TÜBİTAK

Uluslararası Matematik Olimpiyatları

Takım Seçme Sınavı

Soruları

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

ÖNSÖZ

Lise düzeyinde olimpiyatlara hazırlanan hemen her öğrencinin sorduğu bir soru vardır:

Gireceğimiz ikinci aşama sınavının eski yıllarının soru ve çözümlerine neden ulaşamıyoruz?

Gerçekten de, İkinci Aşama'ya hazırlanan bir öğrencinin eski yıllardaki soruları çözmesi, hem genel olimpiyat tekniklerine hâkim olması, hem de sınavın kendine has tarzına alışması açısından önemlidir.

İşte elinizdeki bu doküman, bu konudaki eksikliği gidermek adına çok sayıda tecrübeli olimpiyatçı ve hocanın sarf ettiği iki yıllık titiz emek ve gayretlerinin bir sonucudur. Bu çalışma için kolları sıvadığımızda, eski yılların orijinal sorularına ulaşmakta bile çok zorluk çektik; yıllar var olan kaynakları eskitmiş, 90lı yılların soruları olimpiyat arşivlerinin derinliklerinde kalmıştı. Soruları elde ettikçe, bir yandan geomania.org forumunda ilk yılların soru ve çözümlerini toplarken, diğer taraftan matematikolimpiyati.com üzerinden 2000'li yıllarda yapılmış İkinci Aşamaların soru ve çözümlerini yüklemeye yönelik bir sistemle son yılların çözümlerini derledik.

Son olarak, elimizdeki soru ve çözümleri geomania.org da açtığımız "Yarışma Soruları" bölümüne aktardık. Doküman bu halini almadan önce, elimizdeki çözümleri tecrübeli olimpiyatçı arkadaşlarımızın yardımıyla titizce tashih ettik. Bu bağlamda başta Mehmet Efe Akengin ve geomania.org forumundan Lokman Gökçe olmak üzere, bu çalışmada emeği geçen tüm olimpiyatçı ve hocalarımıza gayretlerinden ötürü teşekkürü bir borç biliyoruz.

Bu emek ve gayretler sonucunda, Türkiye matematik olimpiyatları camiası, yıllardır hasretini çektiği bu dokümana kavuştu. Fakat ikinci aşama seferberliğimiz henüz nihayete ermedi. Göreceğiniz üzere, hala çok sayıda sorunun çözümü eksik veya geomania.org forumunda tashih edilmeyi bekliyor. Sorulara yapmış olduğunuz farklı çözümleri, çözümler hakkında düşünce, önerileri ve düzeltmelerinizi, lütfen geomania.org Yarışma Forumu üzerinden paylaşmanızı rica ediyoruz.

Bir başka çalışmada görüşmek dileğiyle,

geomania.org
Yarışma Soruları Ekibi

İçindekiler

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1989

1 $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesini göstersin. Her $m, k \in \mathbb{Z}^+$ için,

(i) $f(m,m) = m$

(ii) $f(m,k) = f(k,m)$

(iii) $f(m,m+k) = f(m,k)$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

2 Sıfırdan farklı bir rakamla başlayan bir rakam blokunun art arda iki kez tekrarından oluşan pozitif tamsayılara "çift tekrarlı sayı" diyeceğiz (Örneğin 360360 "çift tekrarlı" bir sayı olup, 36036 değildir). Bir tamsayının karesine eşit olan sonsuz sayıda "çift tekrarlı" sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

3 C_1, C_2 verilen iki çember, A_1 noktası C_1 üzerinde ve A_2 noktası da C_2 üzerinde bulunan sabit noktalardır. C_1'in A_1P_1 kirişi, C_2'nin A_2P_2 kirişine paralel olduğuna göre P_1P_2'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

4 $n \times n$ bir satranç tahtasının her karesinde bir taş duruyor. n^2 taş toplanarak yine her kareye bir taş düşecek şekilde tekrar dağıtılıyor, öyle ki başlangıçta komşu olan taşlar yine komşu kalıyorlar. En az bir köşedeki taş yerini koruyorsa olabilecek tüm dağıtımları bulunuz (Not: Aralarında ortak kenar bulunan karelerdeki taşlara "komşu" diyoruz.).

5 Elimizde her biri pozitif bir tamsayı ağırlığından n $(n > 2)$ tane ağırlık vardır. Bunlardan her birinin ağırlığı n'den küçük olduğu gibi, toplam ağırlıkları da $2n$'den küçüktür. Bu ağırlıkların, toplam ağırlığı n'ye eşit bir altkümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

6 ABC $(AB = AC)$ ikizkenar üçgeninin çevrel çemberine dıştan teğet olan çember AB ve AC doğrularına P ve Q noktalarında teğettir. PQ doğru parçasının I orta noktasının, üçgenin BC'ye dıştan teğet olan çemberinin (dış teğet çember) merkezi olduğunu ispat ediniz.

31. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1990

1 Bir d doğrusuna sıra ile A, B, C noktalarında teğet olan $(a > c > b)$ a, b, c yarıçaplı k_1, k_2, k_3 çemberleri veriliyor. k_1 çemberi k_2 ye ve k_2 çemberi de k_3 çemberine teğettir. k_3 çemberine E noktasında değen ve d ye paralel olan teğet, k_1 çemberini D noktasında kesiyor. EB doğrusu, d doğrusuna A da dik olan doğruyu F noktasında kestiğine göre, $AD = AF$ olduğunu ispat ediniz.

2 x_i reel sayıları için

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq 0$$

eşitsizliği her zaman doğrudur; (Kanıtlayınız.)

Hangi $n \geq 4$ tam sayıları için

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \text{ ise } x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0$$

eşitsizliği her zaman doğru olur? Yanıtınızı kanıtlayınız.

3 n, 11'den büyük ve eşit olan bir tek, tam sayı olsun; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 6$, $n = 2k - 1$.

$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in T$ için

$$d(x, y) = \left|\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}\right|$$

diyelim. T nin aşağıdaki şartları sağlayan bir S alt kümesi varsa $n = 23$ olduğunu gösteriniz.

(i) $|S| = 2^k$

(ii) Her $x \in T$ için $d(x, y) \leq 3$ olacak şekilde tam bir tane $y \in S$ vardır.

4 $ABCD$ konveks dörtgen ve

$$\begin{array}{rl} E, F \in [AB], & AE = EF = FB \\ G, H \in [BC], & BG = GH = HC \\ K, L \in [CD], & CK = KL = LD \\ M, N \in [DA], & DM = MN = NA \end{array}$$

dır.

$$[NG] \cap [LE] = \{P\}, [NG] \cap [KF] = \{Q\},$$

$$[MH] \cap [KF] = \{R\}, [MH] \cap [LE] = \{S\}$$

noktaları göz önüne alınıyor. Buna göre,

(a) $Alan(ABCD) = 9 \cdot Alan(PQRS)$

(b) $NP = PQ = QG$

olduğunu ispat ediniz.

5 m pozitif tam sayısı için $(m!)$ sayısındaki 2 çarpanlarının sayısını b_m ile gösterelim. (Yani $2^{b_m} | m!$ ve $2^{b_m+1} \nmid m!$). $m - b_m = 1990$ koşulunu sağlayan en küçük m sayısını bulunuz.

6 $k \geq 2$ ve $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}^+$ olsun. Eğer $n_2 | (2^{n_1} - 1)$, $n_3 | (2^{n_2} - 1)$, $\ldots$, $n_k | (2^{n_{k-1}} - 1)$, $n_1 | (2^{n_k} - 1)$ ise, $n_1 = \cdots = n_k = 1$ olduğunu gösteriniz.

32. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1991

1 Bir ABC üçgeninin AB, AC ve BC kenarları üzerinde sırası ile C', B' ve A' noktaları işaretleniyor.

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = k$$

olduğu bilindiğine göre, AA', BB' ve CC' doğrularının sınırladığı üçgenin alanının,
ABC üçgeni alanına oranının

$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2 $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denklemini sağlayacak şekilde a, b, c, d pozitif tam sayılarının bulunamayacağını gösterin.

3 a_i katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinden olmak üzere $|x| < 1$ için tanımlı $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ fonksiyonu için $f\left(\frac{1}{10}\right)$ bir rasyonel sayıdır. Tamsayı katsayılı uygun $p(x)$ ve $q(x)$ polinomları ile fonksiyonun ($|x| < 1$ için)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

4 Bir havuzun ortasında yanyana sıralanmış N-tane taşın üzerinde bir kurbağa sıçrıyor. Kurbağa bulunduğu taştan p olasılıkla soldaki, $1-p$ olasılıkla ise sağdaki taşa sıçrıyor. En soldaki taştan sola, ya da en sağdaki taştan sağa sıçrayan kurbağa suya düşüyor. Sol baştan k-ıncı taşta bulunan kurbağanın ilk olarak sağ uçtan suya düşme olasılığını p_k ile gösterirsek; $p < \frac{1}{3}$ için $p_1 > \frac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayınız.

5 p yolcu, n vagondan oluşan bir trene içinde yolculuk edecekleri vagonu rastgele seçerek binerler. Her vagonda en az bir yolcu bulunması olasılığını hesap ediniz.

6 Köşeleri O, A, B, C olan bir bir dörtyüzlünün (üçgen piramidin) kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden (dışbükey) cismin hacmi V ve bütün kenarlarının uzunlukları toplamı U ise

$$V \leq \frac{(U-|OA|-|BC|)(U-|OB|-|AC|)(U-|OC|-|AB|)}{2^7 \cdot 3}$$

olacağını gösteriniz.

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1992

1 Her terimi, $2 \leq p \leq 11$ koşulunu sağlayan p asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.

2 ABC üçgeninin B köşesinden geçerek AC kenarına E noktasında dik olan doğru, bu üçgenin O merkezli çevrel çemberini D noktasında kesiyor. D den BC kenarına inilen dikmenin ayağı F noktası olduğuna göre BO doğrusunun EF doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

3 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pozitif reel sayıları

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

koşulunu sağlıyorsa

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

4 $ABCD$ konveks kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktasından AB, BC, CD, DA kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile P, Q, R, S noktaları olduğuna göre,

$$PQ + RS = QR + SP$$

eşitliğini ispatlayınız.

5 1 den n ye kadar numaralanmış n kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi m toptan $(m \geq n)$ bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

6 Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1993

1 Pozitif tamsayılardan oluşan, ilk terimi 16 olan ve her teriminin farklı pozitif bölenlerinin sayısı 5 ile bölünen sonsuz bir aritmetik dizinin var olduğunu gösteriniz. Bu tür diziler içinde ortak farkı en küçük olanını bulunuz.

2 Dar açılı ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi M noktası olup, (BMA) çemberi BC kenarını P, AC kenarını Q noktasında kesiyor. Buna göre, CM doğrusunun PQ doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

3 Her $n \geq 1$ için $b_{n+1}^2 \geq \dfrac{b_1^2}{1^3} + \dfrac{b_2^2}{2^3} + \ldots + \dfrac{b_n^2}{n^3}$ koşulunu sağlayan bir (b_n) pozitif reel sayı dizisi veriliyor.

$$\sum_{n=1}^{K} \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} > \frac{1993}{1000}$$

olacak şekilde bir K tamsayısı bulunabileceğini gösteriniz.

4 İki şehir arasında en fazla bir yol bulunmak şartı ile, v adet şehrin kimileri bir yol ile birbirine bağlanmıştır. e, bu yolların sayısını göstermek üzere

(a) $e < v - 1$ olması halinde birinden diğerine seyahat edemeyeceğimiz en az bir çift şehrin bulunduğunu;

(b) $2e > (v-1)(v-2)$ olması halinde herhangi iki şehir arasında bir seyahatın mümkün olduğunu gösteriniz.

5 AB çaplı, O merkezli yarım çemberin $OE \perp AB$ olmak üzere çizilen OE yarıçapı bir AC kirişini yarı çemberin iç bölgesinde D noktasında kesmektedir.$OBCD$ dörtgeninin teğetler dörtgeni olabilmesi için $\widehat{CAB}$ açısının alabileceği bütün değerleri belirleyiniz.

6 Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için,

$$f(x + \frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$

koşulunu gerçekleyen tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

35. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1994

1 Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu tüm x tam sayıları için $f(x) + f(x+3) = x^2$ eşitliğini sağlamaktadır. $f(19) = 94$ olduğuna göre $f(94)$ değerini hesaplayınız.

2 O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde O ile B arasındaki bir E noktasından $[AB]$ çapına çıkılan dikme, çemberi D noktasında kesiyor. $[DE]$ ve $[EB]$ doğru parçalarına sıra ile K ve C noktalarında teğet olan bir çember BD yayına da F noktasında içten teğettir. Buna göre $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ olduğunu ispatlayınız.

3 Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

4 ABC üçgeninin kenarları üzerinde $P \in [AB], Q \in [BC], R \in [CA]$ ve

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \qquad (k < \frac{1}{2})$$

olacak biçimde P, Q, R noktaları alınıyor. G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre

$$\frac{Alan(PQG)}{Alan(PQR)}$$

değerini bulunuz.

5 $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$ olacak şekilde n_i, m_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6 $a^2 + b^2 + 3$ sayısının $a \cdot b$ ile bölünebilmesini sağlayan tüm (a, b) tam sayı ikililerini bulunuz.

36. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1995

1 $b \geq a$ olmak üzere verilen a, b gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 &= x_2 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 &= x_n \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 &= x_1 \end{aligned}$$

Not: Andreescu, Kedlaya, Zeitz e ait Mathematical Contests 1995-1996, Olympiad Problems and Solutions from around the World kitabında $b \geq a > 0$ olarak düzeltilmiş.

2 n pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sigma(j) \geq j$ koşulunu sağlayan tam olarak iki j nin bulunduğu $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permütasyonlarının sayısını bulunuz.

3 Bir ABC eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin O merkezli çevrel çemberinin $\overset{\frown}{AC}$ (küçük) yayı üzerinde A ve C den farklı bir D noktası alınıyor. D den BC ve AC doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla E ve F olmak üzere, EF ile OD nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

4 $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{CAB}) = 40°$, $m(\widehat{CAD}) = 30°$, $m(\widehat{DBA}) = 75°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 25°$ dir. $m(\widehat{BDC})$ yi bulunuz.

5 Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız:

[Her a pozitif tamsayısı için $n \mid a^n - a$] $\iff$ [n nin her p asal böleni için $p^2 \nmid n$ ve $p - 1 \mid n - 1$].

6 (x_n) gerçel sayı dizisi

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \qquad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{an^b} = 1$ olacak şekilde a ve b gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

37. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1996

1 $\prod_{n=1}^{1996}(1+nx^{3^n})$ çarpımının, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sıfırdan farklı ve $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ olacak şekilde açılımını $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \ldots + a_mx^{k_m}$ ile gösterelim. a_{1996} katsayısını hesaplayınız.

2 Bir $ABCD$ paralelkenarında $\widehat{A}$ açısı dar açı olup, $[AC]$ köşegeni çap alınarak çizilen çember CB ve CD doğrularını E ve F noktalarında kesmektedir. Bu çemberin A noktasındaki teğeti, BD doğrusunu P noktasında kesiyorsa; P, F, E noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

3 $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ olacak şekilde x_i gerçel sayıları veriliyor. Her $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ için $x_{i+1} - x_i \leq h$ ise,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$

toplamının

$$\left(\frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2}\right)$$

aralığında olduğunu kanıtlayınız.

4 Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $Alan(ABC) = Alan(ADC)$ olup, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesim noktası E'dir. E

noktasından $[AD], [DC], [BC], [AB]$ kenarlarına çizilen paralel doğrular $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ kenarlarını sıra ile K, L, M, N noktalarında kestiğine göre,

$$\frac{Alan(KLMN)}{Alan(ABCD)}$$

oranını hesaplayınız.

5 Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikişer ikişer ayrık olduğunu belirleyiniz.

6 Hangi a, b pozitif gerçel sayıları için,

$$\lim_{n\to\infty}(ax_{n+1} - bx_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan her $\{x_n\}$ dizisinin limiti 0 olur?

38. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1997

1 A açısı dik açı olan ABC üçgeninin hipotenüsüne ait yükseklik ayağı H dir. ABC, ABH ve AHC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları toplamının $|AH|$ uzunluğuna eşit olduğunu gösteriniz.

2 $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$ ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n \ , \ b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$$

şeklinde tanımlanan (a_n) ve (b_n) dizilerinde $a_{1997} = b_1$ ve $b_{1997} = a_1$ olacak biçimde kaç (α, β) gerçel sayı sıralı ikilisi vardır?

3 Bir futbol liginde x tane oyuncusu olan bir X takımından y tane oyuncusu olan bir Y takımına bir futbolcu transfer olduğunda, $y \geq x$ ise federasyon Y takımından $y - x$ milyar lira alıyor, $x > y$ ise federasyon X takımına $x - y$ milyar lira ödüyor. Bir sezon boyunca bir futbolcu istediği kadar takım değiştirebiliyor. 18 takımlık ligde sezona tüm takımlar 20 şer futbolcu ile başlar ve sezon sonunda bu takımlardan 12 sinde 20 şer, geri kalan 6 takımda ise sırasıyla $16, 16, 21, 22, 22, 23$ futbolcu bulunursa, federasyon bu sezon süresince en çok kaç milyar lira kazanmış olabilir?

4 Köşeleri birim çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninin $[AE]$ kenarı bu çemberin merkezinden geçmektedir. $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DE| = d$ ve $ab = cd = \dfrac{1}{4}$ ise, $|AC| + |CE|$ toplamının a, b, c, d türünden değeri ne olur?

5 Her $p \geq 7$ asal sayısı için,

$$\begin{aligned}
x_1^2 + y_1^2 &\equiv x_2^2 \pmod p \\
x_2^2 + y_2^2 &\equiv x_3^2 \pmod p \\
&\dots \\
x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 &\equiv x_n^2 \pmod p \\
x_n^2 + y_n^2 &\equiv x_1^2 \pmod p
\end{aligned}$$

denklik sistemi sağlanacak biçimde bir n pozitif tam sayısı ile p ye bölünmeyen $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6 $n \geq 2$ verilmiş bir tam sayı olsun. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ koşulunu sağlayan $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif sayıları için,

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}$$

toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

39. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1998

1 $|AB| = |AC|$ olmak üzere bir ABC ikizkenar üçgeninin eşit kenarları üzerine, üçgenin dış bölgesinde kalacak şekilde $BAXX'$ ve $CAYY'$ kareleri çiziliyor. $[BC]$ nın herhangi bir K noktasından BY ve CX doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F, $[BC]$ nın orta noktası D ile gösterilmek üzere, $|DE| = |DF|$ olduğunu ispatlayınız. $[EF]$ nın orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2 $a_1 = t$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ şeklinde tanımlanan gerçel sayılar dizisinde $a_{1998} = 0$ olmasını sağlayan kaç t değeri olduğunu bulunuz.

3 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. Tüm $B, C \subset A$ kümeleri için $f(B) \in B$ ve $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$ koşullarını sağlayan bütün $f : 2^A \setminus \{\emptyset\} \to A$ fonksiyonlarının sayısını bulunuz.

4 n değişik lojman n kişiye dağıtılacaktır. Herkesin lojmanlara ilişkin bir tercih sıralaması vardır ve hiç kimse farklı iki lojman arasında kayıtsız değildir. Dağıtım yapıldıktan sonra, herkesi en az bu dağıtım kadar hoşnut edecek ve en az bir kişiyi de bu dağıtımda kendisine düşen lojmana tercih ettiği bir lojmana kavuşturacak başka bir dağtımın bulunmadığı anlaşılır. Yapılan dağıtımda, en az bir kişiye n lojman arasında en çok tercih ettiği lojmanın düşmüş olduğunu kanıtlayınız.

5 Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarına A noktasında teğet olan ve C noktasından geçen çember ile $[AC]$ kenarına yine A noktasında teğet olan ve B noktasından geçen çemberin yarıçapları farklı olup bu iki çember A dan farklı bir D noktasında kesişiyor. E noktası $[AB$ ışını üzerinde bulunan ve $|AB| = |BE|$ koşulunu gerçekleyen nokta olma üzere; A, D, E noktalarından geçen çember ile $[CA$ ışının A dan farklı olan kesişim noktası F ise, $|CF| = |AC|$ olduğunu ispatlayınız.

6 $f(x_1, \ldots, x_n)$ katsayıları tam sayılar ve derecesi n den küçük olan bir polinom olsun. N, $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{13}$ denkliğini ve $1 \leq i \leq n$ için $0 \leq x_i < 13$ koşulunu sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sıralı n lilerinin sayısı ise, $13 \mid N$ olduğunu gösteriniz.

40. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 1999

1 $m \leq n$ şeklinde pozitif sayılar ve p asal sayısı verilmiş olsun. $a_r, b_s \neq 0$ ve her i, j için $0 \leq a_i, b_j < p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} m &= a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r \\ n &= b_0 + b_1 p + \ldots + b_s p^s \end{aligned}$$

olsun. Her $i = 0, 1, \ldots r$ için $a_i \leq b_i$ ise $m \prec_p n$ diyeceğiz. $p \nmid \binom{n}{m}$ olması için gerek ve yeter koşulun $m \prec_p n$ olduğunu gösteriniz.

2 $ABCD$ kirişler dörtgeninde L ve N sırasıyla AC ve BD köşegenlerinin orta noktaları olsun. ANC açısının açıortayı BD ise, AC'nin $\widehat{BLD}$ açısının açıortayı olduğunu gösteriniz.

3 Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$ şartını sağlayan ve

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} : x \neq 0 \right\}$$

kümesinin sonlu olduğu tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4 Çevresi C_K, alanı A_K olan bir kirişler dörtgeninin çevrel çemberine bu dörtgenin köşelerinde teğet olan teğetler dörtgeninin alanı A_T ve çevresi de C_T olmak üzere $\dfrac{A_K}{A_T} \geq \left(\dfrac{C_K}{C_T}\right)^2$ olduğunu ispatlayınız.

5 Başlangıçta her biri farklı bir parça bilgiye sahip olan A, B, C, D, E ve F, ikişer ikişer telefonla görüşürler. Konuşmalar aynı santral üzerinden yapıldığı için, her seferinde ancak iki kişi görüşebilmektedir. Her konuşmada, iki taraf da, o ana kadar edinmiş olduğu tüm bilgileri karşı tarafa aktarır. Herkesin altı parça bilginin tümünü edinmesi için en az kaç konuşma yapılması gerektiğini belirleyiniz.

6 Düzlemin sonlu sayıda parabolün iç bölgelerinin birleşimi olmadığını gösteriniz. (Bir parabolün dış bölgesi, parabolü kesmeyen doğruların birleşimidir. Bir parabolün iç bölgesi ise, parabolün dış bölgesinde olmayan noktaların oluşturduğu kümedir.)

41. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2000

1 (a) Her n pozitif sayısı için, $x^2 - xy + y^2 = n$ denklemini sağlayan (x, y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısının 3 ile bölünebileceğini gösteriniz.

(b) $x^2 - xy + y^2 = 727$ denklemini sağlayan tüm sıralı tamsayı ikililerini bulunuz.

2 ABC üçgeninde A köşesine ait iç ve dış açıortaylar BC yi sırasıyla D ve E de kesiyor. DE çaplı çember ile AC, ikinci kez F de kesişiyor. ABF üçgeninin çevrel çemberine A da teğet olan doğru DE çaplı çember ile ikinci kez G de kesişiyor. $|AF| = |AG|$ olduğunu gösteriniz.

3 $P(x) = x+1$ ve $Q(x) = x^2+1$ olmak üzere; $(x_1, y_1) = (1, 3)$ ve her k için, (x_{k+1}, y_{k+1})'in ya $(P(x_k), Q(y_k))$ ya ya da $(Q(x_k), P(y_k))$ ya eşit olduğu $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerini ele alalım. Bu dizilerden en az biri için $x_n = y_n$ ise n ye iyi sayı diyeceğiz. Tüm iyi sayıları bulunuz.

4 Herhangi bir sonsuz uzunluktaki üçgen prizmanın, kesişimleri eşkenar üçgen olacak şekilde bir düzlemle kesilebileceğini gösteriniz.

5 $ABCD$ eşkenar dörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde $MN \parallel LK$ ve MN ile KL arasındaki uzaklık $ABCD$ nin yüksekliğine eşit olacak şekilde sırasıyla M, N, K, L noktaları alınıyor. ALM üçgeni ile NCK üçgeninin çevrel çemberleri kesişirken, LDK üçgeni ile MBN üçgeninin çevrel çemberlerinin kesişmediğini gösteriniz.

6 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1$$

olacak şekilde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanıyor. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x)-g(x)| \leq 1$ ve $g(x+y) = g(x)+g(y)$ olacak şekilde bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun var olduğunu gösteriniz.

42. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2001

1 2001 çocuktan her biri pozitif bir tam sayı tutuyor ve tuttuğu sayı ile kendi dışındaki 2000 çocuktan istediklerinin isimlerini defterine yazıyor. Defterler toplanıp, her çocuğa, defterine isimlerini yazmış olduğu çocukların tuttuğu sayıların toplamından, kendisini listelerine dahil etmiş olan çocukların tuttuğu sayıların toplamı çıkartılarak elde edilen yeni bir sayı veriliyor. Çocuklara verilen yeni sayıların hepsinin birden pozitif olup olamayacağını belirleyiniz.

2 O merkezli birim çemberin AB çapına, $|OT| > 1$ olacak şekilde seçilen bir T noktasında teğet olan bir çember, birim çemberi C ve D ile gösterilen farklı iki noktada kesiyor. O, D ve C noktalarından geçen çemberin AB doğrusunu O dışında kestiği nokta P olmak üzere,

$$|PA| \cdot |PB| = \frac{|PT|^2}{|OT|^2}$$

olduğunu gösteriniz.

3 Tüm x, y, z tam sayıları için,

$$S(x, y, z) = (xy - xz, yz - yx, zx - zy)$$

olsun. a, b ve c, $abc > 1$ koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere, $0 < k \leq abc$ ve her $n \geq n_0$ tam sayısı için

$$S^{n+k}(a, b, c) \equiv S^n(a, b, c) \pmod{abc}$$

koşullarını sağlayan n_0 ve k tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

($S^1 = S$ ve her $m \geq 1$ tam sayısı için, $S^{m+1} = S \circ S^m$)

($(u_1, u_2, u_3) \equiv (v_1, v_2, v_3) \pmod{M} \iff u_i \equiv v_i \pmod{M} (i = 1, 2, 3)$.)

4 $5^x = 1 + 4y + y^4$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

5 Dar açılı bir ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesişim noktası H, $[AC]$ kenarının orta noktası da D olsun. DH doğrusunun, ABC üçgeninin çevrel çemberi ile $[BH]$ çaplı çemberin bir kesişim noktasından geçtiğini gösteriniz.

6 Her x gerçel sayısı için,

$$f(x - f(x)) = \frac{x}{2}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

43. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2002

1 a ve b farklı tam sayılar olmak üzere, $ab(a+b)$ sayısı a^2+ab+b^2 ile bölünüyorsa,

$$|a-b| > \sqrt[3]{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

2 Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC}$ nin açıortayı $[AC]$ yi D de; $\widehat{BCA}$ nın açıortayı $[AB]$ yi E de kesiyor. BD ve CE doğrularının kesişim noktası X olmak üzere, $|BX| = \sqrt{3}|XD|$ ve $|XE| = (\sqrt{3}-1)|XC|$ dir. ABC üçgenin iç açılarının ölçülerini bulunuz.

3 $a_1, \dots, a_n$ gerçel sayıları ile n pozitif tam sayısı verildiğinde,

$$|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i| \leq |a_k|$$

olacak biçimde m ve k pozitif tam sayıları bulunduğunu gösteriniz.

4 Tüm gerçel sayılar üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun en az iki simetri merkezi varsa, bu fonksiyonun bir doğrusal fonksiyon ile bir periyodik fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

[Her x gerçel sayısı için $f(a-x)+f(a+x) = 2f(a)$ olacak biçimde bir a gerçel sayısı varsa, $(a, f(a))$ noktasına f fonksiyonunun bir simetri merkezi denir.]

5 Bir A noktasında içten teğet iki çemberden küçük olanı üzerinde A dan farklı bir C noktası alınıyor. Büyük çember, küçük çembere C den çizilen teğeti D ve E noktalarında; AC doğrusunu da A ve P noktalarında kesiyor. PE doğrusunun A, C ve E den geçen çembere teğet olduğunu gösteriniz.

6 $n > 1$ olmak üzere, uzayda, herhangi dördü düzlemdeş olmayan $2n+1$ noktayı birbirlerine birleştiren doğru parçalarını kırmızı, beyaz ya da maviye boyuyoruz. Bu nokta kümesinin bir M altkümesine, eğer her $a, b \in M$ için $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_1$ doğru parçaları aynı renkte olacak biçimde, M ye ait $a = x_0, x_1, \dots, x_l = b$ noktaları varsa, bir tek-renk bağlantılı altküme diyoruz. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, mutlaka k elemanlı tek-renk bağlantılı bir altküme oluşuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz. $(l > 1)$

44. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2003

1 $M = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $abcd > 1\}$ olsun. Her $n \in \{1, 2, \ldots, 254\}$ için

$$|a_{n+1} - a_n| + |b_{n+1} - b_n| + |c_{n+1} - c_n| + |d_{n+1} - d_n| = 1$$

koşulunu sağlayan ve içinde M ye ait her elemanın tam olarak bir kez geçtiği bir (a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), $\ldots$, $(a_{255}, b_{255}, c_{255}, d_{255})$ dizisinde $c_1 = d_1 = 1$ ise, (a_1, b_1) ikilisinin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2 Köşegenleri K noktasında kesişen konveks bir $ABCD$ dörtgeninde $L \in [AD]$, $M \in [AC]$, $N \in [BC]$ noktaları, $KL \parallel AB$, $LM \parallel DC$, $MN \parallel AB$ koşullarını sağlıyorsa,

$$\frac{Alan(KLMN)}{Alan(ABCD)} < \frac{8}{27}$$

olduğunu gösteriniz.

3 Bütün terimleri doğal sayıların 1 den büyük kuvvetleri olan

(a) 2003 terimli

(b) sonsuz

bir aritmetik dizi var mıdır?

4 $(x^2+y^2)^2+2tx(x^2+y^2) = t^2y^2$ denkleminin x, y pozitif tam sayılar olmak üzere bir çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük t

(a) pozitif gerçel sayısını

(b) pozitif tam sayısını

bulunuz.

5 A, O merkezli bir çemberin üstünde bir nokta ve B de $[OA]$ nın orta noktası olsun. C ve D, çember üstünde ve OA doğrusunun aynı tarafında, $\widehat{CBO} = \widehat{DBA}$ koşulunu sağlayan noktalar olmak üzere, $[CD]$ nin orta noktasının B ye göre simetriğinin yine çember üstünde olduğunu gösteriniz.

6 Her n pozitif tam sayısı için, $p(n)$, terimleri toplamı n ye eşit olan ve azalmayan pozitif tam sayı dizilerinin sayısını göstermek üzere

$$\frac{1 + p(1) + p(2) + \cdots + p(n-1)}{p(n)} \leq \sqrt{2n}$$

olduğunu kanıtlayınız.

45. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2004

1 11×11 satranç tahtası bir tane $\square$ ve kırk tane $\square\square\square$ ile kapatılırsa, $\square$ şeklinin tahtadaki hangi karelere gelebileceğini belirleyiniz.

2 P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta ise,

$$\min\{|PA|, |PB|, |PC|\} + |PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC| + |CA|$$

olduğunu gösteriniz.

3 n pozitif bir tam sayı olsun. Hangi $n+1 \leq r \leq 3n+2$ tam sayıları için,

$$a_1 b_1^k + a_2 b_2^k + \ldots + a_m b_m^k = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ tam sayılarının,

$$r | a_1 b_1^r + a_2 b_2^r + \ldots + a_m b_m^r$$

koşulunu da sağlayacağını belirleyiniz.

4 $\sin\alpha = 3/5$ ve $x = 5^{2003}\sin(2004\alpha)$ ise, $x - \lfloor x \rfloor$ sayısının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

5 D, dar açılı bir ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde A ve C den farklı bir nokta olsun. $[AB]$ kenarı üzerinde $\widehat{ADP} = \widehat{OBC}$ olacak biçimde P noktası, $[BC]$ kenarı üzerinde ise $\widehat{CDQ} = \widehat{OBA}$ olacak biçimde bir Q noktası alınıyor. $\widehat{DPQ} = \widehat{DOC}$ olduğunu gösteriniz.

6 Bir sınıftaki öğrencilerin her birinin elinde 0, 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 tane şeker vardır. Öğretmen her adımda, bazı öğrencileri seçip, bu öğrencilere ve bu öğrencilerden herhangi biri ile arkadaş olan her öğrenciye birer şeker veriyor. Elindeki şeker sayısı 7 ye ulaşan öğrenci bunların hepsini yiyor. Sınıftaki herhangi iki öğrenci için bunlardan yalnızca biriyle arkadaş olan üçüncü bir öğrenci bulunuyorsa, başlangıçtaki şeker sayıları ne olursa olsun, öğretmenin sonlu sayıda adım sonucunda her öğrencinin elinde istediği sayıda şeker kalmasını sağlayabileceğini gösteriniz.

46. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2005

1 Her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned} &4f(x) \geq 3x \\ &f(4f(x) - 3x) = x \\ &(f(x) + x)f(f(x)) \leq 2xf(x) \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonlarını bulunuz.

2 $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası N dir. $[AC$ ışını üstünde C den sonra gelecek ve $|BC| = |CD|$ olacak biçimde bir D noktası; $[DN$ ışını üstünde de, $m(\widehat{PBC}) = m(\widehat{A})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. PC ile AB nin kesiştiği nokta E; BC ile DP nin kesiştiği nokta T ise,

$$\frac{|BC|}{|TC|} - \frac{|EA|}{|EB|}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

3 Başlangıçta 1 den 2005 e kadar olan bütün tam sayılar işaretleniyor. Ardışık tam sayılardan oluşan sonlu bir dizideki tüm tam sayılar işaretli olup, dizinin en küçük teriminin bir eksiği ile en büyük teriminin bir fazlası işaretsiz ise, bu diziye bir blok diyoruz. Her hamlede, işaretlenmiş sayıların hiçbir blokun ilk ya da son terimini içermeyen bir altkümesini seçip, bu altkümenin elemanlarının işaretlerini siliyor ve işaretli en büyük sayının iki fazlasından başlayarak, işaretini sildiğimiz sayıda tam sayıyı yeni bir blok oluşturacak şekilde işaretliyoruz. Bu hamleleri, her biri tam olarak bir tam sayıdan oluşan 2005 blok elde etmek amacıyla yaparsak, bu amaca en az kaç hamlede ulaşabiliriz?

4 $n \geq 2$ olmak üzere, tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayıları için, $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$ sayısının $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ sayısını böldüğünü kanıtlayınız.

5 $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde, A noktasından bu üçgenin Γ çevrel çemberine çizilen teğet, BC doğrusunu D noktasında kesiyor. A noktasının BC doğrusuna göre simetriği E; A noktasından BE ye çizilen dikmenin ayağı X; $[AX]$ nın orta noktası Y; Γ çemberinin BY doğrusunu B dışında kestiği nokta Z olsun. BD doğrusunun ADZ üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

6 Elimizde, her renkten aynı sayıda top olacak biçimde, k farklı renkte 5040 tane top var. Topları, her torbaya farklı renkte iki top düşecek biçimde, 2520 torbaya koyuyoruz. Topların torbalara dağılımı nasıl olursa olsun, bu torbaları bir çember üstüne, herhangi ardışık iki tanesinde aynı renkte iki top olmayacak biçimde yerleştirebiliyorsak, k en az kaç olabilir?

47. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2006

1 Köşeleri 1 yarıçapında bir çember üstünde bulunan ve köşegenlerinden ikisi dik kesişen bir yedigenin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

2 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $2 \times n$ lik bir dikdörtgeni, kenar uzunlukları tam sayılar olan dikdörtgenlere kaç farklı biçimde ayırabiliriz?

3 x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xy + yz + zx = 1$ ise,

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriniz.

4 x_1 bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n \geq 1$ tam sayısı için $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ ise, x_{2006} sayısının 2006 ile bölünmesini sağlayan en küçük x_1 sayısını bulunuz.

5 $[AB]$ çaplı bir çemberin üstündeki A ve B den farklı herhangi bir Q noktasından $[AB]$ çapına, $H \in [AB]$ olmak üzere, $[QH]$ dikmesi iniliyor. Q merkezli ve $|QH|$ yarıçaplı çemberin $[AB]$ çaplı çemberi kestiği noktalar C ve D ise, CD doğrusunun $[QH]$ nı iki eşit parçaya böldüğünü gösteriniz.

6 2006000 öğrencinin katıldığı bir Üniversite Giriş Sınavı'nda, her öğrenci 2006 bölüm arasından 12 bölümlük bir liste yapıyor. Herhangi 6 öğrenciyi aldığımızda, bu öğrencilerden her birinin en az birini kendi listesine dahil etmiş olduğu iki bölümün bulunduğu gözleniyor. Her öğrencinin listesinden en az bir bölüm içeren bir bölüm listesine, kapsamlı bir liste diyoruz.

Öğrencilerin verdikleri listeler ne olursa olsun, 12 elemanlı bir kapsamlı liste oluşturulabileceğini kanıtlayınız.

Daha küçük bir listenin kendilerine göre kapsamlı olmadığı öğrenci listelerinin bulunduğunu gösteriniz.

48. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2007

1 Bir havayolu şirketi A, B, C, D, E ve F kentlerinden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri başlatacaktır. Bu altı kentten herhangi ikisi arasında yalnızca bu şirketin seferlerini kullanarak ulaşımı mümkün kılacak biçimde, bu seferlerin kaç farklı biçimde düzenlenebileceğini belirleyiniz.

(Okan Tekman)

2 Farklı A ve B noktaları ile bu noktalardan geçen bir Γ çemberi verilmiş olsun. P, Γ üstünde A ve B den farklı, değişen bir nokta olmak üzere, $\widehat{APB}$ nın açıortayının P noktasından Γ çemberinin dışına doğru uzantısı üstünde yer alan ve $|MP| = |AP| + |PB|$ koşulunu sağlayan M noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

(Mehmet Tagiyev)

3 a, b, c pozitif gerçel sayıları, $a + b + c = 1$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Selim Bahadır)

4 Dar açılı bir ABC üçgeniyle; bu üçgenin dışında ve sırasıyla $[AC$, $[BA$ ve $[CB$ ışınları üstünde yer alan B_1, C_1 ve A_1 noktalarının oluşturduğu $A_1B_1C_1$ üçgeni benzerdir. $A_1B_1C_1$ üçgeninin diklik merkezi ile ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin çakıştığını kanıtlayınız.

(Mehmet Tagiyev)

5 Hangi n pozitif tek sayıları için,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n^4$$

eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tek sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

(Özgür Kişisel)

6 2007×2007 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 veya -1 yazıyoruz. Bu yazımın, tahtanın birim karelerinden oluşan her karenin içindeki sayıların toplamının mutlak değeri 1 i aşmayacak biçimde, kaç farklı şekilde gerçekleştirilebileceğini belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

49. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2008

1 $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A açısının iç ve dış açıortayları BC yi sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. $[EA$ ışını üstünde, A ya göre E ile farklı tarafta bir P noktası alınıyor. DP ve AC doğruları M noktasında, ME ile AD ise, Q noktasında kesişiyor. P noktası değişirken elde edilen PQ doğrularının hepsinin bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

2 30 köşesi ve 105 kenarı bulunan bir çizgede, ortak bir köşesi bulunmayan sıralı kenar ikililerinin sayısı 4822 ise, bu çizgideki iki köşenin dereceleri arasındaki fark en çok kaç olur?

3 $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ denkleminin bütün köklerinin pozitif gerçel sayılar olmasını sağlayan a, b, c gerçel sayıları için

$$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$$

ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

4 (x_n) dizisi, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$x_{n+2} = 2008x_{n+1} - x_n$$

bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor. Her $n \geq 1$ tam sayısı için,

$$1 + 2006x_n x_{n+1}$$

ifadesini tam kare yapan a ve b pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

5 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AD| = \dfrac{|BD|^2}{|AB|+|AD|} = \dfrac{|CD|^2}{|AC|+|AD|}$ olacak şekilde bir D noktası ile $D \in [AE]$ ve $|CD| = \dfrac{|DE|^2}{|CD|+|CE|}$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = |AB| + |AC|$ olduğunu gösteriniz.

6 $m, n > 2$ tam sayılar olmak üzere, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ topluluğu, m elemanlı bir A kümesinin bir altkümesini seçecektir. N topluluğunun bir tercih profili, her $i \in N$ seçmeninin A kümesindeki seçeneklere ilişkin bir kesin tercih sıralamasından oluşmaktadır. $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere, k-çoğulcu seçim sisteminde, her seçmen, ilk k sırada tercih ettiği k adaya, sırasını belirtmeksizin eşit ağırlıklı oy vermekte ve en çok sayıda toplam oy alan adaylar seçilmektedir. R ve R', N topluluğunun iki tercih profili ve $a \in A$ olmak üzere, eğer her $i \in N$, R profilindeki tercihine göre a dan kötü bulduğu bütün adayları, R' profilindeki tercihine göre de a dan kötü buluyorsa, "R' profili, R profiline a-üstündür" diyoruz. k-çoğulcu seçim sistemine göre R profilinde seçilen her $a \in A$, R ye a-üstün olan her R' profilinde de seçilmeye devam ediyorsa, k-çoğulcu seçim sistemine tekdüze diyoruz. $k > \dfrac{m(n-1)}{n}$ olmasının, k-çoğulcu seçim sisteminin *tekdüze* olması için gerek ve yeter olduğunu gösteriniz.

50. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2009

$\boxed{1}$ $\mathbf{Q}^+$ tüm pozitif rasyonel sayıların, $\mathbf{Z}$ ise tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $x > 1$ olan her $x \in \mathbf{Q}^+$ için, $f(1/x) = f(x)$ ve $(x+1)f(x-1) = xf(x)$ bağıntılarını sağlayan bütün $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Serhat Doğan)

$\boxed{2}$ Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi O, yarıçapı ise r dir. AB ve CD doğruları P; AD ve BC doğruları Q; AC ve BD köşegenleri ise, K noktasında kesişiyor. O noktasından PQ doğrusuna olan uzaklık d ise, $|OK| \cdot d = r^2$ olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Hamidoğlu)

$\boxed{3}$ 2009 kişilik toplulukta, hangi iki kişiyi alırsak alalım, bunların ikisiyle birden tanışık olan tam olarak bir kişi bulunuyor. Böyle bir toplulukta en çok tanıdığı olan ve en az tanıdığı olan kişilerin tanıdık sayıları arasındaki farkın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Azer Kerimov)

$\boxed{4}$ Hangi p asal sayıları için, $1 + p + \prod_{i=1}^{2p-2} Q(x^i)$ polinomunun en az bir tam sayı kökü olacak biçimde, tam sayı katsayılı bir $Q(x)$ polinomunun bulunduğunu belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

$\boxed{5}$ Bir ABC üçgeninde, A_1, B_1 ve C_1, iç teğet çemberin sırasıyla, BC, AC ve BC kenarlarına değdiği noktalar olmak üzere,

$$\sqrt{\frac{|AB_1|}{|AB|}} + \sqrt{\frac{|BC_1|}{|BC|}} + \sqrt{\frac{|CA_1|}{|CA|}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Semih Yavuz)

$\boxed{6}$ Bir sınıftaki $n \geq 4$ öğrenciden bazıları arkadaştır. Bu sınıftaki herhangi $n-1$ öğrenci, her birinin her iki yanında da birer arkadaşı bulunacak biçimde bir çember oluşturabilirken, n öğrenciyle bu koşulu sağlayan bir çember oluşturulamıyorsa, n nin alabileceği en küçük değerin 10 olduğunu gösteriniz.

(Okan Tekman)

51. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2010

1 ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üstünde yer alan D, E, F noktaları, $|AD| = |AF|$, $|BD| = |BE|$ ve $|DE| = |DF|$ koşullarını sağlıyor. I, ABC üçgeninin iç merkezi olmak üzere; ABI üçgeninin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğru ile BI doğrusu K noktasında kesişiyor. $|AK| = |AD|$ ise, $|AK| = |KE|$ olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

2 Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(b^2+c)(b^2-bc+c^2)}{2}} + \sqrt[4]{\frac{(c^2+a^2)(c^2-ca+a^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

3 Yıl boyunca yaptığı sınavlarda 2010 tane soru sormuş olan bir öğretmen, bu soruları her biri 670 tane soru içeren üç dosyaya ayırarak, her dosyayı o dosyadaki soruların hepsini çözmüş olan bir öğrenciye vermek istiyor. Herhangi bir soruyu çözemeyen en çok iki öğrenci olması koşuluyla; hangi soru hangi öğrenciler tarafından çözülmüş olursa olsun, öğretmenin bunu yapmasının olanaklı olması için toplam öğrenci sayısının en az kaç olması gerektiğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

4 $0 \leq k < n$ tam sayılar ve $A = \{a : a \equiv k \pmod{n}\}$ olmak üzere, hiçbir $(a, m) \in A \times \mathbf{Z}^+$ için,

$$\frac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$$

ifadesinin değeri tam sayı değilse, n nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan, Okan Tekman)

5 ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $BD \cap AC = \{E\}$ ve $CD \cap AB = \{F\}$ olmak üzere; A, E, D, F noktaları çemberdeş ise, bu noktalardan geçen çemberi Γ_D ile gösterelim. Tüm Γ_D çemberlerinin A dan farklı bir ortak noktadan geçtiğini gösteriniz.

(Serhat Doğan)

6 Λ düzlemdeki kafes noktalarının kümesi ve $\mathcal{F}$ de, Λ dan $\{-1, 1\}$ kümesine fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{F}$ deki bir f fonksiyonu, $\mathcal{F}$ ye ait olan ve f den farklı değer aldığı kafes noktalarının sayısı sonlu olan her g fonksiyonu için,

$$\sum_{\substack{P,Q\in\Lambda \\ 0<|PQ|<2010}} \frac{f(P)f(Q) - g(P)g(Q)}{|PQ|} \geq 0$$

koşulunu sağlıyorsa, f ye şahane diyelim. Birbirinin ötelemesi olmayan sonsuz çoklukta şahane fonksiyon bulunduğunu kanıtlayınız.

(Azer Kerimov)

52. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2011

1 $\mathbf{Q}^+$ pozitif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere; her $x \in \mathbf{Q}^+$ için

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1} \quad \text{ve} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}$$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Serhat Doğan)

2 ABC üçgeninin çevrel çemberinin A noktasından geçen çapının diğer ucu D ve içteğet çemberinin merkezi I olsun. Sırasıyla $[BA$ ve $[CA$ ışınları üstünde yer alan E ve F noktaları

$$|BE| = |CF| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}$$

koşulunu sağlıyorsa, EF ve DI doğrularının dik olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Hamidoğlu)

3 A ve B, sırasıyla 2011^2 ve 2010 elemanlı birer küme olsun. Her $(x, y) \in A \times A$ için, $f(x, y) = f(y, x)$ koşulunu ve her $g : A \to B$ fonksiyonu için, $g(a_1) = f(a_1, a_2) = g(a_2)$ ve $a_1 \neq a_2$ olacak biçimde bir $(a_1, a_2) \in A \times A$ bulunmasını sağlayan bir $f : A \times A \to B$ fonksiyonunun bulunduğunu kanıtlayınız.

(Azer Kerimov)

4 D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere; ABC, ABD ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla, I, I_1 ve I_2 dir. AI_1I ve ADI_2 üçgenlerinin çevrel çemberleri A dan farklı bir E noktasında, AII_2 ve AI_1D üçgenlerinin çevrel çemberleri de A dan farklı bir F noktasında kesişiyor. $|AI_1| = |AI_2|$ ise,

$$\frac{|EI|}{|FI|} \cdot \frac{|ED|}{|FD|} = \frac{|EI_1|^2}{|FI_1|^2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

5 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ koşulunu sağlayan tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için,

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

6 n pozitif tam sayısının iki tabanına göre yazılımındaki rakamların toplamını $t(n)$ ile gösterelim. $k \geq 2$ bir tam sayı olsun.

a. Tüm $m \geq N$ tam sayıları için, $t(3 \cdot 5 \cdots (2m+1)) > k$ olmasını sağlayan bir N tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

b. Her m pozitif tam sayısı için, $a_m \geq 3$ bir tek sayı ve $t(a_1 a_2 \cdots a_m) = k$ olacak biçimde bir $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tam sayılar dizisi bulunduğunu gösteriniz.

(Okan Tekman)

7 K, dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir nokta ve $ARBPCQ$, köşeleri ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ nın üstünde bulunan dışbükey bir altıgen olsun. K den geçen ve Γ ya A da teğet olan çemberin AP doğrusunu ikinci kez kestiği nokta A_1, K den geçen ve Γ ya B de teğet olan çemberin BQ doğrusunu ikinci kez kestiği nokta B_1, K den geçen ve Γ ya C de teğet olan çemberin CR doğrusunu ikinci kez kestiği nokta C_1 ise,

$$\min\left\{\frac{|PA_1|}{|AA_1|}, \frac{|QB_1|}{|BB_1|}, \frac{|RC_1|}{|CC_1|}\right\} \leq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

8 2011 kentin bulunduğu Çizgistan'daki her kent ikilisi için, Çizge Hava Yolları (ÇHY) tarafından bu kentlerden yalnızca birinden diğerine tek yönlü olarak uçak seferleri düzenlenmektedir. Her kentin kalkış noktası olduğu seferlerin sayısı ile varış noktası olduğu seferlerin sayısının farkının mutlak değeri k yi aşmamak koşuluyla bu seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, Çizgistan'ın herhangi bir kentinden herhangi başka bir kentine yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak ulaşmak mümkün olmaktadır. k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

9 p bir asal sayı, n bir pozitif tam sayı olsun ve $\mathbf{Z}_{p^n} = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ olsun. Her $a, b \in \mathbf{Z}_{p^n}$ için, ($a+b+pab$, $a+b+pab$ nin p^n ye bölümünden kalanı göstermek üzere),

$$f(a) + f(b) \equiv f(a + b + pab) \pmod{p^n}$$

koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{Z}_{p^n} \to \mathbf{Z}_{p^n}$ fonksiyonunun bulunduğunu belirleyiniz.

(Okan Tekman)

53. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2012

1 $A = \{1, 2, \ldots, 2012\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 19\}$ ve S de A nın tüm altkümelerinin kümesi olsun. Her $A_1, A_2 \in S$ için, $f(A_1 \cap A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$ koşulunu sağlayan tüm $f : S \to B$ fonksiyonlarının sayısını belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

2 D, dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta olmak üzere; M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sırasıyla, $[AD]$, $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$, $[CD]$ doğru parçalarının orta noktaları; O_1, O_2, O_3, O_4 sırasıyla, ABD, ACD, $M_1M_2M_4$, $M_1M_3M_5$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri; S ve T de sırasıyla, AO_1 ve AO_2 doğru parçalarının orta noktaları olsun. SO_3O_4T dörtgeninin bir ikizkenar yamuk olduğunu kanıtlayınız.

(Selim Bahadır)

3 $ab + bc + ca \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

4 Bir ABC üçgeninin içteğet çemberi $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına sırasıyla, D, E, F noktalarında değiyor. A noktasında geçen ve BC doğrusuna D de teğet olan çember ise, $[BF]$ ve $[CE]$ doğru parçalarını sırasıyla, K ve L noktalarında kesiyor. E den geçen ve DL ye paralel olan doğru ile F den geçen ve DK ye paralel olan doğru da P noktasında kesişiyor. R_1, R_2, R_3, R_4 sırasıyla, AFD, AED, FPD, EPD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $R_1R_4 = R_2R_3$ olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

5 Hangi n pozitif tam sayıları için, her biri n ile bölünen n tane tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabilen her pozitif tam sayının, hiçbiri n ile bölünmeyen n tane tam sayının karelerinin toplamı olarak da yazılabileceğini belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

6 Arda ile Başak $1 \times m$ bir satranç tahtası ve üzerlerinde 1 den 2012 ye kadar tam sayıların yazılı olduğu 2012 taşla bir oyun oynuyorlar. Her hamlede Arda bir taş seçiyor ve Başak bunu tahtanın istediği boş bir karesine yerleştiriyor. Bu biçimde yapılan k hamle sonucunda seçilen taşlar tahtaya artan bir sırada yerleştirilmişse, oyunu Başak; değilse, Arda kazanıyor. Hangi (m, k) ikilileri için Başak'ın oyunu kazanmayı garantileyebileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

7 Bir r rasyonel sayısı ve bir n pozitif tam sayısı için, $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ olsun. Sonsuz çoklukta n pozitif tam sayısı için, $S_a(n) = (S_b(n))^c$ olmasını sağlayan bütün a, b pozitif rasyonel sayılarını ve c pozitif tam sayılarını belirleyiniz.

(Ömer Faruk Tekin)

8 $ABC \cong A'B'C'$ olacak biçimde düzlemde yer alan birbirinden farklı A, B, C, A', B', C' noktaları için, ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olsun. G den geçen A' merkezli çember ile $[AA']$ çaplı çember A_1 noktasında, G den geçen B' merkezli çember ile $[BB']$ çaplı çember B_1 noktasında, G den geçen C' merkezli çember ile $[CC']$ çaplı çember de C_1 noktasında kesişiyorsa,

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

9 Tüm pozitif tam sayıların kümesinin $\mathbf{Z}^+$ ile, tüm asal sayıların kümesini de $\mathbf{P}$ ile gösterelim.

A ve S, $\mathbf{Z}^+$ nın altkümeleri olmak üzere; A nın tüm a elemanları ve $0 \leq b < a$ koşulunu sağlayan tüm b tam sayıları için, $b \equiv s_1 + s_2 + \cdots + s_n \pmod{a}$ ve $1 \leq n \leq N$ olacak biçimde S ye ait $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bulunmasını sağlayan bir N pozitif tam sayısı varsa, A kümesine S-uygun diyelim.

$\mathbf{P}$ kümesi S-uygun olacak ve $\mathbf{Z}^+$ kümesi S-uygun olmayacak biçimde $\mathbf{Z}^+$ nın bir S altkümesini bulunuz.

(Umut Varolgüneş)

54. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2013

1 Bir n pozitif tam sayısı için, n den küçük ve n ile arasında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\phi(n)$ ile gösterilmek üzere,

$$2^n + (n - \phi(n) - 1)! = n^m + 1$$

eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Vefa Göksel)

2 2013×2013 bir satranç tahtasının birim karelerine, her birim karede en çok bir taş olacak ve birim karelerden oluşan her 19×19 karede de en az 21 taş olacak biçimde en az kaç taş yerleştirilebileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

3 $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ açılarının ölçüleri farklı olan dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve iç teğet çemberinin merkezi de I dır. $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla, D, E, F ve I dan $[AB]$ ye inilen dikmenin ayağı T olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezi P ve $[OI]$ doğru parçasının orta noktası Q olmak üzere, A, P, Q noktaları doğrudaş ise,

$$\frac{|AO|}{|OD|} - \frac{|BC|}{|AT|} = 4$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

4 $m^6 = n^{n+1} + n - 1$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

5 Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin $[BC]$ kenarına teğet olduğu nokta D ve merkezi I; $[ID]$ doğru parçasının orta noktası ise T olsun. I dan AD doğrusuna çizilen dikme AB ve AC doğrularını sırasıyla, K ve L noktalarında; T den AD ye çizilen dikme de bu doğruları sırasıyla, M ve N noktalarında kesiyor. $|KM| \cdot |LN| = |BM| \cdot |CN|$ olduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

6 $-2 \leq x, y, z \leq 2$ ve $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ koşullarını sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için,

$$\frac{z(xz + yz + y)}{xy + y^2 + z^2 + 1} \leq K$$

olmasını sağlayan en küçük K gerçel sayısını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

7 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olmak üzere, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAD})$ koşulu sağlanıyor. $[BC]$ kenarı üstündeki bir F noktası için, $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{BFE})$ ise, A, B, F, D noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

8 Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$$
$$f(-x) = f(x - 1)$$
$$1 < x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

9 Bir ülkedeki n kentten bazıları arasında, herhangi iki kent arasında ulaşımı olanaklı kılacak ve her kentten en az k sefer olacak biçimde karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Bu seferlerin, nasıl düzenlenmiş olurlarsa olsunlar, $n - k$ hava yolu şirketi arasında, herhangi bir kentten bir diğerine aynı hava yolu şirketini birden fazla kere kullanmadan gitmek mümkün olacak biçimde paylaştırılabileceğini kanıtlayınız.

(Azer Kerimov)

55. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2014

1 $(1, 2, \ldots, 2014)$ 2014-lüsünün, her $1 \leq i < j \leq 2014$ için, $i + a_i \leq j + a_j$ koşulunu sağlayan $(a_1, a_2, \ldots, a_{2014})$ permütasyonlarının sayısını belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

2 Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2$$

koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

3 $|AC| > |AB|$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I noktası ve yarıçapı r, çevrel çemberinin merkezi O noktası ve yarıçapı R, $[BC]$ kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi J_A ve yarıçapı r_a dır. İç teğet çemberin $[BC]$ kenarına değme noktası D olmak üzere, B ile D arasında yer alan bir E noktası

$$\text{Alan}(IEJ_A) = 2 \cdot \text{Alan}(IEO)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$|ED| = |AC| - |AB| \Leftrightarrow R = 2r + r_a$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

4 $n \mid 3m + 1$ ve $m \mid n^2 + 3$ koşullarını sağlayan tüm (m, n) pozitif tek sayı ikililerini bulunuz.

(Şahin Emrah)

5 Bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktasını merkez alan bir çember $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarını sırasıyla, A_1 ve A_2, B_1 ve B_2, C_1 ve C_2 noktalarında kesiyor. A_1, A_2, P noktalarından geçen çemberin merkezi A' noktası; B_1, B_2, P noktalarından geçen çemberin merkezi B' noktası; C_1, C_2, P noktalarından geçen çemberin merkezi de C' noktası olmak üzere, AA', BB', CC' doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

(Mehmet Eren Durlanık)

6 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c negatif olmayan gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 5abc + 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

7 Dar açılı bir ABC üçgeninin içinde yer alan bir P noktası $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{PCB})$ koşulunu sağlıyor. $[PC]$ doğru parçasının orta noktası D ve AP doğrusu ile BC doğrusunun kesişim noktası E olmak üzere, BP ve DE doğruları Q noktasında kesişiyor. $m(\widehat{BCQ}) + m(\widehat{BAP}) = 180^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

8 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $a_1 = -5$, $a_2 = -6$ ve $n \geq 2$ için,

$$a_{n+1} = a_n + (a_1 + 1)(2a_2 + 1)(3a_3 + 1) \cdots ((n-1)a_{n-1} + 1)((n^2 + n)a_n + 2n + 1)$$

koşullarını sağlasın. Bir n pozitif tam sayısı için, p asal sayısı $na_n + 1$ tam sayısını bölüyorsa, $m^2 \equiv 5 \pmod{p}$ denkliğini sağlayan bir m tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

9 Başlangıçta 2014×2014 bir satranç tahtasının sol alt köşesindeki birim karede bulunan yeşil tırtıllardan her biri herhangi bir anda bulunduğu birim karenin sağındaki veya üstündeki birim kareye, başlangıçta bu tahtanın sol üst birim karesinde bulunan kahverengi tırtıllardan her biri de herhangi bir anda bulunduğu birim karenin sağındaki veya altındaki birim kareye geçebiliyor. Tüm tırtıllar yolculuklarını tamamladıklarında tahtanın her birim karesinden en az bir tırtılın geçmiş olduğu gözleniyorsa, tahtadaki toplam tırtıl sayısının en az kaç olabileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

56. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2015

1 l, m, n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere,

$$p^{2l-1}m(mn+1)^2 + m^2$$

bir tam kare ise, m nin de bir tam kare olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah, Melih Üçer)

2 Düzlemde herhangi ikisi arasındaki uzaklık birbirinden farklı olan 2015 nokta verilmiştir. Bir noktaya en yakın 22 noktanın her biri bu noktanın ***komşusu*** ise, bir nokta en fazla kaç noktanın komşusu olabilir?

(Selim Bahadır)

3 m, n pozitif tam sayılar olmak üzere, 0 ve 1 lerden oluşan ve her ardışık m elemanının en az biri 0 olan dizilerin sayısı $S(n, m)$ olsun.

$$S(2015n, n) \cdot S(2015m, m) \geq S(2015n, m) \cdot S(2015m, n)$$

olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

4 $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük AB ve AC yayları üzerinde sırasıyla üçgenin köşelerinden farklı D ve E noktaları alınıyor. AD ve BC doğrularının kesişme noktası F, AE doğrusunun FDE üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez kestiği nokta ise G olsun. AC doğrusunun ECG üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

5 2015×2015 satranç tahtasının birim kareleri; ikisi aynı sütunda ve üçüncüsü bu iki kareden daha yukarıdakiyle aynı satırda ve ondan sağda veya bu iki kareden daha aşağıdakiyle aynı satırda ve ondan solda olan herhangi üçü aynı renge boyanmayacak koşuluyla k renge boyanabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

(Azer Kerimov)

6 Sonsuz tane n pozitif tam sayısı için $(n!)^{n+2015}$ nin $(n^2)!$ sayısını böldüğünü gösteriniz.

(Melih Üçer)

7 Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x^2) + 4y^2 f(y) = (f(x-y) + y^2)(f(x+y) + f(y))$$

koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

8 İç teğet çemberinin merkezi I, çevrel çemberinin merkezi O olan ve $|AC| > |BC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. A noktasının F ve E ye göre simetrikleri sırasıyla F_1 ve E_1 olmak üzere; BC doğrusuna D de teğet olan ve F_1 den geçen çember AB doğrusunu ikinci kez F_2 de, BC doğrusuna D de teğet olan ve E_1 den geçen çember ise AC doğrusunu ikinci kez E_2 de kesiyor. OE ve IF doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla P ve Q olmak üzere,

$$|AB| + |AC| = 2 \cdot |BC| \iff PQ \perp E_2F_2$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

9 Bir ülkedeki 2015 kentten herhangi ikisi arasında tam olarak bir karşılıklı uçak seferi yapılmaktadır. Herhangi üç kent arasındaki direkt seferler en fazla iki şirket tarafından yapılacak koşuluyla seferler birkaç hava yolu şirketi arasında nasıl paylaşılmış olursa olsun, aynı hava yolu tarafından k sefer yapılan bir kent bulunuyorsa, k nın alabileceği en büyük değer nedir?

(Azer Kerimov)

57. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2016

1 Dar açılı bir ABC üçgeninde A köşesinden geçen yükseklik üzerinde bir P noktası alınıyor. BP ve CP doğruları AC ve AB kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. D be E noktalarından BPC üçgeninin çevrel çemberine çizilen teğetler ABC üçgeninin iç bölgesinde kalacak şekilde sırasıyla K ve L noktalarında çembere teğettir. KD doğrusu AKC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez M noktasında, LE doğrusu ALB üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez N noktasında kesiyor. Buna göre

$$\frac{KD}{MD} = \frac{LE}{NE} \iff \text{P noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

2 23 öğrenciden oluşam bir sınıfta her öğrenci ikilisi birlikte bir film izledi. Her öğrencinin izlediği tüm filmlerin kümesi onun *film koleksiyonu* olsun. Her öğrenci her filmi en fazla bir kez izlediyse, sınıftaki öğrencilerin en az kaç farklı film koleksiyonu olabilir?

(Azer Kerimov)

3 $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c negatif olmayan gerçel sayıları için

$$(a + b + c)(a + b + c - abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

4 Bir $a_0, a_1, \cdots$ gerçel sayı dizisi yeterince büyük tüm m pozitif tamsayıları için

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (-1)^n \cdot \binom{m}{n} = 0$$

şartını sağlıyorsa, tüm $n \geq 0$ için $a_n = P(n)$ koşulunu sağlayan bir P polinomunun bulunduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

5 Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $f(mn) = f(m)f(n)$ ve $m + n \mid f(m) + f(n)$ koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Melih Üçer)

6 $AB = AC$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası D olsun. D den geçen bir doğru AB yi K de, AC yi L de kesiyor. $[BC]$ kenarı üzerinde D den farklı bir E noktası ve AE nin E tarafındaki uzantısı üzerinde $\angle KPL = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle KAL$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. PDE nin çevrel çemberinin PK yi ikinci defa kestiği nokta X, PL yi ikinci defa kestiği nokta Y olmak üzere DX ve AB doğruları M de, DY ve AC doğruları ise N de kesişiyor. P, M, A, N noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

7 $A_1, A_2, \ldots A_k$ $\{1, 2, \ldots, 2016\}$ kümesinin farklı alt kümeleri olmak üzere her $1 \leq i < j \leq k$ için $A_i \cap A_j$ bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, k nın alabileceği en büyük değer nedir?

(Azer Kerimov)

8 $n \geq 5$ olmak üzere $A_1A_2 \cdots A_n$ dışbükey n-geninin tüm iç açıları geniş açıdır. Her $1 \leq i \leq n$ için O_i, $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ üçgeninin ($A_0 = A_n$ ve $A_{n+1} = A_1$ kabul ediliyor) çevrel çember merkezi olarak tanımlanıyor. $O_1O_2 \cdots O_n$ kapalı yolunun bir dışbükey n-gen belirtmediğini kanıtlayınız.

(Melih Üçer)

9 p bir asal sayısı olmak üzere, katsayıları $\{0, 1, \cdots p - 1\}$ kümesine ait olan ve derecesi p den küçük olan polinomların kümesini K_p ile gösterelim. Tüm n tamsayıları için $P(Q(n)) = n \pmod{p}$ koşulunu sağlayan K_p ye ait her P, Q polinom ikilisinin derecesinin eşit olduğu bütün p asal sayılarını belirleyiniz.

(Okan Tekman)

58. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2017

1 m, n pozitif tam sayı ve p asal sayı olmak üzere;

$$(m^3 + n)(n^3 + m) = p^3$$

ifadesini sağlayan tüm (m, n, p) üçlülerini bulunuz.

2 Bir ülkedeki 2017 şehir arasında, herhangi iki şehirden birbirine ulaşmanın mümkün olduğu karşılıklı seferler düzenleniyor. Seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, her şehirden en az bir "özel şehre" doğrudan sefer olacak şekilde k "özel şehir" bulmak mümkündür. k nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

3 ABC üçgeninde BC, AC, AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla D, E, F olup üçgenin iç teğet çemberi bu kenarlara sırasıyla G, H, I noktalarında dokunmaktadır. AD kenarının orta noktası J olsun. BJ ve AG doğruları K noktasında kesişsin. A noktasından geçen ve C merkezli çember $[CB$ ışınını X noktasında kesiyor. K noktasından geçen ve BC ye paralel olan doğru ile AX doğrusu U noktasında kesişiyor. IU ve BC doğruları P noktasında kesişsin. PY doğrusu iç teğet çembere Y noktasında teğettir. D, E, F, Y noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

4 Bir etkinliğe katılan n öğrenciden hiçbiri aynı yaşta değildir. Her öğrencinin en az bir öğrenci ile el sıkıştığı ve bu öğrencinin diğerlerinden küçük yaşta olan hiçbir öğrenci ile el sıkışmadığı bilinmektedir. n'nin alabileceği tüm olası değerleri bulunuz.

5 a, b, c reel sayılar ve $a + b + c = 3$ sağlanıyorsa

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca)$$

olduğunu gösteriniz.

6

$$\frac{4m^2n^2 - 1}{(m^2 - n^2)^2}$$

ifadesini tam sayı yapan farklı (m, n) pozitif tamsayı ikilisinin bulunmayacağını gösteriniz.

7 a gerçel bir sayı olmak üzere; her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(xy + f(y)) = f(x)y + a$ eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sayısını a ya bağlı olarak bulunuz.

8 ABC üçgeninde, B ve C noktalarından geçen açıortaylar sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarını D ve E noktalarında kesiyor. I_c, $[AB]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi olsun ve F $[BI_c]$ nin orta noktası olsun. $|CF|^2 = |CE|^2 + |DF|^2$ ise, ABC üçgeninin eşkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

9 S, düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan ve herhangi dördü çemberdeş olmayan sonlu sayıdaki nokta kümesi olsun. Bütün kırmızı noktaları içeren ve hiçbir beyaz noktayı içermeyen bir çember varsa, S kümesinin bütün noktaları için yapılan kırmızı ve beyaz renklendirmeye *ayrık renklendirme* diyelim. Her bir S kümesi için *ayrık renklendirmelerin* sayısını belirleyiniz.

59. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2018

1 Her a, b tam sayısı için $n^2 + an + b$ sayısının en az 2018 farklı pozitif böleni olacak şekilde bir n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

2 Her x, y gerçel sayıları için

$$f(xf(y) + y^2) = f((x + y)^2) - xf(x)$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten fonksiyonları bulunuz.

3 Bir emekli dil bilimci (E.D.B.), ilk hamlede tamamen farklı n harften oluşan bir kelime yazar. Her hamlede, son kelimenin ilk i harfini ters çevirerek elde edilen kelimenin daha önce yazılmamış olduğu durumu kontrol eder ve bu yeni kelimeyi yazar. E.D.B.'nin $n!$ hamle yapabileceğini kanıtlayınız.

4 Dar açılı çeşitkenar ABC üçgeninde, $[BC]$ kenarının orta noktası D dir. E ve F sırasıyla, $[AC]$ ve $[AB]$ üzerinde noktalar olmak üzere; CDE ve AEF üçgenlerinin çevrel çemberleri $[AD]$ üzerindeki P noktasında kesişmektedir. EFP üçgeninin P deki açıortayı, EF yi Q noktasında kesiyor. AQP üçgeninin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğrunun BC ye dik olduğunu kanıtlayın.

5 25 öğrenciden oluşan bir gruptaki herhangi iki öğrenci arkadaşsa, bu gruba *takım* diyelim. Bir okuldaki herhangi bir öğrencinin en az bir takıma ait olduğu bilinmektedir, ancak herhangi iki öğrenci arkadaşlıklarını sonlandırırsa en az bir öğrenci hiçbir takıma dahil değildir. Bir takımdaki en az bir öğrencinin takım dışında hiç arkadaşı yoksa bu takıma *özel* diyelim. Herhangi iki arkadaşın mutlaka bir özel takıma dahil olduğunu gösteriniz.

6 $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ gerçel sayılar dizileri her $n = 0, 1, \ldots, 99$ için, ya

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n,$$

ya da

$$a_{n+1} = 2a_n^2 \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = a_n$$

özelliğini sağlar.

$a_{100} \le a_0$ ise, $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

7 a, b tam sayıları için, $\text{obeb}(a, b) = 1$ ise (a, b) koordinatlarına sahip olan noktaya **temel** diyelim. Köşeleri temel noktalardan oluşan bir çizgenin kenarları şu şekilde çiziliyor:

(a_1, b_1) ve (a_2, b_2) arasında bir kenar olması için gerek ve yeter koşul, ($2a_1 = 2a_2 \in \{b_1 - b_2, b_2 - b_1\}$ veya $2b_1 = 2b_2 \in \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$) dir.

Geriye kalan çizge bir orman olacak şekilde çizgenin bazı kenarları siliniyor. En az kaç kenar silinmelidir ki bu orman elde edilsin? Böyle bir ormanda en az kaç ağaç vardır?

8 $m \ge 3$, n ve $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tam sayılar olmak üzere; her $2 \le i \le m - 1$ sayısı için $x_{i+1} - x_i \equiv x_i - x_{i-1} \pmod{n}$ ise, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ m-lisine $\bmod n$ de bir aritmetik dizi diyelim. $p \ge 5$ asal bir sayı ve $1 < a < p-1$ bir tamsayı olsun. a nın pozitif üslerinin p ye bölünmesi sonucu elde edilen kalanların kümesi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ kümesinin bir permütasyonu $\pmod{p}$ üzerinde bir aritmetik dizi ise, $k = p-1$ olduğunu gösteriniz.

9 Bir T üçgeni ve bir d doğrusu için, düzlemde bir noktadan T nin kenarlarına çizilen dikmelerin ayaklarının hepsi d üzerindeyse, bu durumda d, T yi odaklar deriz. T_1 i odaklayan doğrular kümesi ile T_2 yi odaklayan doğrular kümesi aynıysa, bu durumda T_1 ve T_2 denktir diyelim. Herhangi bir üçgen için, düzlemde ona denk olan tam olarak bir eşkenar üçgen olduğunu kanıtlayınız.

60. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2019

1 2019 torbanın her birinde $1, 2, \ldots, 2019$ sayılarıyla numaralandırılmış ve toplam ağırlıkları $1kg$ olan 2019 taş bulunuyor. Bu koşulları sağlayan her durumda ağılıkları toplamı en az $1kg$ olan ve herhangi ikisi farklı numaralı ve farklı kutlularda bulunan birkaç taş en az k farklı şekilde seçilebiliyorsa, $k$nin alabileceği en büyük değer nedir?

2 Bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tam sayı dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (n+2)a_{n+1} - a_n^2 - na_n$$

eşitliğini sağlıyor. Buna göre

a) Bu dizinin en az bir terimini bölen asal sayılar kümesinin sonlu olmadığını kanıtlayınız.

b) Bu dizinin hiçbir terimini bölmeyen 3 farklı asal sayı bulunuz.

3 $|AB| > |AC|$ olan bir ABC üçgeninde A dan BC ye indirilen yüksekliğin ayağı D, B ye ait iç açıortayın AD yi kestiği nokta K, B den CK ye indirilen dikmenin ayağı M ve BM ile AK nin kesişim noktası N olsun. N den geçip DM ye paralel olan doğru AC yi T de kestiğine göre BM nin $\widehat{TBC}$ açısının iç açıortayı olduğunu gösteriniz.

4 Bir n pozitif tamsayısı için, n'nin basamak sayısı b olmak üzere $r + l < b$ koşulunu sağlayan herhangi r ve l negatif olmayan tamsayıları için n'nin en soldaki l basamağının be en sağdaki r basamağının silinmesiyle elde edilen sayının her bir pozitif bölenine n'nin ***alt böleni*** deniyor.(Örneğin 143 sayısının alt bölenleri $1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14, 43$ ve 143'tür.) d bir pozitif tam sayı olmak üzere, d yi alt bölen olarak kabul etmeyen tam sayıların kümesi A_d ile gösterilsin. A_d'nin sonlu bir kümesi olmasını sağlayan tüm d pozitif tam sayılarını bulunuz.

5 Gerçel katsayılı ve sabit olmayan bir $P(x)$ polinomunun tüm kökleri gerçel sayılardır.

$$(P(x))^2 = P(Q(x))$$

eşitliğinin her x gerçel sayısı için sağlayan gerçel katsayılı bir $Q(x)$ polinomu bulunuyorsa, $P(x)$ polinomunun tüm köklerinin aynı olduğunu gösteriniz.

6 k bir pozitif sayı tam sayı olmak üzere,

$$n = 2k \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 1, \ldots, k-1, k\}$$

$$n = 2k+1 \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$$

olsun.Bir düzenek birkaç bilyeden ve bazı bilye ikililerini birleştiren kırmızı veya beyaz iplerden oluşuyor. Her bir bilye R_n kümesindeki sayılardan birinin, iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak biçimde yazılmasına ***iyi etiketleme*** diyelim. Her bir bilyeye R_n kümesindeki sayılardan birinin, beyaz bir iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak, kırmızı iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayılarının toplamı 0 olmayacak şekilde yazılmasına ***hassas etiketleme*** diyelim.

$n \geq 3$ olmak üzere, R_n ile iyi etiketlenebilen her düzenek R_m ile hassas etiketlenebiliyorsa, m nin alabileceği en küçük değer nedir?

7 $\angle ACB = 90°$ olan bir ABC dik üçgeninde C ye ait yükseklik ayağı D olsun. D noktasının AC ve BC doğrularına göre yansıması sırasıyla E ve F olsun. ECB ve FCA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere,

$$2|O_1O_2| = |AB|$$

olduğunu gösteriniz.

8 $p > 2$ bir asal sayı, $m > 1$ ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $\dfrac{m^{pn}-1}{m^n-1}$ bir asal sayı ise,

$$pn|(p-1)^n + 1$$

olduğunu gösteriniz.

9 x, y, z gerçel sayılar olmak üzere $y > 2z > 4x$ ve

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 15(xy^2 + yz^2 + zx^2) > 16(x^2y + y^2z + z^2x) + 2xyz$$

koşulları sağlanıyorsa $4x + y > 4z$ olduğunu kanıtlayınız.

61. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2020

1

$$\frac{a^3+b^3}{ab+4} = 2020$$

eşitliğini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

(Selim Bahadır)

2 $A_1A_2A_3A_4$ teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu p_1, köşegenlerinin uzunlukları toplamı k_1 ve $B_1B_2B_3B_4$ teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu p_2, köşegenlerinin uzunlukları toplamı k_2 olmak üzere

$$p_1^2 + p_2^2 = (k_1 + k_2)^2$$

ise $A_1A_2A_3A_4$ ve $B_1B_2B_3B_4$ dörtgenlerinin eş kareler olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

3 66 cücenin toplam 111 kavuğu vardır. Kavuklardan her biri bir cüceye aittir ve belirli 66 renkten birine boyalıdır. Bu cücelerin her birinin kendine ait bir kavuğu giyerek katıldığı şenlikler düzenleniyor. Şenliklerin hiçbirinde aynı renkli kavuk giyen iki cüce bulunmamaktadır. Şenliklerin herhangi ikisi için bu şenliklerde farklı renkte kavuk giyen en az bir cüce bulunmaktadır. Düzenlenen şenlik sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

(Azer Kerimov)

4 $\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesi gösteriliyor. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olmak üzere her $\ell \in \mathbb{Z}^+$ için f_ℓ ile $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ tane}}$ bileşke fonksiyonu gösteriliyor. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(n-1)^{2020} < \prod_{\ell=1}^{2020} f_\ell(n) < n^{2020} + n^{2019}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Şahin Emrah)

5 Farklı isimli öğrencilerden oluşan bir sınıfta en az bir arkadaş ikilisi bulunmaktadır. Öğrencilerin bazılarından oluşan bir sıralı listedeki öğrenciler sırayla kalkıp başlangıçta boş olan tahtaya o an tahtada yazılı olmayan bütün sınıf arkadaşlarının isimlerini yazıyor. Listedeki her öğrenci en az bir ismi tahtaya yazdıysa ve en az bir arkadaşa sahip her öğrencinin ismi süreç sonunda tahtada yazılıysa, bu sıralı listeye bir *altın liste* diyelim. Çift sayıda öğrenciden oluşan bir altın listenin bulunduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

6 ABC üçgeninin AB kenarı üzerinde D ve AC kenarı üzerinde E noktaları $DE \parallel BC$ olacak şekilde veriliyor. BE ile CD nin kesiştiği nokta P, (APD) nin (BCD) yi ikinci kez kestiği nokta M, (APE) nin (BCE) yi ikinci kez kestiği nokta N olsun. M ve N den geçip BC ye teğet olan çember ω olsun. ω ya M de ve N de teğet olan doğruların AP üzerinde kesiştiklerini gösteriniz.

Not: (XYZ) ile XYZ üçgeninin çevrel çemberi gösteriliyor.

(Melih Üçer)

7 Bir çember üzerinde $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ noktaları $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$ olacak şekilde veriliyor. Aynı çember üzerindeki bir M noktası için MA_1 ile B_2C_2 nin kesişimi X, MB_1 ile A_2C_2 nin kesişimi Y, MC_1 ile A_2B_2 nin kesişimi Z olsun. X, Y, Z nin doğrusal olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

8 $0 < x, y, z < 1$ eşitsizliğini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

9 a, n pozitif tam sayıları için

$$x_1x_2\cdots x_{10} \equiv a \pmod{n}$$

denkliğini sağlayan n modunda farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ tam sayı 10-lularının sayısı $f(a, n)$ ile gösteriliyor. a ve b verilmiş pozitif tam sayılar olmak üzere,

(a) $\dfrac{f(a, cn)}{f(b, cn)}$ oranının her n pozitif tam sayısı için aynı değere eşit olmasını sağlayan bir c pozitif tam sayısı bulunduğunu gösteriniz.

(b) Böyle en küçük c nin 27 olmasını sağlayan tüm (a, b) ikililerini bulunuz.

(Melih Üçer)

62. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2021

1 n bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\frac{20 \cdot 5^n - 2}{3^n + 47}$$

ifadesinin tam sayı olmadığını gösteriniz.

2 Bir okuldaki öğrencilerin herhangi üçü için bu üç öğrenci ile de arkadaş olan en az bir öğrenci bulunmaktadır. Arkadaş olan herhangi iki öğrencinin herhangi iki ortak arkadaşı da arkadaştır. Bu okuldaki öğrencileri boş olmayan iki gruba, farklı gruplarda yer alan herhangi iki öğrenci arkadaş olacak şekilde ayırmak mümkün değildir. Buna göre, bu okulda arkadaş olmayan iki öğrencinin hep aynı sayıda ortak arkadaşa sahip olduğunu gösteriniz.

(Not: Bir öğrenci kendisi ile arkadaş sayılmaktadır.)

3 Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde, BC doğrusuna göre A ile farklı tarafta yer alan bir D noktası verilmiştir. ABC ve ADC üçgenlerinin iç bölgelerinin kesişiminde bulunan bir E noktası $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{BCE})$ olacak şekilde alınıyor. ADE üçgeninin çevrel çemberinin AB doğrusu ile ikinci kesişim noktası K olsun. EK ve BC doğrularının kesişimi L noktası, EC ve AD doğrularının kesişimi M noktası, BM ve DL doğrularının kesişimi ise N noktası olsun.

$$m(\widehat{NEL}) = m(\widehat{NDE})$$

olduğunu gösteriniz.

4 28 tür balığın satıldığı bir balık pazarında 28 balık satıcısı vardır. Her satıcıda her balık türünün sadece Akdeniz'den geleni ya da Karadeniz'den geleni bulunmaktadır. k kişiden her biri, her türden bir balık olmak üzere her satıcıdan bir balık almıştır. Herhangi iki kişi en az bir balık türü için o türün farklı denizlerden gelen balıklarını aldıysa, k en fazla kaç olabilir?

5 Çeşitkenar bir ABC üçgeninin çevrel çemberi ile $[BC]$ nin orta dikmesinin kesişim noktaları M ve N olmak üzere, $[AM]$ ve $[AN]$ nin orta noktaları K ve L olsun. ABK ve ABL üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AC doğrusu ile ikinci kesişim noktaları sırasıyla D ve E, ACK ve ACL üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AB doğrusu ile ikinci kesişim noktaları sırasıyla F ve G olsun. DF, EG ve MN doğrularının noktadaş olduğunu ispatlayınız.

6 Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)^2} = \frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$$

ve her $i = 1, 2, \cdots, n$ için $i \leq x_i \leq 2i$ koşullarını sağlayan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gerçel sayıları vardır?

7 Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi ω ve iç teğet çemberinin merkezi I olsun. A ya ait dış açıortayın ω yı ikinci kez kestiği noktadan ve I noktasından geçen doğrununun IBC nin çevrel çemberini ikinci kez kestiği nokta T_A olsun. T_B ve T_C noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. $T_AT_BT_C$ üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının ω nın yarıçapının iki katı olduğunu gösteriniz.

8 c bir gerçel sayı olmak üzere, tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f(x - f(y)) = f(x - y) + c(f(x) - f(y))$$

eşitliğini sağlayan ve sabit olmayan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunuyorsa,

(a) c nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

(b) f fonksiyonu periyodik olabilir mi?

9 Hangi (k, n) pozitif tam sayı ikilileri için

$$\left| \left\{ a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq (nk)!,\ obeb\left(\binom{a}{k}, n \right) = 1 \right\} \right| = \frac{(nk)!}{6}$$

eşitliği sağlanır?

63. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2022

1

$$2^p = 2^{q-2} + q!$$

eşitliğini sağlayan tüm (p, q) asal sayı ikililerini bulunuz.

2 Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için

$$f(x) + f(y) = \left(f(x+y) + \frac{1}{x+y}\right)(1 - xy + f(xy))$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 ABC üçgeninde I merkezli iç teğet çemberin BC, AC, AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla D, E, F dir. I dan geçen bir ℓ doğrusuna A, B, C den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla X, Y, Z olsun. DX, EY, FZ doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

4 Kesişmeyen ve farklı büyüklükte olan ω_1 ve ω_2 çemberi ℓ doğrusuna sırasıyla K ve L noktalarında, Γ çemberine ise sırasıyla M ve N noktalarında teğettir ve üç çember de ℓ nin aynı tarafında yer almaktadır. K ve L den geçen bir çemberin Γ ile kesişim noktaları A ve B; M ve N nin ℓ ye göre yansımaları ise sırasıyla R ve S olsun. A, B, R, S noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

5 Bir çember üzerinde eşit aralıklı 2022 nokta işaretlenmiştir. Uç noktaları işaretlenmiş noktalar olan farklı uzunluktaki k yayın hiçbiri bir diğerinin içinde olmadığına göre, k yayın hiçbiri bir diğerinin içinde olmadığına göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

6 P tam katsayılı bir polinom ve p bir asal olmak üzere $p \mid P(n)$ olmasını sağlayan bir n tam sayısı yoksa *P polinomu p asalını dışlıyor* diyelim. Tam olarak bir asalı dışlayan ve rasyonel kökü bulunmayan beşinci dereceden tam katsayılı bir polinom var mıdır?

7 x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

8 $|AB| < |BC| < |CA|$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I olmak üzere IBC, IAC, IAB üçgenlerinin diklik merkezleri sırasıyla H_A, H_B, H_C olsun. H_BH_C nin BC ile kesişimi K_A; I dan geçip H_BH_C ye dik olan doğrunun BC ile kesişimi ise L_A olsun. K_B, L_B, K_C, L_C noktaları da benzer şekilde tanımlandığında göre,

$$|K_AL_A| = |K_BL_B| + |K_CL_C|$$

olduğunu gösteriniz.

9 Döngü içermeyen, 2022 köşeli her çizgede köşelerden k tanesi öyle seçilebiliyor ki seçilen herhangi bir köşeden seçilen en çok iki köşeye kenar bulunuyor. Buna göre k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

64. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2023

1 $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun iç bölgesindeki bir T noktası için $\angle ATD = \angle CTB$ dir. AT doğrusu ACD nin çevrel çemberini ikinci kez K de, BT doğrusu BCD nin çevrel çemberini ikinci kez L de kesiyor. $KL \parallel AB$ olduğunu gösteriniz.

2 n öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak 2023 arkadaşı olup birbiriyle arkadaş olmayan herhangi iki öğrencinin tam olarak 2022 ortak arkadaşı vardır. Buna göre, n nin alabileceği tüm değerlerini bulunuz.

3 Her $n > 1$ tam sayısı için, n nin kendisi dışındaki en büyük böleni $f(n)$ olsun. Bir k pozitif tam sayısı için

$$n - f(n) = k$$

eşitliğini sağlayan n tam sayılarının sayısı 2023 olabilir mi?

4 k bir pozitif tamsayı olmak üzere, S kümesinin her elemanı k elemanlı bir kümedir. Her $A, B \in S$ ve $A \neq B$ için $A \triangle B \in S$ olduğu biliniyor. $|S| = 1023$ ve $|S| = 2023$ durumlarının her birinde k nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Not: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ dir.

5 Bir çeşitkenar ABC üçgeninde çevrel çemberin merkezi O, iç teğet çemberin merkezi I, diklik merkezi H olsun. O dan geçip IH ye I da teğet olan çember ile H den geçip IO ya I da teğet olan çemberin ikinci kesişimi M olsun. M noktasının ABC nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

6 a, b, c, d pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 6d^2)}{(a + b)^2(c + d)^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

7 Bir $\{a_1, a_2, \dots\}$ tam sayı dizisi, bir $f : \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu ve tüm i, j, n pozitif tam sayıları için

$$a_i \equiv a_j \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad i \equiv j \pmod{f(n)}$$

olmasını sağlıyorsa, bu diziye *iyi dizi* diyelim. Tüm iyi dizileri bulunuz.

8 Tahtada başlangıçta

$$* \frac{1}{x-1} * \frac{1}{x-2} * \frac{1}{x-4} \cdots * \frac{1}{x - 2^{2023}} = 0$$

yazılıdır. Aslı başlamak üzere, Aslı ve Zehra sırayla tahtadaki yıldızlardan birini silip yerine $+$ veya $-$ işaretlerinden birini yazıyor. Aslı, tüm yıldızların yerine işaretler konulduktan sonra oluşan denklemin gerçel çözümlerinin sayısının en çok kaç olmasını grantileyebilir?

9 Bir Γ çemberi üzerinde verilen sırada yer alan A, B, K, L, X noktaları için $\overset{\frown}{BK}$ ve $\overset{\frown}{KL}$ yayları eşit ölçüdedir. A dan geçip BK ye B de teğet olan çember KX doğru parçasını P ve Q da kesiyor. A dan geçip BL ye B de teğet olan çember ise BX doğru parçasını ikinci kez T de kesiyor. $\angle PTB = \angle XTQ$ olduğunu gösteriniz.

65. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Takım Seçme Sınavı - 2024

1 İç merkezi I, çevrel merkezi O olan bir ABC üçgeninde, AI'nın ABC'nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi P olsun. I'dan geçip AI'ya dik olan doğrunun BC ile kesişimi X olsun. X'ten IO'ya inen dikme ayağı Y olmak üzere, A, P, X ve Y'nin çembersel olduğunu gösteriniz.

2 Tüm $x, y \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları için

$$(f(x+y))^3 = (x+2y)f(x^2) + f(f(y))(x^2+3xy+y^2)$$

denklemini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

3 S, 12 elemandan oluşan bir küme olsun. $a, b \in S$ ve $\frac{b}{a}$ bir asal sayı olacak şekilde en fazla kaç (a, b) ikilisi olabilir?

4 a, b pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\frac{10^{a!} - 3^b + 1}{2^a}$$

ifadesinin tamkare olmasını sağlayan tüm (a, b) çiftlerini bulunuz.

5 Çeşitkenar bir ABC üçgenin diklik merkezi H ve ağırlık merkezi G'dir. Bu üçgenin sırasıyla AB ve AC kenarları üzerinde, B, C, A_b, A_c noktaları çembersel ve A_b, A_c, H noktaları doğrusal olacak şekilde A_b ve A_c noktaları alınıyor. A_bA_cA üçgeninin çevrel merkezi O_a olsun. O_b ve O_c de benzer şekilde tanımlanıyor. $O_aO_bO_c$ üçgeninin ağırlık merkezinin HG doğrusu üzerinde olduğunu gösteriniz.

6 Bir n pozitif tamsayısı ve $a_1, a_2 \cdots, a_n$ reel sayıları için $b_1, b_2 \cdots, b_{n+1}$ sayıları, $1 \le k \le n$ tamsayısı için $b_k = a_k + \max(a_{k+1}, a_{k+2})$ ve $b_{n+1} = b_1$ olacak şekilde tanımlanıyor. $a_{n+1} = a_1$ ve $a_{n+2} = a_2$ olmak üzere tüm $n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayıları için

$$\lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^{2024}\right] \ge \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1})^{2024}$$

olmasını sağlayan, en küçük λ değerini bulunuz.

7 $r \ge 2$ bir pozitif tamsayı olmak üzere, tüm pozitif tamsayılar r farklı renkten birine boyanıyor. (a, b) bir renk çifti olmak üzere, herhangi bir n pozitif tamsayısı için bu tamsayının a rengine boyanmış pozitif tam bölenlerinin sayısı ile b rengine boyanmış pozitif tam bölenlerinin sayısı arasındaki farkın en fazla 1 olmasını sağlayan tüm mümkün r değerlerini bulunuz.

8 Bir n tamsayısı için $\sigma(n)$, bu tamsayının pozitif tam bölenlerinin toplamını gösterir. Pozitif tamsayılardan oluşan bir $(a_i)_{(i=0)}^{\infty}$ dizisi, $a_0 = 1$ ve a_n sayısı

$$\sigma(a_0a_1 \cdots a_{n-1}) | \sigma(a_0a_1 \cdots a_n)$$

olmasını sağlayan 1'den büyük en küçük pozitif tamsayı olacak şekilde tanımlanıyor. Dizinin 2024^{2024} sayısını tam bölen elemanlarının sayısını bulunuz.

9 iç merkezi I ve çevrel merkezi O olan çeşitkenar bir ABC üçgeninde IO doğrusu BC, AC, AB doğrularını sırasıyla D, E, F noktalarında kesiyor. BE ve CF noktalarının kesişimi A_1 olsun. B_1 ve C_1 noktalarıda benzer şekilde tanımlanıyor. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin BC, AC, AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla X, Y, Z olsun. XA_1, YB_1 ve ZB_1 doğrularının IO doğrusuyla kesişimleri sırasıyla A_2, B_2 ve C_2 olsun. AA_2, BB_2 ve CC_2 çaplı çemberlerin ortak bir kesişim noktası olduğunu gösteriniz.