Bu şekilde ilerlersek,  $(x_n, y_n, x_1) = (3\alpha^{n-1}, 4\alpha^{n-1}, 5\alpha^{n-1})$  seçebiliriz (bu değerlerin  $\pmod{p}$  değerlerini seçiyoruz). Tek yapmamız gereken

$$5\alpha^{n-1} \equiv 3 \pmod{p} \implies \alpha^{n-1} \equiv 3 \cdot 5^{-1} \equiv \alpha^{-1} \pmod{p}$$

olmasıdır. Eğer  $n = p - 1$  seçersek, fermat teoreminden istenilen sağlanır.

**6**  $n \geq 2$  verilmiş bir tam sayı olsun.  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$  koşulunu sağlayan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pozitif sayıları için,

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}$$

toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

**Çözüm 1:**

Kesirleri  $x_i$  ile genişletip, faydalı eşitsizlik (Bergström eşitsizliği) uygulayalım.

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^6}{x_i(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - x_i^2} \geq \frac{(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \frac{(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 1}$$

Kuvvet ortalama eşitsizliklerinden,

$$\sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{n}} \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \implies x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^6}{x_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x_i^2} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 1}$$

elde edilir. Karesel-Aritmetik ortalama eşitsizliğinden

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \implies \sqrt{n} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Bir üst eşitsizlikte kullanırsak,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x_i} \geq \frac{1}{n(n-1)}$$

elde edilir. Eşitlik durumu da  $x_1 = x_2 = \cdots = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 'dir.

### Çözüm 2:

Diğer bir çözüm ise yine Titu (Faydalı Eşitsizlik veya Bergstrom Eşitsizliği) kullanarak

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc-i} \frac{x_i^6}{x_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x_i^2} \\ & \geq \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^3}{n^{3-2} \left[ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \right]} \geq \frac{1}{n \left( (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 1 \right)} \geq \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Sondaki eşitsizlik ise Karesel-Aritmetik Ortalama veya Titu ile

$$1 = \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{1} + \cdots + \frac{x_n^2}{1} \stackrel{Titu}{\geq} \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n}$$

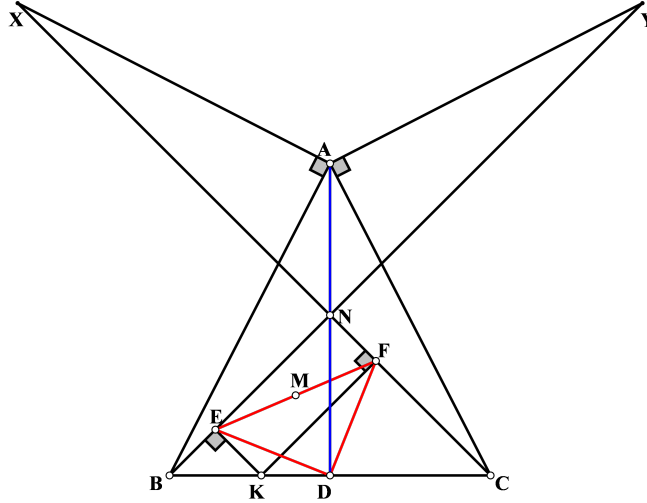
olduğu sonucu  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \sqrt{n}$  ifadesi ile oluşturulmuştur.

### 39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1998

- 1  $|AB| = |AC|$  olmak üzere bir  $ABC$  ikizkenar üçgeninin eşit kenarları üzerine, üçgenin dış bölgesinde kalacak şekilde  $BAXX'$  ve  $CAYY'$  kareleri çiziliyor.  $[BC]$  nin herhangi bir  $K$  noktasından  $BY$  ve  $CX$  doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla  $E$  ve  $F$ ,  $[BC]$  nin orta noktası  $D$  ile gösterilmek üzere,  $|DE| = |DF|$  olduğunu ispatlayınız.  $[EF]$  nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

#### Çözüm:

$$\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABY = \angle AYB = \angle AXC = \angle XCA = 45^\circ - \alpha \Rightarrow \angle (XC, YB) = 90^\circ.$$



$XC \cap YB = \{N\}$  olsun.  $\angle ABN = \angle ACN$  olduğu için  $N \in AD$  dir.  $BNC$  üçgeni  $N$  açısı dik açı olan ikizkenar bir dik üçgendir.  $ENFK$  bir dikdörtgendir.  $ENFK$  dikdörtgeninin çevrel çemberinin merkezi  $M$  olacaktır.  $ENDK$  karşılıklı dik açılardan dolayı kirişler dörtgeni olduğundan  $D$  de bu çember üzerindedir.  $ND$  açıortay olduğu için  $DE = DF$  olur.  $M$  merkezinden  $ND$  kirişine inilen dikme  $ND$  kirişini ortalar. Bu noktanın  $D$  ye uzaklığı  $\frac{DN}{2} = \frac{BC}{2} = \frac{BC}{4}$  Sabit tir. Bu durumda  $M$ ,  $BC$  paralel olan ve  $BC$  den uzaklığı  $\frac{BC}{4}$  olan doğru üzerindedir.  $M$  nin geometrik yerinin sınırları  $K = B$  ve  $K = C$  olduğunda elde edilir. Son durumda  $M$  nin geometrik yeri  $BN$  ile  $CN$  doğru parçalarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

- 2  $a_1 = t$  ve  $n \geq 1$  için  $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$  şeklinde tanımlanan gerçel sayılar dizisinde  $a_{1998} = 0$  olmasını sağlayan kaç  $t$  değeri olduğunu bulunuz.

#### Çözüm:

Tersten gidelim, yani önce  $a_{1997}$ 'i bulalım.

$$a_{1998} = 4a_{1997}(1 - a_{1997}) = 0 \implies a_{1997} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{1997} = 1$$

Eğer  $a_{1997} = 0$  ise başa döneriz ve  $a_{1996}$  için aynı iki seçeneğimiz çıkar. Geriye giderken  $k$  defa dizinin elemanının 0 çıktığını varsayalım ( $k = 0, 1, \dots, 1997$  olabilir).  $k = 1997$  ise  $t = 0$ 'dır.  $k = 1996$  için de  $t = 1$ 'dir. İkisi de değilse, tersten  $(k + 1)$ . dizi elemanını ( $a_{k+1}$ 'i değil geriye doğru giderken elde ettiğimiz  $(k + 1)$ . terimi) hesaplarken 1 bulacağız, yani  $a_{1997-k} = 1$  olacaktır.

$$4a(1 - a) = 1 - (2a - 1)^2$$

olduğundan  $a_{1996-k} = \frac{1}{2}$  olacaktır. Amacımız bundan sonraki her hamlede 2 adet potansiyel dizi elemanı bulabileceğimizi göstermektir.  $4a(1 - a)$  parabolünün alabileceği değerler  $(-\infty, 1]$  olduğunu görebiliriz.

$a_{1996-k}$ 'dan daha geriye giderken karşımıza asla 1 veya 0 çıkmaz çünkü bu durumda o elemandan  $a_{1996-k}$ 'ya gelirken dizi elemanı tekrar 0 olur ve sıfırı tekrar etmeye başlar. Dolayısıyla geriye giderken 1 ile karşılaşmayız ve eğer  $a_i$  terimi 1'den büyük değilse  $a_{i-1}$ 'in alabileceği tam olarak 2 değer olur. Bu işlem sırasında asla 1'i aşamayacağımızı gösterelim. Farz edelim ki  $i < 1996 - k$  için  $a_i > 1$  olsun. Bu durumda

$$a_{i+1} = 4a_i(1 - a_i) < 0$$

olacaktır. Yine

$$a_{i+2} = 4a_{i+1}(1 - a_{i+1}) < 0$$

olacaktır ve bu şekilde devam edersek  $a_{1996-k}$  da negatif olacaktır. Bu bir çelişkidir.

Yani  $a_{1996-k}$ 'dan geriye giderken her dizi elemanında 2 farklı ihtimalimiz olacaktır ve  $a_1$ 'e ulaştığımızda  $2^{1995-k}$  olası  $t$  değeri elde ederiz. Bunların hepsi birbirinden farklıdır çünkü aynı olup farklı yollardan gelselerdi, bu  $t$  değerlerinden  $a_{1996-k}$ 'ya tek şekilde ulaşabildiğimizden dolayı farklı yollardan gelemezlerdi. Sonuç olarak  $k = 1997$  ve  $k = 1996$  için birer, geri kalan  $k$ 'lar için  $2^{1995-k}$  olası  $t$  değeri vardır. Her  $k$  için toplarsak

$$1 + 1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{1995} = 2 + (2^{1996} - 1) = 2^{1996} + 1$$

adet olası  $t$  değeri vardır.

**Not:** Soruyu genelleştirirsek  $n \geq 2$  için  $a_n = 0$  olmasını sağlayan  $2^{n-2} + 1$  adet  $t$  değeri vardır. Bunu fark edip tümevarım da uygulanabilir veya çözüm sayısı üzerinden yeni bir indirgemeli dizi tanımlanabilir.

- 3**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  olsun. Tüm  $B, C \subset A$  kümeleri için  $f(B) \in B$  ve  $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$  koşullarını sağlayan bütün  $f : 2^A \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$  fonksiyonlarının sayısını bulunuz.

### Çözüm:

$a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  olsun.  $f(\{a\}) \in \{a\}$  olduğundan  $f(\{a\}) = a$  olmalıdır.  $f(A) = n \in A$  diyelim. Bu durumda  $n$ 'yi içeren herhangi bir  $B \subset A$  için

$$n = f(A) \in \{f(B), f(A - B)\}$$

olacağından ve  $n \notin A - B$  olduğundan  $f(B) = n$  olmalıdır. Benzer şekilde  $A' = A - \{n\}$  dersek ve  $f(A') = m$  ise  $m$ 'yi içeren her  $A'$  altkümeleri için  $f$  fonksiyonunun sonucu  $m$  olmalıdır. Yani  $A_0 = A$  ve  $A_{i+1} = A_i - \{f(A_i)\}$  şeklinde 5 küme oluşturabiliriz ve

$$f(A_0), f(A_1), f(A_2), f(A_3), f(A_4)$$

kümelerini  $A$ 'nın farklı elemanlarına sahip olmalıdır ve her permütasyonda farklı bir tane  $f$  fonksiyonu oluşturabiliriz. Dolayısıyla  $5! = 120$  farklı fonksiyon vardır.

Anlaşılması için örnek verelim.  $(f(A_0), f(A_1), f(A_2), f(A_3), f(A_4)) = (2, 1, 5, 3, 4)$  için buna karşılık gelen fonksiyon,

$$f(B) = \begin{cases} 2 & \text{eğer } 2 \in B \\ 1 & \text{eğer } 1 \in B, 2 \notin B \\ 5 & \text{eğer } 5 \in B, 1, 2 \notin B \\ 3 & \text{eğer } 3 \in B, 1, 2, 5 \notin B \\ 4 & \text{eğer } B = \{4\} \end{cases}$$

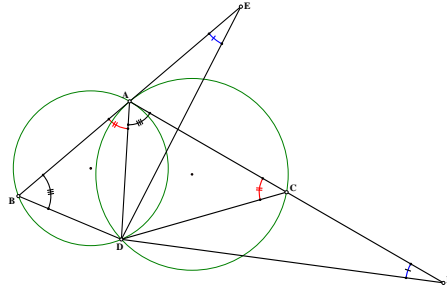
olacaktır.

- 4**  $n$  değişik lojman  $n$  kişiye dağıtılacaktır. Herkesin lojmanlara ilişkin bir tercih sıralaması vardır ve hiç kimse farklı iki lojman arasında kayıtsız değildir. Dağıtım yapıldıktan sonra, herkesi en az bu dağıtım kadar hoşnut edecek ve en az bir kişiyi de bu dağıtımda kendisine düşen lojmana tercih ettiği bir lojmana kavuşturacak başka bir dağıtımın bulunmadığı anlaşılır. Yapılan dağıtımda, en az bir kişiye  $n$  lojman arasında en çok tercih ettiği lojmanın düşmüş olduğunu kanıtlayınız.

- 5 Bir  $ABC$  üçgeninin  $[AB]$  kenarına  $A$  noktasında teğet olan ve  $C$  noktasından geçen çember ile  $[AC]$  kenarına yine  $A$  noktasında teğet olan ve  $B$  noktasından geçen çemberin yarıçapları farklı olup bu iki çember  $A$  dan farklı bir  $D$  noktasında kesişiyor.  $E$  noktası  $[AB]$  ışını üzerinde bulunan ve  $|AB| = |BE|$  koşulunu gerçekleyen nokta olma üzere;  $A, D, E$  noktalarından geçen çember ile  $[CA]$  ışının  $A$  dan farklı olan kesişim noktası  $F$  ise,  $|CF| = |AC|$  olduğunu ispatlayınız.

### Çözüm:

Soruyu sade bir şekilde çizmek çok önemli. Çevre açısı ile teğet-kiriş açılarının eşitliğinden



$\angle ABD = \angle DAC$  ve  $\angle ACD = \angle BAD$ .  $A, D, F, E$  aynı çember üzerinde bulunduğundan  $\angle AED = \angle AFD$  dir. Açılı-Açılı benzerliğinden  $\triangle ABD \sim \triangle CAD$  ve  $\triangle AFD \sim \triangle BED$  elde edilir.  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}$  ve  $\frac{BE}{AF} = \frac{2 \cdot AB}{AF} = \frac{BD}{AD}$  eşitliklerini birleştirirsek  $AF = 2 \cdot AC \Rightarrow AC = CF$  çıkar.

- 6  $f(x_1, \dots, x_n)$  katsayıları tam sayılar ve derecesi  $n$  den küçük olan bir polinom olsun.  $N, f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{13}$  denkleğini ve  $1 \leq i \leq n$  için  $0 \leq x_i < 13$  koşulunu sağlayan  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sıralı  $n$  lilerinin sayısı ise,  $13 \mid N$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

(Bu problemdeki tüm denklemler mod13 te incelenmiştir.)

**İddia:**  $0 \leq k < 12$  için

$$\sum_{x=0}^{12} x^k \equiv 0$$

**İspat:**  $k = 0$  durumu açıktır, bu nedenle  $k > 0$  durumunu ele alalım.  $g$ , mod13 te bir ilkel kök olsun; o zaman  $g, 2g, \dots, 12g$  sayıları  $\{1, 2, \dots, 12\}$  kümesini oluşturur. Bu nedenle

$$\sum_{x=0}^{12} x^k \equiv \sum_{x=0}^{12} (gx)^k = g^k \sum_{x=0}^{12} x^k;$$

$g^k \neq 1$  olduğu için  $\sum_{x=0}^{12} x^k \equiv 0$  olmalıdır. Bu, iddiamızı kanıtlar. ■

Şimdi,  $S = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 12\}$  kümesini düşünelim.  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  olan  $n$ -lilerin sayısının  $13^n$ 'e bölünebilir olması yeterlidir, çünkü  $|S| = 13^n$  sayısı 13 ile bölünebilir. Şu toplamı ele alalım:

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in S} (f(x_1, \dots, x_n))^{12}.$$

Bu toplam,  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  olan  $n$ -lilerin sayısını sayar, çünkü Fermat'ın Küçük Teoremi'ne göre

$$(f(x_1, \dots, x_n))^{12} \equiv \begin{cases} 1, & f(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Öte yandan,  $(f(x_1, \dots, x_n))^{12}$ 'yi uygun  $N, c_j, e_{ji}$  sayıları ile aşağıdaki gibi açabiliriz:

$$(f(x_1, \dots, x_n))^{12} = \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{e_{ji}}$$

$f$ 'nin toplam derecesi  $n$ 'den küçük olduğundan, her  $j$  için  $e_{j1} + e_{j2} + \dots + e_{jn} < 12n$  olmalıdır, bu nedenle her  $j$  için  $e_{ji} < 12$  olan bir  $i$  vardır. O halde, iddiamıza göre

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in S} c_j \prod_{i=1}^n x_i^{e_{ji}} = c_j \prod_{i=1}^n \sum_{x=0}^{12} x^{e_{ji}} \equiv 0$$

dır; çünkü çarpımın içindeki toplamlardan biri 0'dır. Bu nedenle

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in S} (f(x_1, \dots, x_n))^{12} = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in S} \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{e_{ji}} \equiv 0$$

olur. Böylece  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  olan  $n$  lilerin sayısı 13'e bölünebilir ve çözüm tamamlanır.

**Kaynak:** Mathematical Olympiads Problems and Solutions from Around the World 1998-1999, Syf. 152-153.

## 40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1999

- 1  $m \leq n$  şeklinde pozitif sayılar ve  $p$  asal sayısı verilmiş olsun.  $a_r, b_s \neq 0$  ve her  $i, j$  için  $0 \leq a_i, b_j < p$  olmak üzere

$$\begin{aligned} m &= a_0 + a_1p + \dots + a_r p^r \\ n &= b_0 + b_1p + \dots + b_s p^s \end{aligned}$$

olsun. Her  $i = 0, 1, \dots, r$  için  $a_i \leq b_i$  ise  $m \prec_p n$  diyeceğiz.  $p \nmid \binom{n}{m}$  olması için gerek ve yeter koşulun  $m \prec_p n$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$m$  sayısını da  $p$  tabanında  $s$  basamaklı hale getirelim. (Başa 0 ekleyerek)

$$\begin{aligned} m &= a_0 + a_1p + \dots + a_s p^s \\ n &= b_0 + b_1p + \dots + b_s p^s \\ n - m &= k_0 + k_1p + \dots + k_s p^s \end{aligned}$$

$k, x \in \mathbb{N}$  olmak üzere;  $n! = M \cdot p^x$  eşitliğini sağlayan en büyük  $x$  sayısı

$$\Delta_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$$

olacaktır. Biraz düzenlemeyle

$$\begin{aligned} \Delta_p(n) &= b_1 + b_2(p+1) + \dots + b_s(p^{s-1} + \dots + 1) \\ (p-1)\Delta_p(n) &= b_1(p-1) + b_2(p^2-1) + \dots + b_s(p^s-1) \\ (p-1)\Delta_p(n) &= b_1p + b_2p^2 + \dots + b_s p^s - (b_1 + b_2 + \dots + b_s) \\ (p-1)\Delta_p(n) &= b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_s p^s - (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_s) \\ (p-1)\Delta_p(n) &= n - \sum_{i=0}^s b_i \end{aligned}$$

$n$  nin  $p$  tabanında rakamları toplamına  $\delta_p(n) = \sum_{i=0}^s b_i$  dersek

$$\Delta_p(n) = \frac{n - \delta_p(n)}{p-1}$$

olur.

$p^x \mid \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$  şartını sağlayan en büyük  $x$  sayısı

$$\begin{aligned} \Delta_p \left( \binom{n}{m} \right) &= \frac{\Delta_p(n) - \Delta_p(n-m) - \Delta_p(m)}{p-1} \\ &= \frac{\frac{n - \delta_p(n)}{p-1} - \frac{n-m - \delta_p(n-m)}{p-1} - \frac{m - \delta_p(m)}{p-1}}{p-1} \\ &= \frac{\delta_p(m) + \delta_p(n-m) - \delta_p(n)}{p-1} \end{aligned}$$

olacaktır.

Soruya dönersek; ilk önce,  $m \prec_p n \Rightarrow p \nmid \binom{n}{m}$  olduğunu gösterelim:

$$m \prec_p n \Rightarrow \delta_p(m) + \delta_p(n-m) = \delta_p(n) \Rightarrow \Delta_p \left( \binom{n}{m} \right) = 0 \Rightarrow p \nmid \binom{n}{m}$$

Şimdi de  $p \nmid \binom{n}{m} \Rightarrow m \prec_p n$  olduğunu gösterelim. Bu ifadenin karşıtı  $m \not\prec_p n \Rightarrow p \mid \binom{n}{m}$  olur. Bu da

“ $n-m$  ile  $m$  nin  $p$  tabanında toplamında elde varsa,  $p \mid \binom{n}{m}$ ”

önermesi ile özdeşdir. Aslında daha güçlüsünü ispat edeceğiz.

**Kummer Teoremi:**  $n-m$  ile  $m$  sayılarının  $p$  tabanında toplamında, elde sayısı  $\Delta_p \left( \binom{n}{m} \right) = \frac{\delta_p(m) + \delta_p(n-m) - \delta_p(n)}{p-1}$  ye eşittir.

**İspat:**

Her basamaktaki elde  $c_i = \begin{cases} 1, & a_i + k_i \geq p \\ 0, & a_i + k_i < p \end{cases}$  şeklinde tanımlanır.

Ayrıca  $n$  nin  $p$  tabanındaki basamakları,  $b_i = a_i + k_i + c_{i-1} - p \cdot c_i$  şeklinde tanımlanır. Özel olarak  $c_{-1} = 0$  alınabilir. Ayrıca  $b_s$  hesaplanırken elde olmayacağı için  $c_s = 0$  dir.

$$\begin{aligned} \delta_p(m) + \delta_p(n-m) - \delta_p(n) &= \sum_{i=0}^s a_i + \sum_{i=0}^s k_i - \sum_{i=0}^s b_i = \sum_{i=0}^s (a_i + k_i - b_i) \\ &= \sum_{i=0}^s (pc_i - c_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^s (p-1)c_i + \sum_{i=0}^s (c_i - c_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^s (p-1)c_i + c_s - c_{-1} \\ &= \sum_{i=0}^s (p-1)c_i \end{aligned}$$

Bu durumda  $\Delta_p \left( \binom{n}{m} \right) = \frac{\delta_p(m) + \delta_p(n-m) - \delta_p(n)}{p-1} = \sum_{i=0}^s c_i$  ■

$m \not\equiv_p n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^s c_i > 0 \Rightarrow p \mid \binom{n}{m}$ .

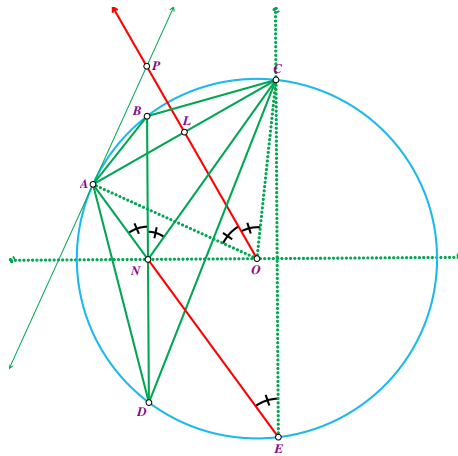
**Not:**

Bu soru, **Lucas Teoremi** ile doğrudan ilgilidir.

- 2**  $ABCD$  kirişler dörtgeninde  $L$  ve  $N$  sırasıyla  $AC$  ve  $BD$  köşegenlerinin orta noktaları olsun.  $ANC$  açısının açıortayı  $BD$  ise,  $AC$ 'nin  $\widehat{BLD}$  açısının açıortayı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

Kirişler dörtgeninin çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $C$  nin  $ON$  üzerindeki çapına göre simetriği  $E$  olsun.  $CN = NE$  ve  $ON \perp CE$  olacaktır.  $BD \perp ON$  olduğu için  $BD \parallel CE$  ve  $\angle BNC = \angle NCE = \angle NEC = \angle ANB$  olur ki, bu da  $A, N, E$  noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir.



$\angle ANC = \angle AOC = 2 \cdot \angle AEC$  bağıntısı  $A, N, O, C$  noktalarının çembersel olduğu anlamına gelir. Bu çemberin  $OL$  yi kestiği nokta  $P$  olsun.  $AP$  küçük yayının ölçüsü  $\angle AOP/2$  yani,  $\angle ANB/2$  kadardır. Bu durumda  $NB$



**Çözüm:**

$k \neq 1$  ve  $x_k - f(x_k) = k$  olsun.  $\frac{f(x_k - 1 - f(x_k))}{k - 1} = \frac{f(k - 1)}{k - 1} = \frac{f(x_k) - x_k - 1}{k - 1} = \frac{-k - 1}{k - 1} = -1 - \frac{2}{k - 1}$  olacağından  $\left\{ \frac{f(k - 1)}{k - 1} \mid k \neq 1 \right\}$  kümesinin sonlu sayıda elemanı olduğu için  $-1 - \frac{2}{k - 1}$  ifadesi sonlu sayıda farklı değer alabilmeli, bu da ancak sonlu sayıda  $x_k - f(x_k) = k$  olduğunda mümkün. Yani  $\{x - f(x) \mid x \in R\}$  kümesi sonludur. Sonlu kümelerin en büyük ve en küçük elemanları vardır. Bunlar arasından  $|x - f(x)|$  ifadesini en büyük yapan değer  $x = x_0$  olsun.

$y = x_0 - 1 - f(x_0)$  değişkeni ile  $y - f(y) = y - (f(x_0) - x_0 - 1) = 2(x_0 - f(x_0))$  olur. Bu da  $x_0$  in en büyük şartını  $|x_0 - f(x_0)| = 0$  olmadıkça ihlal eder.  $|x - f(x)|$  ifadesinin en büyük değeri  $|x_0 - f(x_0)| = 0$  olduğuna göre tüm değerleri 0'dır. Buradan da  $f(x) = x$  elde edilir. Yerine koyduğumuzda  $f(x - 1 - x) = x - x - 1 = f(-1)$  olduğu için  $f(x) = x$  verilen denklemleri sağlar.

- 4 Çevresi  $C_K$ , alanı  $A_K$  olan bir kirisler dörtgeninin çevrel çemberine bu dörtgenin köşelerinde teğet olan teğetler dörtgeninin alanı  $A_T$  ve çevresi de  $C_T$  olmak üzere  $\frac{A_K}{A_T} \geq \left(\frac{C_K}{C_T}\right)^2$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**

Çemberin merkezi  $I$ , yarıçapı 1, söz konusu teğetler dörtgeni  $ABCD$  ve çember  $AB, BC, CD, DA$  kenarlarına sırasıyla  $D, E, F, G$  noktalarında dokunur.

$\angle GID = 2\alpha, \angle DIE = 2\beta, \angle EIF = 2\theta, \angle FIG = 2\gamma$  olsun.

$AG = AD = \tan \alpha, BD = BE = \tan \beta, CE = CF = \tan \theta, FD = GD = \tan \gamma$  ve  $GD = 2 \sin \alpha, DE = 2 \sin \beta, EF = 2 \sin \theta, FG = 2 \sin \gamma$  olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_K &= \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\theta + \sin 2\gamma}{2} = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \theta \cos \theta + \sin \gamma \cos \gamma \\ A_T &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta + \tan \gamma \\ C_K &= 2 \sin \alpha + 2 \sin \beta + 2 \sin \theta + 2 \sin \gamma \\ C_T &= 2 \tan \alpha + 2 \tan \beta + 2 \tan \theta + 2 \tan \gamma \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \theta \cos \theta + \sin \gamma \cos \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta + \tan \gamma} &\geq \left( \frac{2 \sin \alpha + 2 \sin \beta + 2 \sin \theta + 2 \sin \gamma}{2 \tan \alpha + 2 \tan \beta + 2 \tan \theta + 2 \tan \gamma} \right)^2 \\ &(\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \theta \cos \theta + \sin \gamma \cos \gamma) (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta + \tan \gamma) \\ &\geq (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \theta + \sin \gamma)^2 \end{aligned}$$

$\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha} = a_1$  ve  $\sqrt{\tan \alpha} = b_1$  dediğimizde  $a_1 b_1 = \sin \alpha$  olacağı için eşitsizlik Cauchy-Schwarz'a dönüşür.

Eşitlik  $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \theta = \sin \gamma$  olduğunda sağlanır.  $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 180^\circ$  olduğu için açılar  $45^\circ$  ve  $ABCD$  ve  $DEFG$  birer kare olacak. Yani eşitlik, kirisler dörtgeni kare iken sağlanır.

- 5 Başlangıçta her biri farklı bir parça bilgiye sahip olan  $A, B, C, D, E$  ve  $F$ , ikişer ikişer telefonla görüşürler. Konuşmalar aynı santral üzerinden yapıldığı için, her seferinde ancak iki kişi görüşebilmektedir. Her konuşmada, iki taraf da, o ana kadar edinmiş olduğu tüm bilgileri karşı tarafa aktarır. Herkesin altı parça bilginin tümünü edinmesi için en az kaç konuşma yapılması gerektiğini belirleyiniz.

**Çözüm:**

Literatürde **Gossiping** (Dedikodu Problemi) olarak geçen bir konu sorulmuş:

$n \geq 4$  kişi sayısını göstermek üzere, herkesin tüm bilgiye erişmesi için gerekli telefon görüşmesi sayısı  $f(n) = 2n - 4$  tür.

O halde sorunun yanıtı  $f(6) = 2 \cdot 6 - 4 = 8$  dir.

Bollobás'ın The Art of Mathematics kitabında ([1]) Gossiping Dons adlı problemin çözümünde anlatıldığı üzere, bu soru 1970'lerde popüler olmuş bir soruydu.

Sorunun çözümünde iki temel aşama var:

Birincisi, minimum telefon görüşmesi sayısının  $f(n) \leq 2n - 4$  olduğu;

İkincisi,  $f(n) = 2n - 5$  görüşmede tüm bilginin paylaşılamadığı, yani  $f(n) = 2n - 4$  olduğu.

Birinci aşama için birkaç çözüm paylaşacağım. İkinci aşama için sonda verdiğim kaynaklara müracaat edebilirsiniz. (Ya da birisi tüm çözümün çevirisini yapıp paylaşabilir.)

Açık şekilde;  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$ .

3 kişi için,  $A - B$ ,  $A - C$ ,  $B - C$ , yani  $f(3) = 3$ .

4 kişi için,  $A - B$ ,  $C - D$ ,  $A - C$ ,  $B - D$ ,  $f(4) = 4$ .

$n$  kişi için yapılan görüşmeler  $T_n$  listesi ile ifade edilsin. İlk görüşmedeki kişilerden biri  $X_n$ , son görüşmedeki kişilerden biri  $Y_n$  olsun.

$(n + 1)$ . kişi  $X_{n+1}$  olsun.  $T_{n+1} = [X_{n+1}X_n] + T_n + [Y_nX_{n+1}]$  şeklinde bir görüşme ile  $n + 1$  kişi tüm bilgilere erişebilir.

Bu durumda her seferinde fazladan 2 telefon görüşmesi ile kişi sayısını artırabildiğimiz ortaya çıkıyor. O halde  $f(n) \leq 4 + 2(n - 4) = 2n - 4$ .

Burada  $2n - 4$  konuşma ile tüm bilgiyi paylaşabildiğimiz ortaya çıkıyor; ama daha az sayıda konuşma ile de belki tüm bilgi paylaşılabilirdi. Onun için  $f(n) = 2n - 5$  konuşma ile tüm bilgiyi paylaşamayacağımızı göstermemiz gerekiyor. Sorunun bu kısmı daha zor.

$f(n) \leq 2n - 4$  olduğu şu şekilde de gösterilebilir:

$n$  kişiden 4 ü  $A, B, C, D$  olsun.  $A$  diğer  $n - 4$  kişi ile görüşsün.

Sonra  $A, B, C, D$  kendi aralarında görüşsün.  $f(4) = 4$  olduğu için, 4 görüşme yeterli olacak.

Sonra da  $D$  diğer  $n - 4$  kişi ile görüşsün.

Bu durumda  $(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$  görüşmeyle herkes tüm bilgiye sahip olabilir.

#### Kaynaklar:

[1]

Bollobás, B. (2006). The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511816574

Sayfa 136-139.

[Google Kitaplar Linki](#)

[2]

Çeşitli Makaleler: <https://www.math.uni-bielefeld.de/sillke/PUZZLES/gossips.pdf>

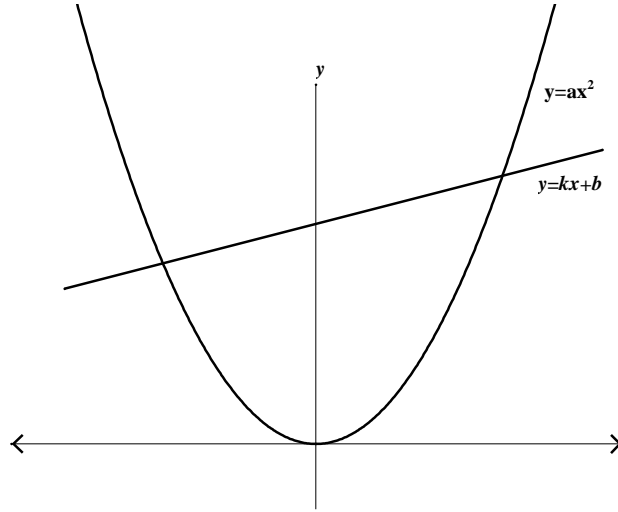
- 6** Düzlemin sonlu sayıda parabolün iç bölgelerinin birleşimi olmadığını gösteriniz. (Bir parabolün dış bölgesi, parabolü kesmeyen doğruların birleşimidir. Bir parabolün iç bölgesi ise, parabolün dış bölgesinde olmayan noktaların oluşturduğu kümedir.)

#### Çözüm 1:

Düzlemde bir parabol alalım ve koordinat sistemini öyle seçelim ki, bu sistemde parabolün denklemi  $y = ax^2$ , ( $a > 0$ ) olsun. Parabolün iç bölgesindeki  $(x, y)$  noktaları (sınırlardaki noktalar dahil) için  $y \geq ax^2$  sağlanacaktır.

Şimdi,  $y$ -eksenine paralel olmayan herhangi bir  $y = kx + b$  doğrusunu ele alalım. Bu doğrunun en fazla sonlu bir kısmının "aydınlanabileceğini" görelim. Aydınlanmış noktaların birinci koordinatı olan  $x$  için  $kx + b \geq ax^2$  eşitsizliği sağlanmalıdır. Buradan,  $ax^2 - kx + b \leq 0$  olduğu görülür. Eğer  $P(x) = ax^2 - kx + b$  ( $a > 0$ ) polinomunun diskriminantı  $D = k^2 - 4ab$  negatif ise, doğru, parabolü hiç kesmiyor;  $D \geq 0$  ise, doğru, parabolü  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  gibi,  $D = 0$  durumunda çakışan, iki noktada keser ve doğrunun aydınlanan kısmı

bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır.  $D = 0$  durumunda doğrunun bir tek noktası aydınlanmıştır. Böylece, parabolün simetri eksenine paralel olmayan her doğrunun en fazla sonlu bir parçası aydınlanabilir.



Şimdi, sonlu sayıda fener, dolayısıyla, onların aydınlattığı sonlu sayıda parabol, düzlemde nasıl yerleştirilmiş olursa olsun, bu parabollerin hiç birinin simetri eksenine paralel olmayan bir doğrunun tamamı aydınlanamaz. (Böyle bir doğru var mıdır? Bir noktadan geçen  $n$  adet parabollerin simetri eksenlerine paralel olan  $n$  adet doğru vardır. Bu noktadan geçen diğer doğruların hiçbirisi bu parabollerin simetri eksenlerinden birine paralel değildir.) Bu nedenle düzlemin tamamı aydınlanamaz.

**Not:**

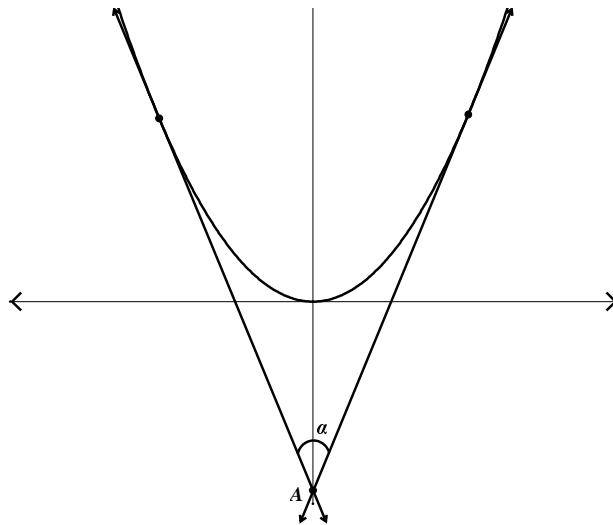
Bu soru 2000 yılındaki 5. Antalya Matematik Olimpiyatında da sorulmuştur.

**Kaynak:**

Matematik Dünyası 2000-IV

**Çözüm 2:**

Bir parabolün iç bölgesini istediğimiz kadar küçük bir açının iç bölgesi içine alabiliriz.



Çünkü, düzlemde koordinat sistemini, şekilde görüldüğü gibi, parabolün tepe noktası orijin ve simetri eksenini  $y$ -ekseni olacak şekilde seçersek; parabol üzerinde  $y$ -eksenine göre simetrik olan iki noktadan teğetler çizersek,

bu teğetler  $y$ -eksenin üzerinde bir  $A$  noktasında kesişirler. Böylece oluşan açının iç bölgesi, parabolün iç bölgesini içerir. Teğetleri uygun yerden çizerek, oluşan  $\alpha$  açısını istediğimiz kadar küçültülebileceğimiz açıdır.

Parabollerin sayısı  $n$  olsun ver her bir parabolü köşesi  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  de olan ve  $\frac{2\pi}{n}$  den küçük olan  $\alpha_i$  açısının içine alalım. Eğer düzlem bu şekilde  $\frac{2\pi}{n}$  den küçük  $n$  tane açı tarafından örtülebilsen, köşeleri çakışan  $n$  tane  $\frac{2\pi}{n}$  den küçük açı tarafından örtülebilmesi gerekirdi. Fakat bu mümkün değildir; çünkü sözü edilen ortak köşeyi merkez kabul eden bir çember çizilirse, çemberin bu açılarla örtülemeyeceği görülür.

**Kaynak:**

Sabri YILMAZ

Matematik Dünyası 2000-IV

**Çözüm 3:**

Aynı soru 1996 yılında 6. Vojtěch Jarník Uluslararası Matematik Yarışması, Kategori 2 Soru 1 de sorulmuş.

## 41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2000

- 1 (a) Her  $n$  pozitif sayısı için,  $x^2 - xy + y^2 = n$  denklemini sağlayan  $(x, y)$  sıralı tamsayı ikililerinin sayısının 3 ile bölünebileceğini gösteriniz.
- (b)  $x^2 - xy + y^2 = 727$  denklemini sağlayan tüm sıralı tamsayı ikililerini bulunuz.

### Çözüm:

- (a)  $y$  yi sabit tuttuğumuzda,

$f(a, y) = f(b, y)$  ise  $a^2 - ay + y^2 = b^2 - by + y^2 \Rightarrow (a - b)(a + b - y) = 0$  olacağı için  $b = y - a$  elde edilir. Bu durumda  $(a, y)$  bir çözüm ise  $(y - a, y)$  de bir çözümdür.

Benzer şekilde  $x$  i sabit tuttuğumuzda,  $f(x, a) = f(x, b)$  ise  $x^2 - ax + a^2 = x^2 - bx + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b - x)$  ve  $b = x - a$  elde edilecek. Bu durumda  $f(x, a)$  bir çözüm ise  $f(x, x - a)$  da bir çözüm olacak.

Bunun haricinde simetriden dolayı  $f(x, y) = f(y, x)$  ve kare ifadelerden dolayı  $f(x, y) = f(-x, -y)$  olduğu görülüyor.

Tüm çözümleri birleştirirsek:

Sabit tutma sonucu 3 tane:  $(x, y)$ ,  $(y - x, y)$ ,  $(x, x - y)$

Yer değiştirme sonucu 3 tane:  $(y, x)$ ,  $(x - y, x)$ ,  $(y, y - x)$

Bunların eksileri sonucu 6 tane çözüm geleceği için,  $(x, y)$  çözümse, bunun haricinde 11 çözüm daha vardır.

$(x, x)$  olma durumunda çözümler  $(x, x)$ ,  $(-x, -x)$ ,  $(0, x)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, -x)$ ,  $(-x, 0)$  olacak. Çözüm sayısı yine 3 ile bölünüyor.

$(0, 0)$  çözüm ise çözüm sayısı 1 olacak. Ama  $(0, 0)$  çözümse,  $n = 0$  olması gerekeceği ve soruda  $n$  pozitif tam sayı dediği için  $(0, 0)$  çözüm olamaz.

- (b) 727 tam kare olmadığı için  $x^2 - xy + y^2 = 727$  denklemin  $(a, a)$  şeklinde bir çözümü yoktur.

$(a, b)$   $(-, -)$  şeklinde bir çözüm ise, bunların eksileri de çözüm olacağı için  $(-a, -b)$  şeklinde bir çözüm vardır. Birincisi ikincisinden küçük ise yer değiştirdiğimizde  $(-b, -a)$  şeklinde bir çözüm bulabilir.

$a > 0$  ve  $b < 0$  ise  $(a, b)$  çözümken,  $(a, a - b)$  çözümü  $(+, +)$  şeklinde bir çözüm.  $(a - b, a)$  çözümü de istediğimiz şekilde ilk parametrenin ikincisinden büyük olduğu bir çözümdür. İlki negatif ikincisi pozitif ise, ters çeviririz, yine aynı şekilde bir çözüm elde ederiz.

Bu durumda çözüm varsa, çözümlerinden biri  $a > b > 0$  olmak üzere  $(a, b)$  şeklinde olmalı.

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 + b(b - a) = 727 < a^2 \Rightarrow 27 \leq a$$

Diğer taraftan  $b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a^2 - 727)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{4 \cdot 727 - 3a^2}}{2}$  olduğu için  $4 \cdot 727 > 3a^2 \Rightarrow 31 \geq a$  olacaktır.

Bu durumda  $27 \leq a \leq 31$  elde edilir. Bu 5 değer  $2908 - 3a^2 = T^2$  denkleminde teker teker denenirse sadece  $a = 31$  in sağladığı görülür.

$a = 31$  olduğunda,  $31^2 - 31b + b^2 = 727 \Rightarrow b^2 - 31b + 234 = (b + 18)(b - 13) = 0$  elde edilecek. Yani  $(31, 13)$  bir çözüm.

Bu durumda tüm çözümler  $(31, 13)$ ,  $(13, 31)$ ,  $(-18, 13)$ ,  $(18, 31)$ ,  $(31, 18)$ ,  $(13, -18)$ ,  $(-31, -13)$ ,  $(-13, -31)$ ,  $(18, -13)$ ,  $(-18, -31)$ ,  $(-31, -18)$ ,  $(-13, 18)$  olacaktır.

- 2  $ABC$  üçgeninde  $A$  köşesine ait iç ve dış açıortaylar  $BC$  yi sırasıyla  $D$  ve  $E$  de kesiyor.  $DE$  çaplı çember ile  $AC$ , ikinci kez  $F$  de kesişiyor.  $ABF$  üçgeninin çevrel çemberine  $A$  da teğet olan doğru  $DE$  çaplı çember ile ikinci kez  $G$  de kesişiyor.  $|AF| = |AG|$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$F$  merkezli çember  $B, C$  noktalarına ait  $A, D, E$  den geçen Apolonyus çemberidir. Çember üzerindeki her  $F$  noktası için  $FBC$  üçgenlerinde  $DF$  iç açıortay ve  $EF$  dış açıortaydır.  $\angle DFC = \frac{\angle BFC}{2} = \angle BEA$  ve  $\angle DAC = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BEF$ .

$$\angle AEB + \angle BEF = \angle AEF = \angle AGF = \frac{\angle BFC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} \text{ ve}$$

$$\angle ABF = 180^\circ - \angle BAF - \angle BFC = 180^\circ - 2 \cdot \angle AGF \Rightarrow \angle AFG = \angle AGF \Rightarrow AF = AG \text{ dir.}$$

**3**  $P(x) = x+1$  ve  $Q(x) = x^2+1$  olmak üzere;  $(x_1, y_1) = (1, 3)$  ve her  $k$  için,  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ 'in ya  $(P(x_k), Q(y_k))$  ya da  $(Q(x_k), P(y_k))$  ya eşit olduğu  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  dizilerini ele alalım. Bu dizilerden en az biri için  $x_n = y_n$  ise  $n$  ye iyi sayı diyeceğiz. Tüm iyi sayıları bulunuz.

**4** Herhangi bir sonsuz uzunluktaki üçgen prizmanın, kesişimleri eşkenar üçgen olacak şekilde bir düzlemle kesilebileceğini gösteriniz.

**Çözüm 1:**

Prizmanın tabanı  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(b, 0, c)$  olsun.

$p$  ve  $q$  değişken olmak üzere  $P(a, p, 0)$  ve  $Q(b, q, c)$  noktaları almıyor.  $\triangle OPQ$  eşkenar olacak şekilde  $(p, q)$  ikilisi bulunabilirse,  $OPQ$  düzlemi aradığımız düzlem olacak.  $OP = OQ = PQ$  eşitliğinden

$$a^2 + p^2 = b^2 + q^2 + c^2 = (b - a)^2 + (p - q)^2 + c^2.$$

Uygun düzenlemelerle

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= b^2 + c^2 - a^2 = r \\ p^2 - 2pq &= 2ab - a^2 = s \end{aligned}$$

elde ederiz.  $q^2 = p^2 - r$  ifadesini ikinci denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} p^2 - 2p\sqrt{p^2 - r} &= s \\ p^2 - s &= 2p\sqrt{p^2 - r} \\ p^2 - s &= \sqrt{4p^2(p^2 - r)} \end{aligned}$$

$p^2 = x$  deyip kare alırsak

$$\begin{aligned} (x - s)^2 &= 4x(x - r) \\ x^2 + s^2 - 2xs &= 4x^2 - 4xr \\ 3x^2 - x(4r - 2s) - s^2 &= 0 \end{aligned}$$

$p^2 = \frac{4r - 2s + \sqrt{(4r - 2s)^2 + 12s^2}}{6} = \frac{2r - s + \sqrt{(2r - s)^2 + 3s^2}}{3} \geq 0$  olduğu için denklem sistemini sağlayan  $p$  bulunur. Bunun yanında  $q^2 = p^2 - r \geq 0$  olmalı.

$$q^2 = \frac{-r - s + \sqrt{(2r - s)^2 + 3s^2}}{3} \geq 0$$

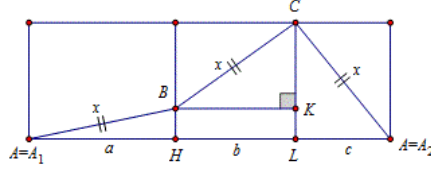
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (2r - s)^2 + 3s^2 \geq (r + s)^2 \\ &\Leftrightarrow 4r^2 + s^2 - 4rs + 3s^2 \geq r^2 + s^2 + 2rs \\ &\Leftrightarrow 3r^2 + 3s^2 - 6rs = 3(r - s)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

olduğu için  $q$  sayısı da bulunabilir.

**Çözüm 2:**

Bu geometrik problem, sürekli fonksiyonlar için aradeğer teoreminin çok güzel bir uygulamasıdır.

Üçgen prizmanın taban ayrıt uzunluklarının  $a \geq b \geq c$  olduğunu kabul edebiliriz. Üçgen prizmayı düzlemle kestikten sonra aşağıdaki gibi yüzey açımını yapalım.



Arakesitin bir  $ABC$  eşkenar üçgeni olmasını istiyoruz. Bunun için  $|AB| = |BC| = |CA| = x$  olacak şekilde bir  $x$  gerçel sayısının var olduğunu göstermeliyiz. Şekilde  $|BH| = \sqrt{x^2 - a^2} = |KL|$ ,  $|CK| = \sqrt{x^2 - b^2}$ ,  $|CL| = \sqrt{x^2 - c^2}$  dir.  $|CL| = |CK| + |KL|$  eşitliğinden

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2} = 0 \dots (1)$$

denklemin elde edilir. Bu denklemin bir  $x$  gerçel sayısı çözümü olduğunu ispat edeceğiz.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2} \dots (2)$$

diyelim. Açıkça  $f(a) \leq 0$  dır. Eğer  $f(a) = 0$  ise zaten göstermek istediğimiz buydu, ispat tamamlanmış olur. Bu yüzden  $f(a) < 0$  olması halini göz önüne alarak işlemlerimizi yapalım. Temel limit bilgilerimizle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

olduğunu görebiliriz. Bu limit bize yeterince büyük bir pozitif  $x_0$  gerçel sayısı için  $f(x_0) > 0$  olduğunu söyler.  $f$  fonksiyonu  $[c, \infty)$  aralığında sürekli bir fonksiyondur ve  $f(a) \cdot f(x_0) < 0$  olduğundan ara değer teoremi gereğince (1) denkleminin  $(a, x_0)$  aralığında bir  $x$  çözümü vardır.

- 5  $ABCD$  eşkenar dörtgeninin  $AB, BC, CD, DA$  kenarları üzerinde  $MN \parallel LK$  ve  $MN$  ile  $KL$  arasındaki uzaklık  $ABCD$  nin yüksekliğine eşit olacak şekilde sırasıyla  $M, N, K, L$  noktaları alınıyor.  $ALM$  üçgeni ile  $NCK$  üçgeninin çevrel çemberleri kesişirken,  $LDK$  üçgeni ile  $MBN$  üçgeninin çevrel çemberlerinin kesişmediğini gösteriniz.

**Çözüm:**

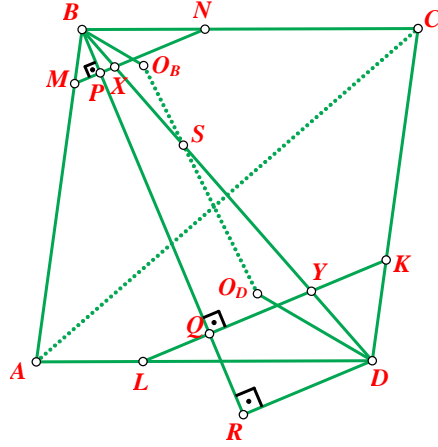
$(BMN)$  çemberi ile  $(DLK)$  çemberinin  $BD$  üzerindeki kesişmelerinin uzunluklarının toplamının  $BD$  den daha küçük olduğunu göstereceğiz. Bu normalde çemberlerin kesişmedikleri anlamına gelmez; ama bu soruda çemberlerin kesişmediklerini anlamına geldiğini göstereceğiz.

Yine aynı noktadan yola çıkarak,  $(AML)$  çemberi ile  $(DLK)$  çemberinin  $AC$  üzerindeki kesişmelerinin uzunlukları toplamının  $AC$  den küçük olduğunu göstereceğiz. İlkini aksine bu, iki çemberin kesiştiği anlamına gelir.

$(BMN)$  çemberinin merkezi  $O_B$ ,  $(DKL)$  çemberinin merkezi  $O_D$ ,

$\ell$  de,  $D$  den geçen  $MN$  ye paralel olan doğru olsun.

$B$  den  $MN$  ye çizilen dikmenin ayağı  $P$ ,  $KL$  ye çizilenin ayağı  $Q$ ,  $\ell$  ye çizilenin de ayağı  $R$  olsun.



$BD$  doğrusu  $O_B O_D$  yi  $S$  de,  $MN$  yi  $X$  te,  $KL$  yi  $Y$  de kessin.

$AB = BC = CD = DA = a$ ,  $\angle BMN = \beta$  ve  $\angle BNM = \theta$  dersek dörtgenin yüksekliği  $h = a \sin(\beta + \theta)$  olur. Basit açı hesaplarıyla,

$$\angle BAD = \beta + \theta, \angle BAC = \angle DAC = \frac{\beta + \theta}{2}$$

$$\angle MBP = 90^\circ - \beta, \angle MBD = \frac{180^\circ - \beta - \theta}{2}, \angle DBP = \left| \frac{\beta - \theta}{2} \right|$$

$$\angle BO_B M = 2\theta \implies \angle MBO_B = 90^\circ - \theta \implies \angle O_B B D = \left| \frac{\beta - \theta}{2} \right| \text{ elde edilir.}$$

$\angle BXM = \angle BYL = \angle KYD$  ve  $\angle YDK = \angle XBM$  olduğu için,  $\angle YKD = \angle BMX = \beta$ , dolayısıyla da  $\angle KLD = \angle BNM = \theta$  olur. Bu da  $\triangle DLK \sim \triangle BNM$  yi gerektirir.  $BM = x$  ve  $DK = xk$  dersek, benzerlikten dolayı

$$BP = x \sin \beta, QR = xk \sin \beta, PQ = h \text{ ve } BR = BD \cdot \sin \angle DBR = BD \cdot \cos \left( \frac{\beta - \theta}{2} \right)$$

elde edilecektir.

$BD = 2a \sin \left( \frac{\beta + \theta}{2} \right)$  olduğu için,  $x \sin \beta + xk \sin \beta + a \sin(\beta + \theta) = 2a \sin \left( \frac{\beta + \theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta - \theta}{2} \right)$ , biraz düzenlemeyle

$$\begin{aligned} x(1+k) &= 2a \sin \left( \frac{\beta + \theta}{2} \right) \frac{\cos \left( \frac{\beta - \theta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\beta + \theta}{2} \right)}{\sin \beta} \\ &= 2a \sin \left( \frac{\beta + \theta}{2} \right) \frac{2 \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\sin \beta} \end{aligned}$$

elde edilir.

$(BMN)$  ile  $BD$  nin kesişimi  $T$ ,  $(DKL)$  ile  $BD$  nin kesişimi  $U$  olsun.

$$\angle TNB = \angle MBT + \angle BNM = \frac{180^\circ - \beta - \theta}{2} + \theta = 90^\circ - \left( \frac{\theta - \beta}{2} \right)$$

$$\frac{BT}{\sin \angle BNT} = \frac{BM}{\sin \angle BNM} \implies BT = \frac{x \cos \left( \frac{\theta - \beta}{2} \right)}{\sin \theta}, \text{ benzer şekilde de } DU = \frac{xk \cos \left( \frac{\theta - \beta}{2} \right)}{\sin \theta} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
BT + DU &= x(1+k) \frac{\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\sin\theta} \\
&= 2a \sin\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right) \frac{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\sin\beta \sin\theta} \\
&= \frac{2a \sin\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{2\cos(\beta/2) \cos(\theta/2)} \\
&= \frac{BD \cdot \cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right)} \\
\Rightarrow \frac{BT + DU}{BD} &= \frac{\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\theta + \beta < 180^\circ \Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\theta}{2} < 90^\circ \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right) > 0$  olduğu için  $BT + DU < BD$  dir.

Bu durumda  $|BT| + |TU| + |UD| = BD$  olur.

$TO_B \perp MN$  ve  $UO_D \perp KL$  olduğu için  $O_B O_D$  doğrusu  $[TU]$  doğru parçasını kesecektir. Bu kesişim noktasına  $S$  demiştik. Bu durumda  $S \in [TU]$  dur.

$O_B B = O_B T$  olduğu için,  $S$  noktası  $(BMN)$  dışındadır. Bu durumda  $O_B S > O_B B$ . Benzer şekilde de  $O_D S > O_D B$  dir. Bu da  $(BMN)$  ile  $(DLK)$  çemberlerinin kesişmediklerini gösterir. ■

$(MAL)$  ile  $(NCK)$  çemberlerinin kesiştiği iddiasına gelelim.

$(MAL)$  çemberi  $AC$  yi  $W$  da,  $(NCK)$  çemberi  $AC$  yi  $Z$  de kessin.

$AW + CZ > AC$  olduğunu göstereceğiz. Eğer bu iddiamızı delillendirebilirsek,  $(ALM)$  ile  $(NCK)$  çemberlerinin kesiştikleri açık.

Elimizde  $WM = WL$  ve  $\angle MAL = \beta + \theta$  var. Bu durumda  $\frac{ML}{\sin(\beta + \theta)} = \frac{MW}{\sin\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)}$  ve Ptolemy'den

(köşegenlerden biri açıortayken)

$$AW \cdot ML = MW (AM + AL) \Rightarrow AW = \frac{AM + AL}{2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)}$$

Benzer şekilde

$$CZ = \frac{CN + CK}{2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplarsak

$$AW + CZ = \frac{AM + AL + CN + CK}{2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)}$$

olur.

Çözümün ilk kısmında elde ettiğimiz  $BD > BT + DU$  eşitsizliğini Ptolemy uygulayarak açarsak

$$\begin{aligned}
BD > BT + DU &= \frac{BM + BN + DK + DL}{2\cos\left(\frac{180^\circ - (\beta + \theta)}{2}\right)} = \frac{BM + BN + DK + DL}{2\sin\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)} \\
\Rightarrow 2a \sin\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) &> \frac{BM + BN + DK + DL}{2\sin\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)} \\
\Rightarrow 4a \sin^2\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) &> BM + BN + DK + DL \\
\Rightarrow 4a \left(1 - \cos^2\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)\right) &> BM + BN + DK + DL \\
\Rightarrow 4a - (BM + BN + DK + DL) &> 4a \cos^2\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) \\
\Rightarrow AM + ML + CN + CK &> 2a \cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) 2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) \\
\Rightarrow AM + ML + CN + CK &> AC \cdot 2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right) \\
\Rightarrow AW + CZ &= \frac{AM + AL + CN + CK}{2\cos\left(\frac{\beta + \theta}{2}\right)} > AC \\
\Rightarrow (ALM) \text{ ile } (NCK) \text{ kesişir.} &\blacksquare
\end{aligned}$$

6 Her  $x, y \in \mathbb{R}$  için

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1$$

olacak şekilde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu tanımlanıyor. Her  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $|f(x) - g(x)| \leq 1$  ve  $g(x+y) = g(x) + g(y)$  olacak şekilde bir  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonun var olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

fonksiyonunun sorudaki şartları sağladığını iddia ediyoruz.

İlk olarak, her  $x$  gerçel sayısı için limitin var olduğunu göstermeliyiz. Daha sonra ise tüm  $x$  reel sayıları için  $|f(x) - g(x)| \leq 1$  olduğunu kanıtlamalıyız. Öncelikle  $f$  için verilen eşitsizlikte  $x = y = 2^m x_0$  yazdığımızda,  $|f(2^{m+1}x_0) - 2f(2^m x_0)| \leq 1$  eşitsizliğini elde ederiz. Her iki tarafı  $2^{m+1}$  ile böldüğümüzde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| \frac{f(2^{m+1}x_0)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x_0)}{2^m} \right| \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Sabit herhangi bir  $x$  için, sonsuz teleskopik toplamı düşünelim:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right).$$

Kısmi toplamların mutlak değerini incelersek, üçgen eşitsizliğinden,

$$\left| \sum_{m=0}^n \left( \frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right) \right| \leq \sum_{m=0}^n \left| \left( \frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right) \right| \leq \sum_{m=0}^n \frac{1}{2^{m+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$$

olacağından, sonsuz teleskopik toplam yakınsıyordur. Öte yandan, tanım gereği, bu sonsuz toplam şuna eşittir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right).$$

Limit içindeki teleskopik toplam,  $\left( \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \right) - f(x)$ 'e eşittir, bu da yukarıdaki limitin şu şekilde yazılmasını sağlar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x) \right).$$

Şimdi, sabit  $f(x)$  terimini limitin dışına çıkararak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \right) - f(x).$$

Bu son ifadedeki dizi yakınsaktır, ayrıca  $g(x)$ 'i tanımlamak için kullanmak istediğimiz limitin tam olarak kendisidir. Ayrıca yukarıda gördüğümüz gibi, bu son miktar en fazla 1'dir, bu nedenle şu eşitsizliği elde ederiz:

$$|g(x) - f(x)| \leq 1$$

Şimdi geriye her  $x, y$  için  $g(x+y) = g(x) + g(y)$  olduğunu göstermek kalıyor. Şu gözlemi yapalım:

$$\begin{aligned} g(x+y) - g(x) - g(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n y)}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)}{2^n}. \end{aligned}$$

Verilen şarttan dolayı,  $n$  için  $|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)| \leq 1$  olduğundan, bu ifadenin içindeki terim  $-\frac{1}{2^n}$  ile  $\frac{1}{2^n}$  arasında olacaktır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  olduğundan, sıkıştırma kuralından, yukarıdaki ifadedeki limitin 0 olduğu sonucuna varırız. Bu nedenle,  $g(x+y) = g(x) + g(y)$ 'dir.

**Kaynak:** Mathematical Olympiads 2000 – 2001: Problems and Solutions from Around the World, Syf. 144-145.

## 42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2001

- 1 2001 çocuktan her biri pozitif bir tam sayı tutuyor ve tuttuğu sayı ile kendi dışındaki 2000 çocuktan istediklerinin isimlerini defterine yazıyor. Defterler toplanıp, her çocuğa, defterine isimlerini yazmış olduğu çocukların tuttuğu sayıların toplamından, kendisini listelerine dahil etmiş olan çocukların tuttuğu sayıların toplamı çıkartılarak elde edilen yeni bir sayı veriliyor. Çocuklara verilen yeni sayıların hepsinin birden pozitif olup olamayacağını belirleyiniz.

### Çözüm 1:

Çocukları hücre olarak olarak düşünelim. Bir  $c_i$  çocuğu, defterine  $c_j$  çocuğunun ismini yazıyorsa,  $c_i$  den  $c_j$  ye yönlü bir bağ oluşturalım.  $c_k$  çocuğu da  $c_i$  yi defterinde yazmışsa,  $c_k$  dan  $c_i$  ye yönlü bir bağ oluşacak.  $c_i$  nin **puanı**, kendisinden çıkan bağların karşı taraflarındaki sayıların toplamından kendisine gelen bağların karşı taraflarındaki sayıların toplamı çıkarılarak bulunuyor.

Her hücrenin şu şekilde bölündüğünü varsayıyoruz. Bir çocuk  $n$  sayısını tutmuşsa, onun hücresi tutulan sayıların 1 olduğu  $n$  küçük hücreye bölünüyor. Başlangıçtaki çocuk hücresine gelen ve giden bağların,  $n$  kopyası oluşturulup, küçük hücrelere bağlanıyor. Bu küçük hücrelerin puanları, ata hücrenin puanı ile aynıdır. Çünkü, gelen bağlar ile giden bağlar, tamamen önceki ile aynı. Bu durumda  $n$  sayısının tutulduğu  $p$  puanlı bir hücre bölündüğünde, 1 sayısının tutulduğu  $p$  puanlı  $n$  adet hücre oluşuyor.

Diğer taraftan, bu bölünen hücreden habersiz hücrelerin puanlarında da bir değişiklik olmamıştır. Bölünen hücrenin  $c_i$  olduğunu,  $c_i$  nin  $c_j$  yi defterine yazdığını,  $c_k$  nin da  $c_i$  yi defterine yazdığını varsayalım.  $c_j$  nin puanı  $p_j$  hesaplanırken  $c_i$  nin tuttuğu sayı çıkarılıyordu. Şimdi  $c_i$  de tutulan sayı değil de  $c_i$  kadar 1 sayısı çıkarılacak. Sonuçta  $p_j$  değişmeyecek. Benzer durum  $p_k$  için de geçerli.  $p_k$  hesaplanırken,  $c_i$  de tutulan sayı toplanıyordu. Şimdi bu sayı değil de bu sayı kadar 1 toplanacağı için  $p_k$  da değişmeyecek. Demek ki, yukarıda anlatıldığı gibi bir bölünme işlemi sonucunda, diğer hücrelerdeki puanlar değişmiyor.

Tüm hücreler bölündüğü zaman, elimizde tutulan sayıların 1 olduğu bir sürü küçük hücre oluşacak. Bu hücrelerin puanları başlangıçtaki  $p_1, p_2, \dots, p_{2001}$  puanlarından farklı değil.

Her hücrede tutulan sayı 1 olduğu için, puan hesabının şöyle yapıldığı kabul edebiliriz: Bir hücrenin puanı, giden bağlarının sayısı ile gelen bağlarının sayısının farkıdır.

Bu durumda, bir hücrenin puanında (+) olarak hesaplanan giden bağ, karşıdaki hücrenin puanı hesaplanırken (-) olarak işleme tutulacağından, tüm puanların toplamı 0 dir. Bu durumda puanların hepsi birden pozitif olamaz.

### Çözüm 2:

$a_i$  ile  $i$  nolu çocuğun tuttuğu sayıyı gösterelim.

$p_i$  ile  $i$  nolu çocuğa verilen sayıyı gösterelim. Bu sayıya  $i$  nolu çocuğun puanı diyelim.

Soruda, bizden  $p_i$  lerden en az birinin pozitif olmayacağını göstermemiz isteniyor.

$q_i = a_i p_i$  ile de  $i$  nolu çocuğun ağırlıklı puanını gösterelim.  $a_i$  pozitif olduğu için  $q_i$  ile  $p_i$  nin işareti aynı olacaktır.

$i$  nolu çocuğun  $j$  nolu çocuğu defterine yazdığını düşünelim.

$q_i = a_i ((\dots + a_j + \dots) - (\dots))$  ve  $q_j = a_j ((\dots) - (\dots + a_i + \dots))$  olacağı için  $\sum_{i=0} q_i = 0$  olacaktır.

Bu durumda en az bir  $q_i$  pozitif değildir. Dolayısıyla en az bir  $p_i$  pozitif değildir.

- 2  $O$  merkezli birim çemberin  $AB$  çapına,  $|OT| > 1$  olacak şekilde seçilen bir  $T$  noktasında teğet olan bir çember, birim çemberi  $C$  ve  $D$  ile gösterilen farklı iki noktada kesiyor.  $O$ ,  $D$  ve  $C$  noktalarından geçen çemberin  $AB$  doğrusunu  $O$  dışında kestiği nokta  $P$  olmak üzere,

$$|PA| \cdot |PB| = \frac{|PT|^2}{|OT|^2}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1:**

(*CDT*) çemberinin merkezi  $Q$  olsun.  $OQ$  doğrusu (*OCD*) çemberini  $R$  de kessin.  $OR$ , (*OCD*) çemberinin çapıdır. Bu durumda  $RP \perp AB$  dir.

$O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  ve  $Q(a, r)$  olsun.

$(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$  ve  $(Q, r) : (x - a)^2 + (y - r)^2 = r^2$  olacaktır.

$C(x_1, y_1)$  noktası  $x_1^2 + y_1^2 = 1$  ve  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - r)^2 = r^2$  denklemlerini sağlar.

$x_1^2 + a^2 - 2ax_1 + y_1^2 + r^2 - 2y_1r = r^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 2ax_1 + 2ry_1$ .

$OC \perp RC$  olduğu için  $RC$  nin eğimi  $m = -\frac{x_1}{y_1}$  ve  $RC$  doğrusunun denklemi  $y = -\frac{x_1}{y_1}x + k$  olur.

$C(x_1, y_1)$  noktasını denklemde yerine yazarsak;  $k = y_1 + \frac{x_1}{y_1} \cdot x_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1} = \frac{1}{y_1}$ .

Öyleyse  $RC : y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{1}{y_1}$ .

$OQ : y = \frac{r}{a} \cdot x$

$OQ \cap RC = \{R\} \Rightarrow \frac{1}{y_1} = x \left( \frac{r}{a} + \frac{x_1}{y_1} \right)$

$\Rightarrow a = (ry_1 + ax_1)x \Rightarrow \frac{2a}{a^2 + 1} = x$ .

Bulduğumuz  $x$  değeri  $R$  noktasının apsisi, yani  $OP = \frac{2a}{a^2 + 1}$ .

$PA \cdot PB = \left(1 - \frac{2a}{a^2 + 1}\right) \left(1 + \frac{2a}{a^2 + 1}\right) = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a^2 + 1)^2}$

Diğer taraftan  $\frac{PT}{OT} = \frac{a - \frac{2a}{a^2 + 1}}{a} = 1 - \frac{2}{a^2 + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a^2 + 1}$  ■

**Çözüm 2:**

$CD$  ile  $AB$  doğruları  $S$  de kesişsin.

$S$  noktasının çemberlere göre kuvvetini yazarsak

$$ST^2 = SC \cdot SD = SP \cdot SO = SA \cdot SB \quad (1)$$

elde ederiz.

Noktaların  $AB$  doğrusu üzerindeki dizilişini  $B, O, P, A, S, T$  şeklinde kabul edip  $BO = OA = r = 1$ ,  $OP = x$ ,  $ST = y$  ve  $OT = d$  diyelim.

$SP = d - y - x$ ,  $SO = d - y$ ,  $SA = d - y - r$ ,  $SB = d - y + r$  olacaktır. (1) de yerine yazarsak

$$y^2 = (d - y - x)(d - y) = (d - y - r)(d - y + r) \quad (2)$$

elde ederiz.

Biraz düzenlemeyle  $y^2 = (d - y)^2 - x(d - y) = (d - y)^2 - r^2$  elde ederiz.

Buradan  $x = \frac{r^2}{d - y}$  ve  $y = \frac{d^2 - r^2}{2d}$  elde edilir.  $y$  yi yok edersek  $x = \frac{2dr^2}{d^2 + r^2}$  elde ederiz.

Bizden istenen  $PA \cdot PB = \frac{PT^2}{OT^2}$  olduğunu göstermemiz. Aslında bizden  $\frac{PA \cdot PB}{r^2} = \frac{PT^2}{OT^2}$  olduğunu göstermemiz isteniyor.

Tabii şu aşamada bu bir iddia.

$PA \cdot PB = r^2 - OP^2 = r^2 - x^2$  dir.  $PT = d - x$  olduğu için

$\frac{r^2 - x^2}{r^2} \stackrel{?}{=} \frac{(d-x)^2}{d^2}$  eşitliğini göstereceğiz.

$$\frac{r^2 - x^2}{r^2} = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \left(1 + \frac{x}{r}\right)$$

$$\frac{(d-x)^2}{d^2} = \left(1 - \frac{x}{d}\right)^2$$

$\frac{x}{r} = \frac{2dr}{d^2 + r^2}$  ve  $\frac{x}{d} = \frac{2r^2}{d^2 + r^2}$  değerlerini yerine yazarsak

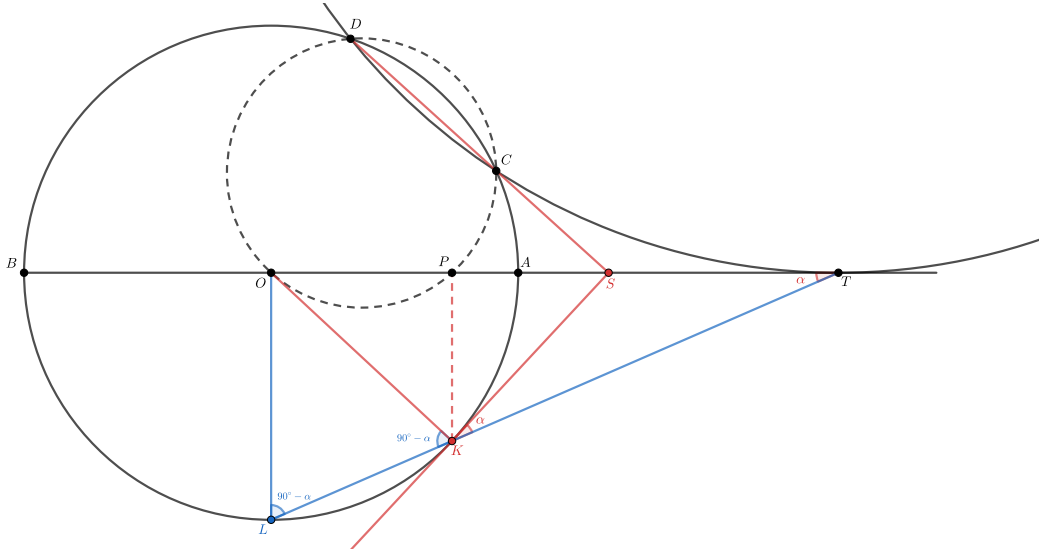
$$\frac{r^2 - x^2}{r^2} = \left(1 - \frac{2dr}{d^2 + r^2}\right) \left(1 + \frac{2dr}{d^2 + r^2}\right) = \frac{(d-r)^2(d+r)^2}{(d^2 + r^2)^2} = \left(\frac{d^2 - r^2}{d^2 + r^2}\right)^2$$

$\frac{(d-x)^2}{d^2} = \left(1 - \frac{2r^2}{d^2 + r^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2 - r^2}{d^2 + r^2}\right)^2$  elde ederiz. Bu da iddiamızın doğru olduğu anlamına gelir.

### Çözüm 3:

$CD$  ile  $AB$  doğruları  $S$  noktasında kesişsin.  $ST^2 = SD \cdot SC$ .

$S$  den  $AB$  çaplı çembere çizilen teğet çembere  $K$  da dokunsun. (Çizim kolaylığı açısından  $K$  ile  $C$  noktaları  $AB$  doğrusunun farklı taraflarında olsun.)  $SK^2 = SD \cdot SC$ .



$S$  noktasının  $(O, C, D, P)$  çemberine göre kuvvetinden  $SP \cdot SO = SD \cdot SC = SK^2$  olduğu ve  $\angle OKS = 90^\circ$  olduğu için  $KP \perp OS$  dir.

$TK$  doğrusu ile  $AB$  çaplı çember ikinci kez  $L$  noktasında kesişsin.

$SK = ST$  olduğu için  $\angle STK = \angle SKT$ .

$\angle OLK = \angle OKL = 180^\circ - (90^\circ + \angle SKT) = 90^\circ - \angle SKT$  olduğu için  $LO \perp OT$ .

Bu durumda  $PK \parallel OL$  olur. Benzerlikten  $\frac{PK}{OL} = \frac{PT}{OT}$  olacaktır.

$AB$  çaplı çemberde kuvvetten  $PK^2 = PA \cdot PB$  olduğu için  $\frac{PA \cdot PB}{OL^2} = \frac{PT^2}{OT^2}$  olacaktır.

$OL = 1$  olduğu için ispat biter.

**3** Tüm  $x, y, z$  tam sayıları için,

$$S(x, y, z) = (xy - xz, yz - yx, zx - zy)$$

olsun.  $a, b$  ve  $c, abc > 1$  koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere,  $0 < k \leq abc$  ve her  $n \geq n_0$  tam sayısı için

$$S^{n+k}(a, b, c) \equiv S^n(a, b, c) \pmod{abc}$$

koşullarını sağlayan  $n_0$  ve  $k$  tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

$$(S^1 = S \text{ ve her } m \geq 1 \text{ tam sayısı için, } S^{m+1} = S \circ S^m)$$

$$((u_1, u_2, u_3) \equiv (v_1, v_2, v_3) \pmod{M}) \iff u_i \equiv v_i \pmod{M} (i = 1, 2, 3).$$

### Çözüm:

Soruda sorulan aslında, belirli bir  $i = n_0$  değerinden sonra  $S^i$  dizisinin periyodik olduğu ve bu  $k$  periyodunun  $abc$  den çok olmadığı.

$S^{n_0} = (0, 0, 0) \pmod{abc}$  olursa, her  $k \geq 1$  için  $S^{n_0+k} = (0, 0, 0)$  olacağı için  $n_0$  ve  $k$  sayıları bulunuyor.

Hiçbir  $n_0$  değeri için  $S^{n_0} = (0, 0, 0)$  olmadığını varsayalım.

Bu durumda,  $S$  nin alabileceği  $(abc)^3 - 1$  farklı değer vardır.

$S, S^2, \dots, S^{(abc)^3}$  dizisinden  $S^i \equiv S^j$  olacak şekilde iki eleman bulunabilir.  $|i - j| \leq a^3 b^3 c^3$  dir.  $S^i \equiv S^j$  ise her  $k \geq 0$  için  $S^{i+k} \equiv S^{j+k}$  dir. Bu durumda  $S$  nin periyodu için  $0 < k \leq a^3 b^3 c^3$  eşitsizliği sağlanır.

Aslında eşitsizliği daha da daraltabiliriz.

$S^1 = (ab - ac, bc - ba, ca - cb)$  olduğunu biliyoruz.  $S^0 = (a, b, c)$  olarak tanımlayalım.

$S^0 = (a, b, c)$  ise her  $S^i$  üçlüsünün ilki  $a$ 'nın bir katıdır; çünkü  $S^1 = (ab - ac, bc - ba, ca - cb)$  (İlk parametre  $a$  ile bölüldüğü için bundan sonra  $S^i$  nin de ilk parametresi yine  $a$  ile bölünecek).

Aynı şey ikinci ve üçüncü parametreler için de geçerli.

$\text{mod } abc$  de, ilk parametreyi seçmek için  $bc$  seçenek var. Bu durumda değer kümemiz en fazla  $bc \cdot ac \cdot ab = a^2 b^2 c^2$  elemanlı olacaktır.

Aslında daha iyisini yapabiliriz.

$S$  üçlüsünün parametreleri toplamı  $ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0$  olduğu için,  $S$  nin ilk iki parametresini seçtiğimizde üçüncü parametre otomatik olarak  $-a - b \pmod{abc}$  ye denk olacaktır.

Öyleyse, değer kümesi en fazla  $bc \cdot ac = abc \cdot c$  elemanlı olacaktır. Aslında, bu değer  $abc \cdot \min(a, b, c)$ . Bu çirkin min den kurtulabilir miyiz?

Daha iyisi de var.

İlk parametre  $a$  nın bir katı, ikincisi  $b$  nin bir katı, üçüncüsü de  $c$  nin bir katı ve toplamı 0; ama az önce biz daha fazlasını saydık. Her  $(a, b)$  çifti için,  $c$  değerini  $a + b + c \equiv 0 \pmod{abc}$  denkliği ile bulduk; ama üçüncü parametre her zaman  $c$  nin bir katı olmadı.

### İddia:

$\text{obeb}(a, b, c) = 1$ ,  $0 \leq x < rbc$  ve  $0 \leq y < rac$  olmak üzere;  $ax + by \equiv 0 \pmod{c}$  denkleğinin  $r^2 abc$  tane çözümü vardır.

### İspat:

$\text{obeb}(b, c) = d$  olsun. Tanım gereği,  $\text{obeb}(a, d) = 1$ .

$x = 0$  olsun.

$$by \equiv 0 \pmod{c} \Rightarrow d \cdot \frac{b}{d} \cdot y \equiv 0 \pmod{c}.$$

$$\Rightarrow \frac{b}{d} \cdot y \equiv 0 \pmod{\frac{c}{d}} \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{\frac{c}{d}}.$$

Öyleyse,  $x = 0$  için  $y$  lerin sayısı  $\frac{rac}{\frac{c}{d}} = rad$  dir.

$ax + by \equiv 0 \pmod{d}$  ve  $b \equiv 0 \pmod{d}$  olduğu için,  $ax \equiv 0 \pmod{d}$  dir. Ayrıca  $\text{obeb}(a, d) = 1$ ,  $x \equiv 0 \pmod{d}$ .

$x$  lerin sayısı da  $\frac{rbc}{d}$ .

Bu durumda  $(x, y)$  sıralı tam sayı ikililerinin sayısı,  $\frac{rbc}{d} \cdot rad = r^2 abc$  olacaktır. ■

Soruya geri dönelim.  $\text{obeb}(a, b, c) = r$  ve  $a = r\alpha$ ,  $b = r\beta$ ,  $c = r\theta$ . Yani  $\text{obeb}(\alpha, \beta, \theta) = 1$  olsun.

$$S^0 = (a, b, c) \Rightarrow S^1 = (r\alpha r\beta - r\alpha r\theta, r\beta r\theta - r\beta r\alpha, r\theta r\alpha - r\theta r\beta).$$

$abc = r^3\alpha\beta\theta$  ve ilk parametre her zaman  $r^2\alpha$  nin bir katı olacağı için, ilk parametreyi seçmenin  $\frac{r^3\alpha\beta\theta}{r^2\alpha} = r\beta\theta$  yolu vardır.

Yukarıdaki iddiayı kullanırsak,

$\text{obeb}(\alpha, \beta, \theta) = 1$ ,  $0 \leq x < r\beta\theta$ , ve  $0 \leq y < r\alpha\theta$  olacaktır. Bu durumda  $r^2\alpha\beta\theta$  adet çözümümüz vardır.  $r^2\alpha\beta\theta \leq r^3\alpha\beta\theta = abc$ .

Sonuç olarak,  $S^i$  dizisi, en fazla  $abc$  farklı değer alabilir. ■

4  $5^x = 1 + 4y + y^4$  eşitliğini sağlayan tüm  $(x, y)$  sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

### Çözüm:

$y$  tek olursa sağ taraf çift olur bu imkansız.

$y$  çift olmalı. o zaman sağ taraf 8'e bölününce 1 kalanını verir ki sol taraf da aynı kalanı vermeli  $x$  çift olmalı. sol taraf tamkare olur.

Sağ taraftaki ifadeyi tamkare olmasına göre inceleyelim.

(i)  $y \geq 0$  ise

$$(y^2 + 2)^2 > y^4 + 4y + 1 > (y^2)^2$$

$$y^4 + 4y + 1 = (y^2 + 1)^2 \text{ olmalı.}$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y = 0, y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow y^4 + 4y + 1 = 1 = 5^x$$

$$x = 0 \text{ olur.}$$

$$y = 2 \Rightarrow y^4 + 4y + 1 = 25 = 5^x$$

$$x = 2 \text{ olur.}$$

Buradan  $(x, y) = (0, 0)$  ve  $(x, y) = (2, 2)$  bulunur.

(ii)  $y < 0$  ise  $a > 0$  olmak üzere  $a = -y$  diyelim.

$$y^4 + 4y + 1 = a^4 - 4a + 1$$

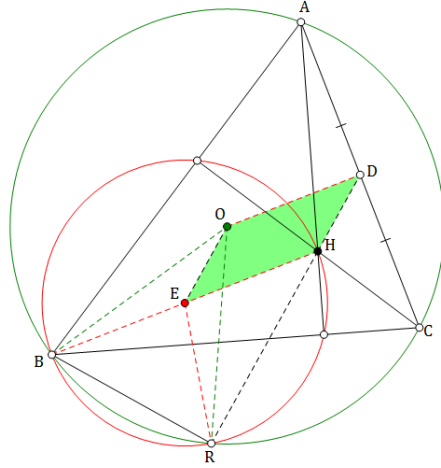
$a = 1, 2$  için çözüm gelmez  $a > 2$  alabiliriz.

$$(a^2 + 1)^2 > a^4 - 4a + 1 > (a^2 - 1)^2$$

$$a^4 - 4a + 1 = (a^2)^2 = a^4 \text{ olur. Buradan } a \text{ tamsayı olmaz çözüm gelmez.}$$

Tüm çözümler  $(x, y) = (0, 0)$  ve  $(x, y) = (2, 2)$  olur.

5 Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin yüksekliklerinin kesişim noktası  $H$ ,  $[AC]$  kenarının orta noktası da  $D$  olsun.  $DH$  doğrusunun,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $[BH]$  çaplı çemberin bir kesişim noktasından geçtiğini gösteriniz.

**Çözüm:**

$BH$  çaplı çemberin merkezi  $E$  ve  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kez kestiği noktaya da  $R$  diyelim.

Euler bağıntısından  $|OD| = \frac{BH}{2}$  olduğunu biliyoruz.

$OD \parallel BH$  olduğundan,  $ODHE$  paralelkenardır. O halde  $OE \parallel DH$  dir.

$O$  ve  $E$  çemberlerin merkezi olduğundan,  $|OB| = |OR|$  ve  $|EB| = |ER|$  eşitlikleri vardır. Buna göre  $OE \perp BR$  ve  $BH$  çap olduğundan  $HR \perp BR$  dir. Buradan da  $OE \parallel HR$  olduğunu görüyoruz.  $OE$  doğrusuna  $H$  noktasından çizilen paralel doğrular çakışiktır. O halde  $D, H, R$  doğrusal noktalardır.

6 Her  $x$  gerçel sayısı için,

$$f(x - f(x)) = \frac{x}{2}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

**Çözüm:**

$g(x) = x - f(x)$  olsun.  $f(g(x)) = \frac{x}{2}$  ve  $f$  sürekli olduğu için  $g$  de sürekli dir.

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(x) - \frac{x}{2}$$

$g(a) = g(b) = k$  ise  $g^2(a) = g^2(b) = g(k)$  ve

$$g^2(a) = g(a) - \frac{a}{2} = k - \frac{a}{2}$$

$$g^2(b) = g(b) - \frac{b}{2} = k - \frac{b}{2}$$

olacağı için  $a = b$ , yani  $g$  bire-birdir.  $g$  aynı zamanda sürekli olduğu için,  $g$  ya artandır ya da azalandır.

$$\begin{aligned} g^3(x) &= g^2(x) - \frac{g(x)}{2} \\ g^4(x) &= g^3(x) - \frac{g^2(x)}{2} \\ &= g^2(x) - \frac{g(x)}{2} - \frac{g^2(x)}{2} \\ &= \frac{g^2(x) - g(x)}{4} = \frac{-x}{4} \end{aligned}$$

$g$  artan olsun.

$$\begin{aligned} 4 &> 0 \\ g(4) &> g(0) \\ g^2(4) &> g^2(0) \\ g^4(4) &> g^4(0) \\ \frac{-4}{4} &\not> \frac{0}{4} \end{aligned}$$

Bu durumda  $g$  azalandır.

$$\begin{aligned} 4 &> 0 \\ g(4) &< g(0) \\ g^2(4) &> g^2(0) \\ g(4) - \frac{4}{2} &> g(0) - \frac{0}{2} \\ g(4) &> g(0) + 2 > g(0) \end{aligned}$$

olduğu için  $g$  azalan olamaz. Bu durumda sürekli  $g$  fonksiyonu bulunmaz. Dolayısıyla da  $f$  fonksiyonu bulunmaz.

### 43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2002

- 1  $a$  ve  $b$  farklı tam sayılar olmak üzere,  $ab(a+b)$  sayısı  $a^2 + ab + b^2$  ile bölünüyorsa,

$$|a - b| > \sqrt[3]{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

#### Çözüm:

Öncelikle  $a$  ve  $b$ 'nin işaretleri aynı değilse

$$|a - b| > 0 \geq \sqrt[3]{ab}$$

olacağından ispatlanacak bir şey yoktur. İşaretleri aynıyla  $(a, b)$  yerine  $(-a, -b)$  yazarsak da bölünebilme sağlanmaya devam edeceğinden  $a, b > 0$  kabul edebiliriz. Genelliği bozmadan  $b > a$  olsun.  $k > 0$  için  $b = a + k$  yazarsak,

$$\frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a(a+k)(2a+k)}{3a^2 + 3ak + k^2} \in \mathbb{Z}$$

olmalıdır.  $(a, k) = d$  diyelim.  $a = du$  ve  $k = dv$  olacak şekilde aralarında asal  $u, v$  pozitif tamsayıları vardır. Bu durumda

$$\frac{du(2u^2 + 3uv + v^2)}{3u^2 + 3uv + v^2} \in \mathbb{Z}$$

olacaktır.

$$(u, 3u^2 + 3uv + v^2) = (u, v^2) = 1$$

$$(2u^2 + 3uv + v^2, 3u^2 + 3uv + v^2) = (u^2, 3u^2 + 3uv + v^2) = 1$$

olacağından  $3u^2 + 3uv + v^2 \mid d$  olmalıdır. Eğer  $m$  pozitif tamsayısı için  $d = (3u^2 + 3uv + v^2)m$  yazarsak,

$$(a, b) = (u(3u^2 + 3uv + v^2)m, (u+v)(3u^2 + 3uv + v^2)m)$$

olur. İspatlamamız gereken eşitsizlik de

$$\begin{aligned} |a - b|^3 > ab &\iff v^3(3u^2 + 3uv + v^2)^3 m^3 > u(u+v)(3u^2 + 3uv + v^2)^2 m^2 \\ &\iff v^3(3u^2 + 3uv + v^2)m > u(u+v) \end{aligned}$$

olacaktır.  $u, v, m$  pozitif tamsayı olduğundan,

$$v^3(3u^2 + 3uv + v^2)m \geq (3u^2 + 3uv + v^2) > 3u(u+v) > u(u+v)$$

olur. Eşitsizlik doğrudur.

- 2 Bir  $ABC$  üçgeninde  $\widehat{ABC}$  nin açıortayı  $[AC]$  yi  $D$  de;  $\widehat{BCA}$  nın açıortayı  $[AB]$  yi  $E$  de kesiyor.  $BD$  ve  $CE$  doğrularının kesişim noktası  $X$  olmak üzere,  $|BX| = \sqrt{3}|XD|$  ve  $|XE| = (\sqrt{3} - 1)|XC|$  dir.  $ABC$  üçgenin iç açılarının ölçülerini bulunuz.

#### Çözüm:

İç merkezin açıortayı bölme oranından

$$\frac{|BX|}{|XD|} = \frac{a+c}{b} = \sqrt{3}$$

$$\frac{|CX|}{|XE|} = \frac{a+b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

Yazılan iki denklemi birbirine eşitlersek

$$b = c \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Denklemlerden tekrar faydalanıp  $a = \frac{c}{2}$  elde edilir.

Buna göre ABC üçgeninin kenarlarının oramı  $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$  dir.

Bu oranlar  $\angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ$  olan üçgene aittir.

- 3  $a_1, \dots, a_n$  gerçel sayıları ile  $n$  pozitif tam sayısı verildiğinde,

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^n a_i \right| \leq |a_k|$$

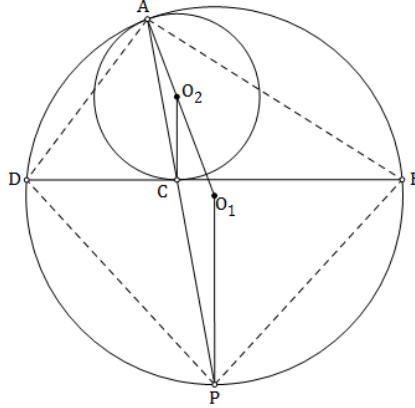
olacak biçimde  $m$  ve  $k$  pozitif tam sayıları bulunduğunu gösteriniz.

- 4 Tüm gerçel sayılar üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun en az iki simetri merkezi varsa, bu fonksiyonun bir doğrusal fonksiyon ile bir periyodik fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

[Her  $x$  gerçel sayısı için  $f(a-x) + f(a+x) = 2f(a)$  olacak biçimde bir  $a$  gerçel sayısı varsa,  $(a, f(a))$  noktasına  $f$  fonksiyonunun bir simetri merkezi denir.]

- 5 Bir  $A$  noktasında içten teğet iki çemberden küçük olanı üzerinde  $A$  dan farklı bir  $C$  noktası almıyor. Büyük çember, küçük çembere  $C$  den çizilen teğeti  $D$  ve  $E$  noktalarında;  $AC$  doğrusunu da  $A$  ve  $P$  noktalarında kesiyor.  $PE$  doğrusunun  $A, C$  ve  $E$  den geçen çembere teğet olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**



Çemberlerin merkezleri dıştan içe doğru  $O_1$  ve  $O_2$  olsun.  $A$  teğet noktası olduğundan,  $O_1 - O_2 - A$  noktaları doğrusaldır.

$|O_2A| = |O_2C|$  ve  $|O_1A| = |O_1P|$  olduğundan  $O_2C \parallel O_1P$  dir.

Buna göre,  $O_2C \perp DE$  olduğundan  $O_1P \perp DE$  olup bu  $|PD| = |PE|$  olduğu anlamına gelir.

O halde ,  $\angle PAE = \angle PED$  dir.

- 6  $n > 1$  olmak üzere, uzayda, herhangi dördü düzlemdeş olmayan  $2n + 1$  noktayı birbirlerine birleştiren doğru parçalarını kırmızı, beyaz ya da maviye boyuyoruz. Bu nokta kümesinin bir  $M$  altkümesine, eğer her  $a, b \in M$  için  $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l$  doğru parçaları aynı renkte olacak biçimde,  $M$  ye ait  $a = x_0, x_1, \dots, x_l = b$  noktaları varsa, bir tek-renk bağlantılı altküme diyoruz. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, mutlaka  $k$  elemanlı tek-renk bağlantılı bir altküme oluşuyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri bulunuz. ( $l > 1$ )

## 44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2003

- 1  $M = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ ve } abcd > 1\}$  olsun. Her  $n \in \{1, 2, \dots, 254\}$  için

$$|a_{n+1} - a_n| + |b_{n+1} - b_n| + |c_{n+1} - c_n| + |d_{n+1} - d_n| = 1$$

koşulunu sağlayan ve içinde  $M$  ye ait her elemanın tam olarak bir kez geçtiği bir  $(a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), \dots, (a_{255}, b_{255}, c_{255}, d_{255})$  dizisinde  $c_1 = d_1 = 1$  ise,  $(a_1, b_1)$  ikilisinin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

- 2 Köşegenleri  $K$  noktasında kesişen konveks bir  $ABCD$  dörtgeninde  $L \in [AD], M \in [AC], N \in [BC]$  noktaları,  $KL \parallel AB, LM \parallel DC, MN \parallel AB$  koşullarını sağlıyorsa,

$$\frac{\text{Alan}(KLMN)}{\text{Alan}(ABCD)} < \frac{8}{27}$$

olduğunu gösteriniz.

- 3 Bütün terimleri doğal sayıların 1 den büyük kuvvetleri olan

- (a) 2003 terimli  
(b) sonsuz

bir aritmetik dizi var mıdır?

### Çözüm:

a) Evet, böyle bir aritmetik dizi vardır. Bunun için öncelikle 3 terimli bir dizi oluşturalım, 2 terim için (8, 9) örnektir. (1, 2, 3) dizisiyle başlayıp, her terimi  $k$  ile çarparsak yine bir aritmetik dizi elde ederiz. Dolayısıyla  $k, 2k$  ve  $3k$ 'nin üçünün birden doğal sayıların bir kuvveti olmasını sağlamalıyız.  $k = 2^a \cdot 3^b$  dersek,  $(a, b)$ ,  $(a+1, b)$  ve  $(a, b+1)$ 'nin üçünün birden 1'den büyük olması gerekir.  $a = 20, b = 24$  seçersek,

$$k = 2^{20} \cdot 3^{24} = (2^5 \cdot 3^6)^4$$

$$2k = 2^{21} \cdot 3^{24} = (2^7 \cdot 3^8)^3$$

$$3k = 2^{20} \cdot 3^{25} = (2^4 \cdot 3^5)^5$$

olacağından 3 elemanlı bir dizi bulmuş oluruz. Şimdi tümevarımla bu şartı sağlayan  $n$  elemanlı bir dizi varsa  $n+1$  elemanlı da olduğunu gösterelim.

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bu şartı sağlasın.  $i = 1, 2, \dots, n$  için öyle  $t_i, b_i > 1$  tamsayıları vardır ki  $a_i = t_i^{b_i}$ 'dir.  $B = b_1 b_2 \cdots b_n$  için tüm terimleri  $k^B$  gibi bir sayı ile çarparsak dizinin özelliği bozulmaz. Çarpmadan önceki aritmetik dizinin sonraki terimi  $a_{n+1}$  ise  $a_{n+1} k^B$ 'yi bir doğal sayının 1'den büyük kuvveti haline getirmeliyiz.  $a_{n+1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$  şeklinde asal çarpanlarına ayrılсын ( $p_i$ 'ler farklı).  $k$ 'yi da  $p_i$  asallarından oluşacak şekilde seçmeliyiz. Örneğin,  $k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$  seçersek,

$$(\alpha_1 + B\beta_1, \alpha_2 + B\beta_2, \dots, \alpha_m + B\beta_m) > 1$$

olursa  $a_{n+1} k^B$  de bir doğal sayının 1'den büyük kuvveti olur.  $\alpha_i$ 'ler ve  $B$  ile aralarında asal bir  $q$  asalı seçelim ve

$$\alpha_i + B\beta_i \equiv 0 \pmod{q} \iff \beta_i \equiv -\alpha_i B^{-1} \pmod{q}$$

olarak  $\beta_i$ 'leri seçelim. Bu durumda  $a_{n+1} k^B$  sayısı da bir doğal sayının  $q$ . kuvveti olur ve böylelikle, istenilen şartları sağlayan  $n+1$  terimli bir aritmetik dizi elde etmiş oluruz. Tümevarımdan herhangi bir  $n$  pozitif tamsayısı için  $n$  elemanlı ve her elemanı bir doğal sayının 1'den büyük kuvveti olan bir aritmetik dizi vardır.

b) Hayır, yoktur. Aksini varsayalım ve  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  aritmetik dizisinin her elemanı bir doğal sayının 1'den büyük bir kuvveti olsun. Dizinin ortak farkına  $d$  dersek, dizinin her terimi  $a_1 + nd$  formatındadır. Eğer  $(a_1, d) = c$  ise  $a_1 = cu$  ve  $d = cv$  olacak şekilde aralarında asal  $u, v$  pozitif tamsayıları vardır. Bu durumda dizinin her

elemanı  $c(u + nv)$  formatındadır.  $(u, v) = 1$  olduğundan  $(u + nv)$  formatında sonsuz asal sayı vardır. Bu Dirichlet'in aritmetik dizilerdeki asallar teoremi olarak da bilinir.  $c$  sayısı bu asalların hepsini içermeyeceğinden dolayı en az bir  $u + nv$  formatındaki  $p$  asal sayısı için  $(c, p) = 1$  olacaktır.  $p$ 'yi elde etmemizi sağlayan  $n$  değeri için

$$a_{n+1} = a_1 + nd = c(u + nv) = cp$$

sayısı  $p$ 'ye bölünüp,  $p^2$ 'ye bölünmediğinden hiçbir doğal sayının birden büyük bir kuvveti olamaz. Bu bir çelişkidir, böyle bir dizi yoktur.

4  $(x^2 + y^2)^2 + 2tx(x^2 + y^2) = t^2y^2$  denkleminin  $x, y$  pozitif tam sayılar olmak üzere bir çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük  $t$

(a) pozitif gerçel sayısını

(b) pozitif tam sayısını

bulunuz.

### Çözüm:

İfadeyi tek tarafta toplayıp  $t$ 'ye bağlı bir denklem elde edelim.

$$t^2y^2 - 2tx(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0 \implies t_{1,2} = \frac{x(x^2 + y^2) \pm (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{y^2}$$

olur.  $t$ 'yi iki şıkta da pozitif istediği için pozitif kabul edebiliriz. Bu durumda  $\sqrt{x^2 + y^2} > x$  olduğundan tek çözüm

$$t = \frac{(x^2 + y^2)(x + \sqrt{x^2 + y^2})}{y^2}$$

olmalıdır.

a)  $t$  üzerinde tamsayı olma gibi bir koşul olmadığından sadece ifadeyi küçültmemiz gerekmektedir. İfade  $x$ 'e göre artan olduğundan, en küçük değerini  $x = 1$  iken alacaktır. Dolayısıyla en küçük  $t$  değeri için

$$t = \frac{(1 + y^2)(1 + \sqrt{1 + y^2})}{y^2}$$

olmalıdır.  $y^2 = a$  diyelim.  $f : [1, \infty)$  ve  $f(a) = \frac{(1+a)(1+\sqrt{1+a})}{a}$ , nin en küçük değerini arayalım.

$$f'(a) = \frac{a\sqrt{a+1} - 2(\sqrt{a+1} + 1)}{2a^2}$$

olur.  $f'(a) = 0$  olması için

$$a\sqrt{a+1} - 2(\sqrt{a+1} + 1) = 0 \implies a = 3$$

olmalıdır. Bu noktada  $f$ 'in lokal minimum olduğu görülebilir. Yani

$$t = \frac{(1 + y^2)(1 + \sqrt{1 + y^2})}{y^2}$$

ifadesinin en küçük değeri  $y = 1$  veya  $y = \sqrt{3}$  etrafında elde edilir çünkü  $y = \sqrt{3}$  olamaz ama ifade bu değere yaklaştıkça küçülecektir. Dolayısıyla sadece  $y = 1, 2$  durumlarını denemeliyiz.  $y = 2$  için daha küçük olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla  $t$ 'nin alabileceği en küçük değer  $x = 1$  ve  $y = 2$  için

$$t_{\min} = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{4}$$

elde edilir.

b) Bu kısımda  $t$  tamsayı olacağından  $\sqrt{x^2 + y^2}$  de tamsayı olmalıdır.  $(x, y) = d$  için  $x = du$  ve  $y = dv$  yazarsak,  $u^2 + v^2$  hala tamkare olacaktır ve

$$t = \frac{d(u^2 + v^2)(u + \sqrt{u^2 + v^2})}{v^2}$$

elde edilir.  $(u, v) = (m^2 - n^2, 2mn)$  veya  $(2mn, m^2 - n^2)$  formatında olmalıdır ( $m$  ve  $n$  aralarında asal, birisi çift sayı.)

$(u, v) = (m^2 - n^2, 2mn)$  ise

$$t = \frac{d(m^2 + n^2)^2}{2n^2}$$

elde edilir.  $m^2 + n^2$  tek sayı olduğundan  $(m^2 + n^2)^2$  ve  $2n^2$  aralarında asaldır ve  $d = 2n^2k$  formatında olmalıdır. En küçük durum için  $k = 1$  seçersek,

$$(x, y, t) = (2n^2(m^2 - n^2), 4mn^3, (m^2 + n^2)^2)$$

elde edilir. Bu durumda en küçük  $t$  tamsayısı  $(m, n) = (2, 1)$  için 25 olacaktır.

$(u, v) = (2mn, m^2 - n^2)$  ise

$$t = \frac{d(m^2 + n^2)^2}{(m - n)^2}$$

olur.  $((m - n)^2, m^2 + n^2) = (2mn, m^2 + n^2) = 1$  olduğundan  $(m - n)^2 \mid d$  olmalıdır. En küçük değer için de  $d = (m - n)^2$  seçmeliyiz. Buradan da

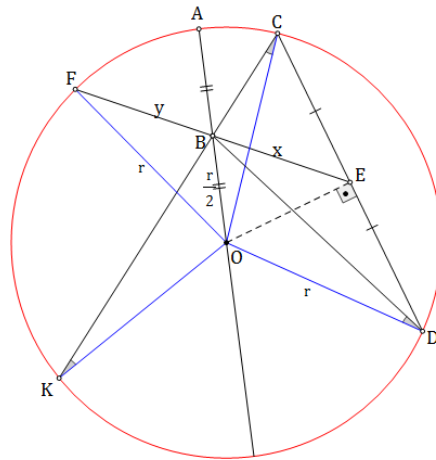
$$(x, y, t) = (2mn(m - n)^2, (m^2 - n^2)(m - n)^2, (m^2 + n^2)^2)$$

elde edilir. En küçük  $t$  için yine  $(m, n) = (2, 1)$  seçmeliyiz. Buradan da  $t$ 'nin en küçük değeri 25 elde edilir.

Sonuç olarak  $t$  tamsayı ise  $\boxed{t_{\min} = 25}$  olacaktır.

- 5)  $A, O$  merkezli bir çemberin üstünde bir nokta ve  $B$  de  $[OA]$  nın orta noktası olsun.  $C$  ve  $D$ , çember üstünde ve  $OA$  doğrusunun aynı tarafında,  $\widehat{CBO} = \widehat{DBA}$  koşulunu sağlayan noktalar olmak üzere,  $[CD]$  nin orta noktasının  $B$  ye göre simetrisinin yine çember üstünde olduğunu gösteriniz.

### Çözüm 1:



$[CB$  nin uzantısı çemberi  $K$  da kessin.  $\angle KBO = \angle DBO$  olduğundan,  $|BK| = |BD|$  dir. Buna göre;  $OBK$  üçgeni ile  $OB D$  eş üçgenler ve  $\angle BKO = \angle BDO$  dir.  $|OK| = |OC|$  den  $\angle BKO = \angle BCO$  olup  $OBCD$  dörtgeninde  $\angle BCO = \angle BDO$  açı ilişkisinden dolayı  $OBCD$  bir kirişler dörtgenidir.

Bu dörtgende Ptolemy teoremini uygulayalım.

$$|BC| \cdot r + |CD| \cdot \frac{r}{2} = |BD| \cdot r \Rightarrow |DE| = |BD| - |BC| \quad (1)$$

bulunur.

$BCD$  üçgeninde kenarortay teoremini uygulayalım.

$$|BC|^2 + |BD|^2 = 2x^2 + 2|DE|^2 \quad (2)$$

Çemberde  $B$  noktasına göre kuvvet yazarsak,

$$|BC| \cdot |BD| = \frac{3r^2}{4} \quad (3)$$

(1) nolu denklemde iki tarafın karesini alıp (2) ve (3) nolu denklemleri kullanırsak

$$|DE|^2 = \frac{3r^2}{2} - 2x^2 \quad (4)$$

olur.

Son olarak  $OEF$  üçgeninde  $OB$  kesenine göre Stewart teoremini yazalım.

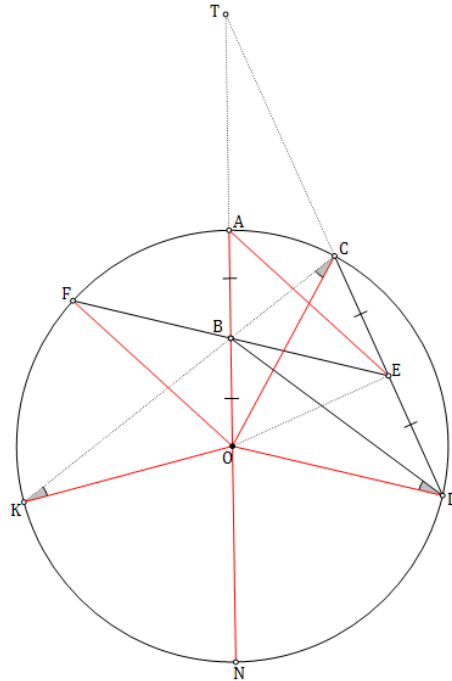
$$\frac{r^2}{4} = \frac{x \cdot r^2 + y \cdot |OE|^2}{x + y} - xy = \frac{xr^2 + yr^2 - |DE|^2}{x + y} - xy$$

(4) nolu eşitliği kullanarak,

$$(x - y)\left(\frac{3r^2}{4} + xy\right) = 0 \Rightarrow x = y$$

dir.

## Çözüm 2:



$[CB$  nin içini çemberi  $K$  da kessin.  $\angle KBO = \angle DBO$  olduğundan,  $|BK| = |BD|$  dir. Buna göre;  $OBK$  üçgeni ile  $OBD$  eş üçgenler ve  $\angle BKO = \angle BDO$  dir.  $|OK| = |OC|$  den  $\angle BKO = \angle BCO$  olup  $OBCD$  dörtgeninde  $\angle BCO = \angle BDO$  açı ilişkisinden dolayı  $OBCD$  bir kirişler dörtgenidir.

$CD$  ile  $OA$  doğrusunun kesim noktası  $T$  olsun.  $T$  noktasının sırasıyla  $(BODC)$  ve  $(FADC)$  çemberlerine göre kuvvetini alalım.

$$|TC| \cdot |TD| = (|TA| + \frac{r}{2})(|TA| + r) \quad (1)$$

ve

$$|TC| \cdot |TD| = |TA|(|TA| + 2r) \quad (2)$$

(1) ve (2) den  $|TA| = r$  olur.  $\angle OET = 90^\circ$  olduğundan  $|OA| = |AT| = |AE| = r$  dir.

$ABE$  ve  $FBO$  üçgenleri  $|AB| = |OB|$ ,  $|AE| = |OF|$ ,  $\angle FBO = \angle ABE$  ve  $\angle OFB < 90^\circ$ ,  $\angle AEB < 90^\circ$  olduğundan eş üçgenlerdir. Bu eşliğe göre,  $|FB| = |BE|$  dir.

- 6** Her  $n$  pozitif tam sayısı için,  $p(n)$ , terimleri toplamı  $n$  ye eşit olan ve azalmayan pozitif tam sayı dizilerinin sayısını göstermek üzere

$$\frac{1 + p(1) + p(2) + \cdots + p(n-1)}{p(n)} \leq \sqrt{2n}$$

olduğunu kanıtlayınız.

## 45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2004

1  $11 \times 11$  satranç tahtası bir tane  $\square$  ve kırk tane  $\square\square\square$  ile kapatılırsa,  $\square$  şeklinin tahtadaki hangi karelere gelebileceğini belirleyiniz.

2  $P$ ,  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde bir nokta ise,

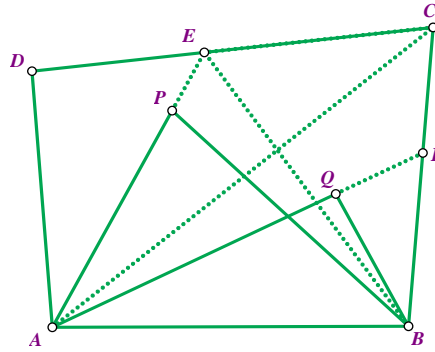
$$\min\{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$

olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

Dışbükey  $ABCD$  dörtgeni içerisinde bir  $P$  noktası alalım.

$AP$  ya  $[BC]$  yi kesecek, ya da  $[CD]$  yi kesecek.



$[BC]$  yi  $F$  de kesen noktalardan biri  $Q$  olsun.

$$AQ + QB \leq AQ + QF + FB \leq AF + FB \leq AC + CB < AD + DC + CB$$

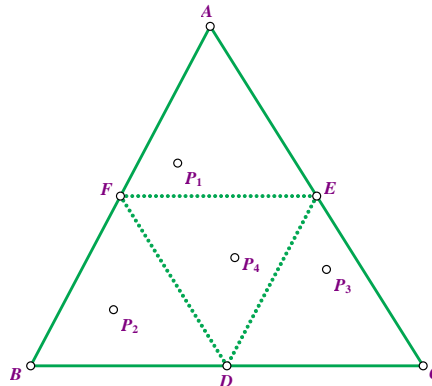
$AP$ ,  $[CD]$  yi  $E$  de kessin.

$$AP + BP \leq AP + PE + EB = AE + EB < AD + DE + EC + CB = AD + DC + CB$$

Bu durumda dışbükey  $ABCD$  dörtgeni içerisinde alınan her  $P$  noktası için,

$$AP + BP < BC + CD + DA.$$

$D$ ,  $E$ ,  $F$  noktaları sırasıyla  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  kenarlarının orta noktaları olsun.  $AEF$  üçgeni içerisinde (ya da üzerinde fark etmez) bir  $P_1$  noktası, aynı şekilde  $BDF$  üçgeni içerisinde  $P_2$  noktası,  $CDE$  üçgeni içerisinde  $P_3$  noktası,  $DEF$  üçgeni içerisinde de  $P_4$  noktası alalım.



$P_1$  noktası için  $ABDE$  dörtgeninde  $AP_1 + BP_1 < AE + ED + BD$  bağıntısı vardır.

$P_1$  noktası için  $ACDF$  dörtgeninde  $AP_1 + CP_1 < AF + FD + DC$  bağıntısı vardır.

Taraf tarafa toplarsak

$$AP_1 + BP_1 + CP_1 + AP_1 < AE + FD + AF + ED + BD + DC < AC + AB + BC$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\min \{AP_1, BP_1, CP_1\} + AP_1 + BP_1 + CP_1 \leq AP_1 + BP_1 + CP_1 + AP_1 < AC + AB + BC$$

olacaktır.

$P_2$  noktası için,  $ABDE$  ve  $BCEF$  dörtgeninde elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\min \{AP_2, BP_2, CP_2\} + AP_2 + BP_2 + CP_2 \leq AP_2 + BP_2 + CP_2 + BP_2 < AC + AB + BC$$

$P_3$  noktası için,  $ACDF$  ve  $BCEF$  dörtgeninde elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\min \{AP_3, BP_3, CP_3\} + AP_3 + BP_3 + CP_3 \leq AP_3 + BP_3 + CP_3 + CP_3 < AC + AB + BC$$

elde edilir.

$P_4$  noktası için,  $ABDE$ ,  $BCEF$ ,  $ACDF$  dörtgenlerinden herhangi ikisini seçtiğimizde,

$$\min \{AP_4, BP_4, CP_4\} + AP_4 + BP_4 + CP_4 \leq AP_4 + BP_4 + CP_4 + \max \{AP_4, BP_4, CP_4\} < AC + AB + BC$$

elde edilecektir.

Yani her  $P$  iç noktası için,

$$\min \{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$

**Not:**

Bu soru IMO 1999 Shortlist'indeki G1 numaralı sorunun aynısıdır.

**3**  $n$  pozitif bir tam sayı olsun. Hangi  $n + 1 \leq r \leq 3n + 2$  tam sayıları için,

$$a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \dots + a_m b_m^k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

koşulunu sağlayan tüm  $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$  tam sayılarının,

$$r |a_1 b_1^r + a_2 b_2^r + \dots + a_m b_m^r$$

koşulunu da sağlayacağını belirleyiniz.

**4**  $\sin \alpha = 3/5$  ve  $x = 5^{2003} \sin(2004\alpha)$  ise,  $x - [x]$  sayısının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

**Çözüm:**

$\sin \alpha = 3/5$  verildiğinden  $\cos \alpha = 4/5$  veya  $\cos \alpha = -4/5$  olur

(i)  $\cos \alpha = 4/5$  için çözelim De Moivre formülünden

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2004} = \cos 2004\alpha + i \sin 2004\alpha$$

$$\frac{(4 + 3i)^{2004}}{5^{2004}} = \cos 2004\alpha + i \sin 2004\alpha$$

$$\frac{(4 + 3i)^{2004}}{5} = 5^{2003} \cos 2004\alpha + 5^{2003} i \sin 2004\alpha$$

Bizden  $i$ 'nin sağ taraftaki katsayısı olan  $5^{2003} \sin 2004\alpha$ 'nın kesir kısmını istiyor.

Sol taraftaki  $i$ 'nin katsayısının kesir kısmını bulmamız yeterli.

$$(4 + 3i) \equiv 4 + 3i \pmod{5}$$

$$(4 + 3i)^2 \equiv 2 + 4i \pmod{5}$$

$$(4 + 3i)^3 \equiv 1 + 2i \pmod{5}$$

$$(4 + 3i)^4 \equiv 3 + i \pmod{5}$$

$$(4 + 3i)^5 \equiv 4 + 3i \pmod{5}$$

Buradan 5. kuvvetten itibaren kalanlar 4'lü periyodik olarak ilerler.

2004, 4'ün katı olduğundan

$$(4 + 3i)^{2004} \equiv 3 + i \pmod{5}$$

$a$  ve  $b$  tamsayılar olmak üzere

$$\frac{(4 + 3i)^{2004}}{5} = a + ib + \frac{3 + i}{5}$$

$i$ 'nin katsayısının kesir kısmı  $1/5$  olur ki bu da bizden istenendi.

(ii)  $\cos \alpha = -4/5$  ise benzer şekilde

$$\frac{(-4 + 3i)^{2004}}{5} = 5^{2003} \cos 2004\alpha + 5^{2003} i \sin 2004\alpha$$

sol taraftaki  $i$ 'nin katsayısını bulalım.

$$(-4 + 3i) \equiv 1 + 3i \pmod{5}$$

$$(-4 + 3i)^2 \equiv 2 + i \pmod{5}$$

$$(-4 + 3i)^3 \equiv 4 + 2i \pmod{5}$$

$$(-4 + 3i)^4 \equiv 3 + 4i \pmod{5}$$

$$(-4 + 3i)^5 \equiv 1 + 3i \pmod{5}$$

Buradan yine 5. kuvvetten itibaren kalanlar 4'lü periyodik olarak ilerler.

2004, 4'ün katı olduğundan

$$(-4 + 3i)^{2004} \equiv 3 + 4i \pmod{5}$$

$c$  ve  $d$  tamsayılar olmak üzere

$$\frac{(-4 + 3i)^{2004}}{5} = c + id + \frac{3 + 4i}{5}$$

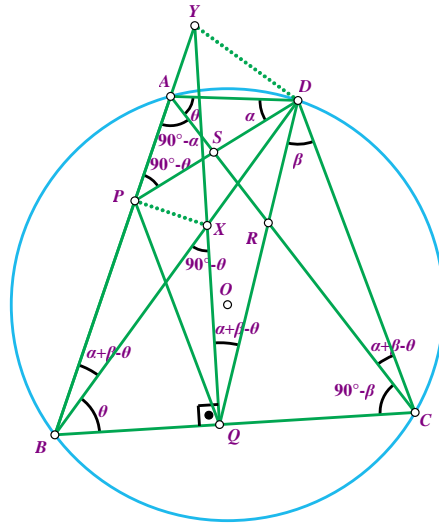
$i$ 'nin katsayısının kesir kısmı  $4/5$  olur ki bu da bizden istenendi.

Demek ki  $5^{2003} \sin 2004\alpha$ 'nın kesir kısmını alabileceği değerler  $1/5$  ve  $4/5$  dir

- 5  $D$ , dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin  $O$  merkezli çevrel çemberinin küçük  $AC$  yayı üzerinde  $A$  ve  $C$  den farklı bir nokta olsun.  $[AB]$  kenarı üzerinde  $\widehat{ADP} = \widehat{OBC}$  olacak biçimde  $P$  noktası,  $[BC]$  kenarı üzerinde ise  $\widehat{CDQ} = \widehat{OBA}$  olacak biçimde bir  $Q$  noktası alınıyor.  $\widehat{DPQ} = \widehat{DOC}$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1:**

$\angle OCB = \alpha$ ,  $\angle OAB = \beta$  ve  $\angle DBC = \theta$  olsun.



$\angle ADP = \alpha$ ,  $\angle QDC = \beta$ ,  $\angle DAC = \theta$ ,  $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle BCA = \angle ADB = 90^\circ - \beta$ ,  $\angle DBA = \alpha + \beta - \theta = \angle ACD$  olur.

$APD$  üçgeninde  $\angle ADP + \angle PAC = 90^\circ$  olduğu için  $\angle APD = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \theta$  olacaktır.

Benzer şekilde,  $DQC$  üçgeninde  $\angle DQC = 90^\circ - (\alpha + \beta - \theta)$  olur.

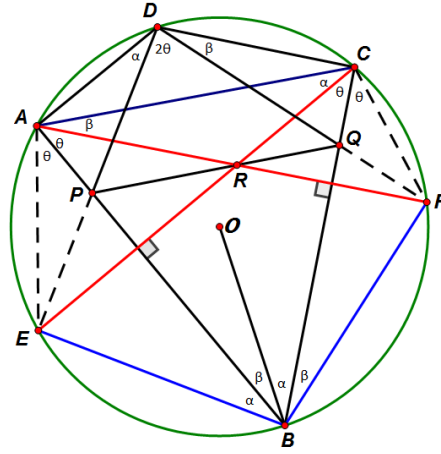
$BC$  ye  $Q$  da dik olan doğru  $BD$  yi  $X$  te,  $AB$  yi  $Y$  de kessin.

$\angle YQD = 90^\circ - \angle DQC = \alpha + \beta - \theta = \angle YBD$  olduğu için  $Y, B, Q, D$  noktaları çemberseldir.

Aynı zamanda,  $\angle YXD = \angle BXQ = 90^\circ - \angle XBQ = 90^\circ - \theta$  ve  $\angle YXD = \angle APD = \angle YPD = 90^\circ - \theta$  olduğu için,  $Y, P, X, D$  noktaları da çemberseldir.

Bu durumda  $\angle YQB = \angle YDB = 90^\circ$  elde edilir.  $YPXD$  kirişler dörtgeninde  $\angle YDX = \angle YPX = 90^\circ$  olacaktır.  $\angle XPB + \angle BQX = 180^\circ$  olduğu için  $BQXP$  dörtgeni kirişler dörtgenidir. Yani  $\angle XPQ = \angle XQP = \theta$  olacaktır.

Daha önce  $\angle APD = 90^\circ - \theta$  bulmuştuk. Böylelikle  $\angle DPX = 90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$  çıkar. Sonuç olarak  $\angle DPQ = 2\theta = \angle DOC$  elde ettik. (Dikkat edilirse,  $X$  noktası,  $DPQ$  üçgeninin iç merkezi oldu.)

**Çözüm 2:**

$DP$  ile  $DQ$  nun çemberi kestiği noktalar sırasıyla  $E$  ve  $F$  olsun.

$$\angle ADE = \angle ABE = \angle OBC = \alpha, \angle CDF = \angle CBF = \angle OBA = \beta$$

diyelim.  $\angle OBE = \angle OBF = \alpha + \beta$  olduğundan  $|EB| = |BF|$  dir.

Pascal Teoremine göre ;  $AF$  ile  $CE$  doğruları  $PQ$  üzerindeki bir  $R$  noktasında kesişirler. Buradan  $\angle EAF = \angle FCE = 2\theta$  ve  $AB$  ile  $CB$  bu açıların açıortaylarıdır.

Kirişler dörtgenlerinden ( örneğin ;  $AEBF$  dörtgeni )  $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$  olduğunu görüyoruz. Buna göre  $[CE] \perp [AB]$  ve  $[AF] \perp [BC]$  dir.

O halde ,  $AEPR$  ve  $CRQF$  içbükey deltoit olup  $|PE| = |PR|$  ve  $|QR| = |QF|$  dir. Sonuç olarak,  $\angle DPQ = 2\angle PER = \angle DOC$  ve  $\angle DQP = 2\angle QFR = \angle DOA$  dir.

- 6 Bir sınıftaki öğrencilerin her birinin elinde 0, 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 tane şeker vardır. Öğretmen her adımda, bazı öğrencileri seçip, bu öğrencilere ve bu öğrencilerden herhangi biri ile arkadaş olan her öğrenciye birer şeker veriyor. Elindeki şeker sayısı 7 ye ulaşan öğrenci bunların hepsini yiyor. Sınıftaki herhangi iki öğrenci için bunlardan yalnızca biriyle arkadaş olan üçüncü bir öğrenci bulunuyorsa, başlangıçtaki şeker sayıları ne olursa olsun, öğretmenin sonlu sayıda adım sonucunda her öğrencinin elinde istediği sayıda şeker kalmasını sağlayabileceğini gösteriniz.

## 46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2005

1 Her  $x \in [0, \infty)$  için,

$$\begin{aligned} 4f(x) &\geq 3x \\ f(4f(x) - 3x) &= x \\ (f(x) + x)f(f(x)) &\leq 2xf(x) \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonlarını bulunuz.

**Çözüm:**

İkinci eşitlikten fonksiyonun örten olduğu görülebilir. Sabit bir  $x$  için  $y = 4f(x) - 3x$  alırsak,  $f(y) = x$  olacağından

$$\begin{aligned} (f(y) + y)(f(f(y))) &= (x + y)f(x) = \frac{(x + y)(3x + y)}{4} \leq 2yf(y) = 2xy \\ \implies 3x^2 + y^2 - 4xy &\leq 0 \implies (3x - y)(x - y) \leq 0 \\ \implies x &\leq y \leq 3x \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$x \leq 4f(x) - 3x \leq 3x \implies x \leq f(x) \leq \frac{3x}{2}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten dolayı,  $f(x) = g(x) + x$  şeklinde bir  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon için

$$0 = f(4f(x) - 3x) - x = g(4f(x) - 3x) + 4f(x) - 4x = g(4f(x) - 3x) + 4g(x)$$

elde edilir.  $g$  fonksiyonu hiçbir zaman negatif olamayacağından bu eşitliğin sağlanması için  $g(x) = 0$  olmalıdır. Dolayısıyla  $g \equiv 0$  ve  $f(x) = x$  olmalıdır. Yerine koyulduğunda sağladığı görülebilir.

2  $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$  koşulunu sağlayan bir  $ABC$  üçgeninde  $[AB]$  kenarının orta noktası  $N$  dir.  $[AC]$  ışını üstünde  $C$  den sonra gelecek ve  $|BC| = |CD|$  olacak biçimde bir  $D$  noktası;  $[DN]$  ışını üstünde de,  $m(\widehat{PBC}) = m(\widehat{A})$  olacak biçimde bir  $P$  noktası alınıyor.  $PC$  ile  $AB$  nin kesiştiği nokta  $E$ ;  $BC$  ile  $DP$  nin kesiştiği nokta  $T$  ise,

$$\frac{|BC|}{|TC|} - \frac{|EA|}{|EB|}$$

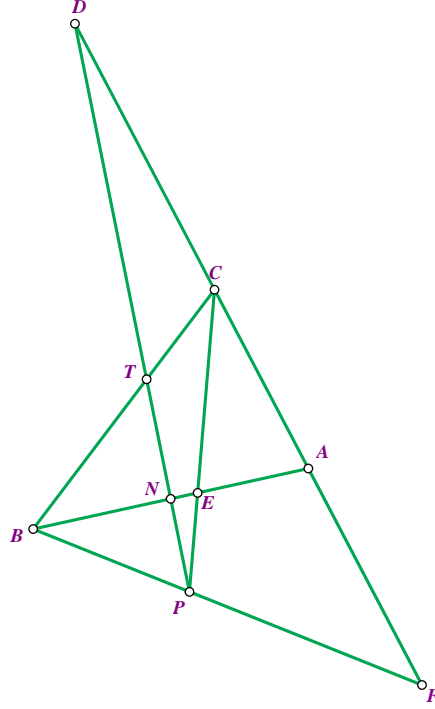
ifadesinin değerini bulunuz.

**Çözüm:**

Önce  $\frac{AE}{BE}$  oranını hesaplayacağız.

$DA \cap BP = \{F\}$  olsun.  $A.A$  dan  $\triangle ABC \sim \triangle BFC$  olur.

$$AC \cdot FC = BC^2 = DC^2$$



$\triangle ABF$  de  $P, E, C$  noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{FP} \cdot \frac{FC}{AC} = 1$$

$\triangle ABF$  de  $P, N, D$  noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BF}{FP} \cdot \frac{FD}{AD} = 1$$

Eşitliklerini taraf tarafa oranlarsak:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{FC} \cdot \frac{FD}{AD}$$

elde ederiz.

$$FC \cdot AD = FC(AC + CD) = AC \cdot FC + FC \cdot CD = CD^2 + FC \cdot CD = CD \cdot FD$$

eşitliğini yerine yazarsak

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{FC} \cdot \frac{FD}{AD} = \frac{AC}{CD}$$

olur.

Şimdi de  $\frac{BT}{TC}$  yi hesaplayalım.

$\triangle ABC$  de  $N, T, D$  noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BT}{CT} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

olacaktır.

$$\frac{BC}{TC} = \frac{BT}{TC} + 1 = \frac{AD}{CD} + 1 = \frac{AC + CD}{CD} + 1 = \frac{AC}{DC} + 2$$

Son olarak

$$\frac{BT}{TC} - \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{DC} + 2 - \frac{AC}{DC} = 2$$

elde edilir.

**Not:**

Dikkat edilirse,  $\triangle ABF$  de  $BD$  bir dış açıortaydır. Son durumda ise  $CP$  doğrusu,  $\angle BCA$  nın açıortayı oluyor.

- 3** Başlangıçta 1 den 2005 e kadar olan bütün tam sayılar işaretleniyor. Ardışık tam sayılardan oluşan sonlu bir dizideki tüm tam sayılar işaretli olup, dizinin en küçük teriminin bir eksiği ile en büyük teriminin bir fazlası işaretli ise, bu diziye bir blok diyoruz. Her hamlede, işaretlenmiş sayıların hiçbir blokun ilk ya da son terimini içermeyen bir altkümeyi seçip, bu altkümenin elemanlarının işaretlerini siliyor ve işaretli en büyük sayının iki fazlasından başlayarak, işaretini sildiğimiz sayıda tam sayıyı yeni bir blok oluşturacak şekilde işaretliyoruz. Bu hamleleri, her biri tam olarak bir tam sayıdan oluşan 2005 blok elde etmek amacıyla yaparsak, bu amaca en az kaç hamlede ulaşabiliriz?

- 4**  $n \geq 2$  olmak üzere, tüm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tam sayıları için,  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$  sayısının  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$  sayısını böldüğünü kanıtlayınız.

**Çözüm:**

ArtOfMathSolving

Jordan Bölgeleri ile çalışacağız, verilen ifade yerine daha genel bir ifade ispatlayacağız.

$E$  bir Jordan bölgesi olmak üzere,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  tamsayıları  $E$  bölgesinin alt ağı olsun, öyleki bu ağ kapalı bir  $n$  boyutlu  $n$  genin içinde olsun.  $E$  sıfır-hacimli olmamak üzere,

ipsatlayacağımız ifade, herhangi bir  $A_i = \{a_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  kapalı yolu ile oluşturulan  $A \times A \times \dots \times A$   $n$  boyutlu şekle -ki biz buna basitçe "çokgen" diyeceğiz- herhangi bir ağın  $b_1, b_2, \dots, b_n$  herhangi bir  $(i, j)$  inci kenarı (bu kenarı  $i < j$  olması halinde  $j - i$  şeklinde tanımlayacağız.) bu çokgenin  $(i, j)$  inci kenarını ancak ve ancak bu ağların üstünde bulunduğu bölgenin Jordan bölgesi olduğunda böldüğünü göstereceğiz.

$A_i = \{a_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  çokgenini tanımlamıştık şimdi de  $E_i = \{b_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  şeklinde gösterelim. Birkaç özellik yazalım.

$$V(E; A_i) = \sum_{E \cap A_i \neq \emptyset} |A_i|$$

ve

$$v(E; A) = \sum_{E \subseteq A} |A_i|$$

Ağın dış ve iç hacmini sırasıyla

$$Vol^- = \sup(v(E; A_i))$$

ve

$$Vol^+ = \inf(V(E; A_i))$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi bu küme üzerinde bir  $\delta$  işlemi/işlemcisi tanımlayalım öyleki bu işlemci  $A_i$  çokgeninin herhangi bir  $i$  ve  $j$  noktalarını  $E$  alt ağındaki keyfi  $\varepsilon, \mu$  noktalarına götürsün. Matematiksel olarak  $\delta_{i,j} \rightarrow \varepsilon, \mu$ . İşlemcinin götürdüğü noktalar kümesi  $E$  nin altağı olacak ve bir alt ve üst değerlere sahip olacak. Bu kümeyi

$$\delta_{i,j,\dots \in \Theta} \rightarrow \Theta_i = \{b_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca bu işlemci bir Jordan bölgesini başka bir Jordan bölgesine götürsün.

**Teorem:**  $0 \leq v(\Theta; E_i) \leq V(\Theta; E_i)$  eşitsizliği gerçekleşir.

*Proof:*  $\Theta$  ağundan daha ince olan  $E$  üzerinde bir  $I$  ağı olsun. Böyle bir ağ, örneğin, her  $j = 1, 2, \dots, n$  için ( $\mathcal{P}$  burada bir parçalanışı gösteriyor.)  $\mathcal{P}|(I) = \mathcal{P}|(\Theta)$  alınarak elde edilebilir. Böylece  $0 \leq v(I; E_i) \leq v(\Theta, E_i) \leq V(\Theta; E_i) \leq v(I; E_i)$  gerçekleşir.  $\square$

Şimdi Bir iddia ortaya atalım.

Iddia 1:

$$\prod_{i \leq n} V(\Theta; A_i) - v(\Theta; A_i) \geq 0$$

Dikkat edin, burada  $\Theta$  ağı  $A_i$  nin doğrudan alt ağı değil,  $E$  altağı üzerinde bir ağ. Bunu kanıtlamak için başka bir iddia yı kanıtlamamız gerekiyor.

Iddia 2:

$$\delta_{i \rightarrow n} v(\Theta; E) \neq \inf \sum_{\Theta \cap E_i \neq \emptyset} b_i$$

*Proof:* Her iki tarafta limit alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow n} \delta_{i \rightarrow n} v(\Theta; E) &= \lim_{i \rightarrow n} \inf \sum_{\Theta \cap E_i \neq \emptyset} b_i \\ \Rightarrow \delta_{i \rightarrow n} \left( \lim_{i \rightarrow n} \sum_{\Theta \subseteq E_i} |\Theta_i| - \lim_{i \rightarrow n} \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i \right) &= 0 \end{aligned}$$

Her iki tarafın iç toplamını alalım.

$$Vol^+ \left( \delta_{i \rightarrow n} \left( \lim_{i \rightarrow n} \sum_{\Theta \subseteq E_i} |\Theta_i| - \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i \right) \right) = Vol^+ \kappa$$

burada  $\kappa$  sıfır hacimli bir Jordan bölgesidir. İşlemcimizin tanım gereği  $\delta_{i \rightarrow n} (\lim_{i \rightarrow n} \sum_{\Theta \subseteq E_i} |\Theta_i| - \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i)$  ifadesinin tersi,  $\delta_{\kappa \rightarrow i} = \lim_{i \rightarrow n} \sum_{\Theta \subseteq E_i} |\Theta_i| - \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i$  olmalıdır. Fakat bu mümkün değildir çünkü  $\kappa$  ağı sıfır hacimli Jordan bölgesi fakat  $E$  kümesini tanımlarken sıfır hacimli olmayan bir küme olarak tanımlamıştık. Çelişki! O halde

$$\delta_{i \rightarrow n} v(\Theta; E_i) = \sup \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i \Rightarrow \delta_{i \rightarrow n} V(\Theta; E_i) = \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i$$

koşulları gerçekleşir.  $\square$

İspatımızı tamamlamak için son kez ortaya bir iddia daha atalım.

Iddia 2:

$$\delta_{i < j \leq n} (j - i) \longrightarrow \sum_{\Theta \cap E_i} (b_j - b_i) \longrightarrow \sum_{\Theta \cap A_i} (a_j - b_i)$$

*Proof:*  $\delta_{i \rightarrow n} (j - i) \rightarrow V(\Theta; E_i) - V(\Theta; E_j)$  olduğunu gösterelim.

$$\delta_{i \rightarrow n} V(\Theta; E_i) = \inf \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i$$

$$\delta_{j \rightarrow n} v(\Theta; E_j) = \sup \sum_{\Theta \cap E_j} b_j$$

$$\Rightarrow \delta_{i, j \leq n} \left( \inf \sum_{\Theta \cap E_j} b_j - \sup \sum_{\Theta \subseteq E_i} b_i \right) \geq \left( \sum_{\Theta \cap A_i} a_j - b_j \right)$$

kabul edebiliriz yani  $j - i$  kenarı  $a_j - a_i$  nin bir alt ağı olarak kabul edilir. Çünkü infimum ve supremum işlemleri Jordan bölgesinde eşit kabul edilir. İspat biter  $\square$

Hatam olduysa lütfen bildirin, iyi çalışmalar...



## 47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2006

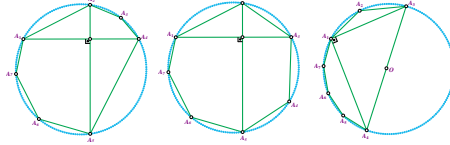
- 1 Köşeleri 1 yarıçapında bir çember üstünde bulunan ve köşegenlerinden ikisi dik kesişen bir yedigenin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

### Çözüm:

Çemberin merkezi  $O$  ve yedigenin köşeleri sırasıyla  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  olsun.

$\alpha_i = \angle A_i O A_{i+1}$  olsun ( $\alpha_7 = \angle A_7 O A_1$ ).

Dik kesişen köşegenlerin gördüğü karşılıklı yayların toplamı  $180^\circ$  olacak.



Dik kesişen köşegenleri koordinat sistemine, kesiştikleri nokta orijin olacak şekilde yerleştirelim. Bu durumda  $\alpha_i$  açılarını her kümedeki elemanların toplamı  $\pi = 180^\circ$  olacak şekilde iki ayrı kümeye ayırabiliriz. Bu kümelerin eleman sayıları  $(1, 6)$ ,  $(2, 5)$  ya da  $(3, 4)$  şeklinde olabilir (diğerleri simetrik).  $\beta_i$  ile bu kümelerin elemanlarını gösterelim.

$(1, 6)$  durumu için  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$  olacaktır.

$(2, 5)$  durumu için  $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ ,  $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$  olacaktır.

$(3, 4)$  durumu için  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ ,  $\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$  olacaktır.

Yedigenin alanı  $\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \sum_{i=1}^7 \sin \beta_i$  olduğundan açıların sinüsleri toplamını maksimize etmek istiyoruz.

Jensen Eşitsizliğine göre  $\frac{\sin a_1 + \sin a_2 + \dots + \sin a_n}{n} \leq \sin \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$  olacağı için,

$(1, 6)$  durumu için,

$$\sum_{i=1}^7 \sin \beta_i \leq \sin \beta_1 + 6 \sin \frac{\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{6} = \sin \pi + 6 \sin \frac{\pi}{6} = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$(2, 5)$  durumu için,

$$\sum_{i=1}^7 \sin \beta_i \leq 2 \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + 5 \sin \frac{\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 5 \sin \frac{\pi}{5} = 2 + 5 \sin 36^\circ$$

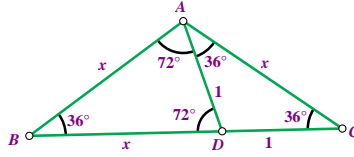
$(3, 4)$  durumu için,

$$\sum_{i=1}^7 \sin \beta_i \leq 3 \sin \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} + 4 \sin \frac{\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7}{4} = 3 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$3 < 2 + 5 \sin 36^\circ < \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2}$  olduğunu göstermeye çalışacağız.

Şekildeki gibi  $36^\circ - 36^\circ - 108^\circ$  üçgenini kuralım.

$AB = AC = x$ ,  $AD = DC = 1$  olsun.  $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 72^\circ = \angle BDA$  olduğu için,  $BD = x$  olacaktır.  $\triangle ADC \sim \triangle BAC$  olduğu için  $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ .



$\triangle ADC$  de,  $\frac{AC}{DC} = \frac{x}{1} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = x$  dir. Denklemi çözersek;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ elde ederiz.}$$

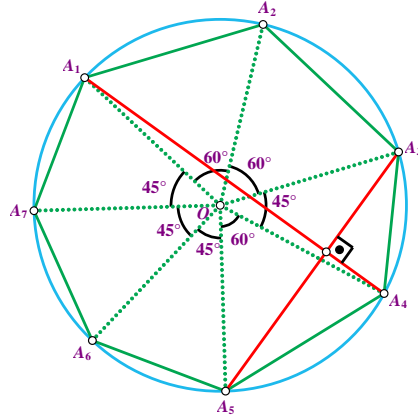
$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$2 + 5\sin 36^\circ < 2 + 5 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{4}}}{4} = \frac{8 + 5\sqrt{6}}{4} \text{ elde edilir.}$$

$2 + 5\sin 36^\circ < \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2}$  iddiasının doğruluğunu sınamak için her iki tarafın karesini alalım.

$$\frac{8 + 5\sqrt{6}}{2} < 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} \Rightarrow 64 + 150 + 80\sqrt{6} < 108 + 128 + 96\sqrt{6} \Rightarrow 0 < 22 + 16\sqrt{6}$$

olduğu için, (3, 4) durumda, yani  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ ,  $\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \pi$  olduğu zaman yedigenin alanı en büyük değerini alacak. Jensen'deki eşitlik durumundan,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$  ve  $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$  elde edilir.



Alanı hesaplırsak,  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (4 \cdot \sin 45^\circ + 3 \cdot \sin 60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}$  elde ederiz.

**2**  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,  $2 \times n$  lik bir dikdörtgeni, kenar uzunlukları tam sayılar olan dikdörtgenlere kaç farklı biçimde ayırabiliriz?

**3**  $x, y, z$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere,  $xy + yz + zx = 1$  ise,

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

İlk olarak sol tarafı ispatlayalım. Cauchy-Schwarz'dan

$$(1 + 1 + 1)(x + y + y + z + z + x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2$$

$$6(x + y + z) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2$$

$$\frac{27(x+y)(y+z)(z+x)}{4} \geq 6(x+y+z) \text{ eşitsizliğini ispatlamak yeterli.}$$

$xy + yz + zx = 1$  olduğunu kullanarak eşitsizlik şuna dönüşür.

$$\frac{27(x+y)(y+z)(z+x)}{4} \geq 6(x+y+z)(xy + yz + zx)$$

$27(x+y)(y+z)(z+x) \geq 24(x+y+z)(xy + yz + zx)$  eşitsizliğini düzenleyip sadeleştirirsek

$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geq 6xyz$  olur ki bu A.O-G.O eşitsizliğinin sonucudur. ispat biter sağ tarafın ispatı için

$$(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}) = S \text{ diyelim.}$$

$$S^2 \geq 6\sqrt{3} \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$  eşitsizliğini kullanarak

$$S^2 \geq 3(\sqrt{x+y}\sqrt{y+z} + \sqrt{y+z}\sqrt{z+x} + \sqrt{x+y}\sqrt{z+x}) \quad (1)$$

$$\sqrt{x+y}\sqrt{y+z} + \sqrt{y+z}\sqrt{z+x} + \sqrt{x+y}\sqrt{z+x} = M \text{ diyelim.}$$

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$  eşitsizliğini tekrar kullanarak.

$$M^2 \geq 3\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})$$

$$M^2 \geq 3\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.S$$

eşitsizliğin sol tarafında

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{4S^2}{27} \text{ olduğunu ispatlamıştık.}$$

$$M^2 \geq 3\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.S \geq \frac{6S^2}{3\sqrt{3}}$$

(1)'den

$$S^4 \geq 9M^2 \geq \frac{54S^2}{3\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}S^2$$

$$S^2 \geq 6\sqrt{3} \text{ olur ve ispat biter.}$$

- 4  $x_1$  bir pozitif tam sayı olmak üzere, her  $n \geq 1$  tam sayısı için  $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n x_k^2$  ise,  $x_{2006}$  sayısının 2006 ile bölünmesini sağlayan en küçük  $x_1$  sayısını bulunuz.

**Çözüm:**

$$x_2 = x_1^2$$

$n > 2$  ise  $x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1}$  olur.  $p$   $x_1$ 'i bölerse  $x_2$ 'yi böler.

$p$   $x_{n-1}$ 'i bölüyorsa  $x_n$ 'i böler.

Buna göre  $p$   $x_k$ 'yi bölüyorsa  $m \geq k$  için  $x_m$ 'i de böler.

$$2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$$

$x_1$  çiftse tüm terimler çifttir.

$x_1$  tekse ilk iki terim hariç hepsi çifttir.

$x_{2006}$  her zaman çifttir. Şimdi 17 ve 59'a bölünme durumlarına bakalım.

Önce bir yardımcı teorem ispatlayalım:

Yardımcı teorem:  $p = 3k + 2$  formunda bir asal sayıysa  $x^2 + x \equiv -1 \pmod{p}$  denkleğinin çözüümü yoktur.

İspat: Diyelim ki çözüüm olsun.

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$x^3 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$x^{3k} \equiv 1 \pmod{p}$$

Aynı zamanda fermat teoreminden

$$x^{3k+1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ buradan } x = 1 \text{ olur ki } 2 \equiv -1 \pmod{p}, 3 \equiv 0 \pmod{p}. \text{ Ki bu olamaz. İspat biter.}$$

Şimdi 17'e bölünme durumunu inceleyelim.

$x_1$  17'ye bölünüyorsa durum sağlanır.  $x_1$  bölünmüyorsa  $x_2$  17'ye bölünen en küçük sayıysa  $x_1$  de bölünür ki bu olamaz.

$$x_3 \text{ 17'ye bölünen en küçük sayıysa } x_2^2 + x_2 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$x_2 \equiv -1 \pmod{17}$$

$$x_1^2 \equiv -1 \pmod{17}$$

$$x_1 \equiv 4, 13 \pmod{17}$$

$m > 3$  için  $x_m$  17'ye bölünen en küçük sayı olsun.

$$x_m = x_{m-1}^2 + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{17}$$

$$x_{m-2}^2 + x_{m-2} = x_{m-1} \equiv -1 \pmod{17}$$

$$x_{m-2}^2 + x_{m-2} \equiv -1 \pmod{17}$$

17 = 3.5 + 2 olduğundan yardımcı teoreme göre denkleğın çözüümü yoktur.

$$x_1 \equiv 0, 4, 13 \pmod{17} \quad (1)$$

59'a bölünme durumuna bakalım. benzer şekilde

$x_1$  59'ye bölünüyorsa durum sağlanır.  $x_1$  bölünmüyorsa

$x_2$  59'ye bölünen en küçük sayıysa  $x_1$  de bölünür ki bu olamaz.

$$x_3 \text{ 59'ye bölünen en küçük sayıysa } x_2^2 + x_2 \equiv 0 \pmod{59}$$

$$x_2 \equiv -1 \pmod{59}$$

$$x_1^2 \equiv -1 \pmod{59}$$

59,  $4k + 3$  formunda olduğundan bu denkleğın çözüümü yoktur

$m > 3$  için  $x_m$  59'a bölünen en küçük sayı olsun

$$x_m = x_{m-1}^2 + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{59}$$

$$x_{m-2}^2 + x_{m-2} = x_{m-1} \equiv -1 \pmod{59}$$

$$x_{m-2}^2 + x_{m-2} \equiv -1 \pmod{59}$$

59 = 3.19 + 2 olduğundan yardımcı teoreme göre denkleğın çözüümü yoktur.

$$x_1 \equiv 0 \pmod{59} \quad (2)$$

(1) ve (2)'yi birleştiresek

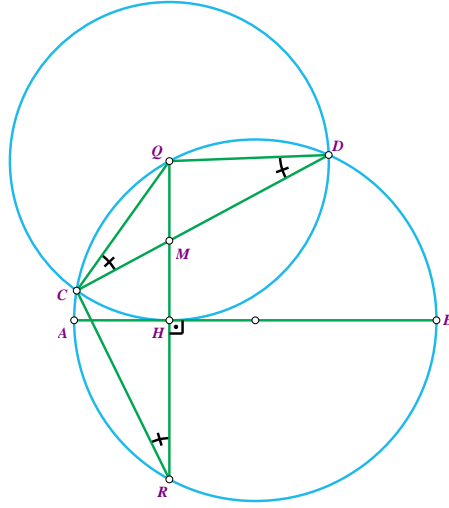
$$x_1 \equiv 8.59, 9.59, 17.59 \pmod{17.59}$$

$x_1 = 8.59 = 472$  en küçük pozitif değerdır.

- 5 [AB] çaplı bir çemberin üstündeki A ve B den farklı herhangi bir Q noktasından [AB] çapına,  $H \in [AB]$  olmak üzere, [QH] dikmesi iniliyor. Q merkezli ve |QH| yarıçaplı çemberin [AB] çaplı çemberi kestiği noktalar C ve D ise, CD doğrusunun [QH] nı iki eşit parçaya böldüğünü gösteriniz.

**Cözüm:**

$CD$  ile  $QH$  doğruları  $M$  de kesişsin.



$$QD = QC \Rightarrow \angle QDC = \angle QCD = \angle QRC \text{ olduğu için } QC^2 = QM \cdot QR = QM \cdot 2QH = QH^2 \Rightarrow 2QM = QH$$

- 6 2006000 öğrencinin katıldığı bir Üniversite Giriş Sınavı'nda, her öğrenci 2006 bölüm arasından 12 bölümlük bir liste yapıyor. Herhangi 6 öğrenciyi aldığımızda, bu öğrencilerden her birinin en az birini kendi listesine dahil etmiş olduğu iki bölümün bulunduğu gözleniyor. Her öğrencinin listesinden en az bir bölüm içeren bir bölüm listesine, kapsamlı bir liste diyoruz.

Öğrencilerin verdikleri listeler ne olursa olsun, 12 elemanlı bir kapsamlı liste oluşturulabileceğini kanıtlayınız. Daha küçük bir listenin kendilerine göre kapsamlı olmadığı öğrenci listelerinin bulunduğunu gösteriniz.

## 48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2007

- 1 Bir havayolu şirketi  $A, B, C, D, E$  ve  $F$  kentlerinden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri başlatacaktır. Bu altı kentten herhangi ikisi arasında yalnızca bu şirketin seferlerini kullanarak ulaşımı mümkün kılacak biçimde, bu seferlerin kaç farklı biçimde düzenlenebileceğini belirleyiniz.

(Okan Tekman)

### Çözüm:

Bu problem, içirme - dışarma prensibinin güzel bir uygulamasıdır.

**Çözüm:** 6 şehri noktalarla gösterelim. Bunlar arasında uçak seferleri olanları da doğru parçalarıyla birleştirelim.  $\binom{6}{2} = 15$  doğru parçası oluşabilir. Şimdi bu 15 doğru parçasını kullanıp kullanmama durumuna göre  $2^{15}$  yolla seçebiliriz. Bu bize tüm durumların sayısını veriyor. Ancak diğer şehirlerle hiçbir bağlantısı olmayan bir şehir varsa, bu istenmeyen bir durumdur. Böyle bir şehri  $\binom{6}{1}$  yolla seçeriz. Geriye kalan 5 şehir için kendi aralarında  $\binom{5}{2} = 10$  doğru parçası çizilebilir. Bu 10 doğru parçasını kullanıp kullanmama durumuna göre  $2^{10}$  yolla seçim yapabiliriz. Çarparsak  $\binom{6}{1}2^{10}$  olur.

Hem  $A$ , hem de  $B$  gibi iki şehrin de, diğer şehirlerle ve birbirleriyle hiçbir bağlantısı olmaması durumlarını eklemeliyiz. Bunların sayısı  $\binom{6}{2}2^6$  dir. Bu şekilde devam edilirse içirme - dışarma prensibinden istenen:

$$2^{15} - \binom{6}{1}2^{10} + \binom{6}{2}2^6 - \binom{6}{3}2^3 + \binom{6}{4}2^1 - \binom{6}{5}2^0 + \binom{6}{6}2^0 = 32768 - 6144 + 960 - 160 + 30 - 6 + 1 = 27449 \text{ elde edilir.}$$

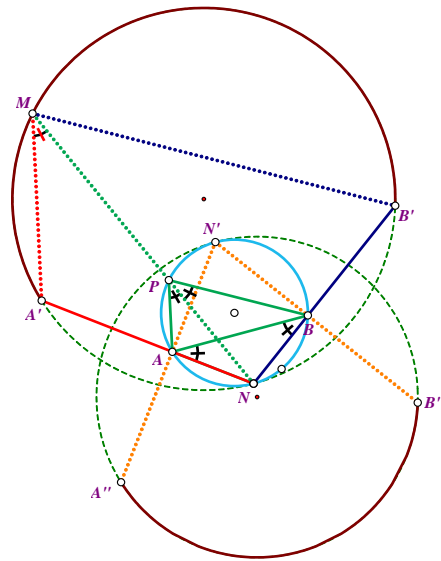
(L. Gökçe)

- 2 Farklı  $A$  ve  $B$  noktaları ile bu noktalardan geçen bir  $\Gamma$  çemberi verilmiş olsun.  $P$ ,  $\Gamma$  üstünde  $A$  ve  $B$  den farklı, değişen bir nokta olmak üzere,  $\widehat{APB}$  nin açıortayının  $P$  noktasından  $\Gamma$  çemberinin dışına doğru uzantısı üstünde yer alan ve  $|MP| = |AP| + |PB|$  koşulunu sağlayan  $M$  noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

(Mehmet Tagiyev)

### Çözüm:

Elimizde  $PA + PB$ , açıortay ve çevrel çember var. Bu üç bilgi, Ptolemy'nin özel halini hatırlatıyor.  $\angle APB$  nin açıortayı çemberi  $N$  de kessin.



Ptolemy'den  $PA \cdot BN + PB \cdot AN = PN \cdot AB$  olacaktır. Biraz düzenlersek,

$$\frac{PA + PB}{PN} = \frac{AB}{AN} = \text{Sabit}$$

olarak elde edilir.  $[NA]$  üzerinde ( $[NA]$  dışında)  $A'$  noktası,  $AA' = AB$  olacak şekilde alın.  $\frac{MP}{PN} = \frac{PA + PB}{PN} = \frac{AB}{AN} = \frac{A'A}{AN} \Rightarrow PA \parallel MA'$

olacaktır. Bu da  $\angle NMA' = \angle NPA = \text{Sabit}$  olmasını gerektirir.

Benzer şekilde  $B'$  noktası aldığımızda,  $\angle NMB' = \angle NPB = \text{Sabit}$  olacaktır.

Bu durumda  $\angle A'MB' = \angle APB = \text{Sabit}$  olur.  $A'$  ve  $B'$  noktaları sabit olduğundan,  $M$  noktası bir  $A'B'$  yayı üzerindedir. Yayın tanımını biraz daha düzgün yazmaya çalışalım.  $A'N = B'N$  olduğu için  $\angle BA'N = \angle BAN = \angle B'MN$  olur. Bu durumda  $N, A', B'$  ve  $M$  noktaları çemberseldir.  $A', B', N$  noktaları sabit olduğundan  $M$  noktası ( $A'NB'$ ) çemberinin  $N$  yi içermeyen  $A'B'$  yayı üzerindedir.

$P$  noktası,  $AB$  yanının diğer kısmında da olabileceği için, bu yayın orta noktası  $N'$  olsun.  $A'$  ve  $B'$  ne benzer şekilde  $A''$  ve  $B''$  noktalarını tanımlayalım.  $M$  noktası, ( $A''N'B''$ ) çemberinin  $N'$  yü içermeyen  $A''B''$  yayı üzerindedir.

Yani,  $M$  noktalarının geometrik yeri bir çift çember yayıdır.

**Not:**

$\frac{MP}{PN} = \text{Sabit} \Rightarrow \frac{MP + PN}{PN} = \frac{MN}{PN} = \text{Sabit}$  olacağı için, Ptolemy'yi uyguladıktan, aslında  $N$  merkezli bir homoteti uygulamış olduk.

**3**  $a, b, c$  pozitif gerçel sayıları,  $a + b + c = 1$  koşulunu sağlıyorsa,

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Selim Bahadır)

**Çözüm:**

Eşitsizliğin ispatı için,

$$\frac{ab + ac + bc}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{ab + ac + bc}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{ab + ac + bc}{ca + 2b^2 + 2b} \geq 1$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için, önce

$$\frac{ab + ac + bc}{ab + 2c^2 + 2c} \geq \frac{ab}{ab + bc + ac}$$

olduğunu gösterelim. Bu eşitsizlik

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \geq a^2b^2 + 2abc^2 + 2abc$$

eşitsizliğine denktir.  $(a + b + c) = 1$  olduğundan dolayı, bu eşitsizliği de

$$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2abc^2$$

biçiminde yazabiliriz.  $A.O. \geq G.O.$  eşitsizliğine göre

$$\frac{b^2c^2 + c^2a^2}{2} \geq \sqrt{b^2c^2c^2a^2}$$

olduğundan bu eşitsizlik doğrudur.

Benzer şekilde,

$$\frac{ab + ac + bc}{bc + 2a^2 + 2a} \geq \frac{bc}{ab + bc + ac}$$

$$\frac{ab + ac + bc}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{ca}{ab + bc + ac}$$

olduğu gösterilerek, bulunan bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa, istenilen eşitsizlik elde edilecektir.

**Kaynak:**

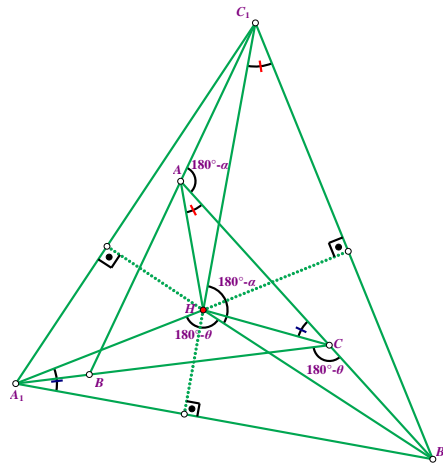
Doç. Dr. Mustafa Özdemir (Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 5 sayfa 319)

- 4 Dar açılı bir  $ABC$  üçgeniyle; bu üçgenin dışında ve sırasıyla  $[AC]$ ,  $[BA]$  ve  $[CB]$  ışınları üstünde yer alan  $B_1$ ,  $C_1$  ve  $A_1$  noktalarının oluşturduğu  $A_1B_1C_1$  üçgeni benzerdir.  $A_1B_1C_1$  üçgeninin diklik merkezi ile  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin çakıştığını kanıtlayınız.

(Mehmet Tagiyev)

**Çözüm:**

Üçgenin açılarına  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$  ve  $\angle C = \theta$  dersek,  $\angle A_1CB_1 = 180^\circ - \theta$  ve  $\angle B_1AC_1 = 180^\circ - \alpha$  olur.



$H$  noktası,  $\triangle A_1B_1C_1$ 'nin diklik merkezi olsun.  $\angle C_1 = \theta$  olduğu için  $\angle A_1HB_1 = 180^\circ - \theta$  olacaktır. Benzer şekilde  $\angle A_1 = \alpha$  olduğu için  $\angle C_1HB_1 = 180^\circ - \alpha$  dir.

$AHB_1C_1$  dörtgeninde  $\angle C_1AB_1 = \angle C_1HB_1 = 180^\circ - \alpha$  olduğu için, dörtgen kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla,  $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1 = 90^\circ - \angle B_1$ .

Benzer şekilde,  $A_1HCB_1$  dörtgeni,  $\angle A_1HB_1 = \angle A_1CB_1 = 180^\circ - \theta$  olduğu için, bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla,  $\angle HA_1B_1 = \angle HCA = 90^\circ - \angle B_1$ .

Bu durumda  $AH = HC$  ve  $\angle AHC = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle B_1) = 2\angle B_1 = 2\angle B$  olduğu için,  $H$  noktası,  $\triangle ABC$ 'nin çevrel merkezidir.

- 5 Hangi  $n$  pozitif tek sayıları için,

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n^4$$

eşitliğini sağlayan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tek sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

(Özgür Kişisel)

**Çözüm:**

$x_i$ 'ler tek olduğundan  $x_i^2 \equiv 1 \pmod{8}$  ve  $n$  tek olduğundan  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

Bunları birleştirirsek  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \equiv n \equiv n^4 \equiv 1 \pmod{8}$ .

Aynı zamanda  $n = 8k + 1$  için  $(8k + 1)^4 = ((8k + 1)^2 - 2)^2 + (16k + 1)^2 + k \cdot 5^2 + (7k - 1) \cdot 1^2$  olduğundan  $n = 8k + 1$  formunda olmalıdır.

**Kaynak:**

<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=142325?ml=1>

- 6  $2007 \times 2007$  bir satranç tahtasının her birim karesine 1 veya  $-1$  yazıyoruz. Bu yazımın, tahtanın birim karelerinden oluşan her karenin içindeki sayıların toplamının mutlak değeri 1 i aşmayacak biçimde, kaç farklı şekilde gerçekleştirilebileceğini belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

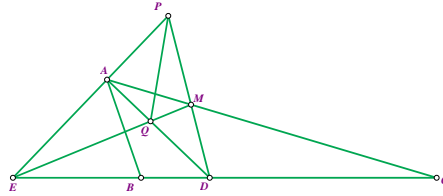
## 49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2008

- 1  $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$  olan bir  $ABC$  üçgeninde,  $A$  açısının iç ve dış açıortayları  $BC$  yi sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktalarında kesiyor.  $[EA$  ışını üstünde,  $A$  ya göre  $E$  ile farklı tarafta bir  $P$  noktası alıyoruz.  $DP$  ve  $AC$  doğruları  $M$  noktasında,  $ME$  ile  $AD$  ise,  $Q$  noktasında kesişiyor.  $P$  noktası değişirken elde edilen  $PQ$  doğrularının hepsinin bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

**Çözüm:**

İç ve dış açıortay teoremlerinden

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{EC}{DC} = \frac{EB}{BD}.$$



$\triangle PED$  de  $A, M, C$  noktaları için Menelaus'tan

$$\frac{PA}{AE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MP} = 1.$$

$\frac{EC}{DC} = \frac{EB}{BD}$  eşitliğini yerine yazarsak

$$\frac{PA}{AE} \cdot \frac{EB}{BD} \cdot \frac{DM}{MP} = 1$$

elde edilir. Bu da, Ceva Teoreminin tersinden dolayı,  $PB, DA, EM$  doğrularının tek noktada kesiştiği anlamına gelir. Yani tüm  $PQ$  doğruları  $B$  den geçer.

- 2 30 köşesi ve 105 kenarı bulunan bir çizgede, ortak bir köşesi bulunmayan sıralı kenar ikililerinin sayısı 4822 ise, bu çizgideki iki köşenin dereceleri arasındaki fark en çok kaç olur?
- 3  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  denkleminin bütün köklerinin pozitif gerçel sayılar olmasını sağlayan  $a, b, c$  gerçel sayıları için

$$\frac{1 + a + b + c}{3 + 2a + b} - \frac{c}{b}$$

ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

**Çözüm:**

Biz ifadenin  $\geq \frac{1}{3}$  olduğunu gösterelim.  $a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = xyz$  olduğunu Vieta Formüllerinden biliyoruz. O halde ispatlamamız gereken şey  $(xy + yz + zx)(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)^2 \geq 9xyz + 6xyz(x + y + z)$  idir. Bunu da  $x$  pozitif olduğundan  $A.G.O$  yaparak kolayca elde edebiliriz. Eşitlik  $x = y = z$  için sağlanır.  
Yanıt  $\frac{1}{3}$ .

- 4  $(x_n)$  dizisi,  $x_1 = a, x_2 = b$  ve her  $n \geq 1$  tam sayısı için

$$x_{n+2} = 2008x_{n+1} - x_n$$

bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor. Her  $n \geq 1$  tam sayısı için,

$$1 + 2006x_n x_{n+1}$$

ifadesini tam kare yapan  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayıların bulunduğunu gösteriniz.

- 5 Bir  $ABC$  üçgeninin  $[BC]$  kenarı üstünde  $|AD| = \frac{|BD|^2}{|AB| + |AD|} = \frac{|CD|^2}{|AC| + |AD|}$  olacak şekilde bir  $D$  noktası ile  $D \in [AE]$  ve  $|CD| = \frac{|DE|^2}{|CD| + |CE|}$  olacak şekilde bir  $E$  noktası alınıyor.  $|AE| = |AB| + |AC|$  olduğunu gösteriniz.

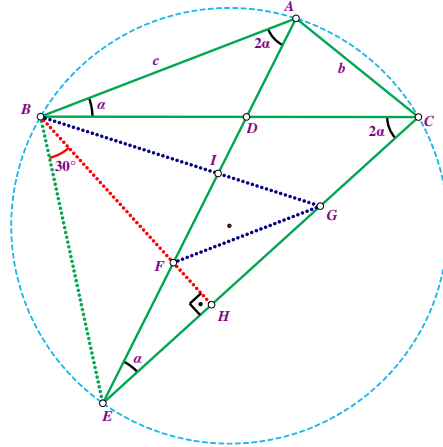
### Çözüm:

$$\text{Elimizde } AD = \frac{BD^2}{AB + AD} \Rightarrow AB \cdot AD = BD^2 - AD^2 \text{ var.}$$

$D$  merkezli,  $DA$  yarıçaplı çember  $BA$  yı  $X$  te kessin.  $B$  nin bu çembere göre kuvveti,  $BD^2 - DA^2 = BA \cdot BX$  olduğu için  $BX = AD = XD \Rightarrow \angle BAD = 2 \cdot \angle ABD = 2\alpha$ .

Benzer şekilde,  $\angle DAC = 2 \cdot \angle ACD = 2\beta$ .

Üçgenin açılarını toplarsak,  $\alpha + \beta + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$  ve  $\angle BAC = 120^\circ$  elde edilir.



Yine aynı şekilde,  $\angle EDC = \angle BDA$  olduğu için  $\angle DCE = 2 \cdot \angle DEC = 2\alpha$  olacak.  $\angle BCE = \angle BAE = 2\alpha$  olduğu için de,  $B, A, C, E$  noktaları çembersel olacaktır.

$H$  noktası,  $B$  den  $EC$  ye inilen dikmenin ayağı olsun.  $BH$  ile  $AE$  doğruları  $F$  de kesişsin.  $\angle BAC = 120^\circ \Rightarrow \angle BEH = 60^\circ$  olur.  $EC$  üzerinde  $\triangle BEG$  eşkenar üçgen olacak şekilde bir  $G$  noktası alalım.  $AG$  ile  $AE$  doğruları  $I$  da kesişsin.  $F$  noktası,  $\triangle BEG$  üçgeninin açıortayı üzerinde olduğu için  $FG = FE$  ve  $\angle IFG = 2 \cdot \angle FEG = 2\alpha$  elde edilir. Dolayısıyla,  $FG \parallel AB$  elde edilir.

$EI$  ışını,  $(BEG)$  çevrel çemberini  $J$  de kessin.  $\angle JBG = \angle JEG = \angle ABC = \alpha$  ve  $\angle BJG = \angle BAC = 120^\circ$  olduğu için,  $A, A$  dan  $\triangle JBG = \triangle ABC$  elde edilir.  $JI$ ,  $\angle BJG$  nin açıortayı olduğu için  $\frac{AB}{AC} = \frac{BJ}{JG} = \frac{BI}{IG}$  olur.

$$AB \parallel FG \Rightarrow \frac{AB}{FG} = \frac{BI}{IG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow FG = AC = EF$$

elde ederiz.  $\angle BAF = 2\alpha$  ve  $\angle EFH = \angle BFA = 90^\circ - \angle AEC = 90^\circ - \alpha$  olduğu için  $AB = AF$  dir. Son durumda  $AE = AF + FE = AB + AC$  elde etmiş olduk.

- 6  $m, n > 2$  tam sayılar olmak üzere,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  topluluğu,  $m$  elemanlı bir  $A$  kümesinin bir altkümesini seçecektir.  $N$  topluluğunun bir tercih profili, her  $i \in N$  seçmeninin  $A$  kümesindeki seçeneklere ilişkin bir

kesin tercih sıralamasından oluşmaktadır.  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  olmak üzere,  $k$ -çoğulcu seçim sisteminde, her seçmen, ilk  $k$  sırada tercih ettiği  $k$  adaya, sırasını belirtmeksizin eşit ağırlıklı oy vermekte ve en çok sayıda toplam oy alan adaylar seçilmektedir.  $R$  ve  $R'$ ,  $N$  topluluğunun iki tercih profili ve  $a \in A$  olmak üzere, eğer her  $i \in N$ ,  $R$  profilindeki tercihine göre  $a$  dan kötü bulduğu bütün adayları,  $R'$  profilindeki tercihine göre de  $a$  dan kötü buluyorsa, " $R'$  profili,  $R$  profiline  $a$ -üstündür" diyoruz.  $k$ -çoğulcu seçim sistemine göre  $R$  profilinde seçilen her  $a \in A$ ,  $R$  ye  $a$ -üstün olan her  $R'$  profilinde de seçilmeye devam ediyorsa,  $k$ -çoğulcu seçim sistemine tekdüze diyoruz.  $k > \frac{m(n-1)}{n}$  olmasının,  $k$ -çoğulcu seçim sisteminin *tekdüze* olması için gerek ve yeter olduğunu gösteriniz.

## 50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2009

- 1  $\mathbf{Q}^+$  tüm pozitif rasyonel sayıların,  $\mathbf{Z}$  ise tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere,  $x > 1$  olan her  $x \in \mathbf{Q}^+$  için,  $f(1/x) = f(x)$  ve  $(x+1)f(x-1) = xf(x)$  bağıntılarını sağlayan bütün  $f : \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Z}$  fonksiyonlarını bulunuz.

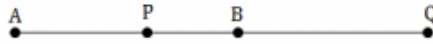
(Serhat Doğan)

- 2 Bir  $ABCD$  teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $O$ , yarıçapı ise  $r$  dir.  $AB$  ve  $CD$  doğruları  $P$ ;  $AD$  ve  $BC$  doğruları  $Q$ ;  $AC$  ve  $BD$  köşegenleri ise,  $K$  noktasında kesişiyor.  $O$  noktasından  $PQ$  doğrusuna olan uzaklık  $d$  ise,  $|OK| \cdot d = r^2$  olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Hamidoğlu)

### Çözüm 1:

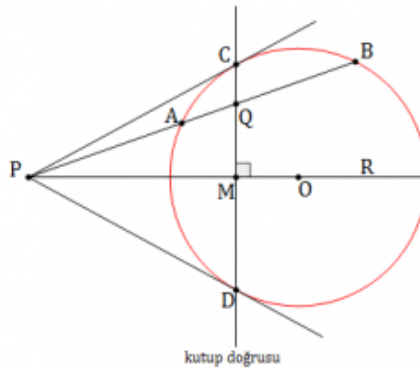
**Harmonik Bölüm:** Bir doğru üzerinde  $A$  ve  $B$  gibi iki nokta alalım.  $[AB]$  yi içten bölen  $P$  noktası ile dıştan bölen  $Q$  noktası için  $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ}$  oluyorsa  $P$  ve  $Q$  noktaları  $[AB]$  yi harmonik olarak böler.  $P$  ve  $Q$  noktalarının  $[AB]$  yi harmonik olarak bölüşü ( $ABPQ$ ) şeklinde gösterilir. Ayrıca  $P$  ve  $Q$  noktalarına  $A$  ve  $B$  noktalarının, karşıt olarak  $A$  ve  $B$  noktalarına  $P$  ve  $Q$  noktalarının harmonik eşlenikleri denir.



**Kutup Doğrusu:** Bir daire ve bir  $P$  noktası veriliyor. Bu noktadan geçen ve daireyi  $A$  ve  $B$  noktalarında kesen değişken bir doğru çiziliyor.  $P$  noktasının  $A, B$  noktalarına göre harmonik eşleniği olan  $Q$  noktası alınıyor.  $Q$  noktasının geometrik yeri bir doğru olup, bu doğruya  $P$  noktasının daireye göre kutup doğrusu denir.

$P$  noktasından daireye çizilen teğetlerin değme noktaları  $C$  ve  $D$  olmak üzere,  $CD$  doğrusu  $P$  nin kutup doğrusudur ve  $OP$  doğrusuna diktir. ( $O$  dairenin merkezi)

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Dairenin yarıçap  $R$  ve  $P$  ile  $M$  eşlenik noktalar olmak üzere ;  $R^2 = |OM| \cdot |OP|$  dir.



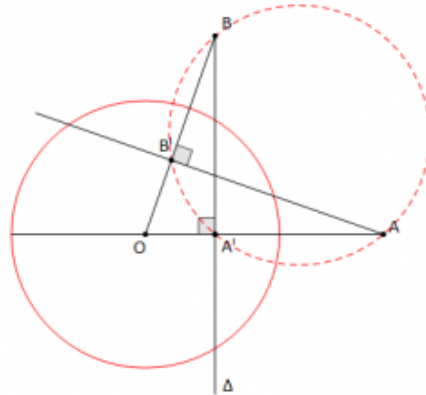
**Eşlenik Noktalar:** Eğer bir  $A$  noktasının kutup doğrusu  $B$  noktasından geçerse, karşıt olarak  $B$  noktasının kutup doğrusuda  $A$  noktasında geçer.

$A$  nın kutup doğrusu  $(\Delta)$  ve bu doğru  $OA$  ya  $A'$  noktasında dik olsun.  $R$  dairenin yarıçapı olmak üzere,  $|OA| \cdot |OA'| = R^2$  dir.

$(\Delta)$  nın herhangi bir noktası  $B$  olsun.  $OB$  ye  $AB'$  dikmesini çizelim.  $\angle AA'B = \angle AB'B = 90^\circ$  olduğundan  $A, A', B, B'$  noktaları bir daire üzerindedir. Bu takdirde,

$$|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = R^2$$

bulunur. Bu gösterir ki  $AB', B$  noktasının kutup doğrusudur. O halde bu kutup doğrusu  $A$  noktasından geçer.



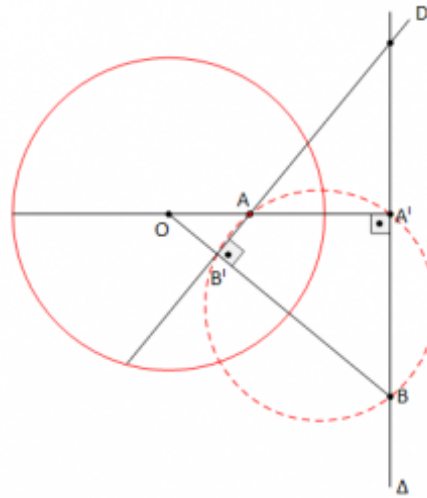
**Eşlenik Doğrular :** Eğer bir  $(D)$  doğrusu  $(\Delta)$  doğrusunun kutbundan geçerse, karşıt olarak  $(\Delta)$  doğrusu da  $(D)$  doğrusunun kutbundan geçer.

$(\Delta)$  doğrusunun kutbu  $A$  olsun.  $OA$ ,  $(\Delta)$  ya dik olup  $(\Delta)$  yı  $A'$  noktasında kestiğine göre,  $R^2 = |OA| \cdot |OA'|$  dir.

$(\Delta)$  nın kutbundan geçen herhangi bir doğru  $(D)$  olsun.  $(\Delta)$  nın  $(D)$  nin kutbundan geçtiğini gösterelim.

$(D)$  ye indirilen  $OB'$  dikmesinin  $(\Delta)$  yı kestiği nokta  $B$  olsun.  $A, A', B, B'$  noktaları çembersel olduğundan  $|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = R^2$

olur. Bu bağıntı  $(D)$  nin kutbunun  $B$  olduğunu gösterir. Böylece  $(\Delta)$  nın  $(D)$  doğrusunun kutbundan geçtiği görülür



Asıl problemin çözümünde faydalanacağımız bir alt probleme çözüm arayalım

**Problem :** Bir teğetler dörtgeninde, köşegenlerin kesim noktası ile karşılıklı kenarların değme noktaları doğrusaldır.

**Çözüm :**  $\triangle KDL$  ve  $\triangle KBL$  nin alanlarının inceleyelim.

$\angle LKD = \angle NKB$  olduğundan,

$$\frac{\text{Alan}(KDL)}{\text{Alan}(KBN)} = \frac{|KD| \cdot |KL|}{|KB| \cdot |KN|}$$

$N$  ve  $L$  teğet değme noktaları olduğundan,  $\angle KLD = \angle KNC = 180^\circ - \angle KNB$  dir. O halde,

$$\frac{Alan(KDL)}{Alan(KBN)} = \frac{|KL| \cdot |LD|}{|KN| \cdot |NB|}$$

Bulunan iki eşitlikten,

$$\frac{|LD|}{|BN|} = \frac{|KD|}{|KB|} \text{ dir.}$$

$[BD]$  üzerindeki herhangi bir  $T$  noktası için

$\triangle TBS$  ve  $\triangle TDM$  inin alanlarını inceleyelim.

$\angle BTS = \angle DTM$  olduğundan,

$$\frac{Alan(TBS)}{Alan(TDM)} = \frac{|TB| \cdot |TS|}{|TD| \cdot |TM|}$$

$\angle BST$  ile  $\angle DMT$  bütünler olduğundan,

$$\frac{Alan(TBS)}{Alan(TDM)} = \frac{|BS| \cdot |TS|}{|TM| \cdot |MD|}$$

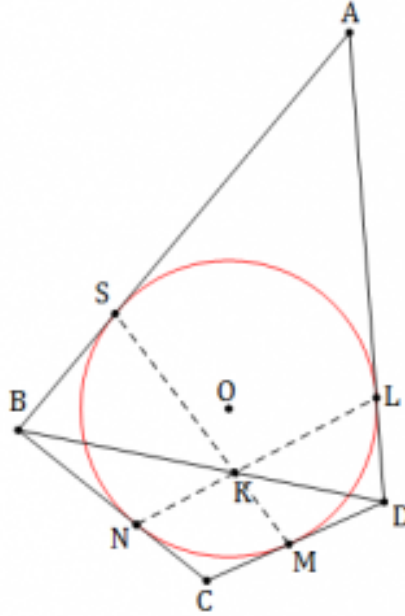
Bulunan iki eşitlikten,

$$\frac{|MD|}{|BS|} = \frac{|TD|}{|TB|} \text{ dir.}$$

$|MD| = |DL|$  ve  $|BS| = |BN|$  olduğundan,  $T$  ve  $K$  noktalarının  $[BD]$  aynı oranda bölen noktalar olduğunu buluyoruz.

O halde  $T$  noktası aslında  $K$  dir.

Demek ki teğetler dörtgeninde değme kirisleri bir köşegenin üzerinde kesişiyorlar.  $[AC]$  köşegenini seçerek başlasaydık  $K$  noktası bu köşegeninde üzerinde bulunacaktı.



$K$  noktasının  $NL$  ve  $MS$  doğruları üzerinde bulunduğunu göstermiş olduk.  $MS, P$  noktasının daireye göre kutup doğrusu,  $NL$  de  $Q$  noktasının daireye göre kutup doğrusudur. O halde  $P$  ile  $K$  ve  $Q$  ile  $K$  eşlenik noktalar olup  $K$  nin kutup doğrusu da  $P$  ve  $Q$  noktalarından geçen  $PQ$  doğrusu olacaktır. Buna göre  $OK$  doğrusu  $PQ$  doğrusuna diktir.



elde edilir.  $QN^2 = OQ^2 - ON^2$  ve  $OP^2 = OP^2 - OM^2$  eşitliklerini yerine yazarsak

$$QK^2 - PK^2 = OQ^2 - OP^2 \quad (7)$$

elde ederiz. Bu da  $PQ \perp OK$  demektir.  $OK \cap PQ = \{H\}$  olsun.

$\angle OPM = \angle KMO$  ve  $HPMO$  kirisler dörtgeninde  $\angle OPM = \angle MHO$  olduğu için  $\angle OHM = \angle KMO$  elde edilir. Bu da  $OK \cdot OH = OM^2$  demektir. ■

- 3** 2009 kişilik toplulukta, hangi iki kişiyi alırsak alalım, bunların ikisiyle birden tanışık olan tam olarak bir kişi bulunuyor. Böyle bir toplulukta en çok tanıdığı olan ve en az tanıdığı olan kişilerin tanıdık sayıları arasındaki farkın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Azer Kerimov)

- 4** Hangi  $p$  asal sayıları için,  $1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i)$  polinomunun en az bir tam sayı kökü olacak biçimde, tam sayı katsayılı bir  $Q(x)$  polinomunun bulunduğunu belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

### Çözüm:

$Q(x^i) \equiv Q(x^{i+p-1}) \pmod{p}$  olduğu için:

$$1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i) \equiv 1 + \prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i)^2 \pmod{p} \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla eğer bir  $x_1$  için bu  $x_1$  tamsayı kök ise:

$$1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i) \equiv 1 + \prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i)^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 4k + 1 \text{ formatında veya } p = 2$$

$p = 4k + 1$  için eğer  $x_1$  polinomun bir kökü ise:

$$Q(x^i) \equiv Q(x^{i+4k}) \equiv Q(x^{i+p-1}) \pmod{4} \text{ olduğundan:}$$

$$1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i) \equiv 1 + 1 + \prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i)^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\prod_{i=1}^{p-1} Q(x^i)^2 \equiv 2 \pmod{4} \text{ olur; ama bu imkansızdır.}$$

O zaman  $p = 2$  olmalı.  $p = 2$  için polinomumuz  $3 + Q(x)Q(x^2)$  şeklinde olur.

$Q(x) = 2x + 1$  ve  $x_1 = -1$  seçersek:  $3 + Q(-1)Q(1) = 3 + (-1)3 = 0$  bulunur.

### Kaynak:

Okan TEKMAN (2009 Yaz Kampı Büyük Sınıf Notları)

- 5** Bir  $ABC$  üçgeninde,  $A_1$ ,  $B_1$  ve  $C_1$ , iç teğet çemberin sırasıyla,  $BC$ ,  $AC$  ve  $BC$  kenarlarına değdiği noktalar olmak üzere,

$$\sqrt{\frac{|AB_1|}{|AB|}} + \sqrt{\frac{|BC_1|}{|BC|}} + \sqrt{\frac{|CA_1|}{|CA|}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Semih Yavuz)

**Çözüm:**

$AC_1 = AB_1 = x, BC_1 = BA_1 = y, CA_1 = CB_1 = z$  olsun. Soru  $x, y, z$  pozitif gerçel sayıları için;

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x}{x+y}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

haline döner. Buradan da;

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \sum \frac{\sqrt{(xy+xz)(z+x)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{2(xy+yz+zx)}\sqrt{2(x+y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} = 2\sqrt{1 + \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

diyerek soruyu bitirebiliriz. İspat biter.

NOT:  $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$  olduğunu  $A.G.O$  dan kolayca elde edebiliriz.

- 6** Bir sınıftaki  $n \geq 4$  öğrenciden bazıları arkadaştır. Bu sınıftaki herhangi  $n - 1$  öğrenci, her birinin her iki yanında da birer arkadaşı bulunacak biçimde bir çember oluşturabilirken,  $n$  öğrenciyle bu koşulu sağlayan bir çember oluşturulamıyorsa,  $n$  nin alabileceği en küçük değerin 10 olduğunu gösteriniz.

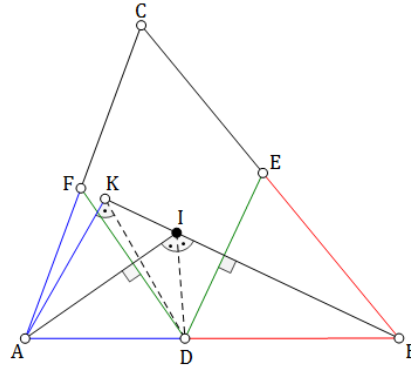
(Okan Tekman)

## 51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2010

- 1  $ABC$  üçgeninin sırasıyla  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$  kenarları üstünde yer alan  $D, E, F$  noktaları,  $|AD| = |AF|$ ,  $|BD| = |BE|$  ve  $|DE| = |DF|$  koşullarını sağlıyor.  $I$ ,  $ABC$  üçgeninin iç merkezi olmak üzere;  $ABI$  üçgeninin çevrel çemberine  $A$  noktasında teğet olan doğru ile  $BI$  doğrusu  $K$  noktasında kesişiyor.  $|AK| = |AD|$  ise,  $|AK| = |KE|$  olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

### Çözüm:



$AK$ ,  $(AIB)$  çemberine teğet olduğundan  $\angle KAI = \angle ABK$  dir.

Buradan,  $\angle KAD = \angle KIA$  olur.

$|DE| = |DF|$  ve  $[AI]$  ile  $[BI]$  bu uzunlukların orta dikmeleri olduğundan  $ID$ ,  $AIB$  açısının açıortayıdır.

$\angle KAD + 2\angle AKD = \angle KIA + 2\angle AID \Rightarrow \angle AKD = \angle AID$  dir.

Buna göre ;  $AKID$  bir kirişler dörtgenidir. Bu dörtgenden  $\angle KIA = \angle ADK = \angle AKD$  bulunur.

Yani  $AKD$  bir eşkenar üçgen olup,  $|AK| = |KD|$  dir.  $BK$ ,  $[DE]$  nin orta dikmesi olduğundan  $|KD| = |KE|$  olur. Sonuç olarak ,  $|AK| = |KE|$  dir.

- 2 Tüm  $a, b, c$  pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(b^2 + c)(b^2 - bc + c^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(c^2 + a^2)(c^2 - ca + a^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

Cauchy-Schwarz'dan  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$  olduğundan

$$\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c}$$

olduğunu söyleyebiliriz.  $A.G.O$  dan;

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{2}} \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{\frac{(a^2 + b^2)}{2} + (a^2 - ab + b^2)}{2}} = S$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$S = \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2 - 2ab + 3b^2}{4}} \leq \sqrt{\frac{3(6(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca))}{4}}$$

elde edilir. Buradan sonra ispatlamamız gereken şey;

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c) \sqrt{\frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)}{6}}$$

olduğudur. Bunun için;

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\sqrt{2(a + b + c)^2 (9(a^2 + b^2 + c^2) - 3(ab + bc + ca))}}{6} = M$$

olmalıdır.  $A.G.O$  dan;

$$M \leq \frac{11(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca}{12} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

olduğundan eşitsizlik sağlanır ispat biter.

- 3** Yıl boyunca yaptığı sınavlarda 2010 tane soru sormuş olan bir öğretmen, bu soruları her biri 670 tane soru içeren üç dosyaya ayırarak, her dosyayı o dosyadaki soruların hepsini çözmüş olan bir öğrenciye vermek istiyor. Herhangi bir soruyu çözemeyen en çok iki öğrenci olması koşuluyla; hangi soru hangi öğrenciler tarafından çözülmüş olursa olsun, öğretmenin bunu yapmasının olanaklı olması için toplam öğrenci sayısının en az kaç olması gerektiğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

- 4**  $0 \leq k < n$  tam sayılar ve  $A = \{a : a \equiv k \pmod{n}\}$  olmak üzere, hiçbir  $(a, m) \in A \times \mathbf{Z}^+$  için,

$$\frac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$$

ifadesinin değeri tam sayı değilse,  $n$  nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan, Okan Tekman)

- 5**  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir  $D$  noktası için,  $BD \cap AC = \{E\}$  ve  $CD \cap AB = \{F\}$  olmak üzere;  $A, E, D, F$  noktaları çemberde ise, bu noktalardan geçen çemberi  $\Gamma_D$  ile gösterelim. Tüm  $\Gamma_D$  çemberlerinin  $A$  dan farklı bir ortak noktadan geçtiğini gösteriniz.

(Serhat Doğan)

- 6**  $\Lambda$  düzlemdeki kafes noktalarının kümesi ve  $\mathcal{F}$  de,  $\Lambda$  dan  $\{-1, 1\}$  kümesine fonksiyonların kümesi olsun.  $\mathcal{F}$  deki bir  $f$  fonksiyonu,  $\mathcal{F}$  ye ait olan ve  $f$  den farklı değer aldığı kafes noktalarının sayısı sonlu olan her  $g$  fonksiyonu için,

$$\sum_{\substack{P, Q \in \Lambda \\ 0 < |PQ| < 2010}} \frac{f(P)f(Q) - g(P)g(Q)}{|PQ|} \geq 0$$

koşulunu sağlıyorsa,  $f$  ye şahane diyelim. Birbirinin ötelemesi olmayan sonsuz çoklukta şahane fonksiyon bulunduğunu kanıtlayınız.

(Azer Kerimov)

**Çözüm:**

(Süha Bardakçı)

İlk olarak,  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $\mathcal{F}$  üzerinde integrallenebilir. Buna bağlı olarak bir iddia ortaya atalım.**Tanım:** Altan integral, bir fonksiyonun  $x$  ekseninin altında kalan alanı, üstten integral ise  $x$  ekseninin üstünde kalan alanı ifade etmektedir.**İddia:** Şahane  $f$  fonksiyonunun,  $\lim A = \infty$  koşulunu sağlayan herhangi bir  $A$  bölgesi için, alttan ve üstten integralleri birbirlerinin ters işaretlisidir. Yani  $\int_{\mathcal{F}_{alt}} f dA = - \int_{\mathcal{F}_{üst}} f dA$  eşitliği geçerlidir.**İspat:** Vektörel olarak  $x_i$  kafes noktalar kümesi ve  $k, m \in \Lambda$  noktaları için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k \in \Lambda} (x_{2k+1} - x_{2k}) = \int_{\mathcal{F}_{üst}} f dA$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım gereği, Alt toplamı da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m \in \Lambda} (x_{2m-1} - x_{2m}) = \int_{\mathcal{F}_{alt}} f dA$$

şeklinde tanımlamalıyız. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak, istediğimizi elde etmiş oluruz. İspat biter. ■

O halde  $f$  fonksiyonunun integrali, alt ve üst integrallerin toplamı olacağından, bu değer 0 a eşit olur. bunu kullanarak, soruda verilen eşitsizlikte her iki tarafta integral alırsak,

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{P, Q \in \Lambda \\ 0 < |PQ| < 2010}} \frac{f(P)f(Q) - g(P)g(Q)}{|PQ|} \geq 0$$

$$\int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{P, Q \in \Lambda \\ 0 < |PQ| < 2010}} \frac{f(P)f(Q)}{|PQ|} \geq \int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{P, Q \in \Lambda \\ 0 < |PQ| < 2010}} \frac{g(P)g(Q)}{|PQ|}$$

 $f$  şahane ise zaten eşitsizliğin sol tarafı 0 olacağından, İspatlamamız gereken,

$$0 \geq \int_{\mathcal{F}} \sum_{\substack{P, Q \in \Lambda \\ 0 < |PQ| < 2010}} \frac{g(P)g(Q)}{|PQ|}$$

eşitsizliğini sağlayan  $f$  den farklı sonsuz sayıda kafes noktası olan sonsuz tane  $g$  fonksiyonu olduğunu göstermek.  $|PQ|$  değeri pozitif olacağından,  $g(P)g(Q)$  ifadesi sonsuz sayıda  $f$  den farklı kafes noktası için negatif değer alabilir. O halde Sonsuz tane Şahane fonksiyon bu koşulları sağlayabilir.

## 52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2011

- 1  $\mathbf{Q}^+$  pozitif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere; her  $x \in \mathbf{Q}^+$  için

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1} \quad \text{ve} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}$$

koşullarını sağlayan tüm  $f : \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}^+$  fonksiyonlarını bulunuz.

(Serhat Doğan)

- 2  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin  $A$  noktasından geçen çapının diğer ucu  $D$  ve içteğet çemberinin merkezi  $I$  olsun. Sırasıyla  $[BA]$  ve  $[CA]$  ışınları üstünde yer alan  $E$  ve  $F$  noktaları

$$|BE| = |CF| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}$$

koşulunu sağlıyorsa,  $EF$  ve  $DI$  doğrularının dik olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Hamidoğlu)

### Çözüm:

$u, r, R$  bilinen gösterimler olmak üzere ;  $|BE| = |CF| = u, |AD| = 2R$  dir.

İçteğet çemberin  $[AB]$  ve  $[AC]$  ye değme noktaları sırasıyla  $K$  ve  $T$  olsun.

$|BT| = u - b, |CK| = u - c$  olduğundan,  $|TE| = b, |KF| = c$  dir.

$\triangle ITE$  'de,

$$|IE|^2 = b^2 + r^2 \quad (1)$$

$\triangle IKF$  'de,

$$|IF|^2 = c^2 + r^2 \quad (2)$$

$\triangle CDF$  'de,

$$|DF|^2 = u^2 + |DC|^2 = u^2 + 4R^2 - b^2 \quad (3)$$

$\triangle BDE$  'de,

$$|DE|^2 = u^2 + |BD|^2 = u^2 + 4R^2 - c^2 \quad (4)$$

(1) + (3) = (2) + (4) olduğundan,  $IFDE$  içbükey dörtgeninin köşegenleri olan  $ID$  ile  $EF$  birbirine diktir.

- 3  $A$  ve  $B$ , sırasıyla  $2011^2$  ve  $2010$  elemanlı birer küme olsun. Her  $(x, y) \in A \times A$  için,  $f(x, y) = f(y, x)$  koşulunu ve her  $g : A \rightarrow B$  fonksiyonu için,  $g(a_1) = f(a_1, a_2) = g(a_2)$  ve  $a_1 \neq a_2$  olacak biçimde bir  $(a_1, a_2) \in A \times A$  bulunmasını sağlayan bir  $f : A \times A \rightarrow B$  fonksiyonunun bulunduğunu kanıtlayınız.

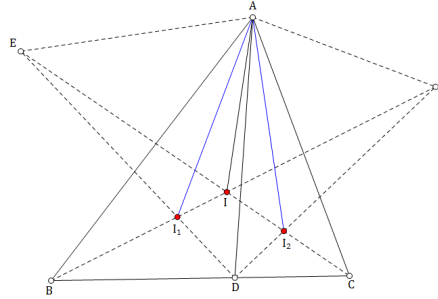
(Azer Kerimov)

- 4  $D, ABC$  üçgeninin  $[BC]$  kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere;  $ABC, ABD$  ve  $ADC$  üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla,  $I, I_1$  ve  $I_2$  dir.  $AI_1I$  ve  $ADI_2$  üçgenlerinin çevrel çemberleri  $A$  dan farklı bir  $E$  noktasında,  $AI_2I$  ve  $AI_1D$  üçgenlerinin çevrel çemberleri de  $A$  dan farklı bir  $F$  noktasında kesişiyor.  $|AI_1| = |AI_2|$  ise,

$$\frac{|EI|}{|FI|} \cdot \frac{|ED|}{|FD|} = \frac{|EI_1|^2}{|FI_1|^2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

**Çözüm:**

$\angle AI_1I = \angle ADI_2$  ve  $\angle IAI_1 = \angle DAI_2$  olduğundan,  $\triangle AI_1I$  ile  $\triangle ADI_2$  nin çevrel çemberleri ikinci kez  $I_2I$  ve  $DI_1$  doğrularının kesim noktasında kesişirler.

Benzer şekilde,  $\angle ADI_1 = \angle AI_2I$  ve  $\angle I_1AD = \angle IAI_2$  olduğundan,  $\triangle AII_2$  ile  $\triangle AI_1D$  nin de çevrel çemberleri de ikinci kez  $I_1I$  ve  $DI_2$  doğrularının kesim noktasında kesişirler.

Bu noktalar sırasıyla  $E$  ve  $F$  olarak bilinmektedir.

Açılar incelendiğinde aşağıdaki benzerliklere ulaşabiliriz.

$$\triangle AI_1E \sim \triangle AI_2F \Rightarrow \frac{|EI_1|}{|FI_2|} = \frac{|AE|}{|AI_2|} = \frac{|AI_1|}{|AF|} \Rightarrow \frac{|EI_1|^2}{|FI_2|^2} = \frac{|AE|}{|AF|}$$

$$\triangle AIE \sim \triangle AFD \Rightarrow \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EI|}{|FD|}$$

$$\triangle AED \sim \triangle AIF \Rightarrow \frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|ED|}{|FI|}$$

Bulunan son iki orantıdan,

$$\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|EI|}{|FI|} \cdot \frac{|ED|}{|FD|}$$

elde edilir.

**5**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$  koşulunu sağlayan tüm pozitif  $a, b, c$  gerçel sayıları için,

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

**Çözüm:**

$(b+1)(b+5) \leq \frac{4}{3}(b+2)^2$  olduğunu ifadeyi açarak kolayca görebiliriz. O halde bizim;

$$\frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+2)} + \frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+2)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(a+2)} \geq 2$$

göstermemiz yeterli olacaktır. **Faydalı Eşitsizlikten** dolayı;

$$\frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+2)} + \frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+2)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(a+2)} \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)+6}$$

idir. Bundan sonra bizim;

$$(a+b+c+3)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) + 6(a+b+c) + 9 \geq 2(ab+bc+ca) + 6(a+b+c) + 12$$

göstermemiz yeterlidir. Bu da  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$  olduğundan doğrudur. İspat biter.

**6**  $n$  pozitif tam sayısının iki tabanına göre yazılımındaki rakamların toplamını  $t(n)$  ile gösterelim.  $k \geq 2$  bir tam sayı olsun.

a. Tüm  $m \geq N$  tam sayıları için,  $t(3 \cdot 5 \cdots (2m+1)) > k$  olmasını sağlayan bir  $N$  tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

b. Her  $m$  pozitif tam sayısı için,  $a_m \geq 3$  bir tek sayı ve  $t(a_1 a_2 \cdots a_m) = k$  olacak biçimde bir  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  tam sayılar dizisi bulunduğunu gösteriniz.

(Okan Tekman)

**7**  $K$ , dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir nokta ve  $ARBPCQ$ , köşeleri  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $\Gamma$  nin üstünde bulunan dışbükey bir altıgen olsun.  $K$  den geçen ve  $\Gamma$  ya  $A$  da teğet olan çemberin  $AP$  doğrusunu ikinci kez kestiği nokta  $A_1$ ,  $K$  den geçen ve  $\Gamma$  ya  $B$  de teğet olan çemberin  $BQ$  doğrusunu ikinci kez kestiği nokta  $B_1$ ,  $K$  den geçen ve  $\Gamma$  ya  $C$  de teğet olan çemberin  $CR$  doğrusunu ikinci kez kestiği nokta  $C_1$  ise,

$$\min \left\{ \frac{|PA_1|}{|AA_1|}, \frac{|QB_1|}{|BB_1|}, \frac{|RC_1|}{|CC_1|} \right\} \leq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

**8** 2011 kentin bulunduğu Çizgistan'daki her kent ikilisi için, Çizge Hava Yolları (ÇHY) tarafından bu kentlerden yalnızca birinden diğerine tek yönlü olarak uçak seferleri düzenlenmektedir. Her kentin kalkış noktası olduğu seferlerin sayısı ile varış noktası olduğu seferlerin sayısının farkının mutlak değeri  $k$  yi aşmamak koşuluyla bu seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, Çizgistan'ın herhangi bir kentinden herhangi başka bir kente yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak ulaşmak mümkün olmaktadır.  $k$  nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

**9**  $p$  bir asal sayı,  $n$  bir pozitif tam sayı olsun ve  $\mathbf{Z}_{p^n} = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$  olsun. Her  $a, b \in \mathbf{Z}_{p^n}$  için,  $(a+b+pab, a+b+pab)$  nin  $p^n$  ye bölümünden kalanı göstermek üzere),

$$f(a) + f(b) \equiv f(a+b+pab) \pmod{p^n}$$

koşulunu sağlayan kaç  $f : \mathbf{Z}_{p^n} \rightarrow \mathbf{Z}_{p^n}$  fonksiyonunun bulunduğunu belirleyiniz.

(Okan Tekman)

**Çözüm:**

**Resmi Çözüm:**

$i \geq 0$  için  $a_i = \frac{(1+p)^i - 1}{p}$  kabul edelim. Tümevarımla  $f(a_i) \equiv i \cdot f(1) \pmod{p^n}$  elde ederiz.

Eğer  $p > 2$  veya  $p = 2$  ve  $n = 1$  ise,

$$a_i \equiv a_j \pmod{p^n} \implies (1+p)^{j-i} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}} \implies i \equiv j \pmod{p^n}.$$

olacak ve  $a_i + a_j + pa_i a_j = a_{i+j}$  eşitliği gerçekleşecektir.  $i, j \geq 0$  için fonksiyon  $f(a_i) \equiv ic \pmod{p^n}$ , ( $0 \leq i < p^n$ ), şeklinde tanımlı olacak ve  $c \in \mathbb{Z}_{p^n}$ . gibi  $p^n$  farklı şekilde seçilebilecek.

Eğer  $p = 2$  ve  $n > 1$  ise,

$$a_i \equiv a_j \pmod{2^n} \implies 3^{j-i} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}} \implies i \equiv j \pmod{2^{n-1}}.$$

$\mathbb{Z}_{p^n} = \{a_i : 0 \leq i < 2^{n-1}\} \cup \{-a_i - 1 : 0 \leq i < 2^{n-1}\}$ ., ayrıca  $2f(-1) \equiv f(-1) + f(-1) \equiv f((-1) + (-1) + 2(-1)(-1)) \equiv f(0) \equiv 0 \pmod{2^n}$ . eşitliği de olacaktır.

Aynı şekilde  $i, j \geq 0$  için,  $a_i + a_j + 2a_i a_j = a_{i+j}$ ,  $a_i + (-a_j - 1) + 2a_i(-a_j - 1) = -a_{i+j} - 1$ , ve  $(-a_i - 1) + (-a_j - 1) + 2(-a_i - 1)(-a_j - 1) = a_{i+j}$  olduğundan fonksiyon  $f(a_i) \equiv ic \pmod{2^n}$  şeklinde olacak ve  $f(-a_i - 1) \equiv ic + d \pmod{2^n}$ , ( $0 \leq i < 2^{n-1}$ ), ifadesi de doğru olacaktır.

□

### 53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2012

- 1  $A = \{1, 2, \dots, 2012\}$ ,  $B = \{1, 2, \dots, 19\}$  ve  $S$  de  $A$  nın tüm altkümelerinin kümesi olsun. Her  $A_1, A_2 \in S$  için,  $f(A_1 \cap A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$  koşulunu sağlayan tüm  $f : S \rightarrow B$  fonksiyonlarının sayısını belirleyiniz.  
(Selim Bahadır)

- 2  $D$ , dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin  $[BC]$  kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere;  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  sırasıyla,  $[AD], [AB], [AC], [BD], [CD]$  doğru parçalarının orta noktaları;  $O_1, O_2, O_3, O_4$  sırasıyla,  $ABD, ACD, M_1M_2M_4, M_1M_3M_5$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri;  $S$  ve  $T$  de sırasıyla,  $AO_1$  ve  $AO_2$  doğru parçalarının orta noktaları olsun.  $SO_3O_4T$  dörtgeninin bir ikizkenar yamuk olduğunu kanıtlayınız.  
(Selim Bahadır)

#### Çözüm:

$M_1M_2$  nin orta noktası  $P$ ;  $M_1M_3$  ün orta noktası  $R$  olsun.

Açık şekilde  $O_1M_4 \parallel PO_3$  ve  $\triangle M_4M_1M_2 \sim \triangle ABD$  benzerliğinden  $O_3P = O_1M_4$ .

$AP = PM_4$  ve  $AS = SO_1$  olduğundan  $SP \parallel O_1M_4$ , dolayısıyla da  $S, P, O_3$  doğrusal ve  $SP = PO_3$ .

Aynı işlemleri  $O_2$  ve  $O_4$  için yaptığımızda,  $TR = RO_4$  ve  $T, R, O_4$  doğrusal olacak.  $O_3P \parallel O_4R$  olduğu için  $SO_3O_4T$  bir yamuk;  $RP$ , bu yamuğun simetri eksenini olduğu için de ikizkenar bir yamuktur.

- 3  $ab + bc + ca \leq 1$  koşulunu sağlayan tüm  $a, b, c$  pozitif gerçel sayıları için,

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left( \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

#### Çözüm:

$(a + b)(a + c) = a^2 + ab + bc + ca \leq a^2 + 1$  dir.  $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{2(a + b + c)}{(a + b)(b + c)(c + a)}$  olur.

**Lemma:**  $9(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(a + b + c)(ab + bc + ca)$

**İspat:**  $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$  olduğunu biliyoruz. Yerine koyarsak  $9(a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc \geq 8(a + b + c)(ab + bc + ca)$  ve  $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$  göstermemiz yeterli olur. Bu da  $A.G.O$  dan barizdir.

O halde biz  $8abc \left( \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right) \leq \frac{16abc(a + b + c)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \leq \frac{18abc}{ab + bc + ca}$  olduğunu gösterdik.

Bundan sonra;

$a + b + c + \sqrt{3} \geq \frac{18abc}{ab + bc + ca}$  göstermemiz yeterli olacaktır. Düzenlersek;

$(a + b + c)(ab + bc + ca) + \sqrt{3}(ab + bc + ca) \geq 18abc$  göstermeliyiz.  $A.G.O$  dan  $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$  dir. O halde  $\sqrt{3}(ab + bc + ca) \geq 9abc$  göstermemiz yeterlidir.

$A.G.O$  dan  $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$  idir. Verilen bilgiden  $\frac{1}{3} \geq \frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$  olur ve  $\frac{1}{3\sqrt{3}} \geq abc$

olur. Buradan da  $\sqrt{3}(ab + bc + ca) \geq 9abc$  elde ederiz. İspat biter. Eşitlik  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  için sağlanır.

- 4 Bir  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberi  $[BC], [CA], [AB]$  kenarlarına sırasıyla,  $D, E, F$  noktalarında değiyor.  $A$  noktasında geçen ve  $BC$  doğrusuna  $D$  de teğet olan çember ise,  $[BF]$  ve  $[CE]$  doğru parçalarını sırasıyla,  $K$  ve  $L$  noktalarında kesiyor.  $E$  den geçen ve  $DL$  ye paralel olan doğru ile  $F$  den geçen ve  $DK$  ye paralel olan doğru da  $P$  noktasında kesişiyor.  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sırasıyla,  $AFD, AED, FPD, EPD$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları olmak üzere,  $R_1R_4 = R_2R_3$  olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

**Çözüm:**

$u$  yarıçevre olmak üzere;  $BD = BF = u - b$ ,  $CD = EC = u - c$ ,  $AF = AE = u - a$ .

$B$  nin  $(AKDL)$  çemberine göre kuvvetinden  $BK = \frac{(u-b)^2}{c}$  ve  $C$  nin aynı çembere göre kuvvetinden  $CL = \frac{(u-c)^2}{b}$ .

Bu durumda  $KF = (u-b) - \frac{(u-b)^2}{c}$  ve  $EL = (u-c) - \frac{(u-c)^2}{b}$ . Biraz aritmetiklikle

$$\frac{KF}{EL} = \frac{b(u-b)}{c(u-c)}.$$

$\triangle BDK \sim \triangle BAD$  olduğu için  $\frac{KD}{AD} = \frac{BD}{AB} = \frac{u-b}{c}$ , aynı şekilde  $\triangle CDL \sim \triangle CAD$  olduğu için  $\frac{DL}{AD} = \frac{DC}{AC} = \frac{u-c}{b}$ . Taraf tarafa oranlarsak;

$$\frac{KD}{DL} = \frac{b(u-b)}{c(u-c)} = \frac{KF}{EL} \quad (1)$$

$(AFD)$  nin yarıçapı  $R_1 = \frac{AD}{2 \sin \angle AFD} = \frac{AD}{2 \sin \angle KFD}$ ,

$(FPD)$  nin yarıçapı  $R_3 = \frac{PD}{2 \sin \angle PFD} = \frac{PD}{2 \sin \angle FDK}$ .

Taraf tarafa oranlarsak

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{AD \cdot \sin \angle FDK}{PD \cdot \sin \angle KFD} = \frac{AD}{PD} \cdot \frac{KF}{KD} \quad (2)$$

$(AED)$  nin yarıçapı  $R_2 = \frac{AD}{2 \sin \angle AED} = \frac{AD}{2 \sin \angle DEL}$ ,

$(EPD)$  nin yarıçapı  $R_4 = \frac{PD}{2 \sin \angle PED} = \frac{PD}{2 \sin \angle EDL}$ .

Taraf tarafa oranlarsak

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{AD \cdot \sin \angle EDL}{PD \cdot \sin \angle DEL} = \frac{AD}{PD} \cdot \frac{EL}{DL} \quad (3)$$

(2) ile (3) oranlayıp (1) deki eşitliği yerine yazarsak  $R_1 R_4 = R_2 R_3$  eşitliğini elde ederiz.

- 5 Hangi  $n$  pozitif tam sayıları için, her biri  $n$  ile bölünen  $n$  tane tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabilen her pozitif tam sayının, hiçbiri  $n$  ile bölünmeyen  $n$  tane tam sayının karelerinin toplamı olarak da yazılabileceğini belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

**Çözüm:**

**Resmi Çözüm:** Bu şartları sağlayan pozitif tamsayılarına iyi sayı diyelim. Her  $n$  iyi sayısının tüm katlarının iyi sayı olduğunu göstereyim.  $m = nk$  olmak üzere, her  $1 \leq i \leq m$  için  $m \mid x_i$  olsun.  $n \mid x_i$  ve  $n$  bir iyi sayı olduğuna göre, her  $0 \leq l \leq k-1$  indisi için

$$\sum_{i=nl+1}^{n(l+1)} x_i^2 = \sum_{i=nl+1}^{n(l+1)} y_i^2$$

olacak şekilde hiçbiri  $n$  ile tam bölünmeyen  $y_1, y_2, \dots, y_m$  sayıları bulunur. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{nk} x_i^2 = \sum_{i=1}^{nk} y_i^2$$

ve tüm  $1 \leq i \leq m$  indisleri için  $m = nk \nmid y_i$  olur. Şimdi tüm pozitif tek tam sayıların iyi sayı olduğunu gösterelim.

**Lemma:**  $n$  bir pozitif tek tam sayı olmak üzere,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tam sayılarından en az biri  $n$  ile tam bölünmeyen sayı olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^n (nx_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

olacak şekilde hiçbir  $n$  ile tam bölünmeyen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  tam sayıları vardır.

**Lemmanın İspatı:** Genelliği bozmadan  $n \nmid x_1$  kabul edelim.  $X = 2 \sum_{i=1}^n x_i$  olsun.  $n \mid X$  ise  $x_1$  yerine  $-x_1$  yazarsak  $n \nmid x_1$  ve  $n$  tek olduğundan  $n \nmid 4x_1$  olur. Sonuç olarak yine genelliği bozmadan  $n \nmid X$  alabiliriz. Şimdi

$$\sum_{i=1}^n (nx_i)^2 = \sum_{i=1}^n (X - nx_i)^2$$

eşitliğinde her  $1 \leq i \leq n$  için  $y_i = X - nx_i$  alırsak lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

$n$  bir pozitif tam sayı olmak üzere, bir  $a$  sayısı her biri  $n$  ile tam bölünen  $n$  tam sayının karelerinin toplamına eşitse,  $a = \sum_{i=1}^n (n^r x_i)^2$  ve her  $1 \leq i \leq n$  için  $n \nmid x_i$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tam sayıları bulunur. Lemmayı  $r$  kez kullanarak,  $a = \sum_{i=1}^n y_i^2$  ve her  $1 \leq i \leq n$  için  $n \nmid y_i$  olacak şekilde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  tam sayıları elde edilir.

Şimdi 8 sayısının iyi sayı olduğunu gösterelim. Bir  $a$  sayısı her biri 8 ile tam bölünen 8 tam sayının karelerinin toplamına eşitse  $64 \mid a$  ve  $a \geq 64$  olur. O zaman Lagrange'ın 4 kare teoremine göre,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  tam sayılar olmak üzere,  $a = 1^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  olur. Bu durumda  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 7 \pmod{8}$  ve 7 sayısının (mod 8) de sadece  $1 + 1 + 1 + 4$  şeklinde gösterildiğine göre, tüm  $1 \leq i \leq 4$  indisleri için  $8 \nmid x_i$  elde edilir.

4 sayısı iyi sayı değildir, çünkü  $32 = 4^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2$  sayısı hiçbir  $4$  ile bölünmeyen 4 sayının karesinin toplamı şeklinde gösterilemez. İyi sayının tüm katları da iyi sayı olduğuna göre, 1 ve 2 sayıları da iyi sayı değildir. Dolayısıyla şartı sağlayan sayılar, 1, 2, 4 haricindeki tüm pozitif tam sayılardır.

- 6** Arda ile Başak  $1 \times m$  bir satranç tahtası ve üzerlerinde 1 den 2012 ye kadar tam sayıların yazılı olduğu 2012 taşla bir oyun oynuyorlar. Her hamlede Arda bir taş seçiyor ve Başak bunu tahtanın istediği boş bir karesine yerleştiriyor. Bu biçimde yapılan  $k$  hamle sonucunda seçilen taşlar tahtaya artan bir sırada yerleştirilmişse, oyunu Başak; değilse, Arda kazanıyor. Hangi  $(m, k)$  ikilileri için Başak'ın oyunu kazanmayı garantileyebileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

- 7** Bir  $r$  rasyonel sayısı ve bir  $n$  pozitif tam sayısı için,  $S_r(n) = 1^r + 2^r + \dots + n^r$  olsun. Sonsuz çoklukta  $n$  pozitif tam sayısı için,  $S_a(n) = (S_b(n))^c$  olmasını sağlayan bütün  $a, b$  pozitif rasyonel sayılarını ve  $c$  pozitif tam sayılarını belirleyiniz.

(Ömer Faruk Tekin)

### Çözüm:

Cevap:  $a = 3; b = 1; c = 2$  ve  $a = b \in \mathbf{Q}^+; c = 1$ .

Koşulda  $n$  üstünde Bernoulli Eşitsizliği uygularsak tüm pozitif  $n$  tamsayıları ve pozitif rasyonel  $r$  sayıları için;

$$\frac{n^{r+1}}{r+1} \leq S_r(n) \leq \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}$$

elde ederiz.  $S_a(n) = (S_b(n))^c$  eşitliğinde benzer biçimde  $r = a, b$  için Bernoulli eşitsizliği uygularsak;

$$\frac{n^{a+1}}{a+1} \leq \left( \frac{(n+1)^{b+1}}{b+1} \right)^c \text{ ve } \frac{(n+1)^{a+1}}{a+1} \geq \left( \frac{n^{b+1}}{b+1} \right)^c$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{n^{(b+1)c}}{(n+1)^{a+1}} \leq \frac{(b+1)^c}{a+1} \leq \frac{(n+1)^{(b+1)c}}{n^{a+1}}$$

eşitsizliğin sonsuz sayıda  $n$  pozitif tamsayısı için sağlandığını elde ederiz. Son eşitsizlikte  $n$  e sonsuza yakın bir değer verdiğimizde  $(b+1)c = a+1$  ve  $(b+1)^c = a+1$  olması gerektiğini elde ederiz.  $c = 1$  ise  $a = b$  sağlar.  $c > 1$  ise  $c = (b+1)^{c-1}$  ve  $b \in \mathbf{Z}$  olur.  $b \geq 1$  den  $c \geq 2^{c-1}$  olmalıdır. Yani  $c = 2$  dir. Buradan  $a = 3, b = 1$  gelir ve ispat biter.

- 8  $ABC \cong A'B'C'$  olacak biçimde düzlemde yer alan birbirinden farklı  $A, B, C, A', B', C'$  noktaları için,  $ABC$  üçgeninin ağırlık merkezi  $G$  noktası olsun.  $G$  den geçen  $A'$  merkezli çember ile  $[AA']$  çaplı çember  $A_1$  noktasında,  $G$  den geçen  $B'$  merkezli çember ile  $[BB']$  çaplı çember  $B_1$  noktasında,  $G$  den geçen  $C'$  merkezli çember ile  $[CC']$  çaplı çember de  $C_1$  noktasında kesişiyorsa,

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

- 9 Tüm pozitif tam sayıların kümesinin  $\mathbf{Z}^+$  ile, tüm asal sayıların kümesini de  $\mathbf{P}$  ile gösterelim.  $A$  ve  $S$ ,  $\mathbf{Z}^+$  nın altkümeleri olmak üzere;  $A$  nın tüm  $a$  elemanları ve  $0 \leq b < a$  koşulunu sağlayan tüm  $b$  tam sayıları için,  $b \equiv s_1 + s_2 + \dots + s_n \pmod{a}$  ve  $1 \leq n \leq N$  olacak biçimde  $S$  ye ait  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sayılarının bulunmasını sağlayan bir  $N$  pozitif tam sayısı varsa,  $A$  kümesine  $S$ -uygun diyelim.

$\mathbf{P}$  kümesi  $S$ -uygun olacak ve  $\mathbf{Z}^+$  kümesi  $S$ -uygun olmayacak biçimde  $\mathbf{Z}^+$  nın bir  $S$  altkümesini bulunuz.

(Umut Varolgüneş)

## 54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2013

- 1 Bir  $n$  pozitif tam sayısı için,  $n$  den küçük ve  $n$  ile arasında asal olan pozitif tam sayıların sayısı  $\phi(n)$  ile gösterilmek üzere,

$$2^n + (n - \phi(n) - 1)! = n^m + 1$$

eşitliğini sağlayan tüm  $(m, n)$  pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Vefa Göksel)

- 2  $2013 \times 2013$  bir satranç tahtasının birim karelerine, her birim karede en çok bir taş olacak ve birim karelerden oluşan her  $19 \times 19$  karede de en az 21 taş olacak biçimde en az kaç taş yerleştirilebileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

- 3  $\hat{B}$  ve  $\hat{C}$  açıların ölçüleri farklı olan dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  ve iç teğet çemberinin merkezi de  $I$  dir.  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ve  $I$  dan  $[AB]$  ye inilen dikmenin ayağı  $T$  olsun.  $DEF$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $P$  ve  $[OI]$  doğru parçasının orta noktası  $Q$  olmak üzere,  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  noktaları doğrudur ise,

$$\frac{|AO|}{|OD|} - \frac{|BC|}{|AT|} = 4$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

- 4  $m^6 = n^{n+1} + n - 1$  eşitliğini sağlayan tüm  $(m, n)$  pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

#### Çözüm:

Eğer  $n$  bir tek sayı ise  $\left(n^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{2}} + 1\right)^2$  olduğundan eğer  $n \geq 2$  ise buradan çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz.  $n = 1$  için sağlar.

Eğer  $n \equiv -1 \pmod{3}$  ise  $\left(n^{\frac{n+1}{3}}\right)^3 < n^{n+1} + n - 1 < \left(n^{\frac{n+1}{3}} + 1\right)^3$  olduğundan buradan da  $n \geq 2$  için çözüm gelmeyeceğini söyleyebiliriz.  $n = 1$  i saymıştık.

Eğer  $n \equiv 0 \pmod{3}$  ise  $m^6 \equiv -1 \pmod{3}$  olur ve buradan da çözüm gelmez.

O halde  $n \equiv 4 \pmod{6}$  diyelim.  $n + 1 | n^{n+1} + n + 2 = y^6 + 3$  olduğunu söyleyebiliriz. Buradan  $n + 1 \equiv 5 \pmod{6}$  olur. Buradan  $n + 1$  i bölecek şekilde bir  $p \equiv 2 \pmod{3}$  olacak şekilde bir  $p$  asalının varlığını bilebiliriz.  $y^6 \equiv -3 \pmod{n + 1}$  idir. O halde  $y^6 \equiv -3 \pmod{p}$  olur. Ancak bir tamkare  $p \equiv 2 \pmod{3}$  olmak üzere  $\pmod{p}$  de  $-3$  kalanını veremez.  $p > 2$  idir.

**İspat:** Diyelim ki bir  $x$  için  $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$  olsun. Şimdi de  $2y + 1 \equiv x \pmod{p}$  olacak şekilde bir  $y$  seçelim. Buradan  $y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow y^3 \equiv 1 \pmod{p}$  olur. O halde  $y$  nin  $\pmod{p}$  deki mertebesi  $d$  olmak üzere  $(d, 3) = 1, 3$  olabilir.  $= 1$  ise  $y \equiv 1 \pmod{p}$  olur.  $p = 3$  olması gerekir. Çelişki!  $= 3$  olsa  $3 | d | p - 1$  olması gerekir. Çelişki! Kabul yanlıştır ve böyle  $x$  ler yoktur.

O halde bu durumdan da çözüm gelmez ve ispat biter. Yalnızca  $n = 1$  sağlar.

- 5 Bir  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin  $[BC]$  kenarına teğet olduğu nokta  $D$  ve merkezi  $I$ ;  $[ID]$  doğru parçasının orta noktası ise  $T$  olsun.  $I$  dan  $AD$  doğrusuna çizilen dikme  $AB$  ve  $AC$  doğrularını sırasıyla,  $K$  ve  $L$  noktalarında;  $T$  den  $AD$  ye çizilen dikme de bu doğruları sırasıyla,  $M$  ve  $N$  noktalarında kesiyor.  $|KM| \cdot |LN| = |BM| \cdot |CN|$  olduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

**Çözüm:**

$\triangle ABC$  de,  $AI$  doğrusu  $BC$  yi  $W$  kessin.  $I$  dan  $BC$  ye çizilen paralel  $AD$  yi  $P$  de kessin.  $u$  yarıçevre olmak üzere;

**İddia:**

$$PI = \frac{(u-a)(b-c)}{a+b+c}$$

**İspat:**

$$CD = u - c, WC = \frac{ab}{b+c} \implies DW = \frac{(u-a)(b-c)}{b+c}$$

$$\frac{AI}{AW} = \frac{AC}{AC+CW} = \frac{b}{b+\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

$$\frac{PI}{DW} = \frac{AI}{AW} \implies PI = DN \cdot \frac{AI}{AW} = \frac{(u-a)(b-c)}{a+b+c} \blacksquare$$

Soruya geri dönelim.

$KL$ ,  $AD$  yi  $R$  de;  $MN$ ,  $AD$  yi  $S$  de kessin.

$B$  den  $AD$  ye inilen dikmenin ayağı  $X$ ;  $C$  den  $AD$  ye inilen dikmenin ayağı  $Y$  olsun.

$$\frac{KM}{BM} = \frac{RS}{SX} \text{ ve } \frac{LN}{CN} = \frac{RS}{SY}$$

Bu durumda,

$$\frac{KM \cdot LN}{BM \cdot CN} = 1 \iff RS^2 = SX \cdot SY$$

olacaktır.  $\angle XBD = \theta$  dersek,  $\angle ADI = \angle DCY = \theta$  ve  $XD = (u-b) \sin \theta$  and  $DY = (u-c) \sin \theta$  olacaktır.

$$SX = SD - XD = RS - XD \text{ ve } SY = SD + DY = RS + DY$$

$$SX \cdot SY = (RS - XD)(RS + DY) = RS^2 + RS(DY - XD) - XD \cdot DY$$

olduğu için amacımız  $RS(DY - XD) = XD \cdot DY$  olduğunu göstermek.

$ID = r$  dersek,  $RS = \frac{r}{2} \cdot \cos \theta$ .

$$RS(DY - XD) = XD \cdot DY \iff \frac{r}{2} \cdot \cos \theta (b-c) \sin \theta = (u-b)(u-c) \sin^2 \theta$$

$$\iff r = \frac{2(u-b)(u-c)}{(b-c)} \cdot \tan \theta$$

$$\iff u(u-a)r = \frac{2u(u-a)(u-b)(u-c)}{2(b-c)} \cdot \tan \theta$$

$$\iff u(u-a)r = \frac{2u^2 r^2}{(b-c)} \cdot \tan \theta$$

$$\iff (u-a)(b-c) = 2ur \cdot \tan \theta$$

$$\iff \frac{(u-a)(b-c)}{2u} = r \cdot \tan \theta$$

$PI = \frac{(u-a)(b-c)}{a+b+c}$  olduğunu göstermiştik. Aynı zamanda  $PI = r \tan \theta$  olduğu için çift yönlü gerektirmenin son ifadesi doğrudur. Bu durumda  $RS(DY - XD) = XD \cdot DY$  olacaktır.  $\blacksquare$

- 6  $-2 \leq x, y, z \leq 2$  ve  $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$  koşullarını sağlayan tüm  $x, y, z$  gerçel sayıları için,

$$\frac{z(xz + yz + y)}{xy + y^2 + z^2 + 1} \leq K$$

olmasını sağlayan en küçük  $K$  gerçel sayısını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

#### Çözüm (Fehmi Emre Kadan):

$|x|$  ifadesi 2 ye eşit olmasın. O halde ;

$$xy + y^2 + z^2 + 1 - z(xz + yz + y) = \left(x + y - \frac{x + z^2}{2}\right)^2 + \frac{4 - x^2}{4} \cdot \left[1 - \frac{z(xz + 2y)}{4 - x^2}\right]^2 + \frac{(4 - x^2 - y^2 - z^2 - xyz)z^2}{4 - x^2} \geq 0$$

olduğundan  $K$  en az 1 dir. Eşitlik  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, y = z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  iken sağlanır.

$|x| = 2$  ise bu durumun incelenmesi kolaydır. Buradan çelişki çıkmaz.

Sonuç olarak  $K = 1$  sağlar.

- 7 Dışbükey bir  $ABCD$  dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası  $E$  olmak üzere,  $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$  koşulu sağlanıyor.  $[BC]$  kenarı üstündeki bir  $F$  noktası için,  $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$  ise,  $A, B, F, D$  noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

$(ABD)$  çemberi  $BC$  yi  $G$  de kessin.  $\angle BAD = \angle DGC = \angle CED$  olduğu için  $E, G, C, D$  çemberseldir. Bu durumda

$$BE \cdot BD = BG \cdot BC \quad (1)$$

olacaktır.  $\angle BAD = \angle AEB$  olduğu için

$$BE \cdot BD = AB^2 \quad (2)$$

dir. (1) ile (2) yi birleştirirsek

$$BG \cdot BC = AB^2 \quad (3)$$

elde edilir. Bu da

$$\angle BAF = \angle BCA \quad (4)$$

ile eşdeğerdir.  $\angle BAD = \angle BDC$  olduğu için  $CD$  doğrusu  $(ABD)$  çemberine teğettir. Dolayısıyla,

$$\angle CBD = \angle GDC \quad (5)$$

Bu durumda  $EGCD$  kirişler dörtgeninde  $\angle GEC = \angle GDC = \angle CBD$  olacaktır. Bunu (4) ile birleştirirsek

$$\angle EGB = \angle GEC + \angle BCA = \angle EBF + \angle BAF = \angle EFB \quad (6)$$

elde ederiz. Bu da  $F = G$  anlamına gelir. Yani  $A, B, F, D$  noktaları çemberseldir.

- 8 Tüm  $x, y$  gerçel sayıları için,

$$f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$$

$$f(-x) = f(x - 1)$$

$$1 < x < y \implies f(x) < f(y)$$

koşullarını sağlayan bütün  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  fonksiyonlarını belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

- 9 Bir ülkedeki  $n$  kentten bazıları arasında, herhangi iki kent arasında ulaşımı olanaklı kılacak ve her kentten en az  $k$  sefer olacak biçimde karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Bu seferlerin, nasıl düzenlenmiş olurlarsa olsunlar,  $n - k$  hava yolu şirketi arasında, herhangi bir kentten bir diğerine aynı hava yolu şirketini birden fazla kere kullanmadan gitmek mümkün olacak biçimde paylaştırılabileceğini kanıtlayınız.

(Azer Kerimov)

## 55. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2014

- 1**  $(1, 2, \dots, 2014)$  2014-lüsünün, her  $1 \leq i < j \leq 2014$  için,  $i + a_i \leq j + a_j$  koşulunu sağlayan  $(a_1, a_2, \dots, a_{2014})$  permütasyonlarının sayısını belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

### Çözüm:

İlk olarak 2014 sayısını nereye yerleştireceğimize bakalım;

$a_1 = 2014$  olsun. Bu durumda  $a_1 + 1 = 2014 + 1 = 2015$  olur.

$2015 \leq a_2 + 2$   $2013 \leq a_2$   $a_1 = 2014$  olduğundan  $\implies a_2 = 2013$ .

Aynı şekilde;  $2015 \leq a_3 + 3$   $2012 \leq a_3$   $a_1 = 2014$  ve  $a_2 = 2013$  olduğundan  $\implies a_3 = 2012$ .

Bu şekilde  $a_{2014}$ 'e kadar gidersek  $(2014, 2013, 2012, \dots, 2, 1)$  permütasyonu elde edilir.

Şimdi en büyük sayıdan (Bu durumda 2014) sonraki sıralamanın belirli olduğunu gösterelim:

$a_n = 2014$  olsun.

$2014 + n \leq a_{n+1} + n + 1$   $2013 \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} = 2013$

Bu yukarıdaki gibi permütasyonun sonuna kadar gider ve  $(\dots, 2014, 2013, 2012, \dots, n + 1, n)$  şeklinde olur (bütün permütasyonlarda).

Şimdi  $n$ 'den önceki sayıları sıralayalım ve sonuna az önceki permütasyonu ekleyelim. Yani  $(1, 2, 3, \dots, n - 1)$ 'in permütasyonlarını bulalım.

Bunun için de  $n - 1$  sayısını yerleştirelim. Az önce gösterdiğimiz gibi  $n - 1$ 'den sonraki sayıların sıralaması belirlidir.

$a_{n_1} = n - 1$  olsun. O zaman permütasyon  $(\dots, n - 1, n - 2, n - 3, \dots, a_{n_1})$  şeklinde olur.

Bu durumda yine kalan sayıları sıralarız ve bu şekilde giderek sonlu hamle sonra bir grubu sıralamayı bıraktığımızda permütasyonumuz oluşur.

**X** hamle sonunda kalan sayıların en büyüğünü  $n_x$  ile gösterelim. Permütasyonların genel şekli

$$n_k \leq n_{k-1} \leq n_{k-2} \leq \dots \leq n_0$$

olacak şekilde aşağıdaki gibidir:

$$(n_k, n_k - 1, \dots, 1, n_{k-1}, n_{k-1} - 1, n_{k-1} - 2, \dots, n_k + 1, \dots, n_0, n_0 - 1, n_0 - 2, \dots, n_1 + 1)$$

Örnek durum  $n_0 = 2014, n_1 = 35, n_2 = 3$  olacak şekilde  $(3, 2, 1, 35, 34, \dots, 5, 4, 2014, 2013, \dots, 37, 36)$ 'dir.

Bu sıralamayı  $(n_k, n_{k-1}, n_{k-2}, \dots, n_0)$  sayılarının ne olduğu belirler.  $n_0 = 2014$  olduğu barizdir. Biz kalanları kaç farklı şekilde seçebileceğimizi inceleyelim:

$k = 2013$  için kalan sayıları  $\binom{2013}{2013}$  şekilde,

$k = 2012$  için kalan sayıları  $\binom{2013}{2012}$  şekilde,

Bu şekilde giderek,

$k = 1$  için kalan sayıları  $\binom{2013}{1}$  şekilde,

$k = 0$  için kalan sayılı  $\binom{2013}{0}$  şekilde seçeriz.

Hepsini toplarsak  $\sum_{i=0}^{2013} \binom{2013}{i} = 2^{2013}$  permütasyonların sayısını elde ederiz.

Cevap:  $2^{2013}$

2 Tüm  $x, y$  gerçel sayıları için,

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x + 1))^2$$

koşulunu sağlayan bütün  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

İlk eşitlik

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x + 1))^2 \quad \dots(1)$$

olsun.  $f$  fonksiyonunun birebir ve örten olduğu barizdir.  $f(0) = a, f(1) = b$  olsun. Eşitlikte  $x \rightarrow 0$  koyarsak  $\forall y \in \mathbf{R}$  için

$$y = f(f(y) + 1) - b^2 \quad \dots(2)$$

idir. ... (2) yi ... (1) de yerine koyalım.

$$f(f(y) + 1 + x^2) + 2x + b^2 = f(f(y) + 1) + f^2(x + 1) \quad \dots(3)$$

olur.  $f$  in birebirliği biliyoruz o halde;

$$f(x^2 + y) + 2x + b^2 = f(y) + f^2(x + 1) \quad \dots(4)$$

elde edilir. Burada yerine  $y \rightarrow 0$  koyarsak;

$$f^2(x + 1) = f(x^2) + 2x + b^2 - a \quad \dots(5)$$

elde edilir. Bunu ... (4) te yerine koyarsak;

$$f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y) - a$$

elde edilir. Buradan da  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0$  için;

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a \quad \dots(6)$$

elde edilir. Bu eşitliğin  $x < 0$  için de sağladığımızı kolayca görebiliriz. O yüzden;

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a \quad \dots(7)$$

elde edilir. ... (7) de  $x = y = 1$  koyarsak  $f(2) = 2b - a$  buluruz. ... (5) te  $x = 1$  koyarsak  $f^2(2) = b^2 + b + 2 - a$  elde ederiz. O yüzden;

$$(2b - a)^2 = b^2 + b + 2 - a \quad \dots(8)$$

elde edilir. ... (5) te  $x = -1$  koyarsak;

$$a^2 + a = b^2 + b - 2 \quad \dots(9)$$

elde edilir. ... (8) ve ... (9) u da çözeriz ve buradan  $a = 0, b = 1$  gelir. ... (5) ve ... (7) yeniden düzenlenirse;

$$f^2(x + 1) = f(x^2) + 2x + 1 \quad \dots(10)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \dots(11)$$

elde edilir. ... (10) u  $f(1) = 1$  olduğunu kullanarak ... (5) te yerine koyarsak;

$$f(x^2) = f^2(x) + 2 \cdot f(x) - 2x \quad \dots(12)$$

elde edilir. Burada  $x \rightarrow -x$  koyarsak eşitlik bozulmaz ve  $f$  in çift fonksiyon olduğunu bilebiliriz. O yüzden ayrıca;

$$f(x^2) = f^2(x) + 2x - 2 \cdot f(x) \quad \dots(13)$$

olduğunu da biliyoruz. ... (12) ve ... (13) ten tüm  $x$  gerçel sayıları için  $f(x) = x$  elde edilir. İspat biter. (kaynak: AoPS)

- 3**  $|AC| > |AB|$  olan bir  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  noktası ve yarıçapı  $r$ , çevrel çemberinin merkezi  $O$  noktası ve yarıçapı  $R$ ,  $[BC]$  kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi  $J_A$  ve yarıçapı  $r_a$  dır. İç teğet çemberin  $[BC]$  kenarına değme noktası  $D$  olmak üzere,  $B$  ile  $D$  arasında yer alan bir  $E$  noktası

$$\text{Alan}(IEJ_A) = 2 \cdot \text{Alan}(IEO)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$|ED| = |AC| - |AB| \Leftrightarrow R = 2r + r_a$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

Soruda  $2r + r_a = R$  olması isteniyor. Bu durumda, çizim yaparken, dış teğet çemberi mümkün olduğunca küçük tutmak gerekiyor. Bunun için ideal çizimlerden biri,  $B$  açısının geniş açılı olduğu bir  $\triangle ABC$  çizmek. Yazımda kolaylık sağlaması için  $J = J_A$  diyelim.

$AI$  çevrel çemberi  $M$  de kessin. Çok bilinen bir özellik olsa da  $IJ$  nin orta noktasının  $M$  olduğunu göstereceğiz.

$$\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \angle IBA + \angle MAC = \angle IBA + \angle MAB = \angle BIM$$

$\triangle IBJ$  açık şekilde bir dik üçgen bu durumda  $M$  noktası  $IM = MB$  şartını sağladığı için  $IJ$  nin orta noktasıdır.

$[IEJ] = 2 \cdot [IEO] \Rightarrow [IEM] = [EIO]$  olduğu için  $EI$  ile  $OM$  nin kesişimine  $K$  dediğimizde  $[EMK] = [EOK]$ , dolayısıyla da  $MK = KO$  olacaktır.

$I$  nin  $O$  noktasına göre simetriği  $I'$  noktası olsun.  $IM = MJ$  ve  $IO = OI'$  olduğu için  $OM \parallel I'J$  dir.  $M$ ,  $BC$  yayının orta noktası olduğu için  $OM \perp BC$  dir. Bu durumda  $ID \parallel OM \parallel I'J$  olacaktır.

$\triangle IJI'$  de paralellikten dolayı benzerlik yazıldığında  $I'J = 2 \cdot OM = 2R$  olur.  $I'J$  nin orta noktasına  $L$  dersek, açık şekilde  $I, K, L$  doğrusal ve  $JL = R$  olacaktır. Daha önce  $E, I, K$  doğrusallığını göstermiştik. O halde  $E, I, K, L$  noktaları doğrusaldır.

Şu ana kadar geldiğimiz nokta,  $ID = r$ ,  $LD' = R - r_a$  ve  $ID \parallel LD'$ .

$JL \cap BC = \{D'\}$  olsun.  $JL \perp BC$  olduğu için  $D'J = r_a$  olduğu için  $LD' = R - r_a$  dır. Paralellikten dolayı benzerlik uygularsak,

$$\frac{ED}{DD'} = \frac{ID}{LD' - ID} = \frac{r}{R - r_a - r}$$

elde ederiz.

Üçgenin kenarlarına  $a, b, c$  ve yarıçevreye  $u$  dersek,  $BD = CD' = u - b$  ve  $DD' = a - 2(u - b) = b - c = AC - AB$  olacaktır. Yukarıdaki benzerlik oranında yerine yazarsak

$$\frac{ED}{AC - AB} = \frac{r}{R - r_a - r}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$ED = AC - AB \Leftrightarrow r = R - r_a - r \Leftrightarrow R = 2r + r_a$$

olacaktır. ■

- 4  $n \mid 3m + 1$  ve  $m \mid n^2 + 3$  koşullarını sağlayan tüm  $(m, n)$  pozitif tek sayı ikililerini bulunuz.

(Şahin Emrah)

- 5 Bir  $ABC$  üçgeninin iç bölgesindeki bir  $P$  noktasını merkez alan bir çember  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$  kenarlarını sırasıyla,  $A_1$  ve  $A_2$ ,  $B_1$  ve  $B_2$ ,  $C_1$  ve  $C_2$  noktalarında kesiyor.  $A_1, A_2, P$  noktalarından geçen çemberin merkezi  $A'$  noktası;  $B_1, B_2, P$  noktalarından geçen çemberin merkezi  $B'$  noktası;  $C_1, C_2, P$  noktalarından geçen çemberin merkezi de  $C'$  noktası olmak üzere,  $AA', BB', CC'$  doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

(Mehmet Eren Durlank)

### Çözüm:

#### İddia:

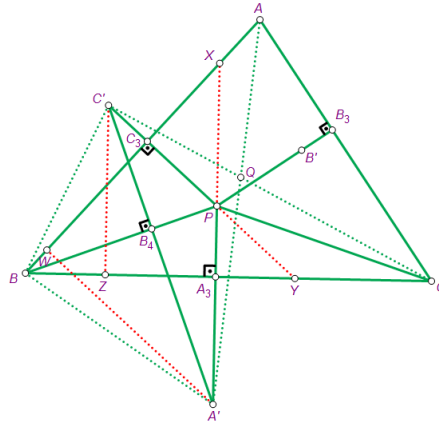
$$\frac{[ABP]}{[ABA']} = \frac{[CBP]}{[CBC']}$$

İddia doğruysa

$$\frac{[ABA']}{[ACA']} \cdot \frac{[ACC']}{[BCC']} \cdot \frac{[BCB']}{[ABB']} = \frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[ACP]}{[CBP]} \cdot \frac{[BCP]}{[ABP]} = 1$$

olacağı için  $AA', BB', CC'$  doğruları noktadaş olacaktır.

İddiamızın doğruluğunu gösterelim:



$A_1A_2$  nin orta noktası  $A_3$  olsun.  $A_3 \in PA'$  dir. Benzer şekilde  $B_3, C_3$  noktalarını tanımlayalım.

$PA_3$  ile  $AB$  doğruları  $X$  noktasında,  $PC_3$  ile  $BC$  doğruları  $Y$  noktasında kesişsin.

$C'$  den  $BC$  ye inilen dikmenin ayağı  $Z$ ,  $A'$  den  $AB$  ye inilen dikmenin ayağı  $W$  olsun.

$A'$  merkezli çember ile  $C'$  çemberin merkezlerini birleştiren doğru bu iki çemberin  $BP$  kuvvet eksenine dik olacaktır.  $A'C' \perp BP$ .

$BXY$  üçgeninde  $P$  noktası diklik merkezidir. Bu durumda  $XY \perp BP$  ve  $A'C' \parallel XY$ , yani  $\frac{XP}{XA'} = \frac{YP}{YC'}$  olacaktır.

$$\frac{XP}{XA'} = \frac{PC_3}{A'W} = \frac{[ABP]}{[ABA']}$$

$$\frac{YP}{YC'} = \frac{PA_3}{C'Z} = \frac{[CBP]}{[CBC']}$$

$$\frac{[ABP]}{[ABA']} = \frac{[CBP]}{[CBC']} \quad \blacksquare$$

- 6  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  koşulunu sağlayan tüm  $a, b, c$  negatif olmayan gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 5abc + 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

$1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$  olduğunu kabul edelim.  $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + bc + ca \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1$  olduğundan  $\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} \geq 2$  idir. ... (1)

$\sqrt{b+c} \geq \sqrt{2\sqrt{bc}} = \sqrt[4]{4bc} = S$  olsun.  $S \geq 5abc$  olduğunu gösterirsek ispat biter.  $a, b, c$  pozitif gerçel sayılar olsun.  $a^4 b^3 c^3 \leq \frac{4}{5^4}$  olduğunu göstermeliyiz.  $x = a^2, y = b^2, z = c^2$  olsun.  $x + y + z = 1$  idir.  $A.G.O$  dan

$x^4 y^3 z^3 = 4^4 3^3 3^3 \left(\frac{x}{4}\right)^4 \left(\frac{y}{3}\right)^3 \left(\frac{z}{3}\right)^3 \leq 4^4 3^3 3^3 \left(\frac{4 \cdot \frac{x}{4} + 3 \cdot \frac{y}{3} + 3 \cdot \frac{z}{3}}{10}\right)^{10} = \frac{4^4 3^3 3^3}{10^{10}}$  olduğunu bilebiliriz. Buradan  $a^4 b^3 c^3 \leq$

$\sqrt{\frac{4^4 \cdot 3^6}{10^{10}}} < \frac{4}{5^4}$  olur. Eğer biri 0 a eşit olsa da eşitsizliğin sağlandığını biliyoruz. O halde  $\sqrt{b+c} \geq S \geq 5abc$  elde ederiz. ... (2)

... (1) ile ... (2) yi toplarsak ispat biter. Eşitlik  $a = 1, b = c = 0$  için sağlanır.

- 7 Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin içinde yer alan bir  $P$  noktası  $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{PCB})$  koşulunu sağlıyor.  $[PC]$  doğru parçasının orta noktası  $D$  ve  $AP$  doğrusu ile  $BC$  doğrusunun kesişim noktası  $E$  olmak üzere,  $BP$  ve  $DE$  doğruları  $Q$  noktasında kesişiyor.  $m(\widehat{BCQ}) + m(\widehat{BAP}) = 180^\circ$  olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

**Lemma:**  $ABC$  üçgeninde  $[BC]$  nin orta noktası  $D$  olsun.  $AD$  üzerinde bir  $P$  noktası alınıyor.  $BP \cap AC = \{E\}$  ve  $CP \cap AB = \{F\}$  olsun.  $EF \parallel BC$  dir.

### İspat:

$\triangle ABD$  de  $C, P, F$  noktalarının doğrusallığı için Menelaus uygulayalım:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{CD \cdot PA}{BC \cdot DP}$$

$\triangle ACD$  de  $B, E, P$  noktalarının doğrusallığı için Menelaus uygulayalım:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BD \cdot PA}{CB \cdot DP}$$

$BD = DC$  olduğu için  $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$ , buradan da  $EF \parallel BC$  çıkar. ■

Dikkat ederseniz, yukarıdaki lemmadaki  $P$  noktası için  $AD$  doğrusu üzerinde dedik.  $P$  nin üçgenin içerisinde olduğu durum genellikle kolay fark edilirken, dışarısında olduğu durumu görmek zor olabiliyor. Yukarıdaki ispat,  $P$  noktasının her iki durumu için de geçerli. Soruya dönelim.

Soruda,  $Q$  noktası için iki durum mevcut:

(1)  $\angle DEC > \angle PBC$

(2)  $\angle DEC < \angle PBC$

İlk durum için,  $[BP \cap [ED = \{Q\}]$  olacaktır.  $AP \cap CQ = \{R\}$  dersek,  $\triangle QPC$  üçgeninde  $D, R, B$  noktaları için Lemma'daki durum söz konusu. Bu durumda,  $PC \parallel BR$ .  $\angle PAC = \angle PCE = \angle CBR$  olduğu için  $A, B, R, C$  noktaları çemberseldir. Bu durumda,  $\angle BAP = \angle BCR = 180^\circ - \angle BCQ \Rightarrow \angle BCQ + \angle BAP = 180^\circ$  olur.

İkinci durum için,  $[PB \cap [DE = \{Q\}]$  olacaktır.  $AP \cap CQ = \{R\}$  dersek,  $\triangle QPC$  üçgeninde  $D, R, B$  noktaları için Lemma'daki durum söz konusu. Bu durumda,  $PC \parallel BR$ .  $\angle PAC = \angle PCE = \angle CBR$  olduğu için  $A, B, R, C$  noktaları çemberseldir. Bu durumda,  $\angle BAP = \angle BCR \Rightarrow \angle BCQ = \angle BAP$  olur.

Özetle,  $\sin \angle BCQ = \sin \angle BAP$  şeklinde bir ifadenin gösterilmesinin istenmesi daha doğru olurmuş.

**8**  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  dizisi,  $a_1 = -5$ ,  $a_2 = -6$  ve  $n \geq 2$  için,

$$a_{n+1} = a_n + (a_1 + 1)(2a_2 + 1)(3a_3 + 1) \cdots ((n-1)a_{n-1} + 1)((n^2 + n)a_n + 2n + 1)$$

koşullarını sağlasın. Bir  $n$  pozitif tam sayısı için,  $p$  asal sayısı  $na_n + 1$  tam sayısını bölüyorsa,  $m^2 \equiv 5 \pmod{p}$  denkleğini sağlayan bir  $m$  tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

$b_n = na_n + 1$  ve  $B_n = \prod_{i=1}^n b_i$  olsun.  $2 \mid B_1 \mid B_n$  olduğu açıktır. Ayrıca  $n > 1$  için  $a_{n+1} = a_n \pmod{2}$  olduğundan  $n > 1$  ise  $2 \mid a_n$  olur. Eşitliğimizi düzenlersek;

$$a_{n+1} = a_n + B_{n-1}((n+1)b_n + n) = a_n + (n+1)B_n + nB_{n-1}$$

ve bunu  $(n+1)$  le çarpıp 1 eklersek;

$$b_{n+1} = (n+1)a_n + 1 + (n+1)^2 B_n + (n^2 + n)B_{n-1}$$

elde ederiz. Bunu da  $B_n$  le çarparsak;

$$B_{n+1} = (n+1)^2 B_n^2 + (n^2 + n)B_n B_{n-1} + (n+1)a_n B_n + B_n = [(n+1)B_n + \frac{n}{2}B_{n-1} + \frac{a_n}{2}]^2 + B_n - \frac{1}{4}(nB_{n-1} + a_n)^2$$

elde ederiz. Buradan da;

$$\begin{aligned} B_{n+1} - \frac{1}{4}((n+1)B_n + a_n)^2 &= B_{n+1} - \frac{1}{4}(2(n+1)B_n + a_n + nB_{n-1})^2 \\ &= B_{n+1} - [(n+1)B_n + \frac{n}{2}B_{n-1} + \frac{a_n}{2}]^2 \\ &= B_n - \frac{1}{4}(nB_{n-1} + a_n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $B_n - \frac{1}{4}(nB_{n-1} + a_n)^2 = \cdots = B_2 - \frac{1}{4}(2B_1 + a_2)^2 = -5, \forall n > 1$  olduğunu biliyoruz. Bu kısaca  $B_n$  ifadesini  $x \in \mathbf{Z}$  için  $x^2 - 5$  şeklinde ifade edebildiğimizi gösterir.  $na_n + 1 = b_n \mid B_n$  olduğundan dolayı ispat biter.

**9** Başlangıçta  $2014 \times 2014$  bir satranç tahtasının sol alt köşesindeki birim karede bulunan yeşil tırtıllardan her biri herhangi bir anda bulunduğu birim karenin sağındaki veya üstündeki birim kareye, başlangıçta bu tahtanın sol üst birim karesinde bulunan kahverengi tırtıllardan her biri de herhangi bir anda bulunduğu birim karenin sağındaki veya altındaki birim kareye geçebiliyor. Tüm tırtıllar yolculuklarını tamamladıklarında tahtanın her birim karesinden en az bir tırtıl geçmiş olduğu gözleniyorsa, tahtadaki toplam tırtıl sayısının en az kaç olabileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

## 56. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2015

- 1  $l, m, n$  pozitif tam sayılar ve  $p$  bir asal sayı olmak üzere,

$$p^{2l-1}m(mn+1)^2 + m^2$$

bir tam kare ise,  $m$  nin de bir tam kare olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah, Melih Üçer)

### Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

İfadeyi  $m$  parantezine alalım.

$$\implies m[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m] = x^2$$

Eğer  $m$  tam kare değilse  $m$  in ikinci parantezi bölmesi gerekir.  $m$  ile  $(mn+1)^2$  aralarında asal olduğu için  $m \mid p^{2l-1}$  olmalıdır. O zaman  $m = p^a$  formundadır. Eğer  $a$  nın tek olmaması gerektiğini gösterirsek ispat biter. Şimdi ifadede  $m = p^a$  yazalım.

$$\implies m[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m] = p^a[p^{2l-1}(p^a n + 1)^2 + p^a] = p^{2a}[p^{2l-a-1}(p^a n + 1)^2 + 1] = x^2$$

Dolayısıyla son ifadedeki ikinci parantez de tam kare olmalıdır.

$$\implies p^{2l-a-1}(p^a n + 1)^2 + 1 = y^2$$

Eğer  $a$  tek olursa  $2l - a - 1$  çift olacağından ifade aslında  $c = p^{\frac{2l-a-1}{2}}(p^a n + 1)$  olmak üzere  $c^2 + 1 = y^2$  halindedir. Bunun da pozitif tamsayılarda çözümü yoktur. Yani  $a$  tek olamaz. İspat biter.

### Çözüm 2:

$m[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m] = x^2$  ifadesinde  $q$  bir asal olsun,  $m$ 'yi bölün ve  $q \neq p$  olsun,  $q$  köşeli parantezle aralarında asaldır yani  $q$ 'nun üssü çifttir, şimdi incelenmesi gereken  $p$  asalının üssüdür.

Eğer  $p$ 'nin üssü çift ise kanıt biter,  $m$  tamkaredir.

Eğer  $p$ 'nin üssü tek ise  $m, m = p^{2k+1} \cdot A^2$ ,  $OBEB(p, A) = 1$  şeklinde yazılabilir.  $A^2 \cdot p^{2k+1}[p^{2l-1}(mn+1)^2 + m]$  ifadesinin tam kare olabilmesi için  $p^{2l}(mn+1)^2 + pm = (p^l(mn+1))^2 + pm$  ifadesinin tam kare olabilmesi gerekir fakat  $(p^l(mn+1)+1)^2 > (p^l(mn+1))^2 + pm > (p^l(mn+1))^2$  yani ifade tam kare olamaz, gösterilmek istenen de buydu. ■

- 2 Düzlemde herhangi ikisi arasındaki uzaklık birbirinden farklı olan 2015 nokta verilmiştir. Bir noktaya en yakın 22 noktanın her biri bu noktanın **komşusu** ise, bir nokta en fazla kaç noktanın komşusu olabilir?

(Selim Bahadır)

- 3  $m, n$  pozitif tam sayılar olmak üzere, 0 ve 1 lerden oluşan ve her ardışık  $m$  elemanının en az biri 0 olan dizilerin sayısı  $S(n, m)$  olsun.

$$S(2015n, n) \cdot S(2015m, m) \geq S(2015n, m) \cdot S(2015m, n)$$

olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

- 4  $|AB| = |AC|$  koşulunu sağlayan bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin küçük  $AB$  ve  $AC$  yayları üzerinde sırasıyla üçgenin köşelerinden farklı  $D$  ve  $E$  noktaları alınıyor.  $AD$  ve  $BC$  doğrularının kesişme noktası  $F$ ,  $AE$  doğrusunun  $FDE$  üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez kestiği nokta ise  $G$  olsun.  $AC$  doğrusunun  $ECG$  üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

**Çözüm:**

(Mehmet Utku Özbek)

İspatlamamız gereken  $|AC|^2 = |AE| \cdot |AG|$  olduğudur.  $F$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $G$  çemberseldi. Dolayısıyla  $|AE| \cdot |AG| = |AD| \cdot |AF|$  dir.  $|AB| = |AC|$  olduğu için  $|AB|^2 = |AD| \cdot |AF|$  olduğunu ispatlarsak soru biter. Yani  $AB$  doğrusunun  $FDB$  üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu ispatlamalıyız.  $\angle DFB = \alpha$ ,  $\angle DBA = \beta$ ,  $\angle DAB = \theta$  olsun.  $\alpha = \beta$  olduğunu ispatlamalıyız.  $\angle ABC = \angle ACB = \alpha + \theta$  olur. Aynı yayı gördükleri için  $\angle DAB = \angle DEB = \theta$  olur. Benzer şekilde  $\angle DBA = \angle DEA = \beta$  olur. Yani  $\angle AEB = \beta + \theta$  olur. Yine aynı yayı gördükleri için  $\angle ACB = \angle AEB$  olur. Yani  $\alpha + \theta = \beta + \theta$  olur. Dolayısıyla  $\alpha = \beta$  olur. İspat biter.

- 5) 2015×2015 satranç tahtasının birim kareleri; ikisi aynı sütunda ve üçüncüsü bu iki kareden daha yukarıdakiyle aynı satırda ve ondan sağda veya bu iki kareden daha aşağıdakiyle aynı satırda ve ondan solda olan herhangi üçü aynı renge boyanmayacak koşuluyla  $k$  renge boyanabiliyorsa,  $k$  nın alabileceği en küçük değer nedir?

(Azer Kerimov)

**Çözüm:**Yanıt  $k = 1008$ .

2015 × 2015 satranç tahtasının birim karelerinden oluşan  $(u_1, u_2, u_3)$  üçlüsüne;  $u_1$  ve  $u_2$  aynı sütunda,  $u_1$  karesi  $u_2$  den daha yukarıda,  $u_3$  karesi  $u_2$  ile aynı satırda ve  $u_2$  den sağda ise L-üçlüsü diyelim.

Renklerden biri kırmızı olsun. Kırmızı renge boyalı birim karelerin sayısının en fazla 4029 olduğunu göstereyim. Her satırın kırmızı birim karelerinin en sağdakini işaretleyelim. O zaman L-üçlüsünün oluşmaması için her sütunda en fazla bir işaretlenmemiş kırmızı birim kare olabilir (sonuncu sütunda işaretlenmemiş kare zaten olamaz). Demek ki en fazla 2015 işaretlenmiş ve 2014 işaretlenmemiş kırmızı birim kare olabilir. Buradan  $k \geq \frac{2015 \cdot 2015}{4029} > 1007$ .  $k = 1008$  için örnek: satırları yukarıdan aşağıya, sütunları soldan sağa  $1, 2, \dots, 2015$  sayılarıyla numaralandıralım ve  $i$ . satırda  $j$ . sütunun kesişiminde bulunan  $(i, j)$  karesini  $\lfloor \frac{(i+j) \pmod{2016}}{2} \rfloor$  ile boyarsak sağlar.

- 6) Sonsuz tane  $n$  pozitif tam sayısı için  $(n!)^{n+2015}$  nin  $(n^2)!$  sayısını böldüğünü gösteriniz.

(Melih Üçer)

- 7) Tüm  $x, y$  gerçel sayıları için,

$$f(x^2) + 4y^2 f(y) = (f(x - y) + y^2)(f(x + y) + f(y))$$

koşulunu sağlayan bütün  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

**Çözüm:**

$(0, -x)$  ve  $(0, x)$  koyulursa  $f(x) = f(-x)$  olur.  $x = 0$  koyup  $f(y) = f(-y)$  kullanırsak  $4y^2 f(y) = 2f(y) \cdot (f(y) + y^2)$  olur.  $f(y) = 0$  sabit fonksiyonu sağlar.  $f(y) \neq 0$  için  $y^2 = f(y)$  olur. Sonuç olarak  $f(x) = 0, f(x) = x^2$  sağlar.

Ancak incelenmesi gereken bir şey daha vardır: Bazı  $x$  ler için  $f(x) = 0$  bazıları için  $f(x) = x^2$  olabilir.  $f(u) \neq u^2$  olanlar için  $f(x + 2u) = f(x)$  olduğunu biliyoruz.  $(0, x)$  ve  $(0, x + 2u)$  koyulursa  $(x + u)f(x) = 0$  elde edilir.  $\forall x \neq -u$  için  $f(x) = 0$  elde edilir.  $f(u) = 0$  olduğundan ve baştaki bulgulardan  $f(-u) = 0$  olur. O halde her  $u$  için  $f(u) = 0$  olmalıdır.

$f(x) = 0, f(x) = x^2$  sağlar.

- 8) İç teğet çemberinin merkezi  $I$ , çevrel çemberinin merkezi  $O$  olan ve  $|AC| > |BC| > |AB|$  koşulunu sağlayan bir  $ABC$  üçgeninde iç teğet çember  $BC, CA, AB$  kenarlarına sırasıyla  $D, E, F$  noktalarında teğettir.  $A$  noktasının  $F$  ve  $E$  ye göre simetrikleri sırasıyla  $F_1$  ve  $E_1$  olmak üzere;  $BC$  doğrusuna  $D$  de teğet olan ve  $F_1$

den geçen çember  $AB$  doğrusunu ikinci kez  $F_2$  de,  $BC$  doğrusuna  $D$  de teğet olan ve  $E_1$  den geçen çember ise  $AC$  doğrusunu ikinci kez  $E_2$  de kesiyor.  $OE$  ve  $IF$  doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla  $P$  ve  $Q$  olmak üzere,

$$|AB| + |AC| = 2 \cdot |BC| \iff PQ \perp E_2F_2$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

- 9 Bir ülkedeki 2015 kentten herhangi ikisi arasında tam olarak bir karşılıklı uçak seferi yapılmaktadır. Herhangi üç kent arasındaki direkt seferler en fazla iki şirket tarafından yapılacak koşuluyla seferler birkaç hava yolu şirketi arasında nasıl paylaşılmış olursa olsun, aynı hava yolu tarafından  $k$  sefer yapılan bir kent bulunuyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Azer Kerimov)

## 57. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2016

- 1 Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  köşesinden geçen yükseklik üzerinde bir  $P$  noktası alıyoruz.  $BP$  ve  $CP$  doğruları  $AC$  ve  $AB$  kenarlarını sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktalarında kesiyor.  $D$  ve  $E$  noktalarından  $BPC$  üçgeninin çevrel çemberine çizilen teğetler  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde kalacak şekilde sırasıyla  $K$  ve  $L$  noktalarında çembere teğettir.  $KD$  doğrusu  $AKC$  üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez  $M$  noktasında,  $LE$  doğrusu  $ALB$  üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez  $N$  noktasında kesiyor. Buna göre

$$\frac{KD}{MD} = \frac{LE}{NE} \iff P \text{ noktası } ABC \text{ üçgeninin diklik merkezidir}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

- 2 23 öğrenciden oluşmuş bir sınıfta her öğrenci ikilisi birlikte bir film izledi. Her öğrencinin izlediği tüm filmlerin kümesi onun *film koleksiyonu* olsun. Her öğrenci her filmi en fazla bir kez izlediyse, sınıftaki öğrencilerin en az kaç farklı film koleksiyonu olabilir?

(Azer Kerimov)

- 3  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$  koşulunu sağlayan tüm  $a, b, c$  negatif olmayan gerçel sayıları için

$$(a + b + c)(a + b + c - abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm 1:

$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \leq 3$  ve  $a + b + c \geq \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 3abc$  olduğundan;

$$abc(a + b + c) = \frac{2abc(a + b + c)}{3} + \frac{abc(a + b + c)}{3} \leq 2abc + \frac{(a + b + c)^2}{9}$$

elde edilir. O halde;

$$(a + b + c)^2 - 2abc - \frac{(a + b + c)^2}{9} \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

olduğunu yani;

$$\frac{4(a + b + c)^2}{9} \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

olduğunu göstermemiz gerekir.  $\frac{4(a + b + c)^2}{9} \geq \frac{4(a + b + c)^3}{27}$  olduğundan son olarak gösterilmesi gereken;

$$\frac{4(a + b + c)^3}{27} \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

olduğudur. Genelliği bozmaksızın  $a = \min\{a, b, c\}$  olsun.  $b = x + a, c = y + a$  ve  $x, y \geq 0$  olsun. Yerine yazarsak;

$$9a(x^2 - xy + y^2) + (2x - y)^2(4x + y) \geq 0$$

olduğundan doğrudur. İspat biter. Eşitlik  $(1, 1, 1)$  ve  $(0, 0, 0)$  için sağlanır.

**Çözüm 2:**

İkinci ve daha estetik bir çözüm verelim.

Öncelikle  $a^2b + b^2c + c^2a = S$  olsun.  $3 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + c^2 \geq 2ab + 2c - 1 \Rightarrow ab + c \leq 2 \Rightarrow ab^2c + ac^2 \leq 2ac$  biliyoruz. Taraf tarafa toplanırsa  $abc(a+b+c) + S \leq 2(ab+bc+ca)$  elde edilir. O halde göstermemiz gereken şey  $S \leq a^2 + b^2 + c^2$  olduğudur.  $1 \geq abc$  biliyoruz.  $S = a^2b + b^2c + c^2a \leq a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{7}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} \leq a^2 + b^2 + c^2$  olduğunu Muirhead'den biliyoruz. İspat biter.

- 4 Bir  $a_0, a_1, \dots$  gerçel sayı dizisi yeterince büyük tüm  $m$  pozitif tamsayıları için

$$\sum_{n=0}^m a_n \cdot (-1)^n \cdot \binom{m}{n} = 0$$

şartını sağlıyorsa, tüm  $n \geq 0$  için  $a_n = P(n)$  koşulunu sağlayan bir  $P$  polinomunun bulunduğunu gösteriniz. (Melih Üçer)

**Çözüm:**

Bu soru direkt bu haliye IMO 2007 Shortlist sayfa 23, A7 sorusunda çözümde bir lemma olarak kullanılıp ispatlanmıştır.

<https://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf>

- 5 Her  $m, n \in \mathbb{N}$  için  $f(mn) = f(m)f(n)$  ve  $m + n \mid f(m) + f(n)$  koşullarını sağlayan tüm  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  fonksiyonlarını bulunuz.

(Melih Üçer)

- 6  $AB = AC$  koşulunu sağlayan bir  $ABC$  üçgeninde  $[BC]$  nin orta noktası  $D$  olsun.  $D$  den geçen bir doğru  $AB$  yi  $K$  de,  $AC$  yi  $L$  de kesiyor.  $[BC]$  kenarı üzerinde  $D$  den farklı bir  $E$  noktası ve  $AE$  nin  $E$  tarafındaki uzantısı üzerinde  $\angle KPL = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle KAL$  olacak şekilde bir  $P$  noktası alınıyor.  $PDE$  nin çevrel çemberinin  $PK$  yi ikinci defa kestiği nokta  $X$ ,  $PL$  yi ikinci defa kestiği nokta  $Y$  olmak üzere  $DX$  ve  $AB$  doğruları  $M$  de,  $DY$  ve  $AC$  doğruları ise  $N$  de kesişiyor.  $P, M, A, N$  noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

- 7  $A_1, A_2, \dots, A_k \{1, 2, \dots, 2016\}$  kümesinin farklı alt kümeleri olmak üzere her  $1 \leq i < j \leq k$  için  $A_i \cap A_j$  bir aritmetik dizi oluşturuyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Azer Kerimov)

- 8  $n \geq 5$  olmak üzere  $A_1A_2 \dots A_n$  dışbükey  $n$ -geninin tüm iç açıları geniş açıdır. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $O_i, A_{i-1}A_iA_{i+1}$  üçgeninin ( $A_0 = A_n$  ve  $A_{n+1} = A_1$  kabul ediliyor) çevrel çember merkezi olarak tanımlanıyor.  $O_1O_2 \dots O_n$  kapalı yolunun bir dışbükey  $n$ -gen belirtmediğini kanıtlayınız.

(Melih Üçer)

- 9  $p$  bir asal sayısı olmak üzere, katsayıları  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  kümesine ait olan ve derecesi  $p$  den küçük olan polinomların kümesini  $K_p$  ile gösterelim. Tüm  $n$  tamsayıları için  $P(Q(n)) = n \pmod{p}$  koşulunu sağlayan  $K_p$  ye ait her  $P, Q$  polinom ikilisinin derecesinin eşit olduğu bütün  $p$  asal sayılarını belirleyiniz.

(Okan Tekman)

## 58. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2017

- 1  $m, n$  pozitif tam sayı ve  $p$  asal sayı olmak üzere;

$$(m^3 + n)(n^3 + m) = p^3$$

ifadesini sağlayan tüm  $(m, n, p)$  üçlülerini bulunuz.

### Çözüm:

$m, n \geq 1$  olduğundan  $m^3 + n, n^3 + m > 1$  olacaktır. Dolayısıyla  $(m^3 + n, n^3 + m) = (p^2, p)$  veya  $(p, p^2)$  olabilir. Eğer  $m = n$  ise  $(m^3 + m)^2 = p^3$  elde edilir fakat sağ taraf tamkare olmadığından çözüm gelmez. Genelliği bozmadan  $m > n$  olsun. Bu durumda  $m^3 + n > n^3 + m$  olacaktır çünkü  $f(x) = x^3 - x$  fonksiyonu  $x \geq 1$  için artandır. Yani  $(m^3 + n, n^3 + m) = (p^2, p)$  olmalıdır.

$m = p - n^3$  yazarsak,

$$m^3 + n = (p - n^3)^3 + n = p^2 \implies n^9 - n \equiv 0 \pmod{p}$$

elde edilir.  $p \mid n$  ise  $n^3 + m > p$  olacağından çelişki olacaktır. Yani  $n^8 \equiv 1 \pmod{p}$ 'dir.

$$n^8 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

olacaktır.  $p = n^3 + m > n^3$  olduğundan  $n = 1$  veya  $p \mid n^4 + 1$  olacaktır.

$n^4 \equiv -1 \pmod{p}$  ise

$$n(n^3 + m) \equiv n^4 + mn \equiv mn - 1 \pmod{p}$$

elde edilir.  $mn > 1$  olduğundan  $mn - 1 \geq p$  olmalıdır.

$$p^3 = (m^3 + n)(n^3 + m) > m^3 n^3 \implies p > mn \geq p + 1$$

çelişkisi elde edilir.

Kalan tek durum  $n = 1$  olmasıdır. Bu durumda  $m = p - 1$  olacağından

$$m^3 + n = (p - 1)^3 + 1 = p^2 \implies p(p - 1)(p - 3) = 0 \implies p = 3$$

elde edilir. Yani  $(m, n, p) = (2, 1, 3)$  olacaktır. Simetriden dolayı tüm çözümler  $(m, n, p) = (2, 1, 3), (1, 2, 3)$  bulunur.

- 2 Bir ülkedeki 2017 şehir arasında, herhangi iki şehirden birbirine ulaşmanın mümkün olduğu karşılıklı seferler düzenleniyor. Seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, her şehirden en az bir "özel şehre" doğrudan sefer olacak şekilde  $k$  "özel şehir" bulmak mümkündür.  $k$ 'nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.
- 3  $ABC$  üçgeninde  $BC, AC, AB$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $D, E, F$  olup üçgenin iç teğet çemberi bu kenarlara sırasıyla  $G, H, I$  noktalarında dokunmaktadır.  $AD$  kenarının orta noktası  $J$  olsun.  $BJ$  ve  $AG$  doğruları  $K$  noktasında kesişsin.  $A$  noktasından geçen ve  $C$  merkezli çember  $[CB$  ışını  $X$  noktasında kesiyor.  $K$  noktasından geçen ve  $BC$  ye paralel olan doğru ile  $AX$  doğrusu  $U$  noktasında kesişiyor.  $IU$  ve  $BC$  doğruları  $P$  noktasında kesişsin.  $PY$  doğrusu iç teğet çembere  $Y$  noktasında teğettir.  $D, E, F, Y$  noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.
- 4 Bir etkinliğe katılan  $n$  öğrenciden hiçbiri aynı yaşta değildir. Her öğrencinin en az bir öğrenci ile el sıkıştığı ve bu öğrencinin diğerlerinden küçük yaşta olan hiçbir öğrenci ile el sıkışmadığı bilinmektedir.  $n$ 'nin alabileceği tüm olası değerleri bulunuz.
- 5  $a, b, c$  reel sayılar ve  $a + b + c = 3$  sağlanıyorsa

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca)$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca)$$

olduğunu göstermek için

$$a^3b + b + b + b^3c + c + c + c^3a + a + a + 3 \geq 3(ab + bc + ca) + 3 \geq 4(ab + bc + ca)$$

eşitsizliklerini göstermek yeterlidir. Sol taraftaki eşitsizlikler için, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden  $a^3b + b + b \geq 3ab$ ,  $b^3c + c + c \geq 3bc$ ,  $c^3a + a + a \geq 3ca$  yazılabilir. Sağ taraftaki  $3(ab + bc + ca) + 3 \geq 4(ab + bc + ca)$  eşitsizliğini ispatlamak için de

$$ab + bc + ca \leq 3$$

eşitsizliğini göstermemiz yeterlidir.

Öte yandan

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

olduğundan, son eşitsizlik doğrudur.

**6**

$$\frac{4m^2n^2 - 1}{(m^2 - n^2)^2}$$

ifadesini tam sayı yapan farklı  $(m, n)$  pozitif tamsayı ikilisinin bulunmayacağını gösteriniz.

**7**  $a$  gerçel bir sayı olmak üzere; her  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $f(xy + f(y)) = f(x)y + a$  eşitliğini sağlayan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının sayısını  $a$  ya bağlı olarak bulunuz.

**Çözüm:**

$a \neq 0$  ise  $y = 0$  yazarsak,  $f(f(0)) = a$  elde edilir. Bu durumda  $f(0) \neq 0$  olmalıdır. Eğer  $x = 0$  yazılırsa,

$$f(f(y)) = f(0)y + a$$

olacaktır.  $f(y_1) = f(y_2)$  ise

$$f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \implies f(0)y_1 + a = f(0)y_2 + a \implies y_1 = y_2$$

elde edilir. Yani  $f$  birebirdir.  $y$  yerine  $f(y)$  yazalım.

$$\begin{aligned} f(xf(y) + f(f(y))) &= f(x)f(y) + a \\ f(yf(x) + f(f(x))) &= f(x)f(y) + a \\ \implies xf(y) + f(f(y)) &= yf(x) + f(f(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

elde edilir. (1)'de  $y = 1$  yazarsak

$$xf(1) + f(f(1)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + f(0)x + a$$

$$\implies f(x) = x(f(1) - f(0)) + f(f(1)) - a$$

elde edilir. Yani  $f$  fonksiyonu lineerdir.  $f(x) = mx + n$  yazarsak,

$$m(xy + my + n) + n = (mx + n)y + a \implies m^2y + mn + n = ny + a \implies m^2 = n \quad \text{ve} \quad mn + n = a$$

Buradan  $m^3 + m^2 = a$  için  $f(x) = mx + m^2$  çözümü bulunur.

$a = 0$  ise  $f(xy + f(y)) = f(x)y$  olur.  $x = 0$  için  $f(f(y)) = f(0)y$  elde edilir.  $f(0) \neq 0$  ise  $f$  yine birebirdir ve yukarıdaki durumu aynı şekilde uygulayabiliriz. Buradan gelecek çözüm yukarıdakinin aynısıdır.

$a = 0$  ve  $f(0) = 0$  ise  $f(f(x)) = 0$  olacaktır.  $f(x_0) \neq 0$  olacak şekilde bir  $x_0$  varsa  $x = x_0$  ve  $y \rightarrow \frac{y}{f(x_0)}$  için

$$f\left(\frac{x_0 y}{f(x_0)} + f\left(\frac{y}{f(x_0)}\right)\right) = y$$

olur. Yani  $f$  örtendir. Dolayısıyla  $f(x) = x_0$  olacak şekilde bir  $x$  vardır ancak  $f(f(x)) = f(x_0) = 0$  çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, her  $x$  için  $f(x) = 0$  olmalıdır.

Şimdi asıl sorulan, fonksiyon sayısı durumunu inceleyelim.  $a = 0$  durumunda  $f \equiv 0$  ve  $f(x) = 1 - x$  olmak üzere 2 fonksiyon vardır.  $a \neq 0$  için  $m^3 + m^2 = a$  denkleminin her çözümü için bir tane  $f$  fonksiyonu bulunur.

$$P(x) = x^3 + x^2 - a \implies P'(x) = 3x^2 + 2x$$

olur. Yani lokal ekstremumlar  $x = 0$  ve  $x = -\frac{2}{3}$  noktalarında alınır.  $P$ 'nin başkatsayısı pozitif olduğundan  $x = -\frac{2}{3}$ 'de yerel maksimum,  $x = 0$  noktasında yerel minimum vardır.

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27} - a, \quad P(0) = -a$$

Eğer bunlardan biri 0 ise polinomun 2 kökü, aynı işaretliyse 1 kökü, farklıysa 3 kökü vardır. Bu yüzden

$$\#f = \begin{cases} 2, & a = 0, \frac{4}{27} \\ 3, & a \in (-\infty, 0) \cup (\frac{4}{27}, \infty) \\ 1, & a \in (0, \frac{4}{27}) \end{cases}$$

olur.  $a = 0$  durumunu ayrı ayrı incelememize rağmen aynı sonuç çıktığı için bu şekilde yazabiliriz.

- 8**  $ABC$  üçgeninde,  $B$  ve  $C$  noktalarından geçen açılırtaylar sırasıyla  $[AC]$  ve  $[AB]$  kenarlarını  $D$  ve  $E$  noktalarında kesiyor.  $I_c$ ,  $[AB]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi olsun ve  $F$   $[BI_c]$  nin orta noktası olsun.  $|CF|^2 = |CE|^2 + |DF|^2$  ise,  $ABC$  üçgeninin eşkenar üçgen olduğunu gösteriniz.
- 9**  $S$ , düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan ve herhangi dördü çemberdeş olmayan sonlu sayıdaki nokta kümesi olsun. Bütün kırmızı noktaları içeren ve hiçbir beyaz noktayı içermeyen bir çember varsa,  $S$  kümesinin bütün noktaları için yapılan kırmızı ve beyaz renklendirmeye *ayrık renklendirme* diyelim. Her bir  $S$  kümesi için *ayrık renklendirmelerin* sayısını belirleyiniz.

## 59. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2018

1 Her  $a, b$  tam sayısı için  $n^2 + an + b$  sayısının en az 2018 farklı pozitif böleni olacak şekilde bir  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

2 Her  $x, y$  gerçel sayıları için

$$f(xf(y) + y^2) = f((x + y)^2) - xf(x)$$

koşulunu sağlayan tüm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  örten fonksiyonları bulunuz.

3 Bir emekli dil bilimci (E.D.B.), ilk hamlede tamamen farklı  $n$  harften oluşan bir kelime yazar. Her hamlede, son kelimenin ilk  $i$  harfini ters çevirerek elde edilen kelimenin daha önce yazılmamış olduğu durumu kontrol eder ve bu yeni kelimeyi yazar. E.D.B.'nin  $n!$  hamle yapabileceğini kanıtlayınız.

4 Dar açılı çeşitkenar  $ABC$  üçgeninde,  $[BC]$  kenarının orta noktası  $D$  dir.  $E$  ve  $F$  sırasıyla,  $[AC]$  ve  $[AB]$  üzerinde noktalar olmak üzere;  $CDE$  ve  $AEF$  üçgenlerinin çevrel çemberleri  $[AD]$  üzerindeki  $P$  noktasında kesişmektedir.  $EF$   $P$  deki açıortayı,  $EF$  yi  $Q$  noktasında kesiyor.  $AQP$  üçgeninin çevrel çemberine  $A$  noktasında teğet olan doğrunun  $BC$  ye dik olduğunu kanıtlayın.

### Çözüm:

$\angle ACD = \angle APE = \angle AFE$  dir. Bu durumda  $BCEF$  bir kirişler dörtgenidir.

$\angle ABC = \angle AEF = \angle FPA$  dir. Bu durumda  $BFPD$  de bir kirişler dörtgenidir.

Benzerlikleri yazarsak, ( $\triangle AFP \sim \triangle ADB$  ve  $\triangle AEP \sim \triangle ADC$ ),

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FP}{DB} \quad \text{ve} \quad \frac{AE}{AD} = \frac{PE}{CD} \quad (1)$$

elde ederiz. Eşitlikleri taraf tarafa oranlarsak

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FP}{PE} \quad (2)$$

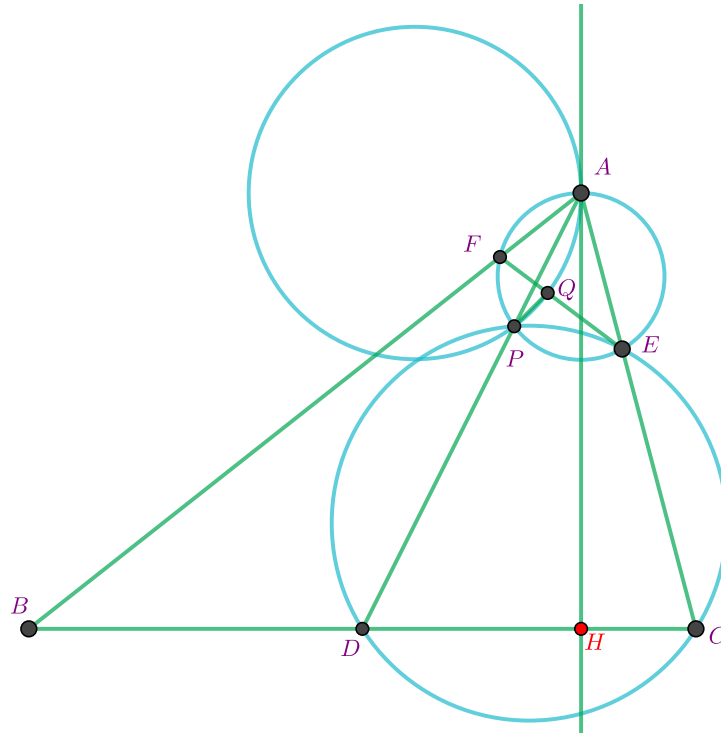
olur. Açıortay teoreminden  $\frac{FP}{PE} = \frac{FQ}{QE}$  olduğu için  $\frac{AF}{AE} = \frac{FQ}{QE}$ , dolayısıyla  $AQ$  da  $\angle FAE$  nin açıortayıdır.

$\triangle AQP$  nin çevrel çemberine  $A$  da teğet olan doğru  $BC$  yi  $H$  de kessin.  $AH$  nin  $\triangle ABC$  nin yüksekliği olduğunu göstermemiz isteniyor.

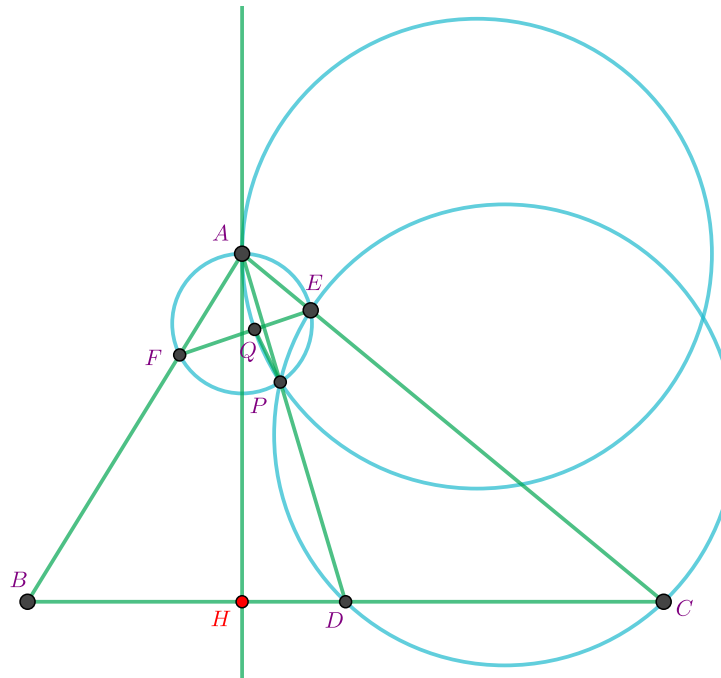
Teğet-Kiriş açıdan  $\angle PAQ = \angle QAH$  dir.

$\angle ABC = \angle FPA = \beta$  ve  $\angle ACB = \angle APE = \theta$  dersek,  $\angle FPA = |\theta - \beta|$  olacaktır.

$$\angle FAQ = \angle QAE = \frac{180^\circ - 2\beta - 2\theta}{2} = 90 - \beta - \theta.$$



$\angle C > \angle B$  ise  $\angle HAE = \angle QAE - \angle QAH = 90^\circ - \beta - \theta - (\theta - \beta) = 90^\circ - 2\theta = 90^\circ - \angle ACB$ , dolayısıyla  $AH \perp BC$  olur.



$\angle B > \angle C$  ise  $\angle HAE = \angle QAE + \angle QAH = 90^\circ - \beta - \theta + (\beta - \theta) = 90^\circ - 2\theta = 90^\circ - \angle ACB$ , dolayısıyla  $AH \perp BC$  olur.

**Not:** Teknik terimlerle biraz kafa karıştıralım:

$AD$ ,  $\triangle ABC$  de bir kenarortay olduğu için  $\triangle AEF$  de bir kenarortaysıdır. Kenarortaysının çevrel çemberi

kestiği nokta (burada  $P$  oluyor) için  $\frac{AF}{AE} = \frac{FP}{PE}$  eşitliğini göstermiş olduk.  $(PAQ)$  çevrel çemberinin  $A$  noktasındaki teğetinin  $(AFE)$  çevrel çemberinin merkezinden geçtiğini göstermiş oldu.  $\triangle AFE$  de, merkezden geçen doğru,  $\triangle ACB$  de yükseklik olacaktır. (İzogonal Eşlenikler).

- 5) 25 öğrenciden oluşan bir gruptaki herhangi iki öğrenci arkadaşsa, bu gruba *takım* diyelim. Bir okuldaki herhangi bir öğrencinin en az bir takıma ait olduğu bilinmektedir, ancak herhangi iki öğrenci arkadaşlıklarını sonlandırırca en az bir öğrenci hiçbir takıma dahil değildir. Bir takımdaki en az bir öğrencinin takım dışında hiç arkadaşı yoksa bu takıma *özel* diyelim. Herhangi iki arkadaşın mutlaka bir özel takıma dahil olduğunu gösteriniz.

- 6)  $a_0, a_1, \dots, a_{100}$  ve  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$  gerçel sayılar dizileri her  $n = 0, 1, \dots, 99$  için, ya

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n,$$

ya da

$$a_{n+1} = 2a_n^2 \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = a_n$$

özelliğini sağlar.

$a_{100} \leq a_0$  ise,  $b_1 + b_2 + \dots + b_{100}$  ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

- 7)  $a, b$  tam sayıları için,  $\text{obeb}(a, b) = 1$  ise  $(a, b)$  koordinatlarına sahip olan noktaya **temel** diyelim. Köşeleri temel noktalardan oluşan bir çizgenin kenarları şu şekilde çiziliyor:

$(a_1, b_1)$  ve  $(a_2, b_2)$  arasında bir kenar olması için gerek ve yeter koşul,  $(2a_1 = 2a_2 \in \{b_1 - b_2, b_2 - b_1\})$  veya  $2b_1 = 2b_2 \in \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$  dir.

Geriye kalan çizge bir orman olacak şekilde çizgenin bazı kenarları siliniyor. En az kaç kenar silinmelidir ki bu orman elde edilsin? Böyle bir ormanda en az kaç ağaç vardır?

- 8)  $m \geq 3$ ,  $n$  ve  $x_1, x_2, \dots, x_m$  tam sayılar olmak üzere; her  $2 \leq i \leq m - 1$  sayısı için  $x_{i+1} - x_i \equiv x_i - x_{i-1} \pmod{n}$  ise,  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$   $m$ -lisine mod  $n$  de bir aritmetik dizi diyelim.  $p \geq 5$  asal bir sayı ve  $1 < a < p - 1$  bir tamsayı olsun.  $a$  nın pozitif üslerinin  $p$  ye bölünmesi sonucu elde edilen kalanların kümesi  $a_1, a_2, \dots, a_k$  olsun.  $a_1, a_2, \dots, a_k$  kümesinin bir permütasyonu mod  $p$  üzerinde bir aritmetik dizi ise,  $k = p - 1$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$a$ 'nın mertebesi  $d$  olsun.  $a \neq 1, p - 1$  olduğundan  $d > 2$ 'dir.  $a$ 'nın kuvvetlerinin oluşturduğu farklı kalanlar kümesi  $1, a, a^2, \dots, a^{d-1}$  olduğundan  $k = d$ 'dir. Genelliği bozmadan  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sırasının aritmetik diziyi oluşturan sıra olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla,  $m$  ortak fark ve " $\equiv$ " ile  $p$  modundaki denkliği göstermek üzere,  $a_i \equiv a_1 + (i - 1)m$  olacaktır. Bu sayıları toplarsak,

$$\sum_{i=1}^k a_i \equiv ka_1 + m \sum_{i=1}^k (i - 1) \equiv ka_1 + \frac{mk(k - 1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i \equiv \sum_{n=0}^{k-1} a^n \equiv \frac{a^k - 1}{a - 1} \equiv 0$$

olacaktır.  $k \mid p - 1$  olduğundan  $(k, p) = 1$ 'dir. Dolayısıyla,

$$a_1 + \frac{m(k - 1)}{2} \equiv 0 \implies a_1 \equiv -\frac{m(k - 1)}{2}$$

bulunur. Terimler

$$\frac{-m(k - 1)}{2}, \frac{-m(k - 3)}{2}, \dots, \frac{m(k - 1)}{2}$$

olur. Bu sayıların kareleri toplamı  $k$ 'nın tek veya çift olması durumunda ayrı ayrı incelemek bile,

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \equiv \frac{m^2 k(k-1)(k+1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \equiv \sum_{n=0}^{k-1} a^{2n} \equiv \frac{a^{2k} - 1}{a^2 - 1} \equiv 0$$

bulunur.  $p \geq 5$  ve  $(k, p) = 1$  olduğundan

$$m^2(k-1)(k+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

elde edilir.

Eğer  $p \mid m$  ise  $a_i$  terimlerinin hepsi  $p$  modunda aynı olurdu, çelişki.

Eğer  $p \mid k-1$  ise  $k \geq 3$  olduğundan  $k-1 \geq p$  olurdu ancak bu da  $p-1 \geq k$  olması ile çelişir.

Dolayısıyla  $p \mid k+1$  olmalıdır. Buradan  $k+1 \geq p$  bulunur. Ayrıca  $k \mid p-1$  olduğundan  $p \geq k+1$ 'dir.

Buradan  $k = p-1$  bulunur. Gerçekten de  $a$ 'yı ilkel kök alırsak, ortak fark 1 olan,  $p-1$  uzunluğunda bir aritmetik dizi elde ederiz.

- 9** Bir  $T$  üçgeni ve bir  $d$  doğrusu için, düzlemde bir noktadan  $T$  nin kenarlarına çizilen dikmelerin ayaklarının hepsi  $d$  üzerindeyse, bu durumda  $d$ ,  $T$  yi odaklar deriz.  $T_1$  i odaklayan doğrular kümesi ile  $T_2$  yi odaklayan doğrular kümesi aynıysa, bu durumda  $T_1$  ve  $T_2$  denktir diyelim. Herhangi bir üçgen için, düzlemde ona denk olan tam olarak bir eşkenar üçgen olduğunu kanıtlayınız.

## 60. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2019

- 1 2019 torbanın her birinde  $1, 2, \dots, 2019$  sayılarıyla numaralandırılmış ve toplam ağırlıkları  $1kg$  olan 2019 taş bulunuyor. Bu koşulları sağlayan her durumda ağırlıkları toplamı en az  $1kg$  olan ve herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı kutularda bulunan birkaç taş en az  $k$  farklı şekilde seçilebiliyorsa,  $k$ 'nin alabileceği en büyük değer nedir?
- 2 Bir  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  tam sayı dizisi,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  ve her  $n \geq 1$  için

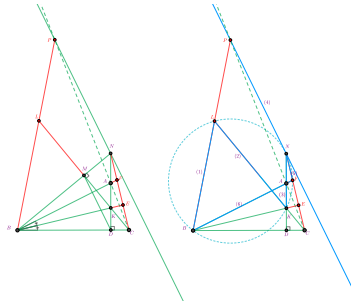
$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (n+2)a_{n+1} - a_n^2 - na_n$$

eşitliğini sağlıyor. Buna göre

- a) Bu dizinin en az bir terimini bölen asal sayılar kümesinin sonlu olmadığını kanıtlayınız.
- b) Bu dizinin hiçbir terimini bölmeyen 3 farklı asal sayı bulunuz.
- 3  $|AB| > |AC|$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  dan  $BC$  ye indirilen yüksekliğin ayağı  $D$ ,  $B$  ye ait iç açıortayın  $AD$  yi kestiği nokta  $K$ ,  $B$  den  $CK$  ye indirilen dikmenin ayağı  $M$  ve  $BM$  ile  $AK$  nin kesişim noktası  $N$  olsun.  $N$  den geçip  $DM$  ye paralel olan doğru  $AC$  yi  $T$  de kestiğine göre  $BM$  nin  $\widehat{TBC}$  açısının iç açıortayı olduğunu gösteriniz.

### Çözüm 1:

$BK$  ile  $NC$  doğruları  $E$  de,  $BA$  ile  $NC$  doğruları  $F$  de kesişsin.



$\triangle NBC$  de,  $ND$  ve  $CM$  yükseklik olduğu için  $K$  diklik merkezi ve  $BE$  diğer yüksekliktir.

$\angle ABK = \angle KBD = \beta$  dersek,  $\angle BKN = \angle BFN = 90^\circ + \beta$  olacaktır.

$\angle TNM = \angle DMN = 180^\circ - \angle DMB = 180^\circ - \angle BKD = 90^\circ + \beta$  dir.

Bu durumda,  $\angle TNB = \angle BFN = \angle BKN$  olduğu için  $BKFN$  kirişler dörtgenidir ve bu dörtgenin çevrel çemberi  $TN$  ye  $N$  de teğettir.

$C$  nin  $BN$  ye göre simetriği  $L$  olsun.

$\angle LBN = \angle NBC = \angle MKN$  olduğu için  $L$  noktası da  $BKFN$  kirişler dörtgeninin çevrel çemberi üzerindedir.

$BL$  ile  $TN$  doğrusu  $P$  de kesişsin.  $P = T$  olduğunu göstereceğiz.

$BLKNF$  kirişler beşgeni, eşdeğer olarak  $BLKNNF$  dejenere kirişler altıgeni için **Pascal Teoremi** uyguladığımızda  $C$ ,  $A$ ,  $P$  noktalarının doğrusal olduğu sonucuna varırız.  $CA$  ile  $TN$ ,  $P$  de yani sorudaki tanım gereği  $T$  de kesişir.

Yani  $\angle TBN = \angle PBN = \angle NBC$  dir.

**Çözüm 2:**

Bir önceki çözümdeki gibi bir yol izleyip, Pascal Teoremi kullanmadan (aslında ispatını yaparak) bir çözüm yapacağız.

$BK$  ile  $NC$  doğruları  $E$  de,  $BA$  ile  $NC$  doğruları  $F$  de kesişsin.

$\triangle NBC$  de,  $ND$  ve  $CM$  yükseklik olduğu için  $K$  diklik merkezi ve  $BE$  diğer yüksekliktir.

$\angle ABK = \angle KBD = \beta$  dersek,  $\angle BKN = \angle BFN = 90^\circ + \beta$  olacaktır.

$\angle TNM = \angle DMN = 180^\circ - \angle DMB = 180^\circ - \angle BKD = 90^\circ + \beta$  dir.

Bu durumda,  $\angle TNB = \angle BFN = \angle BKN$  olduğu için  $BKFN$  kirişler dörtgenidir ve bu dörtgenin çevrel çemberi  $TN$  ye  $N$  de teğettir.

$C$  nin  $BN$  ye göre simetriği  $L$  olsun.

$\angle LBN = \angle NBC = \angle MKN$  olduğu için  $L$  noktası da  $BKFN$  kirişler dörtgeninin çevrel çemberi üzerindedir.

$BL$  ile  $TN$  doğrusu  $P$  de kesişsin.  $P = T$  olduğunu göstereceğiz.

$\angle LBN = \angle NBC = \alpha$  olsun.

Basit açı hesaplarıyla,  $\angle PLN = 90^\circ + \beta$ ,  $\angle PNL = \alpha$ ,  $\angle PLC = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle PNC = 180^\circ - \alpha + 2\beta$ ,  $\angle AKF = \alpha - 2\beta$ ,  $\angle AKC = 180^\circ - \alpha$ ,  $\angle AFK = 90^\circ - \alpha$  ve  $\angle AFC = 90^\circ - \beta$  olarak bulunur.

Ceva Teoremi'nin Trigonometrik halini önce  $\triangle CKF$  de üçgen dışındaki  $A$  noktası için, sonra da  $\triangle CLN$  de üçgen dışındaki  $P$  noktası için uygulayacağız.

$\angle KCA = x$ ,  $\angle FCA = y$ ,  $\angle LCP = x'$ ,  $\angle NCP = y'$  olsun.

$\triangle CKF$  de  $A$  noktası için:

$$\frac{\sin \angle KCA}{\sin \angle ACF} \cdot \frac{\sin \angle AKF}{\sin \angle AKC} \cdot \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle AFK} = \frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin(\alpha - 2\beta)}{\sin(180^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 1 \quad (1)$$

$\triangle CLN$  de  $P$  noktası için:

$$\frac{\sin \angle LCP}{\sin \angle PCN} \cdot \frac{\sin \angle PLN}{\sin \angle PLC} \cdot \frac{\sin \angle PNC}{\sin \angle PNL} = \frac{\sin x'}{\sin y'} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\sin(90^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\sin(180^\circ - \alpha + 2\beta)}{\sin \alpha} = 1 \quad (2)$$

Bu durumda  $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin x'}{\sin y'}$ , dolayısıyla  $x = x'$  ve  $y = y'$  olur. Bu durumda  $C, A, P$  doğrusaldır. Yani  $P = T$  dir.

- 4 Bir  $n$  pozitif tamsayısı için,  $n$ 'nin basamak sayısı  $b$  olmak üzere  $r + l < b$  koşulunu sağlayan herhangi  $r$  ve  $l$  negatif olmayan tamsayıları için  $n$ 'nin en soldaki  $l$  basamağının be en sağdaki  $r$  basamağının silinmesiyle elde edilen sayının her bir pozitif bölenine  $n$ 'nin **alt böleni** deniyor.(Örneğin 143 sayısının alt bölenleri 1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14, 43 ve 143'tür.)  $d$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,  $d$  yi alt bölen olarak kabul etmeyen tam sayıların kümesi  $A_d$  ile gösterilsin.  $A_d$ 'nin sonlu bir kümesi olmasını sağlayan tüm  $d$  pozitif tam sayılarını bulunuz.

- 5 Gerçel katsayılı ve sabit olmayan bir  $P(x)$  polinomunun tüm kökleri gerçel sayılardır.

$$(P(x))^2 = P(Q(x))$$

eşitliğinin her  $x$  gerçel sayısı için sağlayan gerçel katsayılı bir  $Q(x)$  polinomu bulunuyorsa,  $P(x)$  polinomunun tüm köklerinin aynı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:****(Doğan Dönmez):**

$\text{der}P^2(x) = 2 \cdot \text{der}P(x)$  ve  $\text{der}P(Q(x)) = \text{der}P(x) \cdot \text{der}Q(x)$  tir. Bu iki ifade eşitlenirse  $\text{der}Q(x) = 2$  bulunur.  $\text{der}P(x) = n$  diyelim.

$a_1, a_2, \dots, a_k$  sayıları  $P(x)$  in farklı kökleri olsun ( $1 \leq k \leq n$ ). Tüm kökleri gerçel olduğu için bir  $c \neq 0$  gerçel sayısı ve bazı  $m_i \geq 1$  tam sayıları için,

$$P(x) = c(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}$$

şeklinde olur.

$$(P(x))^2 = c^2(x - a_1)^{2m_1}(x - a_2)^{2m_2} \dots (x - a_k)^{2m_k}$$

olup onun da kökleri gerçeldir ve  $k$  tane farklı gerçel kökü vardır. (Ve kökler  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sayılarıdır ama bunu kullanmayacağız.)

$$(P(x))^2 = P(Q(x)) = c(Q(x) - a_1)^{m_1}(Q(x) - a_2)^{m_2} \dots (Q(x) - a_k)^{m_k}$$

Bu polinomun da tüm kökleri gerçel olduğu için, her bir  $Q(x) - a_i$  çarpanının da kökleri gerçeldir (diskriminanti:  $\Delta \geq 0$ ). Bu, her bir  $a_i$  sayısının,  $Q$  nun görüntüsünde olmasına eşdeğerdir.

$Q(x) - a_i$  polinomlarının en çok bir tanesi için  $\Delta = 0$  olabilir. Çünkü geometrik olarak,  $Q(x) - a_i$  türü polinomlar  $Q(x)$  polinomunun  $y$  eksenine paralel olarak kaydırılması ile elde edilmiştir ve  $Q(x) - a_i$  polinomları arasında  $x$  eksenine teğet olan varsa, en fazla bir tanesi teğet olabilir. (Aynı gerçek cebirsel olarak da kolayca ifade edilebilir.) Diğer çarpanların ( $\Delta > 0$  olanlar için) 2 farklı gerçel kökü var olacaktır. Ayrıca,  $i \neq j$  için,  $a_i - a_j \neq 0$  olduğundan  $Q(x) - a_i$  ve  $Q(x) - a_j$  polinomlarının ortak kökü olamaz. Eğer böyle bir ortak  $x_0$  kökü olsaydı  $Q(x_0) - a_i = 0$ ,  $Q(x_0) - a_j = 0$  olup  $a_i = a_j$  çelişkisi elde edilirdi.

Buradan şu sonuca varırız:

Eğer  $Q(x) - a_i$  çarpanlarından tam olarak birisi için  $\Delta = 0$  ise  $P(Q(x))$  in  $2(k-1) + 1 = 2k - 1$  farklı gerçel kökü vardır.

Eğer  $Q(x) - a_i$  çarpanlarından hepsi için  $\Delta > 0$  ise  $P(Q(x))$  in  $2k$  farklı gerçel kökü vardır.

$P(x)^2$  nin  $k$  tane farklı gerçel kökü olduğu için, her iki tarafın farklı gerçel kök sayısı aynı olması, sadece  $k = 1$  ve  $Q(x) - a_1$  için  $\Delta = 0$  iken olacaktır.

Böyle bir durum örneği bulmak da zor değil: Her  $n \geq 1$  için  $P(x) = x^n$  nin tüm kökleri gerçel olup, farklı köklerin sayısı 1 dir.  $Q(x) = x^2$  için eşitlik sağlanır.

**6**  $k$  bir pozitif sayı tam sayı olmak üzere,

$$n = 2k \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \dots, -1, 1, \dots, k-1, k\}$$

$$n = 2k + 1 \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k\}$$

olsun. Bir düzenek birkaç bilyeden ve bazı bilye ikililerini birleştiren kırmızı veya beyaz iplerden oluşuyor. Her bir bilye  $R_n$  kümesindeki sayılardan birinin, iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak biçimde yazılmasına **iyi etiketleme** diyelim. Her bir bilyeye  $R_n$  kümesindeki sayılardan birinin, beyaz bir iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak, kırmızı iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayılarının toplamı 0 olmayacak şekilde yazılmasına **hassas etiketleme** diyelim.

$n \geq 3$  olmak üzere,  $R_n$  ile iyi etiketlenebilen her düzenek  $R_m$  ile hassas etiketlenebiliyorsa,  $m$  nin alabileceği en küçük değer nedir?

- 7  $\angle ACB = 90^\circ$  olan bir  $ABC$  dik üçgeninde  $C$  ye ait yükseklik ayağı  $D$  olsun.  $D$  noktasının  $AC$  ve  $BC$  doğrularına göre yansıması sırasıyla  $E$  ve  $F$  olsun.  $ECB$  ve  $FCA$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla  $O_1$  ve  $O_2$  olmak üzere,

$$2|O_1O_2| = |AB|$$

olduğunu gösteriniz.

### Çözüm 1:

$[ED] \cap [AC] = Y$  ve  $[DF] \cap [BC] = X$  olsun.  $|YD| = x$   $|DX| = y$   $|XB| = t$   $|AY| = z$  olsun. Yansımadan dolayı  $|EY| = |YD| = x$  ve  $|DX| = |XF| = y$  olur.  $\angle YDA = \alpha$  ve  $\angle CAB = \beta$  olsun.  $\angle CDF = \alpha$  ve  $\angle CDE = \beta$  olur.  $ADY$ ,  $DXB$  ve  $CDX$  üçgenlerinde  $\tan(\alpha)$  değerlerini birbirine eşitlersek

$$\frac{z}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{t}$$

elde edilir. Yansımalar nedeniyle  $\angle CFD = \alpha$  ve  $\angle DEC = \beta$  olur. Buradan  $\angle ECD + \angle FCD = 360 - 2(\alpha + \beta) = 180$  bulunur. Bu ise bize  $E, C, F$  noktalarının doğrusal olduğunu verir. Diğer taraftan yansımadan dolayı  $|EC| = |CD| = |CF|$  olduğunu söyleyebiliriz ve bunların her biri  $m$  birim olsun.  $EYC$  üçgeninde pisagor teoreminden

$$x^2 + y^2 = m^2$$

olduğu elde edilir. Çevre açısı- merkez açısı bağıntısı yardımıyla  $2\angle CAF = \angle CO_1F = 2\phi$  ve  $2\angle ECB = \angle EO_2C = 2\theta$  olsun.  $E$  noktasından  $BC$  doğrusuna dikme çizelim ve  $E \cap BC = G$  olsun. Benzer şekilde  $F$  noktasından  $AC$  ye dikme çizelim ve kesiştikleri nokta  $H$  olsun.  $GBE$  ve  $HFA$  üçgenlerinden yardım alarak  $\cot \phi$  ve  $\cot \theta$  değerlerini bulabiliriz.

$$\cot \theta = \frac{2x + t}{y}$$

ve

$$\cot \phi = \frac{2y + z}{x}$$

olur.  $O_2EC$  üçgenin  $O_2$  noktasından,  $O_1CF$  üçgeninde ise  $O_1$  noktasından yükseklik inerek tabanı ikizkenar üçgen olduğu için iki eş parçaya böler.  $O_1$  den inen yüksekliği  $Q$ ,  $O_2$  den inen yüksekliğin ayağı  $R$  olsun.

$\frac{|O_2Q|}{\frac{m}{2}} = \frac{2x + t}{y}$  olur buradan ise

$$|O_2Q| = \frac{m \cdot (2x + t)}{2y}$$

olur.

Benzer şekilde

$$|O_1R| = \frac{m \cdot (2y + z)}{2x}$$

olur.  $QRO_1O_2$  dörtgenin dik yamuk olduğuna dikkat edersek ve  $|QR| = m$  olduğuna dikkat edersek

$$|O_1O_2|^2 = m^2 + (|O_2Q| - |O_1R|)^2$$

eşitliği yazılabilir.  $(|O_2Q| - |O_1R|)^2$  ifadesini sadeleştirelim.

$$(|O_2Q| - |O_1R|)^2 = \frac{m^2}{4} \left( \frac{2x + t}{y} - \frac{2y + z}{x} \right)^2 = \frac{m^2}{4} \left( \frac{2x^2 + xt - 2y^2 - yz}{xy} \right)^2$$

olur. En başta  $\frac{z}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{t}$  olduğunu söylemiştik. Buradan  $xt = y^2$  ve  $yz = x^2$  elde edilebilir. Yerine koyarsak

$$(|O_2Q| - |O_1R|)^2 = \frac{m^2}{4} \left( \frac{x^2 - y^2}{xy} \right)^2$$

olur. O halde

$$|O_1O_2|^2 = \frac{m^2}{4} \left( \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2y^2} + 4 \right) = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2y^2} = \frac{m^6}{4x^2y^2}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $AYD$  ve  $DXB$  üçgenlerinde pisagor teoremleri yardımıyla

$$|AB|^2 = (\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + t^2})^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2 \cdot \sqrt{x^2y^2 + x^2t^2 + z^2y^2 + z^2t^2}$$

olur.  $x^2 = yz$ ,  $y^2 = xt$  ve  $xy = zt$  eşitliklerini kullanarak

$$\sqrt{x^2y^2 + x^2t^2 + z^2y^2 + z^2t^2} = \sqrt{x^2y^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2} = x^2 + y^2$$

elde edilir. Buradan

$$|AB|^2 = 3 \cdot (x^2 + y^2) + z^2 + t^2$$

olur.

$$|AB|^2 = 3 \cdot (x^2 + y^2) + \frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} = 3(x^2 + y^2) + \frac{(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)}{x^2y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)}{x^2y^2} = \frac{m^6}{x^2y^2}$$

olur. Buradan ise

$$\frac{|AB|^2}{|O_1O_2|^2} = 4$$

elde edilir ve ispat biter.

### Çözüm 2:

$ACBG$  dikdörtgenini kuralım.

$$\angle ABC = \angle GCB = \angle ACD = \angle ACE$$

$\angle ACG = 90^\circ - \angle GCB = 90^\circ - \angle ACE$  olduğu için  $\angle ECG = 90^\circ$  dir.

$\angle BCF = \angle DCB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle GCB$  olduğu için  $\angle GCF = 90^\circ$ .

Bu durumda  $E, C, F$  doğrusal ve  $AE \parallel CG \parallel BF$  dir.

$EC$  nin orta dikmesi,  $AG$  nin orta noktasından geçer.

$BC$  nin orta dikmesi de  $AG$  nin orta noktasından geçer. Bu durumda  $O_1$ ,  $AG$  nin orta noktasıdır.

Benzer şekilde  $O_2$  de  $BG$  nin orta noktasıdır.

$\triangle ABG$  de benzerlikten  $\frac{AB}{2} = O_1O_2$  olacaktır.

**8**  $p > 2$  bir asal sayı,  $m > 1$  ve  $n$  pozitif tam sayılar olmak üzere,  $\frac{m^{pn} - 1}{m^n - 1}$  bir asal sayı ise,

$$pn|(p-1)^n + 1$$

olduğunu gösteriniz.

**9**  $x, y, z$  gerçel sayılar olmak üzere  $y > 2z > 4x$  ve

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 15(xy^2 + yz^2 + zx^2) > 16(x^2y + y^2z + z^2x) + 2xyz$$

koşulları sağlanıyorsa  $4x + y > 4z$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:**

$y = 4x + a$  ve  $z = 2x + b$  diyelim.  $a > 2b > 0$  olur ve bizden ispatlamamızı istenen eşitsizlik  $a > 4b$  haline dönüşür. İkinci şartı yeni dönüşümlerle yazıp düzenlersek,

$$-49x^2b + x(7a^2 - 70ab + 56b^2) + (2a^3 - 16a^2b + 15ab^2 + 2b^3) > 0 \quad (1)$$

bulunur.

(1)'deki ifadeyi  $x$ 'e bağlı ikinci dereceden bir fonksiyon olarak düşünersek baş katsayı negatif olduğundan bu şartı sağlayan bir  $x$  olması için ifadenin tam iki kökü olması gerekir. Böylece iki kök arası için ifade pozitif olacaktır. (Tek kökü olursa alabileceği en büyük değer 0 olur) Dolayısıyla  $\Delta > 0$  olmalıdır.

$$\Delta > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{49} = (a^2 - 10ab + 8b^2)^2 + 4b(2a^3 - 16a^2b + 15ab^2 + 2b^3) > 0$$

olmalı. Eşitsizliğin iki tarafını da  $b^4$ 'e bölersek ve  $\frac{a}{b} = k$  dersek

$$(k^2 - 10k + 8)^2 + 4(2k^3 - 16k^2 + 15k + 2) = (k - 2)(k^3 - 10k^2 + 32k - 36) > 0$$

olmalıdır.  $a > 2b$  olduğundan  $k > 2$ 'dir. Dolayısıyla

$$k^3 - 10k^2 + 32k - 36 > 0$$

olmalıdır.  $f(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 36$  için

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 32 = (3x - 8)(x - 4)$$

olur.  $f$  fonksiyonunun türevini 0'a eşitlersek  $x = 4$  ve  $x = \frac{8}{3}$  değerleri ekstremum noktaları bulunur.  $f$  fonksiyonu  $-\infty$ 'den geldiği için  $x = \frac{8}{3}$  yerel maksimum,  $x = 4$  yerel minimumdur. Yani fonksiyon  $(-\infty, \frac{8}{3})$  ve  $(4, \infty)$  aralığında artan  $(\frac{8}{3}, 4)$  aralığında azalır.

$f(\frac{8}{3}) = -\frac{76}{27}$  ve  $f(4) = -4$  olduğundan  $(-\infty, 4)$  aralığında her zaman negatiftir. Fonksiyonun pozitif olması için  $x > 4$  olmalıdır. Buradan da  $k = \frac{a}{b} > 4$  bulunur.

## 61. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2020

1

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 4} = 2020$$

eşitliğini sağlayan tüm  $(a, b)$  pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Selim Bahadır)

### Çözüm 1:

Eğer  $a$  ve  $b$ 'den birisi çift ise  $ab + 4$  çift olacağından  $a$  ve  $b$ 'nin ikisi birden çift olması gerekir. Dolayısıyla ya ikisi birden tektir ya da ikisi birden çifttir.

$p = 3k + 2$  formatında tek bir asal sayı olsun.  $a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{p}$  ise

$$a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

Eğer  $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$  ise

$$(2a - b)^2 \equiv -3b^2 \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{2a - b}{b}\right)^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

olur, yani  $-3, p$  modunda karekalandır.  $\left(\frac{a}{p}\right)$  lagrange sembolü olmak üzere,

$$\left(\frac{3}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right) \Rightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) \left(\frac{3}{p}\right)^2 = \left(\frac{p}{3}\right)$$

fakat  $p, 3k + 2$  formunda olduğundan

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = -1$$

bulunur. Dolayısıyla  $a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{p}$  ise  $a^3 + b^3 \equiv a + b \equiv 0 \pmod{p}$  olmalıdır.

i)  $a$  ve  $b$  tek ise

Her tek  $a$  sayısı için  $a^3 - a \equiv 0 \pmod{4}$  olduğundan  $a^3 + b^3 \equiv a + b \pmod{4}$  olmalıdır.  $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$  olduğundan

$$a^3 + b^3 \equiv a + b \equiv 0 \pmod{2020}$$

olmalıdır.

$$(a + b) \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{ab + 4} = 2020$$

olduğundan,

Eğer  $a^2 - ab + b^2 \geq ab + 4$  ise  $a + b = 2020$  ve  $a^2 - ab + b^2 = ab + 4$  olmalıdır. Buradan  $a - b = 2$  veya  $a - b = -2$  elde ederiz. Buradan  $(a, b) = (1009, 1011), (1011, 1009)$  çözümleri bulunur.

Eğer  $a^2 - ab + b^2 < ab + 4$  ise  $(a - b)^2 = 0$  veya  $(a - b)^2 = 1$  olur. Eğer  $(a - b)^2 = 1$  ise  $a$  ve  $b$ 'nin biri tek diğeri çift olur fakat toplamaları 4'e bölünemez. Çelişki. Eğer  $(a - b)^2 = 0$  ise ana denklemde  $a = b$  yazarsak  $a^3 = 1010(a^2 + 4)$  olur fakat buradan tamsayı çözüm gelmez.

ii) Eğer  $a$  ve  $b$  çiftse  $a = 2m$  ve  $b = 2n$  diyelim. Denklem

$$\frac{m^3 + n^3}{mn + 1} = 1010$$

olur.  $m^3 + n^3 \equiv m + n \pmod{2}$  olduğundan  $m^3 + n^3 \equiv m + n \equiv 0 \pmod{1010}$  olur. Eğer  $m^2 + n^2 - mn > mn + 1$  ise  $m + n \geq 1010$  olduğundan

$$(m + n) \cdot \frac{m^2 + n^2 - mn}{mn + 1} > 1010$$

olur. Dolayısıyla

$$m^2 + n^2 - mn \leq mn + 1 \Rightarrow (m - n)^2 \leq 1$$

olmalıdır. Eğer  $(m - n)^2 = 0$  ise  $m = n$  olur ve yerine yazarsak  $m^3 = 505(m^2 + 1)$  olur fakat çözüm gelmez.  $(m - n)^2 = 1$  ise  $m + n$  çift olduğundan (1010'a bölündüğünden)  $m$  ve  $n$  tamsayı olamaz. Buradan çözüm gelmez.

Tüm çözümler  $(a, b) = (1011, 1009), (1009, 1011)$  bulunur.

### Çözüm 2:

(Selim BAHADIR)

Verilen eşitliği

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = 4 \cdot 5 \cdot 101 \cdot (ab + 4) \quad (1)$$

olarak yazalım.  $p \in \{5, 101\}$  olsun. O halde  $p = 6k + 5$  olan  $k$  tam sayısı vardır.  $p \mid ab$  ise,  $p \mid a^3 + b^3$  olduğundan  $p \mid a$  ve  $p \mid b$  dir. O zaman (1) de sol taraf  $p^3$  ile bölünür, ancak sağ taraf bölünmez. Demek ki  $p \nmid ab$  dir.  $b$  nin  $(\text{mod } p)$  deki tersi  $b^{-1}$  olmak üzere  $c \equiv ab^{-1} \pmod{p}$  olsun.  $p \mid a^3 + b^3$  olduğundan  $c^3 \equiv -1 \pmod{p}$  elde edilir. Fermat Teoremi'nden dolayı  $c^{6k+4} \equiv 1 \pmod{p}$  dir. Buradan  $c \equiv -1 \pmod{p}$ , yani  $p \mid a + b$  sonucu çıkar ve  $505 \mid a + b$  olur.

Diğer taraftan,  $a$  ve  $b$ 'nin ya her ikisi de tektir ya da ikisi de çifttir.

**1. Durum:**  $a$  ve  $b$  tektir.

(1) den  $4 \mid a + b$  dir. O halde  $2020 \mid a + b$  ve  $2020 \leq a + b$  elde edilir. (1) den  $a^2 - ab + b^2 \leq ab + 4$  sonucu çıkar.  $(a - b)^2 \leq 4 \implies |a - b| = 0$  veya  $2$  dir.  $a = b$  için çözüm olmadığı kolayca görülür.  $|a - b| = 2$  için  $a + b = 2020$  olur ve  $(1011, 1009)$  ve  $(1009, 1011)$  çözümleri bulunur.

**2. Durum:**  $a$  ve  $b$  çifttir.

$a = 2x, b = 2y$  olur. (1) de yerine yazarsak

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot (xy + 1) \quad (2)$$

eşitliği elde edilir.  $x$  ve  $y$  nin ya her ikisi de çifttir ya da ikisi de tektir.  $2 \mid x + y$  olur.  $505 \mid a + b = 2(x + y)$  olduğundan  $505 \mid x + y$  olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak  $1010 \mid x + y$  ve  $1010 \leq x + y$  ede edilir. (2) den  $x^2 - xy + y^2 \leq xy + 1$  dir.  $(x - y)^2 \leq 1 \implies |x - y| \leq 1 \implies x = y$  olur. Ancak bu durumda (2) yi sağlayan tam sayılar bulunmadığı kolayca görülür.

Tüm çözümler,  $(1011, 1009)$  ve  $(1009, 1011)$  olarak bulunur.

**2**  $A_1A_2A_3A_4$  teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu  $p_1$ , köşegenlerinin uzunlukları toplamı  $k_1$  ve  $B_1B_2B_3B_4$  teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu  $p_2$ , köşegenlerinin uzunlukları toplamı  $k_2$  olmak üzere

$$p_1^2 + p_2^2 = (k_1 + k_2)^2$$

ise  $A_1A_2A_3A_4$  ve  $B_1B_2B_3B_4$  dörtgenlerinin eş kareler olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

### Çözüm:

$A_1A_2A_3A_4$  dörtgeni için Ptolemy eşitsizliğinden

$$|A_1A_2| \cdot |A_3A_4| + |A_1A_4| \cdot |A_2A_3| \geq |A_1A_3| \cdot |A_2A_4| \quad (1)$$

olur. Ayrıca paralelkenar eşitsizliğinden

$$|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A_4|^2 + |A_4A_1|^2 \geq |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 \quad (2)$$

olduğunu biliyoruz. (1) no'lu eşitsizliği 2 ile çarpıp (2) no'lu eşitsizlikle toplarsak

$$(|A_1A_2| + |A_3A_4|)^2 + (|A_1A_4| + |A_2A_3|)^2 \geq (|A_1A_3| + |A_2A_4|)^2$$

elde ederiz.  $A_1A_2A_3A_4$  dörtgeni, teğetler dörtgeni olduğundan  $|A_1A_2| + |A_3A_4| = |A_1A_4| + |A_2A_3| = \frac{p_1}{2}$  eşitliği sağlanır.  $|A_1A_3| + |A_2A_4| = k_1$  olduğundan

$$\frac{p_1^2}{2} \geq k_1^2 \Rightarrow p_1^2 \geq 2k_1^2$$

elde edilir. Aynı işlemleri  $B_1B_2B_3B_4$  teğetler dörtgenine uygularsak, benzer şekilde  $p_2^2 \geq 2k_2^2$  elde ederiz. Elde ettiğimiz eşitsizlikleri toplayalım.

$$p_1^2 + p_2^2 \geq 2(k_1^2 + k_2^2) \Rightarrow (k_1 + k_2)^2 \geq 2(k_1^2 + k_2^2) \Rightarrow 0 \geq (k_1 - k_2)^2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

bulunur. Elde ettiğimiz son eşitsizlikte eşitlik durumu olduğundan önceki tüm eşitsizliklerde de eşitlik durumu sağlanmalıdır. Ptolemy eşitsizliğinin eşitlik durumu kirişler dörtgeni olmak ve paralelkenar eşitsizliğinin eşitlik durumunun paralelkenar olmak olduğundan  $A_1A_2A_3A_4$  ve  $B_1B_2B_3B_4$  dörtgenlerinin dikkörtgen olması gerekir ve bu dörtgenler ayrıca teğetler dörtgeni olduklarından dolayı kare olmak zorundadırlar.  $k_1 = k_2$  elde ettiğimiz için bu karelerin köşegen uzunlukları birbirlerine eşittir. Dolayısıyla  $A_1A_2A_3A_4$  ve  $B_1B_2B_3B_4$  teğet dörtgenleri eş karelerdir.

- 3 66 cücenin toplam 111 kavuğu vardır. Kavuklardan her biri bir cüceye aittir ve belirli 66 renkten birine boyalıdır. Bu cücelerin her birinin kendine ait bir kavuğu giyerek katıldığı şenlikler düzenleniyor. Şenliklerin hiçbirinde aynı renkli kavuk giyen iki cüce bulunmamaktadır. Şenliklerin herhangi ikisi için bu şenliklerde farklı renkte kavuk giyen en az bir cüce bulunmaktadır. Düzenlenen şenlik sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

(Azer Kerimov)

- 4  $\mathbb{Z}^+$  ile pozitif tam sayılar kümesi gösteriliyor.  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  bir fonksiyon olmak üzere her  $\ell \in \mathbb{Z}^+$  için  $f_\ell$  ile  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\ell \text{ tane}}$  bileşke fonksiyonu gösteriliyor. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için,

$$(n-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n) < n^{2020} + n^{2019}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  fonksiyonlarını bulunuz.

(Şahin Emrah)

### Çözüm:

$n = 1$  için

$$0 < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(1) < 2 \Rightarrow \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(1) = 1$$

olur. Fonksiyon pozitif tamsayılardan pozitif tamsayılara tanımlandığından  $f(1) = 1$  olmalıdır.  $f(n) = n$  olduğunu tümevarım ile gösterelim.  $n = 1$  için doğru olduğunu gösterdik.  $n = 1, 2, \dots, k-1$  için  $f(n) = n$  sağlasın.  $f(k) = k$  olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim.

i)  $f(k) < k$  ise  $f(k) = i$  için  $f(f(k)) = f(i) = i$  olur. Benzer şekilde  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\ell \text{ tane}}(k) = i$  olur.  $\prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(k) =$

$i^{2020}$  olur. Soruda verilen eşitsizlikten

$$(k-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(k) = i^{2020} \leq (k-1)^{2020}$$

olur. Çelişki.

ii)  $f(k) > k$  ise herhangi bir  $t$  için  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_t(k) < k$  değilse  $f(k) \geq k + 1$  olduğundan

$$\prod_{\ell=1}^{2020} f_{\ell}(k) \geq (k+1) \cdot k^{2019} = k^{2020} + k^{2019}$$

olur fakat  $\prod_{\ell=1}^{2020} f_{\ell}(k) < k^{2020} + k^{2019}$  olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla öyle bir  $t$  pozitif tamsayısı vardır ki  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_t(k) < k$  olsun. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük  $t$ 'yi ele alalım.  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{t-1}(k) = m$  olsun.  $k \leq m$  fakat  $f(m) = f_t(k) < k \leq m$  ve dolayısıyla  $f(m) \leq m - 1$  olur. Ana eşitsizlikte  $n = m$  için

$$(m-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_{\ell}(m) \leq (m-1)^{2020}$$

olur. Çelişki. Dolayısıyla tümevarımla göstermiş olduk ki her  $n$  pozitif tamsayısı için  $\boxed{f(n) = n}$  olmalıdır.

- 5 Farklı isimli öğrencilerden oluşan bir sınıfta en az bir arkadaş ikilisi bulunmaktadır. Öğrencilerin bazılarında oluşan bir sıralı listedeki öğrenciler sırayla kalkıp başlangıçta boş olan tahtaya o an tahtada yazılı olmayan bütün sınıf arkadaşlarının isimlerini yazıyor. Listedeki her öğrenci en az bir ismi tahtaya yazdıysa ve en az bir arkadaşına sahip her öğrencinin ismi süreç sonunda tahtada yazılıysa, bu sıralı listeye bir *altın liste* diyelim. Çift sayıda öğrenciden oluşan bir altın listenin bulunduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

- 6  $ABC$  üçgeninin  $AB$  kenarı üzerinde  $D$  ve  $AC$  kenarı üzerinde  $E$  noktaları  $DE \parallel BC$  olacak şekilde veriliyor.  $BE$  ile  $CD$  nin kesiştiği nokta  $P$ ,  $(APD)$  nin  $(BCD)$  yi ikinci kez kestiği nokta  $M$ ,  $(APE)$  nin  $(BCE)$  yi ikinci kez kestiği nokta  $N$  olsun.  $M$  ve  $N$  den geçip  $BC$  ye teğet olan çember  $\omega$  olsun.  $\omega$  ya  $M$  de ve  $N$  de teğet olan doğruların  $AP$  üzerinde kesiştiklerini gösteriniz.

Not:  $(XYZ)$  ile  $XYZ$  üçgeninin çevrel çemberi gösteriliyor.

(Melih Üçer)

- 7 Bir çember üzerinde  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  noktaları  $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$  olacak şekilde veriliyor. Aynı çember üzerindeki bir  $M$  noktası için  $MA_1$  ile  $B_2C_2$  nin kesişimi  $X$ ,  $MB_1$  ile  $A_2C_2$  nin kesişimi  $Y$ ,  $MC_1$  ile  $A_2B_2$  nin kesişimi  $Z$  olsun.  $X, Y, Z$  nin doğrusal olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

### Çözüm:

$A_1MB_1B_2C_2A_2$  noktalarında Pascal Teoremi uygularsak,

$XY \parallel A_1A_2$  gelir. Bunu benzer şekilde 2 defa daha uygularsak  $XY \parallel YZ \parallel ZX$  bulunur ve bu da soruyu bitirir.

- 8  $0 < x, y, z < 1$  eşitsizliğini sağlayan  $x, y, z$  gerçel sayıları için

$$\frac{xyz(x+y+z) + (xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

**Çözüm 1:**Cevap: 6

Sırasıyla Aritmetik-Geometrik ve Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizlikleri ile,

$$\begin{aligned} \frac{xyz(x+y+z) + (xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}} &= \frac{x+y+z}{\sqrt{1-xyz}} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\sqrt{1-xyz} \\ &\geq 2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \\ &\geq 2\sqrt{9} = 6 \end{aligned}$$

buluruz. Eşitlik durumunu inceleyelim. Aritmetik-Harmonik eşitsizliğin eşitlik durumu için,  $x = y = z$  olmalıdır. Bunu Aritmetik-Geometrik eşitsizliğe giren terimlere yazıp eşitlersek,  $\frac{3x}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{3\sqrt{1-x^3}}{x}$ . Burayı düzenlersek,  $x^3 + x^2 - 1 = 0$ . Bu denklemin  $(0, 1)$  aralığında kökü olduğunu göstermek eşitlik durumunun sağlandığını göstermeye yeterli olacaktır.  $x = 0$  noktasında polinom  $-1$  değerini alır.  $x = 1$  noktasında ise  $1$  değerini aldığından, sürekli fonksiyonlar için ara değer teoremi gereğince, polinomun  $(0, 1)$  aralığında kökü vardır.

**Çözüm 2:**

Farklı bir cevap verelim. İki defa aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned} \frac{xyz(x+y+z) + (xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}} &= \frac{x+y+z}{\sqrt{1-xyz}} + \frac{xy+yz+zx}{xyz}\sqrt{1-xyz} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}} \geq 2\sqrt{\frac{9xyz}{xyz}} = 6 \end{aligned}$$

elde ederiz. 6'nın minimum değer olduğunu göstermek için, eşitlik durumu analizi yapmalıyız. Bunun için, önceki çözümde olduğu gibi

$$\frac{3x}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{3\sqrt{1-x^3}}{x}$$

denkleminin  $(0, 1)$  aralığında kökü olduğunu göstermek yeterlidir.

9  $a, n$  pozitif tam sayıları için

$$x_1 x_2 \cdots x_{10} \equiv a \pmod{n}$$

denkliğini sağlayan  $n$  modunda farklı  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  tam sayı 10-lularının sayısı  $f(a, n)$  ile gösteriliyor.  $a$  ve  $b$  verilmiş pozitif tam sayılar olmak üzere,

(a)  $\frac{f(a, cn)}{f(b, cn)}$  oranının her  $n$  pozitif tam sayısı için aynı değere eşit olmasını sağlayan bir  $c$  pozitif tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

(b) Böyle en küçük  $c$  nin 27 olmasını sağlayan tüm  $(a, b)$  ikililerini bulunuz.

(Melih Üçer)

## 62. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2021

- 1  $n$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\frac{20 \cdot 5^n - 2}{3^n + 47}$$

ifadesinin tam sayı olmadığını gösteriniz.

### Çözüm:

Teklik-çiftlik durumlarını inceleyelim,

i)  $n$  çift sayı ise

$$3^n + 47 \equiv (-1)^n + 47 \equiv 48 \equiv 0 \pmod{4}$$

olur fakat  $20 \cdot 5^n - 2 \equiv 2 \pmod{4}$  olduğundan ifade tamsayı olamaz.

ii)  $n$  tek sayıysa ya  $4k + 1$  formundadır ya da  $4k + 3$  formundadır.

iiia)  $n = 4k + 1$  ise

$$3^{4k+1} + 47 \equiv 3 \cdot 81^k + 47 \equiv 50 \equiv 0 \pmod{5}$$

olur. Dolayısıyla  $5 \mid (20 \cdot 5^n - 2)$  olmalıdır fakat bariz bir şekilde bu durum sağlanılmaz.

iiib)  $n = 4k + 3$  ise  $20 \cdot 5^{4k+3} - 2 = (10 \cdot 5^{2k+1})^2 - 2$  olacaktır.  $3^{4k+3} + 47 \equiv (-1)^{4k+3} + 47 \equiv 2 \pmod{4}$  olduğundan 2'nin bir kuvveti olamaz. Dolayısıyla tek bir asal böleni vardır. Bu bölenlerden biri  $p$  olsun.  $p \mid (10 \cdot 5^{2k+1})^2 - 2$  olduğundan 2,  $p$  modunda karekalandır. 2'nin karekalan olması için  $p$ 'nin  $8m + 1$  veya  $8m + 7$  formatında olması gerekir. Aksi halde karekalan olamaz.  $3^n + 47$ 'nin 2 haricindeki tüm bölenleri  $8m \pm 1$  formatında olduğundan  $\frac{3^n + 47}{2}$  de bu asal sayıların çarpımından dolayı  $8t \pm 1$  formatında olmalıdır. Yani  $3^n + 47 \equiv \pm 2 \pmod{16}$  olmalıdır.

$$3^{4k+3} + 47 \equiv 27 \cdot 81^k + 47 \equiv 27 + 47 \equiv 74 \equiv 10 \pmod{16}$$

elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Yani hiçbir  $n$  sayısı için ifade tamsayı olamaz.

- 2 Bir okuldaki öğrencilerin herhangi üçü için bu üç öğrenci ile de arkadaş olan en az bir öğrenci bulunmaktadır. Arkadaş olan herhangi iki öğrencinin herhangi iki ortak arkadaşı da arkadaşdır. Bu okuldaki öğrencileri boş olmayan iki gruba, farklı gruplarda yer alan herhangi iki öğrenci arkadaş olacak şekilde ayırmak mümkün değildir. Buna göre, bu okulda arkadaş olmayan iki öğrencinin hep aynı sayıda ortak arkadaşına sahip olduğunu gösteriniz.

(Not: Bir öğrenci kendisi ile arkadaş sayılmaktadır.)

- 3 Bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi üzerinde,  $BC$  doğrusuna göre  $A$  ile farklı tarafta yer alan bir  $D$  noktası verilmiştir.  $ABC$  ve  $ADC$  üçgenlerinin iç bölgelerinin kesişiminde bulunan bir  $E$  noktası  $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{BCE})$  olacak şekilde almıyor.  $ADE$  üçgeninin çevrel çemberinin  $AB$  doğrusu ile ikinci kesişim noktası  $K$  olsun.  $EK$  ve  $BC$  doğrularının kesişimi  $L$  noktası,  $EC$  ve  $AD$  doğrularının kesişimi  $M$  noktası,  $BM$  ve  $DL$  doğrularının kesişimi ise  $N$  noktası olsun.

$$m(\widehat{NEL}) = m(\widehat{NDE})$$

olduğunu gösteriniz.

- 4 28 tür balığın satıldığı bir balık pazarında 28 balık satıcısı vardır. Her satıcıda her balık türünün sadece Akdeniz'den geleni ya da Karadeniz'den geleni bulunmaktadır.  $k$  kişiden her biri, her türden bir balık olmak üzere her satıcıdan bir balık almıştır. Herhangi iki kişi en az bir balık türü için o türün farklı denizlerden gelen balıklarını aldıysa,  $k$  en fazla kaç olabilir?
- 5 Çeşitkenar bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $[BC]$  nin orta dikmesinin kesişim noktaları  $M$  ve  $N$  olmak üzere,  $[AM]$  ve  $[AN]$  nin orta noktaları  $K$  ve  $L$  olsun.  $ABK$  ve  $ABL$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin  $AC$  doğrusu ile ikinci kesişim noktaları sırasıyla  $D$  ve  $E$ ,  $ACK$  ve  $ACL$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin  $AB$  doğrusu ile ikinci kesişim noktaları sırasıyla  $F$  ve  $G$  olsun.  $DF$ ,  $EG$  ve  $MN$  doğrularının noktadaş olduğunu ispatlayınız.

6 Hangi  $n$  pozitif tam sayıları için,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)^2} = \frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$$

ve her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $i \leq x_i \leq 2i$  koşullarını sağlayan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gerçel sayıları vardır?

**Çözüm:**

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  olduğundan denklemi düzenlersek,

$$8(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 9(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)^2$$

elde edilir.  $i \leq x_i \leq 2i$  olduğundan  $(x_i - i)(x_i - 2i) \leq 0$  olur. Yani  $x_i^2 + 2i^2 \leq 3ix_i$  olur.  $i = 1, 2, \dots, n$  için

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i^2 \leq 3 \sum_{i=1}^n ix_i$$

AGO eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i=1}^n ix_i &\geq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i^2 \geq 2 \sqrt{2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 \right)} \\ &\implies 9 \left( \sum_{i=1}^n ix_i \right)^2 \geq 8 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 \right) \end{aligned}$$

olur. Eşitlik durumu için  $(x_i - i)(x_i - 2i) = 0$  ve  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n i^2$  olmalıdır.  $x_i$ 'ler arasında  $i$ 'yi kullandıklarımız  $x_{s(j)}$ 'ler,  $2i$ 'yi kullandıklarımız  $x_{r(k)}$ 'ler olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum s^2(j) + 4 \sum r^2(k) = \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum r^2(k) \implies 3 \sum r^2(k) = \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum r^2(k) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} \end{aligned}$$

Eğer  $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{18}$  denkleğini incelersek (aşlında  $\pmod{9}$ 'da incelememiz yeterlidir çünkü bu ifade her zaman çifttir),

$$n \equiv 0, 4, 8 \pmod{9}$$

bulunur.

$n = 4$  için  $\sum r^2(k) = 10 = 1^2 + 3^2$  olur. Yani  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 6, 4)$  sağlar.

$n = 8$  için  $\sum r^2(k) = 68 = 2^2 + 8^2$  olur. Yani  $(x_1, x_2, \dots, x_8) = (1, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 16)$  istenileni sağlar.

$n = 9$  için  $\sum r^2(k) = 95 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 9^2$  olur. Yani  $(x_1, x_2, \dots, x_9) = (2, 4, 6, 4, 5, 6, 7, 8, 18)$  istenileni sağlar.

$n = 13$  için  $\sum r^2(k) = 273 = 2^2 + 10^2 + 13^2$  olur. Yani  $(x_1, x_2, \dots, x_{13}) = (1, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 11, 12, 26)$  olur. Şimdi ise  $n$  sağlıyorsa  $n + 9$ 'un da sağladığını göstermeliyiz.

$n$  için  $\sum^n r^2(k) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2$  olsun ( $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leq n$ ). Şimdi  $\sum^{n+9} r^2(k) - \sum^n r^2(k)$  değerini  $n + 1, n + 2, \dots, n + 9$  kullanarak tamkarelerin toplamı olarak yazmaya çalışalım. Böylece  $n + 9$  için hangi sayıları  $2i$  seçmemiz gerektiğini bulmuş oluruz.

$$\begin{aligned} \sum^{n+9} r^2(k) - \sum^n r^2(k) &= \frac{(n+9)(n+10)(2n+19)}{18} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} = 3n^2 + 30n + 95 \\ &= (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+9)^2 - n^2 \end{aligned}$$

olur. Yani  $n$  için  $r(k)$ 'lar arasından  $n$ 'yi çıkartıp  $n + 1, n + 2, n + 3, n + 9$  eklersek  $n + 9$  için hangi sayıları  $2i$  seçmemiz gerektiğini bulmuş oluruz. Fakat bunun için  $r(k)$ 'lar arasında  $n$ 'yi kullanmış olmak gerekir ki

$n = 8, 9, 13$  için kullandığımızdan ve tümevarım sonucu  $n + 9$ 'da da  $(n + 9)$ 'u kullanacağımızdan bu işlemi  $n + 9$  için de uygulayarak sonsuza kadar gidebiliriz. Yani  $n \geq 8$  ve  $n \equiv 0, 4, 8 \pmod{9}$  için tümevarımdan dolayı verilen eşitliği sağlayan  $x_i$ 'ler vardır.  $n = 4$ 'ü de ayrıca gösterdiğimizden kısaca

$$\boxed{n \equiv 0, 4, 8 \pmod{9}}$$

olan tüm pozitif tamsayılar için eşitliği sağlayan  $x_i$  sayıları vardır diyebiliriz.

**7** Bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $\omega$  ve iç teğet çemberinin merkezi  $I$  olsun.  $A$  ya ait dış açıortayın  $\omega$  yı ikinci kez kestiği noktadan ve  $I$  noktasından geçen doğrunun  $IBC$  nin çevrel çemberini ikinci kez kestiği nokta  $T_A$  olsun.  $T_B$  ve  $T_C$  noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor.  $T_A T_B T_C$  üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının  $\omega$  nın yarıçapının iki katı olduğunu gösteriniz.

**8**  $c$  bir gerçel sayı olmak üzere, tüm  $x$  ve  $y$  gerçel sayıları için

$$f(x - f(y)) = f(x - y) + c(f(x) - f(y))$$

eşitliğini sağlayan ve sabit olmayan bir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bulunuyorsa,

(a)  $c$  nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

(b)  $f$  fonksiyonu periyodik olabilir mi?

### Çözüm:

**a)** Ana eşitlikte  $x$  yerine  $y$  yazarsak  $f(y - f(y)) = f(0)$  elde edilir.

$x$  yerine  $x - f(y)$ ;  $y$  yerine önce  $y - f(y)$ , sonra 0 yazalım,

$$f(x - f(y) - f(y - f(y))) = f(x - y) + c(f(x - f(y)) - f(y - f(y)))$$

$$f(x - f(y) - f(0)) = f(x - f(y)) + c(f(x - f(y)) - f(0))$$

Buradan  $f(y - f(y)) = f(0)$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}$  için  $f(x - y) = f(x - f(y))$  olduğu görülür.

Ana eşitlikte bu bulguyu yazarsak  $c(f(x) - f(y)) = 0$  elde edilir.  $c \neq 0$  ise  $f(x) = f(y)$  olacaktır. Yani  $f$  sabit fonksiyondur.  $c = 0$  ise  $f(x) = x$  istenileni sağlar. Dolayısıyla  $f$  sabit olmak zorunda değildir. İstenileni sağlayan tek  $c$  değeri 0'dır.

**b)**  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$  fonksiyonu periyodiktir ( $\{x\}$  de diyebiliriz) ve  $c = 0$  için verilen şartı sağlar (Burada  $\lfloor x \rfloor$ ,  $x$ 'i aşmayan en büyük tamsayıyı gösterir).

**9** Hangi  $(k, n)$  pozitif tam sayı ikilileri için

$$\left| \left\{ a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq (nk)!, \text{ obeb} \left( \binom{a}{k}, n \right) = 1 \right\} \right| = \frac{(nk)!}{6}$$

eşitliği sağlanır?

## 63. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2022

1

$$2^p = 2^{q-2} + q!$$

eşitliğini sağlayan tüm  $(p, q)$  asal sayı ikililerini bulunuz.

**Çözüm:**

Soruya başlamadan önce,  $f(n)$  ile  $n$ 'in binary halindeki 1'lerin sayısını göstermek üzere,  $n!$  içindeki 2 çarpanlarının sayısının  $n - f(n)$  olduğunu gösterelim. Burada  $v_2(n)$ ,  $n$ 'yi bölen en büyük 2'nin kuvvetinin üssünü gösterebilir (Yani  $m$  tek sayısı için  $v_2(2^a m) = a$  olacaktır).

**Lemma:**  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$  için  $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$  ise  $v_2(n!) = n - k$  olacaktır.

**İspat:**  $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$  için  $v_2(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$  olduğundan  $a_j \geq i > a_{j+1}$  için

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{a_1} + \dots + 2^{a_j} + 2^{a_{j+1}} + \dots + 2^{a_k}}{2^i} \right\rfloor = \left\lfloor 2^{a_1-i} + \dots + 2^{a_j-i} + \frac{2^{a_{j+1}} + \dots + 2^{a_k}}{2^i} \right\rfloor$$

$i > a_{j+1}$  olduğundan  $2^{a_{j+1}} + \dots + 2^{a_k} \leq 2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 1 = 2^i - 1$  ve  $\frac{2^{a_{j+1}} + \dots + 2^{a_k}}{2^i} \leq \frac{2^i - 1}{2^i} < 1$  elde edilir. Yani

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor = 2^{a_1-i} + \dots + 2^{a_j-i}$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} v_2(n!) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor = \sum_{j=1}^k \sum_{i=a_{j+1}+1}^{a_j} (2^{a_1-i} + \dots + 2^{a_j-i}) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{a_j-1} 2^i = \sum_{j=1}^k (2^{a_j} - 1) = n - k \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,  $v_2(n!) = n - f(n)$  bulunur. Soruya geçecek olursak,  $q = 2$  için çözüm gelmez,  $q$  tektir.  $p > q - 2$  olduğu bariz olduğundan

$$q! = 2^{q-2} (2^{p-q+2} - 1)$$

ve  $q!$  içerisindeki 2 çarpanı sayısı  $q - 2$  olmalıdır. Buradan  $v_2(q!) = q - 2 = q - f(q)$  ve  $f(q) = 2$  bulunur.  $q$  tek olduğundan  $q = 2^k + 1$  formatında olmalıdır.  $k$ 'nin birden büyük tek böleni varsa, bu tek bölene  $m$  dersek  $2^{k/m} + 1 \mid q$  olacağından  $q$  asal olamaz. Dolayısıyla  $k$  da 2'nin kuvvetidir.

$q = 2^{2^n} + 1$  formatındadır.  $n = 0$  için  $q = 3$  elde edilir, yerine yazılırsa  $p = 3$  bulunur.  $n = 1$  için  $q = 5$  elde edilir. Yerine koyulursa  $p = 7$  bulunur.

$n \geq 2$  için  $q \geq 7$ 'dir ve  $q \equiv 2 \pmod{3}$  olacaktır. Eğer eşitliği 7 modunda incelersek,

$$2^p \equiv 2^{q-2} + q! \equiv (2^3)^{\frac{q-2}{3}} \equiv 1 \pmod{7}$$

olur. 7 modunda 2'nin sadece 3'ün katı olan üsleri 1 kalanı verir. Dolayısıyla  $p = 3$  olmalıdır. Ancak  $p > q - 2 > 3$  olduğundan bu bir çelişkidir.  $n \geq 2$  için çözüm yoktur.

Tüm çözümler  $(p, q) = (3, 3), (7, 5)$  elde edilir.

2 Her  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  için

$$f(x) + f(y) = \left( f(x+y) + \frac{1}{x+y} \right) (1 - xy + f(xy))$$

eşitliğini sağlayan tüm  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$  fonksiyonlarını bulunuz.

- 3]  $ABC$  üçgeninde  $I$  merkezli iç teğet çemberin  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  kenarlarına değme noktaları sırasıyla  $D$ ,  $E$ ,  $F$  dir.  $I$  dan geçen bir  $\ell$  doğrusuna  $A$ ,  $B$ ,  $C$  den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  olsun.  $DX$ ,  $EY$ ,  $FZ$  doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.
- 4] Kesişmeyen ve farklı büyüklükte olan  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  çemberi  $\ell$  doğrusuna sırasıyla  $K$  ve  $L$  noktalarında,  $\Gamma$  çemberine ise sırasıyla  $M$  ve  $N$  noktalarında teğettir ve üç çember de  $\ell$  nin aynı tarafında yer almaktadır.  $K$  ve  $L$  den geçen bir çemberin  $\Gamma$  ile kesişim noktaları  $A$  ve  $B$ ;  $M$  ve  $N$  nin  $\ell$  ye göre yansımaları ise sırasıyla  $R$  ve  $S$  olsun.  $A$ ,  $B$ ,  $R$ ,  $S$  noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$[s][s]w_1$  ve  $w_2$  nin merkezleri sırasıyla  $O_1$  ve  $O_2$  olsun.  $m(\widehat{MKL}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{NLK}) = \theta$  olsun.  $\Gamma$ 'nin merkezi  $O_3$  olmak üzere  $O_2L \parallel O_1K$ 'den yararlanarak  $m(\widehat{KMN}) = 180^\circ - \theta$  bulunur.  $KLMN$  çemberseldir. Bu çember  $w_3$  olsun. Ayrıca  $ABKL$  çemberinde  $w_4$  diyelim.  $w_3, w_4$  ve  $\Gamma$ 'nin kuvvet eksenleri  $MN, KL, MN$  noktadaştır.  $M$  ve  $N$  nin  $\ell$ 'e göre yansımalarının  $KL$  ile kesişimlerinin bu nokta olduğu açıktır. Dolayısıyla  $AB, KL$  ve  $RS$  noktadaştır. Kuvvet eksenini kuralından  $ABRS$  çembersel olur. İspat biter.

- 5] Bir çember üzerinde eşit aralıklı 2022 nokta işaretlenmiştir. Üç noktaları işaretlenmiş noktalar olan farklı uzunluktaki  $k$  yayın hiçbiri bir diğersinin içinde olmadığına göre,  $k$  yayın hiçbiri bir diğersinin içinde olmadığına göre,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.
- 6]  $P$  tam katsayılı bir polinom ve  $p$  bir asal olmak üzere  $p \mid P(n)$  olmasını sağlayan bir  $n$  tam sayısı yoksa  $P$  polinomu  $p$  asalını dışlıyor diyelim. Tam olarak bir asalı dışlayan ve rasyonel kökü bulunmayan beşinci dereceden tam katsayılı bir polinom var mıdır?

### Çözüm:

Hiçbir asalı dışlamayan bir polinom bulduktan sonra, o polinomdan tek asalı dışlayan bulmak kolaydır. Örneğin,  $P(x)$  polinomu hiçbir asalı dışlamasın ve rasyonel kökü olmasın.  $p \mid P(0)$  olan bir asal için  $Q(x) = P(px)$  polinomunu ele alırsak  $p \neq q$  olan asallar için  $x$  yerine  $q$  modunda  $p^{-1}y$  yazabileceğimizden  $q$  asalı bu polinomda da dışlanmaz. Ancak  $p \mid P(0)$  olduğundan  $p$  asalı dışlanacaktır ve  $\alpha$ ,  $Q(x)$ 'in köküyse  $p\alpha$  da  $P(x)$ 'in kökü olacağından  $Q(x)$ 'in rasyonel kökü bulunmayacaktır.

Direkt olarak 5. dereceden bir polinomu elde etmek zor olacağından 2. ve 3. dereceden iki polinom elde edip çarpmalıyız. İkinci dereceden olanlar için karekalanlığın devreye gireceği barizdir. 3. dereceden olanlar içinse küpkalan (cubic reciprocity) büyük olasılıkla karşımıza çıkacağından 3 moduna göre asalları bölmek mantıklı olacaktır. Çünkü eğer  $q \equiv 2 \pmod{3}$  ise her  $a$  için

$$x^3 \equiv a \pmod{q}$$

olacak şekilde bir  $x$  vardır.  $q = 3n + 2$  ise  $x = a^{2n+1}$  alınarak bu denklik sağlanılabilir. Dolayısıyla 3. dereceden polinomu  $x^3 + 2$  olarak seçebiliriz. Bu şekilde  $3n + 2$  modundaki asalları dışlamamış oluruz.

2. dereceden kısım içinse  $3n + 1$  formatındaki asalları dışlamamız gerekiyor.  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$  ile Legendre sembolünü göstermek üzere, bunun için de her asal için

$$\left(\frac{-3}{p}\right) \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \implies \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

olmasını kullanabiliriz. Yani  $-3$ 'ün karekalan olması için gerek ve yeterli şart  $p \equiv 1 \pmod{3}$  olmasıdır. Dolayısıyla  $x^2 + 3$  polinomunu ele alırsak, bu polinom  $3n + 1$  formatındaki hiçbir asalı dışlamaz. Ayrıca  $x = 0$  için  $3 \mid x^2 + 3$  olacağından  $3$ 'ü de dışlamaz.

Sonuç olarak  $P(x) = (x^2 + 3)(x^3 + 2)$  polinomu rasyonel kökü olmayan ve hiçbir asalı dışlamayan bir 5. dereceden polinomdur.  $p \neq 2, 3$  için  $P(px)$  alırsak, artık bu polinom sadece  $p$ 'yi dışlayacaktır. Net bir örnek vermek gerekirse,  $P(5x) = (25x^2 + 3)(125x^3 + 2)$  polinomu 5 dışında hiçbir asalı dışlamaz.

7  $x, y, z$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

8  $|AB| < |BC| < |CA|$  olan bir  $ABC$  üçgeninde iç teğet çemberin merkezi  $I$  olmak üzere  $IBC, IAC, IAB$  üçgenlerinin diklik merkezleri sırasıyla  $H_A, H_B, H_C$  olsun.  $H_B H_C$  nin  $BC$  ile kesişimi  $K_A$ ;  $I$  dan geçip  $H_B H_C$  ye dik olan doğrunun  $BC$  ile kesişimi ise  $L_A$  olsun.  $K_B, L_B, K_C, L_C$  noktaları da benzer şekilde tanımlandığında göre,

$$|K_A L_A| = |K_B L_B| + |K_C L_C|$$

olduğunu gösteriniz.

9 Döngü içermeyen, 2022 köşeli her çizgede köşelerden  $k$  tanesi öyle seçilebiliyor ki seçilen herhangi bir köşeden seçilen en çok iki köşeye kenar bulunuyor. Buna göre  $k$  nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

## 64. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2023

- 1  $AB \parallel CD$  olan bir  $ABCD$  yamuğunun iç bölgesindeki bir  $T$  noktası için  $\angle ATD = \angle CTB$  dir.  $AT$  doğrusu  $ACD$  nin çevrel çemberini ikinci kez  $K$  de,  $BT$  doğrusu  $BCD$  nin çevrel çemberini ikinci kez  $L$  de kesiyor.  $KL \parallel AB$  olduğunu gösteriniz.
- 2  $n$  öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak 2023 arkadaşı olup birbiriyle arkadaş olmayan herhangi iki öğrencinin tam olarak 2022 ortak arkadaşı vardır. Buna göre,  $n$  nin alabileceği tüm değerlerini bulunuz.
- 3 Her  $n > 1$  tam sayısı için,  $n$  nin kendisi dışındaki en büyük böleni  $f(n)$  olsun. Bir  $k$  pozitif tam sayısı için

$$n - f(n) = k$$

eşitliğini sağlayan  $n$  tam sayılarının sayısı 2023 olabilir mi?

- 4  $k$  bir pozitif tamsayı olmak üzere,  $S$  kümesinin her elemanı  $k$  elemanlı bir kümedir. Her  $A, B \in S$  ve  $A \neq B$  için  $A \Delta B \in S$  olduğu biliniyor.  $|S| = 1023$  ve  $|S| = 2023$  durumlarının her birinde  $k$  nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Not:  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  dir.

- 5 Bir çeşitkenar  $ABC$  üçgeninde çevrel çemberin merkezi  $O$ , iç teğet çemberin merkezi  $I$ , diklik merkezi  $H$  olsun.  $O$  dan geçip  $IH$  ye  $I$  da teğet olan çember ile  $H$  den geçip  $IO$  ya  $I$  da teğet olan çemberin ikinci kesişimi  $M$  olsun.  $M$  noktasının  $ABC$  nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$IM \cap HO = T$  olsun.  $\angle HIM = \angle IOM$  olduğu açıktır (Teğetlikten). Bu açı  $\alpha$  olsun. Yine teğetlikten  $\angle MIO = \angle IHM$  olduğu söylenebilir. Bu açıda  $\theta$  olsun.  $\triangle HMI \sim \triangle IMO$  olduğundan  $|IM|^2 = |MO| \cdot |MH|$ 'dur. Ayrıca  $\angle HMI = \angle IMO$  olduğundan  $\triangle HMO$ 'nde açıortay teoreminden  $|MT|^2 = |MO| \cdot |MH| - |HT| \cdot |TO|$ 'dur.  $|MO| \cdot |MH| = |IM|^2$  olduğunu söylemiştik. Buradan  $|HT| \cdot |TO| = |IM|^2 - |MT|^2 = (|IM| + |MT|) \cdot (|IM| - |MT|)$  elde edilir.  $I$ 'nin  $M$ 'ye göre simetriği  $L$  olsun. Az önceki bilgi bize, kuvvet vasıtasıyla  $HIO$  çemberselliğini gösterir.  $HIO$  çemberseldir.  $\angle OHI = x_1$  ve  $\angle HOI = x_2$  olsun. Çembersellikten  $\angle HOL = \alpha$  olduğundan  $\angle MOL = x_2$  olur. Benzer şekilde  $\angle MHL = x_1$  olur.  $\angle IHO = \angle LHM = x_1$  olduğundan  $[HT], \triangle IHL$ 'nde simedyanıdır. Buradan  $\frac{|IT|}{|TL|} = \frac{|HI|^2}{|HL|^2}$  olur. Benzer şekilde  $\frac{|IO|^2}{|OL|^2} = \frac{|IT|^2}{|TL|^2}$  olur ve bu iki denklem birleştirilerek  $\frac{|IO|^2}{|HT|^2} = \frac{|OL|^2}{|HL|^2}$  elde edilir.  $\angle HLI = x_2$  ve  $\angle ILO = x_1$  olduğundan  $\triangle MHL \sim \triangle MLO$  olur. Buradan  $\frac{|OL|}{|HL|} = \frac{|ML|}{|HM|} = \frac{|MO|}{|ML|}$  elde edilir. Bu yüzden  $\frac{|OL|^2}{|HL|^2} = \frac{|MO|}{|HM|}$  olur. Buradan  $\frac{|IO|^2}{|HT|^2} = \frac{|MO|}{|HM|}$  olur.  $\triangle HMO$ 'nde iç açıortay teoreminden  $\frac{|MO|}{|HM|} = \frac{|OT|}{|TH|}$  elde edilir. Yani  $\frac{|IO|^2}{|HT|^2} = \frac{|OT|}{|TH|}$  olur. Bu yüzden  $[IT], \triangle HIO$ 'nde simedyan olur. Buradan  $[OH]$ 'nin orta noktası  $R$  ise  $\angle RIO = \alpha$  ve  $\angle HRI = \theta$  gelir.  $R$ 'den geçip  $IH$ 'ye paralel olan doğrunun  $IO$  ile kesişimi  $Q$  olmak üzere  $\angle IRQ = \theta$  olduğu açıktır. Ayrıca orta tabanlıktan  $Q, [IO]$ 'nin orta noktasıdır.  $\triangle IRQ \sim \triangle OMI$  benzerliği ve az önceki orta tabanlıktan  $\frac{|OI|}{|OM|} = \frac{|IR|}{|OI|}$  elde edilir. Buradanda  $\frac{|OI|^2}{2|IR|} = |OM|$  olur. Feurebach ve euler teoremlerinden  $|OI| = \sqrt{R^2 - 2Rr}$  ve  $|IR| = \frac{R}{2} - r = \frac{R-2r}{2}$  olduğunu biliyoruz. Bunları son denklemde yerine yazarsak  $|OM| = R$  elde edilir.  $M$  noktası merkeze yarıçap kadar uzaklıktadır. Dolayısıyla çemberin üzerindedir. İspat biter.

- 6  $a, b, c, d$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 6d^2)}{(a + b)^2(c + d)^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

**Çözüm:**

Biraz incelendiğinde paydaki iki parantezin de içerisinde 6'nın çarpanları var katsayılarının çarpımını 6 olan teemler gruplanabiliyor. Ayrıca minimum değer sorduğundan Cauchy-Schwarz'ın ters hali olabilir. İkinci denklemdaki terimleri dediğimiz gibi grup yapacak şekilde sıralayalım ve Ters Cauchy uygulayalım:

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(6d^2 + 6c^2 + 3a^2 + 2b^2)}{(a+b)^2(c+d)^2} &\geq \frac{(\sqrt{6ad} + \sqrt{6bc} + \sqrt{6ac} + \sqrt{6bd})^2}{(a+b)^2(c+d)^2} \\ &= \frac{6(a+b)^2(c+d)^2}{(a+b)^2(c+d)^2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

elde edilir.

- 7 Bir  $\{a_1, a_2, \dots\}$  tam sayı dizisi, bir  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  fonksiyonu ve tüm  $i, j, n$  pozitif tam sayıları için

$$a_i \equiv a_j \pmod{n} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{f(n)}$$

olmasını sağlıyorsa, bu diziye *iyi dizi* diyelim. Tüm iyi dizileri bulunuz.

- 8 Tahtada başlangıçta

$$* \frac{1}{x-1} * \frac{1}{x-2} * \frac{1}{x-4} \cdots * \frac{1}{x-2^{2023}} = 0$$

yazılıdır. Aslı başlamak üzere, Aslı ve Zehra sırayla tahtadaki yıldızlardan birini silip yerine + veya - işaretlerinden birini yazıyor. Aslı, tüm yıldızların yerine işaretler konulduktan sonra oluşan denklemin gerçek çözümlerinin sayısının en çok kaç olmasını grantileyebilir?

- 9 Bir  $\Gamma$  çemberi üzerinde verilen sırada yer alan  $A, B, K, L, X$  noktaları için  $\widehat{BK}$  ve  $\widehat{KL}$  yayları eşit ölçüdedir.  $A$  dan geçip  $BK$  ye  $B$  de teğet olan çember  $KX$  doğru parçasını  $P$  ve  $Q$  da kesiyor.  $A$  dan geçip  $BL$  ye  $B$  de teğet olan çember ise  $BX$  doğru parçasını ikinci kez  $T$  de kesiyor.  $\angle PTB = \angle XTQ$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$T$  noktası,  $[BK]$  üzerinde  $\angle TAB = \angle XBC$  olmasını sağlayan noktadır. Bu açı  $\alpha$  olsun.  $BC \cap (AQP) = R$  olsun. Teğetlikten  $\angle RBK = \angle RAB$  gelir.  $BX \cap (AQP) = S \neq B$  olsun.  $\angle SAR = \alpha$ 'dır.  $\angle SAT = \angle RAB = \angle RBK$  olduğu açıktır. Bu açı  $\beta$  olsun. Ayrıca  $CK$  yayı  $KB$  yayına eşit olduğundan  $\angle KXB = \beta$  olmalıdır.  $\angle XKB = 180 - 2\beta - \alpha$  olduğundan  $\angle XAB = 2\beta + \alpha$  olur. Buradan  $\angle XAS = \beta$  gelir.  $AS \cap XK = Z$  olsun.  $XAZT$  kirisler dörtgeni olduğundan  $|ZT| = |ZX|$  olur.  $\triangle ZAT$ 'nde benzerlikten  $|ZT|^2 = |ZS| \cdot |SA|$  olur. Bu,  $Z$ 'nin  $(AQP)$ 'ye kuvvetidir ve  $|ZP| \cdot |ZQ|$ 'ya eşittir. Yani  $|ZT|^2 = |ZP| \cdot |ZQ|$  olur.  $m\angle ZTP = \angle ZQT$  olduğu anlaşılır.  $\angle QTB = \angle ZQT + \angle XQT$  olur. Zaten  $\angle PTX = \angle ZTX + \angle ZTP$ 'dir.  $\angle ZTP = \angle ZQT$  ve  $\angle QXT = \angle ZTX$  olduğundan  $\angle PXT = \angle QTB$  olur. İspat biter.

## 65. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2024

- 1 İç merkezi  $I$ , çevrel merkezi  $O$  olan bir  $ABC$  üçgeninde,  $AI$ 'nin  $ABC$ 'nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi  $P$  olsun.  $I$ 'dan geçip  $AI$ 'ya dik olan doğrunun  $BC$  ile kesişimi  $X$  olsun.  $X$ 'ten  $IO$ 'ya inen dikme ayağı  $Y$  olmak üzere,  $A, P, X$  ve  $Y$ 'nin çembersel olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$XY \cap AP = L$  olsun. İç açıortay açısı kuralından  $\angle XIB = \angle XCI$  olduğunu biliyoruz. Benzerlikten  $|XI|^2 = |XB| \cdot |XC|$  elde edilir.  $|LP| \cdot |LA| = |LI|^2$  ise, kuvvet vasıtasıyla ispat biter. (Öklitten  $|LI|^2 = |LY| \cdot |LX|$  olduğunu biliyoruz.)  $I$  noktasında noktasal bir çember olduğunu düşünelim. Bu çembere  $X$ 'ten çizilen teğet  $XI$  olduğundan  $X$ 'in bu çembere kuvveti  $|XI|^2$ 'dir. Bunun,  $|XB| \cdot |XC|$ 'ye eşit olduğunu söylemiştik. Yani,  $X$  noktası  $(ABC)$  ve az önce bahsi geçen çemberin kuvvet eksenini üzerindedir. Ayrıca bu eksen  $IO$ 'ya dik olduğundan  $XY$ 'dir.  $L$  noktası eksen üzerinde olduğundan  $|LI|^2 = |LP| \cdot |LA|$  olur. İspat biter.

### Not

$AX \cap (ABC) = R$  ve  $I$ 'dan  $BC$ 'ye inen dikme ayağından geçen doğrunun  $P$ 'den geçtiği görülerekte çözüm yapılabilir. Ayrıca  $\angle PYR$  açısının açıortayının  $OI$  doğrusu olduğunu ispatlamakta çözümü bitirir.  $O$  noktası bu açıortayın üzerinde olduğundan hoş birkaç durum var ama net bir çözüm elde edemedim. Yapan olursa paylaşabilir.

- 2 Tüm  $x, y \in \mathbb{R}$  gerçel sayıları için

$$(f(x+y))^3 = (x+2y)f(x^2) + f(f(y))(x^2 + 3xy + y^2)$$

denklemini sağlayan bütün  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarını bulunuz.

### Çözüm:

Yazdığımız  $(x, y)$  ikililerini  $P(x, y)$  olarak gösterelim.

$$\begin{aligned} P(0, 0) & : f^3(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ P(x, 0) & : f^3(x) = xf(x^2) \\ P(0, x) & : f^3(x) = x^2f(f(x)) \end{aligned}$$

Buradan her  $x \neq 0$  reel sayısı için  $xf(f(x)) = f(x^2)$  elde ederiz. Ayrıca  $f(0) = 0$  olduğundan  $x = 0$  içinde durum sağlanır. Yani tüm reel sayılar için  $xf(f(x)) = f(x^2)$ 'dir. Denklemin sol tarafı için  $P(x, y) = P(y, x)$  olduğu açıktır. Dolayısı ile sağ taraf içinde aynıısı geçerlidir. Buradan

$$(x+2y)f(x^2) + f(f(y))(x^2 + 3xy + y^2) = (2x+y)f(y^2) + f(f(x))(x^2 + 3xy + y^2)$$

elde edilir. Demin bulduğumuz  $xf(f(x)) = f(x^2)$  eşitliğinden  $f(x^2)$  gördüğümüz yere  $f(f(x))x$  yazarsak ve düzenlersek  $(xy - x^2)f(f(y)) = f(f(x))(x - 1)$  elde ederiz.  $y = 1$  seçelim. Buradan  $(x - x^2)f(f(1)) = (x - 1)f(f(x))$  elde ederiz.  $x \neq 1$  olmak üzere  $f(f(x)) = -f(f(1))x$  elde ederiz. Dolayısı ile  $a$  bir gerçel sayı olmak üzere  $f(f(x)) = ax$ 'dir. İlk denklemde yerine koyup düzenlersek  $f^3(x+y) = a(x+y)^3$  ve  $f(x+y) = \sqrt[3]{a}(x+y)$  ve  $\sqrt[3]{a} \cdot a = a$  elde edilir. Yani  $a = 0$  veya  $a = 1$ 'dir. İlk durumda ilk denklemde  $P(1, 2)$  ve  $P(1, 3)$ 'e bakılırsa  $f(1) = 0$  elde edilir. Yani tüm  $x$  reel sayıları için  $f(x) = 0$ 'dir. İkincide ise  $P(x, 1-x)$ 'e bakılırsa  $(x \neq 0, 1)$   $f(1) = 1$  elde edilir. Yani tüm  $x$  reel sayıları için  $f(x) = x$ 'dir.

- 3  $S$ , 12 elemandan oluşan bir küme olsun.  $a, b \in S$  ve  $\frac{b}{a}$  bir asal sayı olacak şekilde en fazla kaç  $(a, b)$  ikilisi olabilir?

- 4  $a, b$  pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\frac{10^{a!} - 3^b + 1}{2^a}$$

ifadesinin tamkare olmasını sağlayan tüm  $(a, b)$  çiftlerini bulunuz.

**Çözüm:**

Her  $a$  pozitif tamsayısı için  $a! \geq a$  olduğundan  $2^a \mid 10^{a!}$ 'dir. Dolayısıyla  $2^a \mid 3^b - 1$  olmalıdır.  $a = 1$ 'i denersek, ifade  $\frac{11-3^b}{2}$  olacaktır.  $11 > 3^b$  olması gerektiğinden  $b = 1$  veya  $b = 2$  bulunur. Yerine yazarsak, iki durum da ifadeyi tamkare yapacaktır. Buradan  $(a, b) = (1, 1), (1, 2)$  çözümleri elde edilir. Şimdi  $a \geq 2$  olduğunu kabul edelim. Kuvvet kaldırma teoreminden,  $b$  tekse

$$v_2(3^b - 1) = v_2(3 - 1) \geq v_2(2^a) = a \implies a = 1$$

bulunur. Bu da  $a \geq 2$  kabulüyle çelişir.

$b$  çift ise

$$\begin{aligned} v_2(3^b - 1) &= v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(b) - 1 = v_2(b) + 2 \geq v_2(2^a) = a \\ &\implies v_2(b) \geq a - 2 \implies 2^{a-2} \mid b \end{aligned}$$

bulunur.  $a \geq 4$  ise  $4 \mid b$  olacaktır. Yani  $3^b - 1 \equiv 0 \pmod{5}$  olacaktır. Buradan

$$10^{a!} - 3^b + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

elde edilir. İfade tamkare olduğundan  $25 \mid 10^{a!} - 3^b + 1$  olmalıdır.  $25 \mid 10^{a!}$  olduğu barizdir, dolayısıyla  $3^b \equiv 1 \pmod{25}$  olacaktır. Bunu görmenin birkaç yolu olmasıyla beraber,  $3$ 'ün  $25$  modunda ilkel kök olduğunu söyleyebiliriz çünkü  $3, 5$  modunda ilkel köktür ve  $25 \nmid 3^4 - 1$ 'dir. Bu aslında bir lemmanın sonucudur,

**Lemma:**  $g, p$  modunda bir ilkel kök olsun, eğer  $p^2 \nmid g^{p-1} - 1$  ise,  $g$  aynı zamanda  $p$ 'nin tüm kuvvetlerinde de ilkel köktür.  $p^2 \mid g^{p-1} - 1$  ise  $g + p$  sayısı  $p$ 'nin tüm kuvvetlerinde ilkel köktür.

Yani  $3$ 'ün mertebesi  $\phi(25) = 20$ 'dir. Buradan da  $20 \mid b$  bulunur. Şimdi de  $b = 20k$  yazıp,  $11$  modunu kullanırsak, Fermat teoreminden

$$10^{a!} - 3^b + 1 \equiv (-1)^{a!} + 1 - 3^{20k} \equiv 1 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{11}$$

elde edilir. Şunu unutmayalım ki  $10^{a!} - 3^b + 1$  ifadesi, bir sayının karesi çarpı  $2^a$ 'dır. Yani, ya bir tamkaredir ( $a$  çiftse), ya da bir tamkarenin iki katıdır ( $a$  tekse). Bir tamkarenin iki katı olamaz çünkü

$$2n^2 \equiv 1 \pmod{11} \implies (2n)^2 \equiv 2 \pmod{11}$$

olacaktır ancak  $2$  bir karekalan değildir. Dolayısıyla  $10^{a!} - 3^b + 1$  bir tamkaredir. Ancak bu ifade tamkare ise

$$10^{a!} - 3^b + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,  $a \geq 4$  durumundan çözüm gelmez.

$a = 2$  ise ifade  $\frac{101-3^b}{4}$  olacaktır.  $b$  çift ve  $101 > 3^b$  olduğundan  $b = 2$  veya  $b = 4$  olabilir ancak bu durumlardan çözüm gelmez.

$a = 3$  ise ifade  $\frac{10^6+1-3^b}{8}$  olacaktır. Belki bazı modlarda inceleme yapılarak işlem yükü azaltılabilir fakat  $b$ 'nin çift olması kullanılırsa,  $b = 2m$  için  $10^6 + 1 > 9^m$  elde edilir. Buradan  $6 \geq m$  sonucu bulunur çünkü  $9^7$  sayısı  $7$  basamaklıdır. Eğer  $m = 1, 2, \dots, 6$  için incelenirse, buradan da çözüm gelmediği görülür. Tüm çözümler,  $(a, b) = (1, 1), (1, 2)$ 'dir.

**5** Çeşitkenar bir  $ABC$  üçgenin diklik merkezi  $H$  ve ağırlık merkezi  $G$ 'dir. Bu üçgenin sırasıyla  $AB$  ve  $AC$  kenarları üzerinde,  $B, C, A_b, A_c$  noktaları çembersel ve  $A_b, A_c, H$  noktaları doğrusal olacak şekilde  $A_b$  ve  $A_c$  noktaları alınıyor.  $A_b A_c A$  üçgeninin çevrel merkezi  $O_a$  olsun.  $O_b$  ve  $O_c$  de benzer şekilde tanımlanıyor.  $O_a O_b O_c$  üçgeninin ağırlık merkezinin  $HG$  doğrusu üzerinde olduğunu gösteriniz.

**6** Bir  $n$  pozitif tamsayısı ve  $a_1, a_2, \dots, a_n$  reel sayıları için  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$  sayıları,  $1 \leq k \leq n$  tamsayısı için  $b_k = a_k + \max(a_{k+1}, a_{k+2})$  ve  $b_{n+1} = b_1$  olacak şekilde tanımlanıyor.  $a_{n+1} = a_1$  ve  $a_{n+2} = a_2$  olmak üzere tüm  $n, a_1, a_2, \dots, a_n$  sayıları için

$$\lambda \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^{2024} \right] \geq \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})^{2024}$$

olmasını sağlayan, en küçük  $\lambda$  değerini bulunuz.

- 7  $r \geq 2$  bir pozitif tamsayı olmak üzere, tüm pozitif tamsayılar  $r$  farklı renkten birine boyanıyor.  $(a, b)$  bir renk çifti olmak üzere, herhangi bir  $n$  pozitif tamsayısı için bu tamsayının  $a$  rengine boyanmış pozitif tam bölenlerinin sayısı ile  $b$  rengine boyanmış pozitif tam bölenlerinin sayısı arasındaki farkın en fazla 1 olmasını sağlayan tüm mümkün  $r$  değerlerini bulunuz.

### Çözüm:

$r \geq 4$  için boyamanın mümkün olmadığını gösterelim. Kullanılan renkler  $a, b, c, d$  olsun.  $p$  ve  $q$  farklı asal olmak üzere,  $n = pq$  ise  $1, p, q, pq$  pozitif bölenlerinin her biri farklı renkte olmalıdır. Aksi takdirde, bir renk en az iki defa kullanılacak, bir renke hiç kullanılmayacaktır. Yani farklı asal sayılar farklı renkte olmalıdır, bu da sadece 4 renk olmasıyla çelişir.

Şimdi  $r = 2$  ve  $r = 3$  için örnek durum bulalım.

$r = 2$  için  $a$  ve  $b$  renklerini ele alalım. Genelliği bozmadan 1'i  $a$ 'ya boyayalım. Bu durumda,  $n$  asal sayı seçilirse,  $n$ 'nin kendisi  $b$ 'ye boyanmak zorundadır. Yani tüm asal sayılar  $b$  rengindedir. Eğer farklı  $p, q$  asalları için  $n = pq$  formatında ise  $1, p, q, pq$  bölenlerinden  $pq$  da  $a$ 'ya boyanmalıdır, aksi takdirde istenilen şart sağlanmaz. Bir örnek boyama bulmamız yeterli olduğundan, tahmin yürütebiliriz. Eğer  $n$ 'nin asal bölenlerinin sayısı (tekrarları da sayarak) çiftse  $a$ 'ya, tekse  $b$ 'ye boyayalım. Yani **1,2,3,4,5,6,7,8,9,10** şeklinde boyayalım. Bu boyama işe yarayacaktır. Yaradığını göstermek için  $\Omega(n)$  fonksiyonunu kullanabiliriz. Bu fonksiyon  $n$ 'nin tekrarlı asal bölenlerinin sayısını verir.

$$f(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\Omega(d)} = \text{"}a \text{ rengine boyanan pozitif bölen sayısı} - b \text{ rengine boyanan pozitif bölen sayısı"} "$$

şeklinde tanımlayalım.  $\Omega$  toplamsal bir aritmetik fonksiyon olduğundan,  $(-1)^{\Omega(\cdot)}$  da çarpımsal bir fonksiyondur. Dolayısıyla,  $f$  de çarpımsaldır.

$$f(p^a) = \sum_{d|p^a} (-1)^{\Omega(d)} = \sum_{k=0}^a (-1)^{\Omega(p^k)} = \sum_{k=0}^a (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^a$$

olacaktır. Bu toplam ya 0'dır, ya da  $\pm 1$ 'dir. Dolayısıyla,  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$  şeklinde çarpanlarına ayrılıyorsa,

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_m^{a_m}) = 0, 1, -1$$

olacaktır. Yani istenilen şart sağlanmaktadır.

$r = 3$  için yine benzer bir boyama yapabiliriz. Eğer  $\Omega(n) \equiv 0 \pmod{3}$  ise  $a$ 'ya,  $\Omega(n) \equiv 1 \pmod{3}$  ise  $b$ 'ye,  $\Omega(n) \equiv 2 \pmod{3}$  ise  $c$ 'ye boyarız. Bu boyamanın işe yaradığını göstermek için  $n$ 'yi  $w^{\Omega(n)}$  ile eşleyelim, burada  $w \neq 1$  ve  $w^3 = 1$ 'dir. Yani tamsayı çıkanlar  $a$ 'ya, bir tamsayının  $w$  katı çıkanlar  $b$ 'ye  $w^2$  katı çıkanlar ise  $c$ 'ye boyanacaktır.

$$g(n) = \sum_{d|n} w^{\Omega(d)}$$

toplamı  $x + yw + zw^2$  formatında olacaktır, burada  $x, y, z$  sayıları da sırasıyla,  $a, b, c$  rengine boyanmış bölen sayılarıdır.  $w^{\Omega(\cdot)}$  çarpımsal olduğundan  $g$  de çarpımsaldır.

$$\begin{aligned} g(p^k) &= w^{\Omega(1)} + w^{\Omega(p)} + w^{\Omega(p^2)} + \dots + w^{\Omega(p^k)} \\ &= 1 + w + w^2 + \dots + w^k \\ &= 0, 1, 1 + w. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$g(n) = g(p_1^{a_1}) g(p_2^{a_2}) \dots g(p_m^{a_m})$$

çarpımı sonucunda ya 0, ya 1, ya da  $(1 + w)$ 'nin bir kuvvetini elde ederiz.  $(1 + w)$ 'nin kuvvetleri,  $1 + w, w, 1$  olduğundan bir  $N$  tamsayısı için

$$g(n) = x + yw + zw^2 = N(w^2 + w + 1), 1 + N(w^2 + w + 1), w + N(w^2 + w + 1), w + 1 + N(w^2 + w + 1)$$

formatlarındadır. Bu da bu boyamanın istenilen şartı sağladığını gösterir.

- 8 Bir  $n$  tamsayısı için  $\sigma(n)$ , bu tamsayının pozitif tam bölenlerinin toplamını gösterir. Pozitif tamsayılardan oluşan bir  $(a_i)_{i=0}^{\infty}$  dizisi,  $a_0 = 1$  ve  $a_n$  sayısı

$$\sigma(a_0 a_1 \cdots a_{n-1}) \mid \sigma(a_0 a_1 \cdots a_n)$$

olmasını sağlayan 1'den büyük en küçük pozitif tamsayı olacak şekilde tanımlanıyor. Dizinin  $2024^{2024}$  sayısını tam bölen elemanlarının sayısını bulunuz.

- 9 iç merkezi  $I$  ve çevrel merkezi  $O$  olan çeşitkenar bir  $ABC$  üçgeninde  $IO$  doğrusu  $BC, AC, AB$  doğrularını sırasıyla  $D, E, F$  noktalarında kesiyor.  $BE$  ve  $CF$  noktalarının kesişimi  $A_1$  olsun.  $B_1$  ve  $C_1$  noktalarında benzer şekilde tanımlanıyor.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin  $BC, AC, AB$  kenarlarına değme noktaları sırasıyla  $X, Y, Z$  olsun.  $XA_1, YB_1$  ve  $ZB_1$  doğrularının  $IO$  doğrusuyla kesişimleri sırasıyla  $A_2, B_2$  ve  $C_2$  olsun.  $AA_2, BB_2$  ve  $CC_2$  çaplı çemberlerin ortak bir kesişim noktası olduğunu gösteriniz.