TÜBİTAK

Ulusal Matematik Olimpiyatı

2. Aşama Sınavı

Soruları ve Çözümleri

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

ÖNSÖZ

Lise düzeyinde olimpiyatlara hazırlanan hemen her öğrencinin sorduğu bir soru vardır:

Gireceğimiz ikinci aşama sınavının eski yıllarının soru ve çözümlerine neden ulaşamıyoruz?

Gerçekten de, İkinci Aşama'ya hazırlanan bir öğrencinin eski yıllardaki soruları çözmesi, hem genel olimpiyat tekniklerine hâkim olması, hem de sınavın kendine has tarzına alışması açısından önemlidir.

İşte elinizdeki bu doküman, bu konudaki eksikliği gidermek adına çok sayıda tecrübeli olimpiyatçı ve hocanın sarf ettiği iki yıllık titiz emek ve gayretlerinin bir sonucudur. Bu çalışma için kolları sıvadığımızda, eski yılların orijinal sorularına ulaşmakta bile çok zorluk çektik; yıllar var olan kaynakları eskitmiş, 90lı yılların soruları olimpiyat arşivlerinin derinliklerinde kalmıştı. Soruları elde ettikçe, bir yandan geomania.org forumunda ilk yılların soru ve çözümlerini toplarken, diğer taraftan matematikolimpiyati.com üzerinden 2000'li yıllarda yapılmış İkinci Aşamaların soru ve çözümlerini yüklemeye yönelik bir sistemle son yılların çözümlerini derledik.

Son olarak, elimizdeki soru ve çözümleri geomania.org da açtığımız "Yarışma Soruları" bölümüne aktardık. Doküman bu halini almadan önce, elimizdeki çözümleri tecrübeli olimpiyatçı arkadaşlarımızın yardımıyla titizce tashih ettik. Bu bağlamda başta Mehmet Efe Akengin ve geomania.org forumundan Lokman Gökçe olmak üzere, bu çalışmada emeği geçen tüm olimpiyatçı ve hocalarımıza gayretlerinden ötürü teşekkürü bir borç biliyoruz.

Bu emek ve gayretler sonucunda, Türkiye matematik olimpiyatları camiası, yıllardır hasretini çektiği bu dokümana kavuştu. Fakat ikinci aşama seferberliğimiz henüz nihayete ermedi. Göreceğiniz üzere, hala çok sayıda sorunun çözümü eksik veya geomania.org forumunda tashih edilmeyi bekliyor. Sorulara yapmış olduğunuz farklı çözümleri, çözümler hakkında düşünce, önerileri ve düzeltmelerinizi, lütfen geomania.org Yarışma Forumu üzerinden paylaşmanızı rica ediyoruz.

Bir başka çalışmada görüşmek dileğiyle,

geomania.org
Yarışma Soruları Ekibi

İçindekiler

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1988

1 Ardışık üç pozitif tamsayının çarpımının hiçbir zaman bir tamsayının birden büyük bir kuvvetine eşit olamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

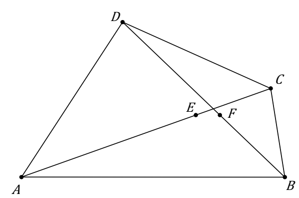
Sayıları $n, n+1$ ve $n+2$ ile gösterelim ve varsayalım ki bu sayıların çarpımı bir tam kuvvete eşit olsun.Ardışık sayılar aralarında asal olduklarından $(n, n+1) = (n+1, n+2) = 1$ ve dolayısıyla $(n+1, n(n+2)) = 1$ dir.Sayıların çarpımı tam kuvvete eşit olacağından $n+1$ ve $n(n+2)$ sayıları tam kuvvete eşit olmalıdır.

$n+1 = a^m$ ve $n(n+2) = b^m$, $(a, b, m \in Z, m \geq 2)$ olsun.

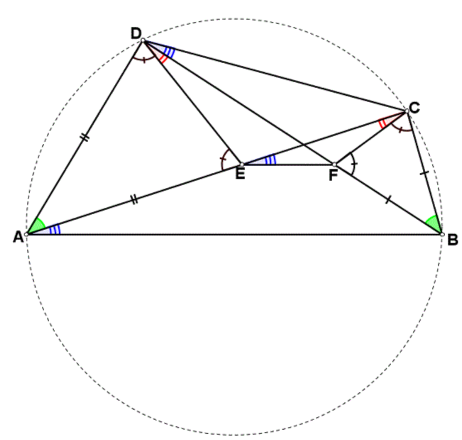
$(a^2)^m - b^m = (n+1)^2 - n(n+2)^2 = 1$ veya $a^2 = t$ dersek

$t^m - b^m = 1$ elde edilir.Ancak pozitif iki tam kuvvetin farkı daima 1 den büyük olacağından bu mümkün değildir.O halde ardışık üç tam sayının çarpımı tam kuvvet olamaz.

2 $ABCD$ kirişler dörtgeni ve $|AE| = |AD|$, $|BC| = |BF|$ dir. Buna göre, $EF \parallel AB$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm:



$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC})$ ve DAE, FBC ikizkenar üçgenlerinden $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCF})$ olur. $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB})$ ve $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCF}) \Longrightarrow m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{ECF})$ olur. Son bulduğumuz eşitlik bize $EDCF$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olduğunu söyler. Böylece $m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{CEF}) = m(\widehat{CAB}) \Longrightarrow EF \| AB$ olur.

3 $0 < q < 200$ ve $\dfrac{59}{80} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{45}{61}$ koşullarını sağlayan bir (p, q) tamsayı çifti bulunuz ve böyle tek bir (p, q) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Önce şunu fark edelim:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Önce soldaki eşitsizliği taraf tarafa çarpınca $ab + ad < ab + bc \Rightarrow ad < bc$,
Sonra sağdaki eşitsizliği taraf tarafa çarptığımızda $ad + cd < bc + cd \Rightarrow ad < bc$ elde ederiz ki bu da $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ den dolayı açık.
Bu mantıkla $\frac{59}{80} < \frac{59+45}{80+61} = \frac{106}{141} < \frac{45}{61}$ olacaktır.
İddia: $bc - ad = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c, d, p, q pozitif tam sayıları için

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$$

olabilmesi için

(a) $q \geq b + d$

(b) $q = b + d \Longrightarrow p = a + c$

(c) $q > b + d \Longrightarrow q \geq b + d + \min(b, d)$

olması gerekir.
İspat:

(a) Soldaki eşitsizlik $0 < \frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{bp - aq}{bq}$ şeklinde yazılabilir. Paydası bq olan en küçük kesir $\frac{1}{bq}$ olduğu için bir önceki eşitsizliği $0 < \frac{1}{bq} \leq \frac{bp - aq}{bq} = \frac{p}{q} - \frac{a}{b}$ olacaktır.

Aynılarını sağ taraf için yaparsak $0 < \frac{c}{d} - \frac{p}{q} = \frac{cq - dp}{dq}$, paydası dq olan en küçük kesirden $0 < \frac{1}{dq} \leq \frac{cq - dp}{dq} = \frac{c}{d} - \frac{p}{q}$ olur.

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak $\frac{1}{bq} + \frac{1}{dq} \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}$ elde ederiz. Biraz düzenlemeyle $\frac{b+d}{bdq} \leq \frac{1}{bd} \Rightarrow b + d \leq q$ olacaktır.

(b) $q = b+d$ yazıp eşitsizlikleri p ye göre $\frac{a(b+d)}{b} < p < \frac{c(b+d)}{d}$ şeklinde düzenleyip sol taraf için $ad = bc-1$ şeklinde sağ taraf için de $bc = ad + 1$ şeklinde değişken değiştirirsek

$$\frac{ab + bc - 1}{b} = a + c - \frac{1}{b} < p < \frac{ad + 1 + cd}{d} = a + c + \frac{1}{d}$$

elde ederiz. Son eşitsizliği şöyle yeniden yazabiliriz:

$$a + c - 1 < a + c - \frac{1}{b} < p < a + c + \frac{1}{d} < a + c + 1.$$

$a + c - 1$ ile $a + c + 1$ arasındaki tek tam sayı $a + c$ olacağından $q = b + d \Longrightarrow p = a + c$ bulunur.

(c) $\frac{p}{q}$ kesrini yine tam sayılı kesir olması için en 2 ile genişletmemiz gerekir. Bu durumda $q = b + d$ ise, genişletildiğinde $q' = 2b + 2d$ olacaktır. Bu kesrin haricinde $\frac{a}{b}$ ile $\frac{c}{d}$ arasında başka kesirler de var.

$$\frac{a}{b} < \frac{p_1}{q_1} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{c}{d}$$

$(b+d)c-(a+c)d=1$ ve $(a+c)b-(b+d)a=1$ olduğu için (a) şıkkı gereği $q_1 \geq b+(b+d)$ ve $q_2 \geq d+(b+d)$ olacaktır.

Bu durumda q', q_1, q_2 sayılarından en küçüğü $q = b+d+\min(b,d)$ olacağı için $q > b+d$ ise bir sonraki q tam sayısı $b+d+\min(b,d)$ ye eşit olacaktır.

■

Bu durumda $a=59$, $b=80$, $c=45$, $d=61$ için $bc-ad=3600-3599=1$ olduğu için söz konusu iki kesrin arasındaki $\dfrac{p}{q}$ kesrinde q en az $80+61=141$ oluyor. $q=141$ olduğunda da $p=59+45=106$ oluyor. Bir sonraki bu şartları sağlayan en küçük q değeri $q=80+61+61=202$ olacağından $0<q<200$ aralığında tek çözüm $(141,106)$ dır.

Not:

Soruda uyguladığımız lemma IberoAmerican 1988/2'de karşımıza çıkıyor.

Biraz farklısının daha genel hali de Lise 2. Aşama 1991/4'te sorulmuş.

$\boxed{4}$ 7 arkadaşı olan bir kimse, bir hafta boyunca her akşam 3 arkadaşını yemeğe çağırır. Farklı iki akşam yemeğe çağrılan gruplar birbirlerinden farklı olup; 7 arkadaştan her biri en az bir akşam yemeğe çağrılmaktadır. Bu koşulları sağlayan kaç değişik çağrı programı yapılabileceğini bulunuz.

Çözüm:

7 kişiden 3 lü gruplar $\binom{7}{3}=35$ farklı şekilde oluşturulur.

Bu 35 gruptan her gün biri çağırılırsa, sırayı gözetmeksizin $\binom{35}{7}$ farklı şekilde arkadaş grupları yemeğe çağırılabilir.

Bu 7 li gruptan bazıları 7 arkadaşın hepsini birden içermeyebilir.

1 arkadaşın içerilmediği 7 li grupların sayısını hesaplayalım:

İçerilmeyecek arkadaş $\binom{7}{1}$ farklı şekilde seçilir.

Kalan 6 arkadaş, $\binom{6}{3}=20$ farklı grup oluşturabilir. Bu 20 gruptan 7 grup $\binom{20}{7}$ farklı şekilde seçilir.

2 arkadaşın içerilmediği 7 li grupların sayısını hesaplayalım:

İçerilmeyecek arkadaşlar $\binom{7}{2}$ farklı şekilde seçilir.

Kalan 5 arkadaş, $\binom{5}{3}=10$ farklı grup oluşturabilir. Bu 10 gruptan 7 grup $\binom{10}{7}$ farklı şekilde seçilir.

3 veya daha çok arkadaşın içerilmediği durumda, kalan 4 veya daha az arkadaş $\binom{4}{3}=4$ veya daha az grup oluşturacağı için bunlardan 7 li grup oluşturulamaz.

O halde, İçerme-Dışarma ilkesine göre, sıra gözetmeksizin 7 arkadaş 3 lü gruplar halinde 7 gün boyunca her biri en az 1 kez çağrılmak üzere,

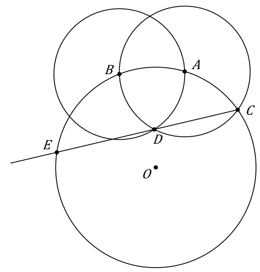
$$\binom{35}{7}-\binom{7}{1}\cdot\binom{20}{7}+\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{7}$$

farklı şekilde çağırılabilir.

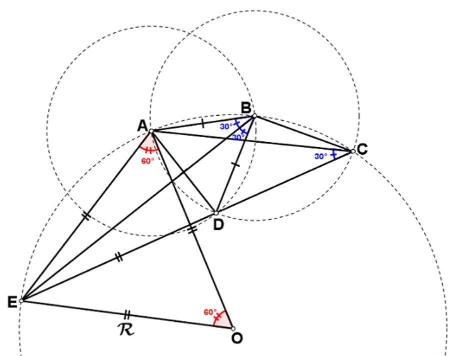
Çağırılan gruplar kendi aralarında 7! şekilde günlere dağıtılacağından, cevabımız

$$7!\cdot\left[\binom{35}{7}-\binom{7}{1}\cdot\binom{20}{7}+\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{7}\right].$$

$\boxed{5}$ O merkezli çemberin yarıçapı R'dir. A merkezli $|AB|$ yarıçaplı çember ile B merkezli $|BA|$ yarıçaplı çemberin D kesim noktası alınıyor. CD doğrusu, O merkezli çemberi E noktasında kestiğine göre $|ED|$ uzunluğunu R cinsinden hesaplayınız.



Çözüm:



ABD eşkenar üçgen ve B merkezli çemberden $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ \implies m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ olur. $m(\widehat{ACE}) = 30^\circ \implies m(\widehat{AOE}) = 60^\circ$ olur ve AOE eşkenar üçgen olur. ABD eşkenar üçgen ve BE açıortay olduğundan $AEDB$ deltoid olur ki bu bize $|ED| = R$ olduğunu söyler.

6

$$\sqrt{x - \frac{1987}{14}} + \sqrt{x - \frac{1988}{13}} + \sqrt{x - \frac{1989}{12}} = \sqrt{x - \frac{14}{1987}} + \sqrt{x - \frac{13}{1988}} + \sqrt{x - \frac{12}{1989}}$$

denkleminin tüm reel çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\sqrt{x - \frac{1987}{14}} < \sqrt{x - \frac{14}{1987}}$$
$$\sqrt{x - \frac{1988}{13}} < \sqrt{x - \frac{13}{1988}}$$
$$\sqrt{x - \frac{1989}{12}} < \sqrt{x - \frac{12}{1989}}$$

Taraf tarafa topladığımızda sol taraf sağ taraftan hep küçük olacağı için, denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

7 İki kişinin bir keki paylaşmasının her iki tarafı da hoşnut eden ve adil bir yöntemi şudur: Biri keki iki parçaya ayırır, diğeri parçalardan birini kendine seçer. Diğer bir deyişle keki $[0,1]$ aralığı gibi düşünürsek, birinci kişi $x_1 \in [0,1]$ seçer; ikinci kişi ise x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından birini seçer. (Burada her iki tarafın da "keksever" olduğu varsayıldığından, ikinci kişinin x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından daha büyük olanını seçeceği ve dolayısıyla birincinin de $x_1 = \dfrac{1}{2}$ seçimini yapacağı kolaylıkla görülür.) Üç keksever kişi için benzer bir paylaşma yöntemi bulabilir misiniz?

Çözüm:

Cake Cutting Problem diye bilinen soru sorulmuş. Literatürde bu konu **Fair Division** (Adil Paylaşım) olarak geçiyor.

Sorudaki örneğe, Divide and Choose (Böl ve Seç) yöntemi deniyor. Böl ve Seç yöntemi, adil paylaşımın birden fazla çeşidini barındırıyor. Birincisi, Proportional Fair Division (Orantılı Adil Paylaşım) ya da diğer ismiyle Simple Fair Division (Basit Adil Paylaşım). İkincisi, Envy-free (Kıskanılacak bir durumun olmadığı) paylaşım.

Sorudaki örnekte, keki bölen kişi, parçaların eşit olduğunu düşünüyor. Kendisi hangi parçayı alırsa alsın, kekin yarısını aldığını düşünüyor. Diğer parçanın kendisinin alacağı parçadan büyük olmadığını da düşündüğü için bir kıskançlık duymuyor.

İkinci kişi ise, seçtiği parçanın seçmediği parçadan küçük olmadığını düşündüğü için adil bir paylaşım olduğunu düşünüyor.

Üç kişilik durumda ise işler biraz karışıyor. Orantılı paylaşıma göre, bir kişi kekin üçte birini aldığını düşünmeli. Kıskanılacak bir durumun olmadığı paylaşıma göre ise, bir kişi, kendisindekinden daha büyük bir kekin olmadığına ikna olmalı. Açık şekilde, kıskanılacak bir durumun olmadığı paylaşımın aynı zamanda orantılı olduğu görülebilir.

Üç kişilik kek problemi için üç temel yaklaşım var:

(1) The Lone Divider (Tek Bölücü) Yöntemi: Orantılı paylaşım

(2) The Last Diminisher (Son Eksiltici) Yöntemi: Orantılı paylaşım

(3) Selfridge-Conway Yöntemi: Kıskanılacak bir durumun olmadığı paylaşım (hem de orantılı)

Selfridge-Conway Yöntemi ile çözelim.

Ahmet, Burak, Can keki paylaşan çocuklar olsun.

(1) Ahmet, keki kendisine göre A, B, C gibi 3 eşit parçaya bölsün.

(2) Burak, en büyük parçanın A, ondan sonraki en büyük parçanın B olduğunu düşünsün.

  (a) Eğer 2 tane en büyük varsa, Can 3 parçadan birini seçer. Burak en büyük olduğunu düşündüğünü seçer, Ahmet de son kalan parçayı seçer.

(3) Burak, A ile B yi yapıştırıp, kendince, $A - B$ parçasını iki eşit parçaya böler. A nın daha büyük olduğunu düşündüğü için, A dan B ile eşit olan parçaya $A1$, geri kalan A parçasına da $A2$ diyelim.

(4) Can, $A1 - B - C$ parçalarından istediğini alır.

(5) Burak, Can $A1$ i almadıysa, $A1$ i almak zorunda olacak şekilde geri kalan parçalardan birini alır.

(6) Böylelikle Ahmet, Burak'ın kesmediği parçalardan birini alır.

Buraya kadar, Ahmet, kendi böldüğü parçalardan birini aldığı için, hakkını aldığını düşünüyor. $A2$ parçası da henüz paylaşılmadığı için, kimsenin kendisinden daha fazla almadığından emin. Can da, $A1 - B - C$ parçalarından ilk seçimi yapan kendisi olduğu için, en büyüğünü aldığını düşünüyor. Burak da en büyük iki parça olduğunu düşündüğü için ve ikisinden birini aldığı için, o da kimsenin kendisinden büyük parçaya sahip olmadığını düşünüyor. Kıskanılacak bir durum yok, yani. Ama herkesin gözü, Burak'ın böldüğü $A2$ parçasında.

(1) Burak ile Can'dan, $A1$ parçasını almamış olan, $A2$ parçasını üç eşit parçaya böler.

(2) Burak ile Can'dan, $A1$ parçasını almış olanı, ilk seçimi yapar.

(3) Ahmet, ikinci seçimi yapar.

(4) $A2$ yi bölen son parçayı alır.

Can, $A1 + A2 = B = C$ olduğunu düşünüyordu. Onun için, $A2$ paylaşılırken, ilk seçimi $A1$ parçasını alanın yapmasına ses etmiyor. Çünkü $A2$ nin tamamını alsaydı bile, $A1 + A2$ toplamının kendisinin payından küçük olacağını biliyor. $A2$ yi bölen kişi, ilk turda en büyük parçalardan birini aldığı için, $A2$ yi de üç eşit parçaya böldüğü için ikinci tur sonunda kimsenin kendisinden daha fazla kek almadığından emin. Herkes, kendisinin en büyük parçayı aldığını düşünüyorsa, o zaman kıskanılacak bir durumun olmadığı bir paylaşım yapmış olduk.

Kaynak:

Fair Division-wikipedia

Adil Paylaşım-ekşi sözlük

Fair share-youtube

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1991

1 Beş ardışık tamsayının karelerinin toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm 1:

(Lokman GÖKÇE)

Ardışık tam sayılar $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ olsun. $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 = y^2$ denklemini sağlayan (x, y) tamsayı çiftlerinin olmadığını göstermeliyiz. $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 = 5x^2+10$ olduğundan $y^2 = 5x^2 + 10$ olup $y = 5n$ şeklindedir. Buna göre denklem $5n^2 = x^2 + 2$ haline dönüşür. Bu denklemi mod5 de inceleyelim. $x^2 \equiv 3 \pmod 5$ olur. Halbuki herhangi bir sayının karesinin mod5 deki değerleri $0, 1, 4$ olabilir. 3 değeri, mod5 de bir kare kalan olmadığından $5n^2 = x^2 + 2$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur.

Sonuç olarak, 5 ardışık tam sayının kareleri toplamı asla bir tam sayının karesi olarak yazılamaz.

Çözüm 2:

Çok benzer bir çözüm...

Ardışık tam sayılar $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ olsun. $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5(x^2+2)$

Bu sayının tam kare olabilmesi için $x^2 + 2$ sayısının içinde 5 çarpanı bulunmalıdır.Yani $x^2 + 2$ sayısının birler basamağı 0 veya 5 tir.Dolayısıyla x^2 sayısının birler basamağının 3 veya 8 olması gerekir fakat kare bir sayının birler basamağı 3 veya 8 olamaz.

Sonuç olarak, 5 ardışık tam sayının kareleri toplamı asla bir tam sayının karesi olarak yazılamaz.

2 Her terimi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin bir alt kümesine eşit olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $B_1, \dots, B_K$ dizisi oluşturuyoruz.

(1) $i \neq j \Rightarrow B_i \neq B_j$

(2) Her $i, j \in \{1, \dots, K\}$ için $B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

K nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Şöyle basit bir çözüm verebiliriz:

A kümesinin 1 i içeren alt kümelerinin sayısını bulalım. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin $2^7 = 128$ tane alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin her birinin içine 1 i eleman olarak eklersek, içinde 1 olan 128 farklı alt küme elde etmiş oluruz. Bu kümelerin hangi ikisini alırsak alalım kesişimlerinin boş kümeden farklı olacağı açıktır. Dolayısıyla $K = 128$ durumuna örnek bulmuş olduk.

Şimdi de daima $K \leq 128$ olacağını gösterelim. A kümesinin $2^8 = 256$ alt kümesi vardır. Herhangi bir B alt kümesini ve B nin tümleyeni olan $\overline{B} = A - B$ kümesini göz önüne alalım. Bu iki kümenin kesişimi boş küme olduğundan, B ile $\overline{B}$ kümelerinden en fazla biri $B_1, \dots, B_K$ dizisinde görülebilir. Örneğin $B = \{1, 2, 3\}$ kümesi B_i listesindeyse $\overline{B} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi bu listede bulunmamalıdır. Dolayısıyla $K \leq \dfrac{256}{2} = 128$ dir.

Sonuç olarak, K nın en büyük değerinin 128 olabileceğini anlarız.

3 x, y, z reel sayıları,

$$x + y = z - 1$$

$$xy = z^2 - 7z + 14$$

denklemlerini sağlıyorsa
$x^2+y^2 \le 8$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

(Lokman GÖKÇE)
Değişken sayısını azaltmak için ikinci denklemde $z = x+y+1$ koyalım: $xy = (x+y+1)^2 - 7(x+y+1)+14$ olup buradan

$$x^2+y^2-5(x+y)+xy+8=0 \tag{1}$$

denklemine ulaşırız. Burada $x=a+b$, $y=a-b$ değişken değiştirmesi yaparsak $x^2+y^2=2(a^2+b^2)$, $xy=a^2-b^2$ ve $x+y=2a$ olur. Bu değerleri (1) denkleminde yazarsak

$$3a^2+b^2+10a+8=0 \tag{2}$$

buluruz. Problemin bu aşamadan sonrasını analitik düzlemde düşünelim:
(2) denklemi bir elips belirtir. Bu elipsin simetri merkezi a ekseni üzerindedir ve asal-yedek eksenleri koordinat eksenlerine paraleldir. $\dfrac{4}{3} \le a \le 2$ olduğunu görmek kolaydır. (elipsin yatay a eksenini kestiği noktaları saptamak için $b=0$ yazın) Biz a^2+b^2 toplamının max değerini arıyoruz. $a^2+b^2=-2a^2+10a-8$ dersek $\dfrac{4}{3} \le a \le 2$ aralığında $f(a)=-2a^2+10a-8$ parabolü artandır ve $a_2=2$ için $x=y=2$ olup $x^2+y^2=8$ en büyük değerine ulaşır.

NOT: x^2+y^2 toplamının en küçük değeri istenseydi $a_1=\dfrac{4}{3}$ için $x=y=\dfrac{4}{3}$ olup $x^2+y^2=\dfrac{32}{9}$ elde edilirdi.

Çözüm 2:

(Burak VARICI)
$x+y=z-1$ ve $xy=z^2-7z+14$ verilerinden $x^2+y^2 \le 8$ ifadesini ispatlamamız isteniyor.

$$(x+y)^2 = z^2-2z+1 \ge 4xy = 4z^2-28z+56$$

$$\Rightarrow 3z^2-26z+55=(3z-11)(z-5) \le 0$$

ifadesinden $z \in \left[\frac{11}{3}, 5\right]$ buluruz. $(x+y)^2-2xy = x^2+y^2 = -z^2+12z-27=(9-z)(z-3)$ eşitliğinde $z=6-k$ şeklinde değişken değiştirirsek $\left(\frac{11}{3} \le z \le 5 \Rightarrow k \ge 1\right)$ $x^2+y^2=(3-k)(3+k)=9-k^2 \le 8$ bulunur.

$\boxed{4}$ a_i, b_i sayıları pozitif ve

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n}$$

ise;

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

eşitsizliklerini kanıtlayınız.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)
Tümevarım yöntemini kullanarak bu probleme basit bir çözüm vereceğiz:
Öncelikle $n=2$ için $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2}$ iken $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \dfrac{a_2}{b_2}$ olduğunu gösterelim. $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2}$ eşitsizliği $a_1b_2 < a_2b_1$ eşitsizliğine denktir.

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \iff a_1b_1 + a_1b_2 < a_1b_1 + a_2b_1 \iff a_1b_2 < a_2b_1$$

olduğundan eşitsizliğin sol kısmı doğrudur.

$$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \frac{a_2}{b_2} \iff a_2b_2 + a_1b_2 < a_2b_2 + a_2b_1 \iff a_1b_2 < a_2b_1$$

olduğundan eşitsizliğin sağ kısmı da doğrudur. Dolayısıyla $n = 2$ için iddia doğrudur.

Şimdi belli bir $n = k$ pozitif tamsayısı için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani a_i, b_i sayıları pozitif ve $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_k}{b_k}$ iken

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{b_1+b_2+\cdots+b_k} < \frac{a_k}{b_k} \tag{1}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. $n = k+1$ için iddiamızı ispatlayalım. Yani $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ iken $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ olduğunu ispat edeceğiz. Bunun için (1) deki kabulümüzden dolayı

$$\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{b_2+b_3+\cdots+b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \tag{2}$$

eşitsizliği de doğrudur. $a = a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}$, $b = b_2 + b_3 + \cdots + b_{k+1}$ diyelim.

$n = 2$ durumundaki eşitsizlikten dolayı

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a}{b_1+b} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}} < \frac{a}{b} = \frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{b_2+b_3+\cdots+b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

olup iddiamız $n = k+1$ için de doğrudur. Dolayısıyla tümevarım prensibi gereği her $n \geq 2$ tamsayısı için eşitsizlik doğrudur.

5 A, B ve C yarıçapı R olan bir çember üzerinde bulunan üç noktadır. ABC üçgeninin A açısına ait iç açıortay uzunluğu ile dış açıortay uzunluğu aynı ise

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 4R^2$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Genelliği bozmaksızın $|AB| > |AC|$ kabul edebiliriz. A açısına ait iç açırtay ve dış açıortay BC doğrusunu sırasıyla D ve E noktalarında kessin. $|AD| = |AE|$ verildiğinden ve $AD \perp AE$ olduğundan $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABC}) + 90^\circ$ dir. Dolayısıyla $\sin C = -\cos B$ olur. Şimdi ABC üçgeninde sinüs teoremi yazılırsa

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C} = 2R$$

olup $|AB|^2 + |AC|^2 = 4R^2 \cdot (\sin^2 B + \cos^2 B)$ yazılır. $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ temel trigonometrik özdeşliğinden

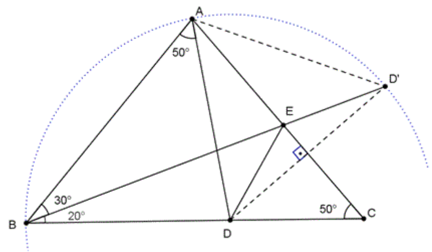
$$|AB|^2 + |AC|^2 = 4R^2$$

sonucuna ulaşırız.

6 ABC üçgeni A tepe açısı 80° olan bir ikizkenar üçgendir. $[BC]$ tabanı üzerinde bir D noktası ve $[AC]$ yan kenarı üzerinde bir E noktası o şekilde alınıyor ki $m(\widehat{ADB}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{AEB}) = 70^\circ$ oluyor. $m(\widehat{BED})$ açısı kaç derece olur?

Çözüm 1:

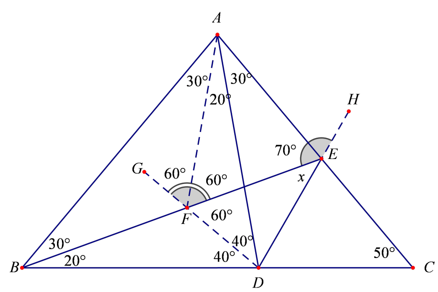
(Halil İbrahim AYANA)



$\triangle ADE$ üçgeninin AC kenarına göre simetriği $AD'E$ üçgeni olsun. $\angle ADD' = 60^\circ$ ve $AD = AD'$ olduğundan $\triangle ADD'$ eşkenardır. $BD = AD = DD'$ olduğundan merkezi D olan ve $B - A - D'$ noktalarından geçen bir çember vardır. Ayrıca $2\angle ABE = \angle ADD' = 60^\circ$ olduğundan $B - E - D'$ doğrusaldır. Bu durumda $\angle ED'D = \angle EDD' = 20^\circ$ olup $\angle BED = 40^\circ$ bulunur.

Çözüm 2:

(Lokman GÖKÇE)
Dış teğet çember merkezinin özelliğinden faydalanarak bir sentetik çözüm verelim:



Taban açılarının eşitliğinden dolayı ABD üçgeni ikizkenardır ve $|DA| = |DB|$ olur. $\widehat{BDA}$ nın açıortayı ile BE nin kesişimi F olsun. $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{DBF}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{FAB}) = m(\widehat{FBA}) = 30^\circ$ dir. Şekildeki gibi G ve H noktalarını işaretleyelim. Açı hesabından kolayca $m(\widehat{GFA}) = m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{EFD}) = 60^\circ$ bulunur.

Şimdi çözümün kritik aşamasına geldik. A noktasının DEF üçgeninin dış teğet çemberinin merkezi olduğunu görmeliyiz. Bunun için

(i) FA dış açıortay

(ii) $\widehat{DFE}$ ile $\widehat{DAE}$ arasında $m(\widehat{DAE}) = \dfrac{m(\widehat{DFE})}{2}$ bağıntısı sağlanıyor

olduğunu gözlemlemek yeterlidir. Dolayısıyla DEF üçgeninde DA bir iç açıortay olup $m(\widehat{BED}) = 40^\circ$ bulunur.

Çözüm 3:

Ek çizimleri bulmakta zorluk yaşayanlar için trigonometrik bir çözüm verebiliriz.

Çözüm [Lokman GÖKÇE]: Önce iki yardımcı teorem verelim.

Lemma 1. $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ dir.

Lemma 2 [Trigonometrik Bir Hile]. $x, y, a, b > 0°$ ve $x + y = a + b < 180°$ olsun.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

eşitliği sağlanıyorsa $x = a$ ve $y = b$ dir.

Bunların ispatlarının yapmak zor değildir. Şimdi ana

$m(\widehat{ADE}) = y$ olsun. ABD üçgeni ve dışındaki E noktası için trigonometrik Ceva teoremini uygulayalım.

$$\frac{\sin EAD}{\sin EAB} \cdot \frac{\sin EBA}{\sin EBD} \cdot \frac{\sin EDB}{\sin EDA} = 1$$

olup $\dfrac{\sin(80° + y)}{\sin y} = \dfrac{\sin 20° \cdot \sin 80°}{\sin 30° \cdot \sin 30°}$ olur. Sağ taraftaki ifadenin pay kısmına bakınca Lemma 1'deki eşitliği kullanabileceğimiz akla geliyor. Buna göre,

$$\frac{\sin(80° + y)}{\sin y} = \frac{\sqrt{3}/8}{(1/4)\sin 40°} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sin 40°} = \frac{\sin 120°}{\sin 40°}$$

elde edilir. Artık Lemma 2'de verdiğimiz trigonometrik hileyi kullanarak $y = 40°$ elde edilir. Böylelikle, $m(\widehat{BED}) = x = 40°$ sonucuna ulaşırız.

Çözüm 4:

ADE üçgeninin çevrel çemberi $[BE]$ yi F de kessin.

Buradaki hesap makinesine göre bu soru hem **4.6 nolu** nolu, hem de **3.7 nolu** Ceva Modeline aittir.

Dolayısıyla sorunun iki farklı genel hali vardır:

(1) $\angle DAE = \angle ABE = 30°$, $\angle DBE = \angle BAD - 30° = t$ ise $\angle BED = 2\angle DBE = 2t$ olduğunu gösteriniz.

(2) $\angle ABE = 3t$, $\angle DBE = 60° - 4t$, $\angle BAD = 30° + 2t$ ve $\angle ACB = 5t$ ise $\angle BED = 30° + t$ olduğunu gösteriniz.

Lokman Hoca'nın ilk çözümündeki adımları uygulayarak 1. soruyu çözebiliriz. Halil İbrahim Hoca'nın çözümü sorunun genel hali için çalışmamaktadır.

Burada Model 4.6' ya ait çözümler yer almakta. Linkte örneklenen soru, buradaki sorudaki bazı açıların yer değiştirilmiş hali.

Trigonometrik çözüm, açı yer değiştirmelerini önemsemediği için, bu soru için de doğrudan uygulanabilir.

Sentetik çözümdeki mantık bu soru için de uygulanabilir duruyor.

Çözüm 5:

Genel haline trigonometrik çözümler verelim:

$\angle DAE = \angle ABE = 30°$, $\angle DBE = \angle BAD - 30° = t$ ise $\angle BED = 2\angle DBE = 2t$ olduğunu gösteriniz.

$ABDE$ dörtgenine Trigonometrik Ceva birden farklı şekilde uygulanabilir.

Yöntem 1: (4 trigonometrik oran içerir)

$$\frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle EBD} \cdot \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle ADE} \cdot \frac{\sin \angle DEB}{\sin \angle BEA} \cdot \frac{\sin \angle EAD}{\sin \angle DAB} = 1 \tag{1}$$

$\angle BED = \alpha$ diyelim.

$\dfrac{\sin 30°}{\sin t} \cdot \dfrac{\sin(120° - 2t)}{\sin(60° + t - \alpha)} \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\sin(90° - t)} \cdot \dfrac{\sin 30°}{\sin(30° + t)} = 1$

$$\frac{1}{2\sin t} \cdot \frac{\sin(60^\circ + 2t)}{\sin(60^\circ + t - \alpha)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos t} \cdot \frac{1}{2\sin(30^\circ + t)} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + t - \alpha)} = \frac{\sin 2t}{\cos(30^\circ + t)} = \frac{\sin 2t}{\sin(60^\circ + t - 2t)}$$

Son eşitlikten $\alpha = 2t$ olduğu kolayca görülebilir.

Yöntem 2: (3 trigonometrik oran içerir)

$$\frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle EBD} \cdot \frac{\sin \angle BDE}{\sin \angle EDA} \cdot \frac{\sin \angle DAE}{\sin \angle EAB} = 1 \tag{2}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin t} \cdot \frac{\sin(180^\circ - t - \alpha)}{\sin(60^\circ + t - \alpha)} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin(60^\circ + t)} = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(t+\alpha)}{\sin(60^\circ + t - \alpha)} &= 4\sin t \sin(60^\circ + t) \\
&= \frac{4\sin t \sin(60^\circ + t)\sin(60^\circ - t)}{\sin(60^\circ - t)} \\
&= \frac{2\sin t(\cos 2t - \cos 120^\circ)}{\sin(60^\circ - t)} \\
&= \frac{\sin t(2\cos 2t + 1)}{\sin(60^\circ - t)} \\
&= \frac{\sin 3t - \sin t + \sin t}{\sin(60^\circ - t)} \\
&= \frac{\sin 3t}{\sin(60^\circ - t)} \\
&= \frac{\sin(t + 2t)}{\sin(60^\circ + t - 2t)}
\end{aligned}$$

Son eşitlikten $\alpha = 2t$ elde edilir.

Not:

Yöntem 1 daha fazla trigonometrik oran içerse de daha basit bir çözüme sahip.

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1992

1 Beş çiftin katıldığı bir partide, katılanların bir bölümü birbirleriyle el sıkışırlar. Hiç kimse doğal olarak ne kendi kendisiyle ne de eşiyle el sıkışır. Partiye katılanlardan biri, kendi dışındaki (eşi de dahil olmak üzere) dokuz kişiye kaç kişiyle el sıkışmış olduklarını sorar. Aldığı yanıtlara bakınca, bu dokuz kişi içinde eşit sayıda kişiyle el sıkışmış herhangi iki kişinin bulunmadığını görür. Diğerlerine kaç kişiyle sıkıştıklarını soran kişinin eşinin kaç kişiyle el sıkışmış olduğunu bulunuz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Çok hoş bir sonlu matematik sorusu. Çözümünü yapalım:

Kendi dışındaki kişilere kaç kişiyle tokalaştıklarını soran kişi X olsun. Diğer dokuz kişi de (tokalaşma sayıları itibariyle küçükten büyüğe) $A_1, A_2, \dots, A_9$ olsun. Bu 10 kişinin tokalaşma sayıları sırasıyla $x, a_1, a_2, \dots, a_9$ olsun. $i \neq j$ iken $a_i \neq a_j$ olduğu veriliyor. Ayrıca her $i = 1, 2, \dots, 9$ için $0 \leq a_i \leq 8$ dir. Bu eşitsizliklerden dolayı $a_i = i - 1$ olmak zorundadır.

$a_9 = 8$ ve $a_1 = 0$ olduğundan A_9'un elini sıktığı kişiler $X, A_2, \dots, A_8$ dir. Bu durumda A_9, A_1 hariç herkesle tokalaşmıştır. Dolayısıyla A_9 ile A_1 birbirinin eşidir.

$a_2 = 1$ dir. A_2 ile tokalaşan bu 1 kişi de A_9 olduğundan A_2 ile, A_9 dan başka tokalaşan kimse olmamıştır.

$a_8 = 7$ dir. Dolayısıyla A_8, A_1, A_2 (ve kendi kendiyle) tokalaşmamış olduğundan bu 2 kişi dışındaki herkesle tokalaşmıştır. A_8 in eşi A_1 olamayacağına göre A_2 olmak zorundadır. A_8 ile A_2 birbirinin eşidir.

Benzer düşünce ile devam edilirse A_7 ile A_3, A_6 ile A_4 birbirinin eşidir. Dolayısıyla X ile A_5 birbirinin eşi olmak zorundadır. Bizden istenen X in eşinin el sıkışma sayısı yani, $a_5 = 4$ değeridir.

2 a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Aritmetik - harmonik ortalama eşitsizliğini kullanacağız

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafının ispatını yapalım:

$\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{c+d}}$ olup $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{c+d} \geq \dfrac{4}{a+b+c+d}$ yazılır. Benzer şekilde $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+d} \geq \dfrac{4}{a+b+c+d}$ ve $\dfrac{1}{a+d} + \dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{4}{a+b+c+d}$ yazıp bu 3 eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d}$$

elde edilir.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafının ispatını yapalım:

$\dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ olduğundan $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ dir. Benzer şekilde

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{4}{a+c}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{d}\geq\dfrac{4}{a+d}$, $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{4}{b+c}$, $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}\geq\dfrac{4}{b+d}$, $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\geq\dfrac{4}{c+d}$ olup bu 6 eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\leq\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

3

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 361 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 0 \\ x-y+z &= 11 \end{aligned}$$

denklemlerinin tüm (x,y,z) reel çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

$xyz\neq 0$ olduğundan ikinci denklemi $xy+yz+zx=0$ şeklinde yazabiliriz. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ tam kare özdeşliğinden $(x+y+z)^2=361=19^2$ olur. Problemi iki durumda inceleyelim:

1. Durum: $x+y+z=19$ olsun. $x-y+z=11$ denkleminden $y=4$ ve $x+z=15$ bulunur. Bu değerleri $y(x+z)+xz=0$ denkleminde yazarsak $xz=-60$ bulunur. Dolayısıyla kökleri x ve z olan ikinci dereceden denklem $t^2-15t-60=0$ dır. Bu denklemi çözersek kökler $\dfrac{1}{2}(15\pm\sqrt{465})$ bulunur. x ile z yer değiştirebildiği için iki tane (x,y,z) çözüm üçlüsü elde edilir. Bunlar $\left(\dfrac{1}{2}(15+\sqrt{465}),4,\dfrac{1}{2}(15-\sqrt{465})\right)$ ve $\left(\dfrac{1}{2}(15-\sqrt{465}),4,\dfrac{1}{2}(15+\sqrt{465})\right)$

2. Durum: $x+y+z=-19$ olsun. $x-y+z=11$ denkleminden $y=-15$ ve $x+z=-4$ bulunur. Bu değerleri $y(x+z)+xz=0$ denkleminde yazarsak $xz=-60$ olur. Dolayısıyla kökleri x ve z olan ikinci dereceden denklem $t^2+4t-60=0$ dır. Bu denklemi çözersek kökler -10 ve 6 bulunur. Buradan elde edilen (x,y,z) çözüm üçlüleri $(-10,-15,6)$ ve $(6,-15,-10)$ olur.

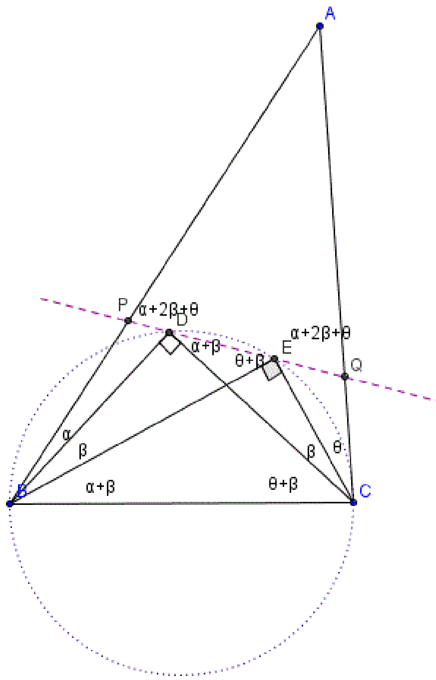
Sonuç olarak denklem sisteminin 4 tane çözüm reel üçlüsü vardır.

4 Bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayına CE dikmesi, C açısının içaçıortayına da BD dikmesi indiriliyor. DE doğrusu, $[AB]$ kenarını P noktasında ve $[AC]$ kenarını Q noktasında kestiğine göre

$$|AP|=|AQ|$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:



$\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ olduğundan $B - D - E - C$ çemberseldir.$\angle PBD = \alpha$, $\angle DBE{=}\beta$ ve $\angle QCE = \theta$ dersek çemberselikten; $\angle DCE = \beta$, $\angle DEB = \theta + \beta$, $\angle EDC = \alpha + \beta$ olur. Buradan $\angle APQ = \angle AQP = \alpha + 2\beta + \theta$ olup

$$|AP| = |AQ|$$

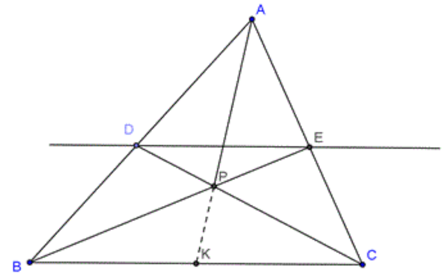
bulunur.

5 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarına paralel olan d doğrusu, AB ve AC doğrularını sıra ile D ve E noktalarında kesiyor. BE doğrusu ile CD doğrusunun kesim noktası P olduğuna göre, P noktasının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

$DE \parallel BC$ olduğundan

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow AD \cdot EC = AE \cdot DB \tag{1}$$



ABC üçgeninde Ceva teoreminden

$$AD \cdot BK \cdot EC = AE \cdot CK \cdot DB \tag{2}$$

bulunur.

(1) ve (2) eşitliklerinden $BK = BC$ bulunur.Bu durumda P noktalarının geometrik yeri ABC üçgeninin BC kenarınının kenarortayıdır.

6 Hiçbir n pozitif tam sayısı için

$$n^4 + 3n^2 + 1$$

sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Sıkıştırma yöntemiyle problemi kolayca çözebiliriz. Başlayalım: n ve m birer pozitif tamsayı olmak üzere $n^4 + 3n^2 + 1 = m^2$ olduğunu varsayalım.

$(n^2 + 1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1 < n^4 + 3n^2 + 1$ ve $(n^2 + 2)^2 = n^4 + 4n^2 + 4 > n^4 + 3n^2 + 1$ olduğundan $(n^2+1)^2 < n^4+3n^2+1 < (n^2+2)^2$ yazılır. $(n^2+1)^2 < m^2 < (n^2+2)^2$ eşitsizliğinden $n^2+1 < m < n^2+2$ bulunur. $n^2 + 1$ ve $n^2 + 2$ ardışık tamsayılarının arasından bir başka m tamsayısı olamaz.

Sonuç olarak, hiçbir n pozitif tamsayısı için $n^4 + 3n^2 + 1$ sayısı bir tam kare olamaz.

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1993

1 On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Son dört basamağın 1994 olması için $1994 \cdot 1993^n \equiv 1994 \pmod{10000}$ gerekli ve yeterlidir. $(1993, 10000) = 1$ olduğundan Euler Teoremi'ni uygulayabiliriz.

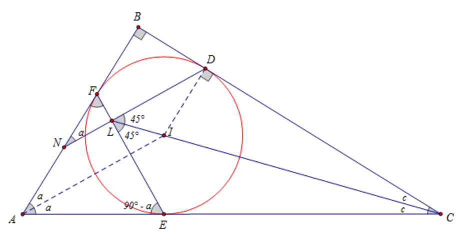
$\phi(10000) = (5^4 - 5^3) \cdot (2^4 - 2^3) = 4000$ olduğundan $n = 4000$ için $1993^n = 1993^{4000} \equiv 1 \pmod{10000}$ elde edilir. Bu denkliğin her iki yanı 1994 ile çarpılırsa $1994 \cdot 1993^{4000} \equiv 1994 \pmod{10000}$ bulunur.

NOT: k bir pozitif tamsayı olmak üzere $n = 4000k$ şeklindeki her tamsayı için $1994 \cdot 1993^n \equiv 1994 \pmod{10000}$ olduğundan, aranan özellikte sonsuz çoklukta n değeri olduğunu söyleyebiliriz.

2 Bir ABC $(m(\widehat{B}) = 90°)$ üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC], [CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D, E ve F noktalarında değiyor. $[CI \cap [EF] = L$ ve $[DL \cap [AB] = N$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)



$|CD| = |CE|$ ve CI iç açıortay olduğundan $\triangle DCL \cong \triangle ECL$ (K-A-K eşliği) olup bu eşlikten dolayı $m(\widehat{NDB}) = m(\widehat{FEA})$ olur. Ayrıca $|AE| = |AF|$ olduğundan $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{FEA})$ dır. Bu açı eşitliklerinden dolayı $m(\widehat{NDB}) = m(\widehat{AFE})$ olup $BDLF$ bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $ND \perp FE$ dir. Açık olarak AFE ikizkenar üçgeninde $AI \perp FE$ dir. Böylece

$$AI \parallel ND$$

bulunur. Diğer taraftan $AN \perp BC$ ve $ID \perp BC$ olduğundan

$$AN \parallel ID$$

dir. $AIDN$ dörgeninde karşılıklı kenarlar paralel olduğundan bu dörtgen bir paralelkenardır ve paralel olan bu kenarlar eşit uzunluktadır.

Sonuç olarak, $|AI| = |ND|$ elde edilir.

3 n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \ldots, n\}$ olsun. $f : A \to A$ ve $\sigma : A \to A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \ldots, (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \ldots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f, σ 'ya göre "tek tepeli"dir diyeceğiz. S_σ ile σ'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesini gösterelim.

$n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$\sigma\left(\begin{smallmatrix}1\,2\,3\,4 & \cdots & n\\ 1\,2\,3\,4 & \cdots & n\end{smallmatrix}\right)$ ve $\pi\left(\begin{smallmatrix}1\,2\,3\,4\,5 & \cdots & n\\ 2\,1\,4\,3\,5 & \cdots & n\end{smallmatrix}\right)$ olsun. $(f \circ \sigma)$ nın ilk dört elemanı tek tepeli bir diziliş gösterecek. Bu dört sayıyı $a < b < c < d$ ile göstermek yerine $1 < 2 < 3 < 4$ ile gösterirsek, tek tepelilik özelliğini takip daha kolay olacaktır.

$$(1,4,3,2)\,(2,4,3,1)\,(3,4,2,1)\,(1,2,4,3)\,(1,3,4,2)\,(2,3,4,1)\,(1,2,3,4)\,(4,3,2,1)$$

Görüldüğü gibi 4 elemanla 8 farklı şekilde tek tepeli bir diziliş oluşturabiliyor.

$(f \circ \pi)$ fonksiyonunun bu ilk dört elemanı

$(4,3,2,3)$ $(4,2,1,3)$ $(4,3,1,2)$ $(2,1,3,4)$ $(3,1,2,4)$ $(3,2,1,4)$ $(2,1,4,3)$ $(3,4,1,2)$ şeklinde olacaktır. Bu durumda f, σ'ya göre tek tepeli iken; π'ye göre tek tepeli değildir. Bu durumda S_σ kümesinin hiçbir elemanı S_π kümesinde yer almaz. Yani $S_\sigma \cap S_\pi = \varnothing$ dır.

$\boxed{4}$ Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan herhangi x, y reel sayıları için

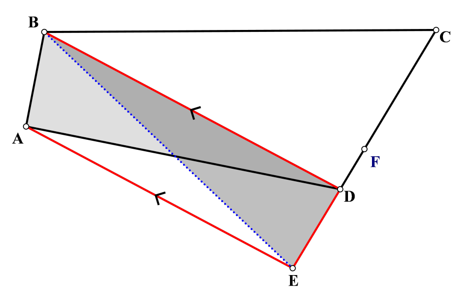
$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$

olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

$\boxed{5}$ Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.

Çözüm:

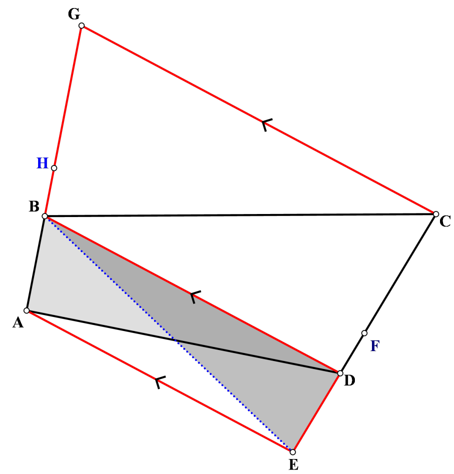
BD köşegenini çizelim. A dan geçen BD ye paralel olan doğru CD yi E de kessin.



$BDEA$ yamuğunda $[BAD] = [BED]$ olacağından

$[ABC] = [BAD] + [BDC] = [BED] + [BDC] = [BEC]$ olacaktır. F, $[EC]$ nin orta noktası olsun. $[BFC] = \dfrac{[BEC]}{2} = \dfrac{[ABC]}{2}$ olacağından BF doğrusu dörtgeni alanca iki eşit parçaya böler.

Peki ya $F \in [DE]$ olsaydı?



Bu durumda çizim yöntemimizi şöyle değiştirelim: BD köşegenini çizelim. A dan geçen BD ye paralel olan doğru CD yi E de kessin. C den geçen BD ye paralel olan doğru AB yi G de kessin. F ve H sırasıyla $[CE]$ ve $[AG]$ nin orta noktaları olsun. $FH \parallel BD \parallel AE \parallel GC$ olacaktır. AE ile CG doğrularından BD ye uzaklığı az olanı aldığımızda, örneğin şekilde AE, çizimi mümkün kılan orta nokta üçgen içerisinde kalacaktır.

$\boxed{6}$ Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \dots n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.

(i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$

(ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i}$.

(iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$

Bu durumda $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ denkliğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a^b \equiv 1 \pmod{b}$, $a^c \equiv 1 \pmod{c}$ ve $(b, c) = 1$ olduğunda $b \mid a^{bc} - 1$ ve $c \mid a^{bc} - 1$, dolayısıyla $bc \mid a^{bc} - 1$ olacaktır.

x, herhangi $1 \leq m \leq k$ tane farklı n_i sayısının çarpımı olduğunda n_i ler aralarında asal olduğu için $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ olacaktır.

α ve β, $1, 2, \dots, k$ kümesinin sırasıyla r ve s elemanlı permütasyonu olmak üzere;

$$n_{\alpha(1)} \cdot n_{\alpha(2)} \cdots n_{\alpha(r)} = n_{\beta(1)} \cdot n_{\beta(2)} \cdots n_{\beta(s)}$$

olması için $r = s$ ve $\alpha = \beta$ olması gerekir. Aksi halde sol ve sağ taraftaki aynı olan n_i ler sadeleştirildikten sonra geri kalan n_i lerden herhangi biri diğer taraftaki farklı çarpımı bölmek zorunda olduğundan aralarında asallık durumu bozulmuş olur.

O halde, n_i lerin çarpımlarından oluşan kümenin her elemanı x in bir değeri olabilir. Bu şekilde, (boş kümeyi çıkartalım) $2^k - 1$ adet x değeri vardır.

Bu kümenin bir elemanı b olsun. $[a - 1, b] = \ell$ ile $(a - 1)$ ile ℓ sayılarının okek ini gösterelim. $(a - 1) \mid a^\ell - 1$ ve $b \mid a^\ell - 1$ olduğu için $\ell \mid a^\ell - 1$ dir.

$[a - 1, n_i] = \ell_i$ olsun. ℓ_i sayılarını önceki kümedeki elemanlarla ve kendi aralarında farklılık açısından karşılaştıracağız.

Bu kümenin $\ell = c$ olacak şekilde bir c elemanı bulunamaz. Çünkü c nin $n_i \nmid b$ olan n_i çarpanı için $n_i \nmid (a-1)$ dolayısıyla da $n_i \nmid \ell$ olacaktır.

Bu kümenin bir d elemanı için $[a - 1, d] = u$ olsun. $b \neq d$ olduğunda $\ell = u$ olamaz. Yine benzer şekilde d nin $n_i \nmid b$ olan çarpanı için $n_i \nmid \ell$ olacaktır.

Bu durumda $2 \cdot (2^k - 1) = 2^{k+1} - 2$ adet x tam sayısı bulmuş olduk.

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1994

1 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm:

$\ldots (k-1)^2, (k-1)^2+1, \ldots, (k-1)^2+r, \ \ldots, k^2, \ldots$ dizisinin kökünü alalım.

$(k-1)+0.5 \leq \sqrt{(k-1)^2+r}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük r sayısını bulalım.

$k^2-k+\frac{1}{4} \leq k^2-2k+1+r \Rightarrow k-\frac{3}{4} \leq r \Rightarrow k \leq r$ elde edilir. Bu durumda k^2-k+1 den k^2+k ya kadar tüm terimlerin karekökü k olacaktır. Soruda verilen ifadeyi yeniden düzenlersek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} \frac{1}{a_n^3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} < 4$. Serinin değeri $\frac{\pi^2}{6}$; fakat integral ile en azından $1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 2$ den küçük olduğunu bulabiliriz.

Not: Literatürde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$ serisine Basel Problemi denmektedir.

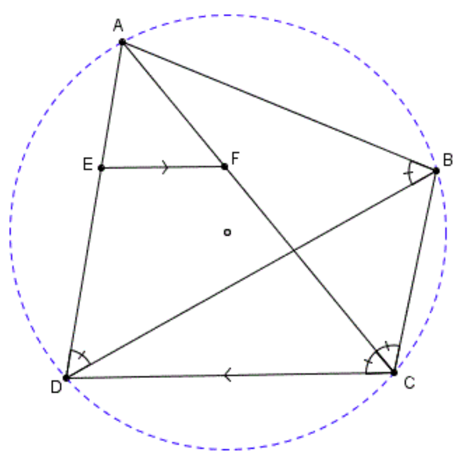
2 Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m(\widehat{BAD}) < 90^\circ$, $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$ dır. $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ köşegenini F noktasında kestiğine göre,

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Bir $ABCD$ kirişler dörtgeni ve $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$ olduğundan $|AB| = |AD|$ dir.ABC üçgeninde Thales teoremini uygularsak;



$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AF|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AC|} \ldots(1)$$

bulunur.(1) eşitliğinden yararlanarak

$$1 - \frac{|DE|}{|AB|} = 1 - \frac{|FC|}{|AC|} \Rightarrow |DE|.|AC| = |AB|.|FC|...(2)$$

bulunur.(2) eşitliği ile birlikte $|BD| = 2|DE|$ olduğundan

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$

olur.

Çözüm 2:

Açık şekilde $\dfrac{FC}{AC} = \dfrac{ED}{AD} = \dfrac{\frac{BD}{2}}{AB} \Rightarrow 2 = \dfrac{AC \cdot BD}{AB \cdot FC}$ olduğu görülür.

$\boxed{3}$ Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara "mavi nokta" dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya "kırmızı nokta"; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da "mor nokta" diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

$\boxed{4}$ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.

(a) $x \leq g(xy)$ ise $x \leq 2f(2y)$

(b) $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$

Çözüm:

Tanımlanan kümeye A_u diyelim.

a) $g(u)$, verilen kümenin alt sınırı olduğundan her $t > 0$ için

$$f(t) + \frac{u}{t} \geq g(u)$$

olacaktır. Dolayısıyla eğer $g(xy) \geq x$ ise her $t > 0$ için

$$f(t) + \frac{xy}{t} \geq g(xy) \geq x$$

olmalıdır. $t = 2y$ alırsak

$$f(2y) + \frac{x}{2} \geq x \implies 2f(2y) \geq x$$

bulunur.

b) Aksini kabul edelim. Yani $x \leq f(y)$ ve $g(xy) < x$ olsun. $g(xy)$ alt sınırların en büyüğü olduğundan x sayısı A_u'nun bir alt sınırı olamaz. Yani öyle bir t_0 vardır ki

$$f(t_0) + \frac{xy}{t_0} < x$$

Eğer $t_0 \geq y$ ise f artan olduğundan,

$$x \leq f(y) + \frac{xy}{t_0} \leq f(t_0) + \frac{xy}{t_0} < x$$

çelişkisi ortaya çıkacaktır. Eğer $y > t_0$ ise

$$x < f(t_0) + \frac{xy}{y} \leq f(t_0) + \frac{xy}{t_0} < x$$

çelişkisi olacaktır. Her durumda çelişki çıktığından baştaki kabulümüz yanlıştır. Eğer $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$ olmalıdır.

5 $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere

$$t^2 + 1 = s(s+1)$$

eşitliğini sağlayan tüm (s,t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm 1:

$$s^2 + s - (t^2+1) = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4(t^2+1) = T^2$$

$$\Rightarrow T^2 - 4t^2 = 5 \Rightarrow (T-2t)(T+2t) = 5$$

s ve t pozitif olduğu için

$$T + 2t = 5 \text{ ve } T - 2t = 1$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow s^2 + s - 2 = (s+2)(s-1) = 0$$

$$\Rightarrow (s,t) = (1,1)$$

Çözüm 2:

$t^2 + 1 = s.(s+1)$ ifadesini $t^2 = s^2 + s - 1$ şeklinde düşünürsek $s^2 < s^2 + s - 1$ olması için $0 < s - 1$, $1 < s$ olmalıdır.

$s^2 + s - 1 < s^2 + 2s + 1$ olması için ise $s - 1 < 2s + 1$, yani $-2 < s$ olmaldır. O halde $s > 1$ için

$s^2 < s^2 + s - 1 < s^2 + 2s + 1$, yani $(s)^2 < t^2 < (s+1)^2$ olacağından ardışık iki tam sayının karesi arasında başka bir tam sayının karesi bulunamaz. O halde $s \leq 1$ olmalıdır. Soruda verilen $s \geq 1$ ifadesinden dolayı $s = 1$ olur.

$t^2 + 1 = 1 \cdot 2$. Yani $t^2 = 1$, buradan ise $t \geq 1$ olduğu için çözüm kümemiz $\{(1,1)\}$ olarak bulunur.

6 Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerinde $|CK| = |BD|$, $[CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi I, $[BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre

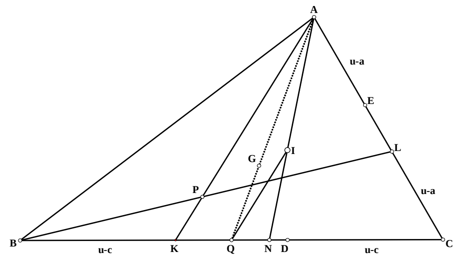
(a) $IQ \parallel AK$,

(b) $Alan(AIG) = Alan(QPG)$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

AN üçgenin iç açırotayı olsun. $BK = CD = u - c$, $AE = CL = u - a$,
$KQ = \left|\frac{a}{2} - (u - c)\right| = \frac{|c - b|}{2}$, $CN = \frac{ab}{b + c}$, $QN = \left|\frac{a}{2} - \frac{ab}{b + c}\right| = \frac{|ac - ab|}{2\,(b + c)} = \frac{a\,|c - b|}{2\,(b + c)}$ olacaktır.



Açıortay teoreminden $\frac{AI}{IN} = \frac{AC}{CN} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b + c}{a}$ ve $\frac{KQ}{QN} = \frac{\frac{|c-b|}{2}}{\frac{a\,|c-b|}{2\,(b+c)}} = \frac{b + c}{a}$ olduğu için $IQ \parallel AK$ dır.

AKC üçgeninde P, L, B noktaları için Menelaus uygularsak $\frac{AP}{PK} \cdot \frac{KB}{BC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1$ olacağından $\frac{AP}{PK} \cdot \frac{u - c}{a} \cdot \frac{(u - a)}{b - (u - a)} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PK} = \frac{a}{u - c} \cdot \frac{u - c}{u - a} = \frac{a}{u - a} \Rightarrow \frac{AP}{AK} = \frac{a}{u}$ elde edilir. $IQ \parallel AK$ olduğu için $\frac{IQ}{AK} = \frac{QN}{KN} = \frac{a}{a + b + c} = \frac{a}{2u}$ olur. Bu durumda $AP = 2 \cdot IQ$ elde edilir.

$3 \cdot [PGQ] = [APQ] = 2 \cdot [AQI] = 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot [AIG]}{2}\right) \Rightarrow [PQG] = [AGI]$ elde edilir.

Not:

İç teğet çemberin değme noktalarını köşelerle birleştiren doğrular üçgenin Gergonne noktasında kesişir. Dış teğet çemberlerin kenarlara değme noktalarını köşelerle birleştiren doğrular üçgenin Nagel noktasında kesişir. İç teğet çemberin bir kenara değdiği noktanın o kenarın orta noktasına göre simetriği dış teğet çemberin o kenara değdiği noktadır. Yani sorudaki P noktası, üçgenin Nagel noktasıdır. Nagel noktası, ağırlık merkezi ve iç merkez doğrusaldır. Bu doğruya Nagel doğrusu denir. $IG = \frac{1}{2}GP$ bağıntısı vardır. Bu bilgiler eşliğinde $\frac{GQ}{AG} = \frac{1}{2} = \frac{IG}{GP} \Rightarrow IQ \parallel AP$ ve yamuktaki alan özelliğinden $[PQG] = [AIG]$ olacaktır.

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1995

1 $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $2 \le m_1$ ve $2m_i \le m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$M = m_1 m_2 \cdots m_k$ olsun. $1, 2, \ldots, M$ kümesinin elemanlarından

$\dfrac{M}{m_1}$ tanesi $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ denkliğini sağlar.

$\dfrac{M}{m_2}$ tanesi $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ denkliğini sağlar.

$\vdots$

$\dfrac{M}{m_k}$ tanesi $x \equiv a_k \pmod{m_k}$ denkliğini sağlar.

$1, 2, \ldots, M$ kümesinin elemanlarından en az bir denkliği sağlayanların sayısı S olsun.

$$S \le \sum_{i=1}^{k} \frac{M}{m_i} \le M \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_1 \cdot 2^{i-1}} = \frac{M}{m_1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) < \frac{2M}{m_1} \le M$$

Bu durumda $S < M$ elde edildiği için $1, 2, \ldots, M$ kümesinden en az bir eleman denkliklerin hiçbirini sağlamaz. Bu elemana x_0 dersek, $i = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_i = M \cdot i + x_0$ sayılarından hiçbiri denklikleri sağlamayacak. ■

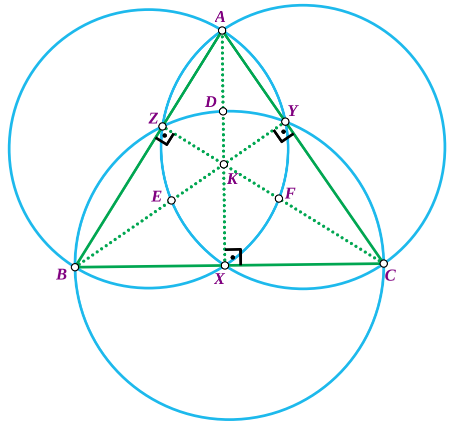
2 Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırasıyla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K, $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve $[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, $Alan(A\overset{\triangle}{B}C) = u$, $Alan(D\overset{\triangle}{B}C) = x$, $Alan(E\overset{\triangle}{C}A) = y$ ve $Alan(F\overset{\triangle}{A}B) = z$ ise,

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 1:

Kenarları çap kabul eden çemberler yüksekliklerin ayaklarından geçer. Yükseklikler bu çemberlerin ikişerli kuvvet eksenidir. Üç çemberin ikişerli kuvvet eksenleri tek bir noktada kesişir. Sorudaki kuvvet eksenleri yükseklik olduğu için K noktası da üçgenin diklik merkezidir.



$[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına ait yükseklik ayakları X, Y, Z olsun. $BX = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ ve $CX = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Öklid teoreminden

$$DX^2 = BX \cdot XC \Rightarrow [BDC]^2 = \frac{BC^2 \cdot DX^2}{4}$$
$$= \frac{BC^2 \cdot BX \cdot XC}{4} = \frac{(a^2+b^2-c^2)\cdot(a^2+c^2-b^2)}{16}$$
$$\Rightarrow 16 \cdot [BDC]^2 = a^4 - \left(b^2-c^2\right)^2.$$

Benzer şekilde $16 \cdot [ECA]^2 = b^4 - \left(a^2-c^2\right)^2$ ve $16 \cdot [FAB]^2 = c^4 - \left(a^2-b^2\right)^2$ elde edilir. $16 \cdot [ABC]^2 = 16 \cdot [BDC]^2 + 16 \cdot [ECA]^2 + 16 \cdot [FAB]^2$ olduğunu göstereceğiz.

$$16 \cdot [ABC]^2 = 16 \cdot u\,(u-a)\,(u-c)\,(u-b)$$
$$= (a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)$$
$$= \left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(b-a)^2\right)$$
$$= (a+b)^2c^2 - c^4 - (a+b)^2(b-a)^2 + c^2(b-a)^2$$
$$= c^2\left(a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab\right) - c^4 - \left(b^2-a^2\right)^2$$
$$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

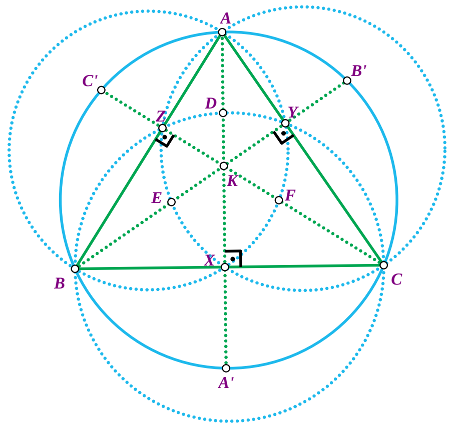
elde edilir. Diğer taraftan

$$16 \cdot [BDC]^2 + 16 \cdot [ECA]^2 + 16 \cdot [FAB]^2$$
$$= a^4 - \left(b^2-c^2\right)^2 + b^4 - \left(a^2-c^2\right)^2 + c^4 - \left(a^2-b^2\right)^2$$
$$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

çıkar. Bu durumda $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ eşitliği sağlanmış olur.

Çözüm 2:

$[BC], [CA], [AB]$ kenarlarına ait yükseklik ayakları X, Y, Z olsun. A, B, C den geçen yükseklikler (ABC) yi sırasıyla A', B', C' noktalarında kessin.



$KX = XA'$ olması gerektiği bilinen bir özellik (değilse, $\angle CBA' = \angle CAX = \angle KBC \Rightarrow BK = BA' \Rightarrow KX = XA'$). X noktasının (ABC) çemberine göre kuvveti $BX \cdot XC = AX \cdot XA' = AX \cdot KX$ olacaktır. Aynı zamanda Öklid teoreminden $BX \cdot XC = DX^2$ olduğunu biliyoruz. $DX^2 = AX \cdot KX$ eşitliğini elde etmiş olduk.

$\dfrac{[BDC]^2}{[ABC]\,[BKC]} = \dfrac{DX^2 \cdot BC^2}{AX \cdot BC \cdot KX \cdot BC} = \dfrac{DX^2}{AX \cdot KX} = 1 \Rightarrow [BDC]^2 = [ABC] \cdot [BKC]$ elde edilir. Benzer şekilde

$[ECA]^2 = [ABC] \cdot [AKC]$ ve $[FAB]^2 = [ABC] \cdot [BKA]$ olacağından taraf tarafa topladığımızda

$x^2 + y^2 + z^2 = [ABC] \cdot ([AKC] + [ABK] + [BCK]) = [ABC] \cdot [ABC] = u^2$ elde edilir.

3 $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq A$$

koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi verliyor.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \leq A$$

eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

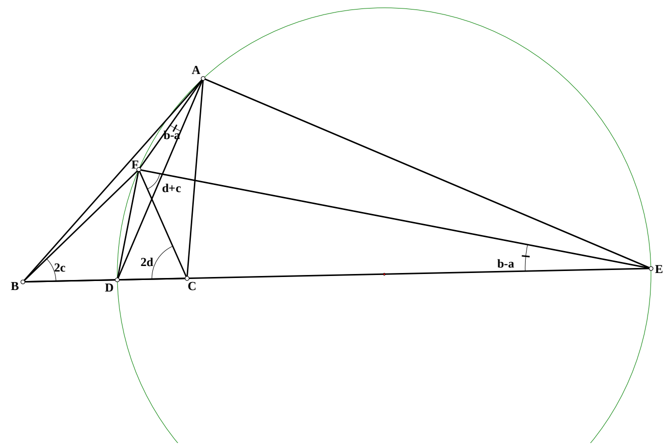
(b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \leq Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

4 Bir ABC ($|AB| \neq |AC|$) üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K, L, M ise, $|KL| = |KM|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 1:

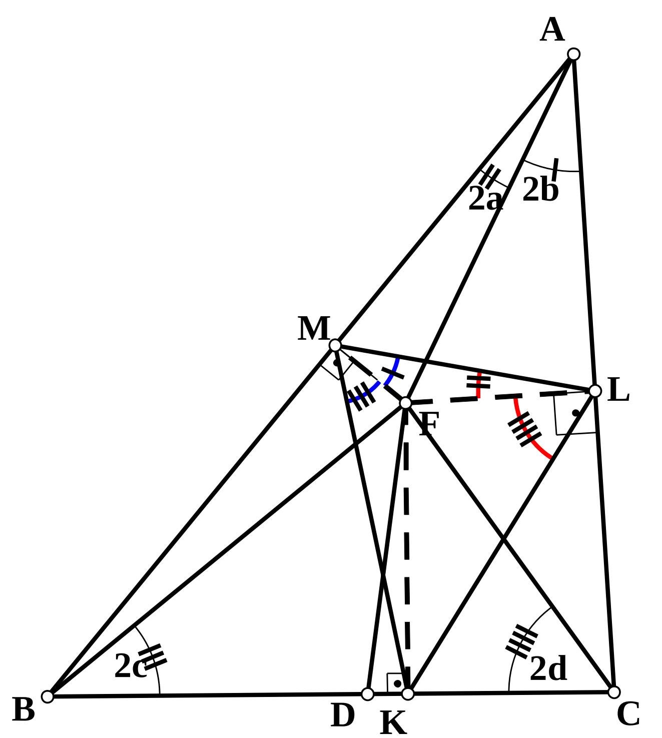
Söz konusu çember B ve C noktalarına olan uzaklıkları oranı $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} = k$ sabit olan noktalar kümesi, diğer bir adıyla Apollonius (Apolonyus) çemberidir. Çember üzerindeki her F noktası için $\dfrac{FB}{FC} =$

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} = k$ sağlanır. Diğer bir deyişle FBC üçgeninde FD bir iç açıortay ve FE bir dış açıortaydır. Bunu fark ettikten sonra sorunun geri kalanı için birçok farklı çözüm yapılabilir. Bu sorunun benzerleri IMO 1996/2, IMO 2010/4 da karşımıza çıkıyor.



$\angle BAF = 2a$, $\angle FAC = 2b$, $\angle FBC = 2c$, $\angle FCB = 2d$ olsun. FE dış açıortay olduğu için $\angle CFE = \dfrac{2c+2d}{2} = c + d \Rightarrow \angle FEB = 2d - (d + c) = d - c$ olur.

$\angle FAD = (a + b) - 2a = b - a$. $AFDE$ kirişler dörtgeninde $\angle FED = \angle FAD = b - a$ olduğundan $a + d = b + c$ elde edilir. Şimdi de soruda verilen dikmeleri indirelim. $KBMF$, $KCLF$ ve $LAMF$ dörtgenleri birer kirişler dörtgenidir.



$\angle MLF = \angle MAF = 2a$, $\angle FLK = \angle FCK = 2d \Rightarrow \angle MLK = 2a + 2d$. Benzer şekilde $\angle LMF = \angle LAF = 2b$, $\angle FMK = \angle FBK = 2c \Rightarrow \angle LMK = 2b + 2c$ elde edilir.

$a + d = b + c$ olduğunu daha önce göstermiştik. Bu durumda

$\angle LMK = \angle MLK \Rightarrow KL = KM$ olarak bulunur.

Çözüm 2:

$KFLC$ kirişler dörtgeninde

$$\frac{KL}{\sin\angle BCA} = 2\cdot R = FC \Rightarrow KL = FC\cdot\sin\angle BCA$$

, benzer şekilde $KFMB$ kirişler dörtgeninde

$$KM = FB\cdot\sin\angle ABC$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{KL}{KM} = \frac{FC\cdot\sin\angle BCA}{FB\cdot\sin\angle ABC} = \frac{FC}{FB}\cdot\frac{AB}{AC}$$

elde edilir. A ile F nin geometrik yerinden $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC}$ olduğu için $\frac{KL}{KM} = 1$ elde edilir.

5 A, boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A'ya ait elemanları toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\phi) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k, X'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \phi$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

6 $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m|n \iff f(m)|f(n)$$

koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1996

1 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif tam sayı dizisi olsun. Eğer her x pozitif tam sayısı için

$$x = \sum_{n=1}^{N} x_n A_n, \quad 0 \le x_n \le a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \text{ ve } x_N \ne 0$$

olacak şekilde tek bir N pozitif tam sayısı ve tek bir $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ tam sayı sıralı N lisi varsa, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağladığını gösteriniz:

(i) Bir n_0 için, $A_{n_0} = 1$ dir.

(ii) $k \ne j$ ise, $A_k \ne A_j$ dir.

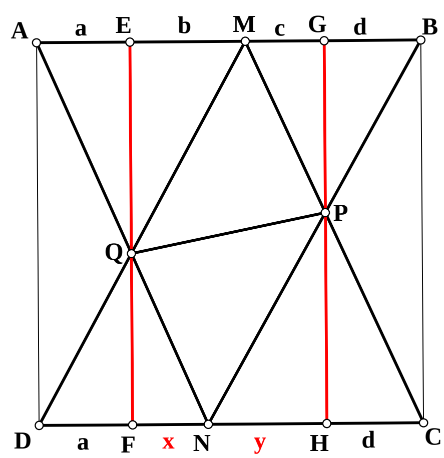
(iii) $A_k \le A_j$ ise, A_k, A_j yi böler.

2 Kenar uzunluğu 2 olan $ABCD$ karesinin, AB ve CD kenarları üzerinde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. CM ve BN doğruları P noktasında, AN ve MD doğruları Q noktasında kesişiyor. $|PQ| \ge 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(Lokman GÖKÇE)

Q nun AB üzerindeki izdüşümü E, CD üzerideki izdüşümü F; P nin AB üzerindeki izdüşümü G, CD üzerindeki izdüşümü H olsun. $AE = DF = a$, $EM = b$, $MG = c$, $BG = HC = d$ olsun.



$\dfrac{DF}{EM} = \dfrac{FN}{AE} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{FN}{a} \Rightarrow FN = \dfrac{a^2}{b}$ ve $\dfrac{HC}{MG} = \dfrac{NH}{BG} \Rightarrow \dfrac{d}{c} = \dfrac{NH}{d} \Rightarrow NH = \dfrac{d^2}{c}$ olur. Buradan da $EG = FH \Rightarrow b + c = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{d^2}{c}$ elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$(a+d)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{d}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c}\right)^2 \le \left(\frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c}\right)(b+c) = (b+c)^2 \Rightarrow a + d \le b + c$$

$$\Rightarrow a + d + b + c \le 2(b+c) \Rightarrow 1 \le b + c \le PQ$$

3 Gerçel eksen üzerinde n tane tam sayıyı boyuyoruz. k nin hangi pozitif tamsayı değerleri için aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{K}$ kapalı aralıklar kümesinin bulunduğunu belirleyiniz:

(i) $\mathcal{K}$ ya ait kapalı aralıkların birleşimi tüm boyalı tam sayıları içerir.

(ii) $\mathcal{K}$ ya ait farklı iki kapalı aralığın kesişimi boştur.

(iii) Her $I \in \mathcal{K}$ için a_I ile I ya ait tüm tam sayıların sayısını, b_I ile de boyalı olanları gösterirsek, $\dfrac{b_I}{a_I} = \dfrac{1}{k}$ olur.

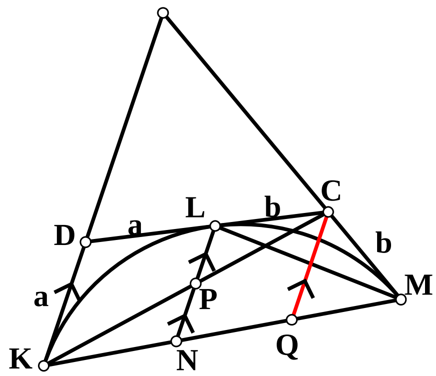
$\boxed{4}$ Bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$, $[DC]$ ve $[CB]$ kenarlarına teğet olan çemberin değme noktaları sırasıyla K, L, M ile gösteriliyor. L noktasından geçen ve AD doğrusuna paralel olan doğrunun; $[KM]$ nı kestiği nokta N ve $[LN]$ ile $[KC]$ nın kesiştiği nokta P ise,

$$|PL| = |PN|$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

KM üzerinde $CQ \parallel LN \parallel DK$ olacak şekilde Q noktası alalım. $\angle DKM = \angle CMK$ olduğu aşikar (Değilse doğruları uzatın, ikizkenar üçgeni görün.).



$CQ \parallel DK$ olduğu için $\angle DKM = \angle CQM = \angle CMQ$ olacağından $CM = CQ$ olur.

$DK = DL = a$ ve $LC = CM = CQ = b$ olsun. CDK ve CKQ üçgenlerinde paralelliğin gerektirdiği benzerlikleri yazarsak $\dfrac{PL}{DK} = \dfrac{LC}{DL} \Rightarrow \dfrac{PL}{a} = \dfrac{b}{a+b} \Rightarrow PL = \dfrac{ab}{a+b}$ ve

$\dfrac{PN}{CQ} = \dfrac{KN}{KQ} = \dfrac{DL}{DC} \Rightarrow \dfrac{PN}{b} = \dfrac{a}{a+b} \Rightarrow PN = \dfrac{ab}{a+b}$ olur.

$\boxed{5}$ Her n pozitif tam sayısı için

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

sayısının $n!$ ile bölündüğünü gösteriniz.

Çözüm:

$n!$ sayısındaki 2 lerin sayısı ile $M = \prod\limits_{k=0}^{n-1} 2^k \left(2^{n-k} - 1\right)$ sayısındaki 2 sayısını karşılaştıralım.

$n! = x \cdot 2^r \Rightarrow \max(r) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \cdots \leq n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = n.$

$M = \prod\limits_{k=0}^{n-1} 2^k \left(2^{n-k} - 1\right) = x \cdot 2^r \Rightarrow \max(r) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$

$n \geq 3$ için, $\frac{n(n-1)}{2} \geq n$ olacaktır. Yani $n \geq 3$ için, M sayısında $n!$ dekinden daha fazla (ya da eşit) 2 çarpanı var.

$M_{n=1} = 1 \Rightarrow 1! \mid 1$ ve $M_{n=2} = 6 \Rightarrow 2! \mid 6$ olduğu için, $n!$ sayısında M dekinden daha fazla 2 çarpanı yoktur.

Diğer $p > 2$ asal sayıları için de aynı sonuca varabiliyorsak $n! \mid M$ diyebiliriz.

$p > 2$ bir asal sayı olsun.

$n! = x \cdot p^r \Rightarrow \max(r) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.

Euler'in φ sinden, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olduğu için $M = (2^n - 1) \cdot \left(2^{n-1} - 1\right) \cdots \left(2^1 - 1\right) \prod\limits_{k=0}^{n-1} 2^k$ sayısının çarpanlarından $\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$ tanesi p ile bölünecek.

Benzer şekilde $p^i \mid M$ durumunu incelersek: $\varphi\left(p^i\right) = p^{i-1}(p-1) \Rightarrow 2^{p^{i-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^i}$ olduğu için M sayısının çarpanlarından $\left\lfloor \frac{n}{p^{i-1}(p-1)} \right\rfloor$ tanesi p^i ile bölünecek.

Bu durumda $M = x \cdot p^r \Rightarrow \max(r) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^{i-1}(p-1)} \right\rfloor$ olacaktır.

Her $i = 1, 2, \ldots$ için $\left\lfloor \frac{n}{p^{i-1}(p-1)} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{pi} \right\rfloor$ olduğu için M sayısındaki p çarpanlarının sayısı $n!$ sayısındaki p çarpanlarının sayısından az olmayacaktır. Bu durumda $n! \mid M$ dir.

6 $\mathbb{R}$ ile gerçel sayılar kümesini gösterelim. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x+y) > f(x)\,(1 + yf(x))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1997

1 $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 383$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm:

5 ile genişletirsek

$$\begin{aligned} 25x^2 - 30xy + 35y^2 &= 1915 \\ 25x^2 - 30xy + 9y^2 + 26y^2 &= 1915 - 26y^2 \\ (5x - 3y)^2 &= 1915 - 26y^2 \end{aligned}$$

Eşitliği mod3 te incelersek $y \equiv 0 \pmod 3$ elde ederiz.

Ayrıca $(5x - 3y)^2 = 1915 - 26y^2 \geq 0$ olacağı için $8 \geq |y| \geq 0$ dır. O halde deneyeceğimiz sayılar $y \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$ dan ibaret. mod4 te incelediğimizde geriye sadece $|y| = 3$ ihtimali kalıyor.

$y = 3$ için, $(5x - 9)^2 = 1915 - 26 \cdot 9 = 1681 \Rightarrow |5x - 9| = 41$ mutlak denkleminden çıkan sonuçlardan sadece biri tam sayı. O halde $x = 10$.

$y = -3$ için, $(5x + 9)^2 = 1915 - 26 \cdot 9 = 1681 \Rightarrow |5x + 9| = 41$ mutlak denkleminden çıkan sonuçlardan sadece biri tam sayı. O halde $x = -10$.

Sonuç olarak denklemin çözüm kümesi $\{(-10, -3), (10, 3)\}$.

2 Bir dışbükey $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesindeki herhangi bir F noktasının AB, BC, CD, DE ve EA doğrularına uzaklığı sırasıyla a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 ile gösteriliyor. Bu beşgenin A, B, C, D ve E açılarının içaçıortayları üzerinde, $|AF_1| = |AF|$, $|BF_2| = |BF|$, $|CF_3| = |CF|$, $|DF_4| = |DF|$ ve $|EF_5| = |EF|$ eşitlikleri sağlanacak F_1, F_2, F_3, F_4 ve F_5 noktaları alınıyor. F_1 in EA, F_2 nin AB, F_3 ün BC, F_4 ün CD ve F_5 in DE doğrusuna uzaklığı sırasıyla b_1, b_2, b_3, b_4 ve b_5 ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

$\angle EAB = 2\alpha$ ve $\angle FAE = \beta$ olsun.

$a_5 = AF \cdot \sin\beta$, $a_1 = AF \cdot \sin(2\alpha - \beta)$ ve $b_1 = AF \cdot \sin\alpha$ olacaktır.

$a_1 + a_5 = AF \cdot (\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta)) = AF \cdot (2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta)) = 2b_1 \cos(\alpha - \beta) \leq 2b_1$.

Benzer şekilde $1 \leq i \leq 4$ için de $a_i + a_{i+1} \leq 2b_{i+1}$ olacağı için taraf tarafa topladığımızda

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leq 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$

elde ederiz. ■

3 $n > 1$ tek, k de pozitif bir tam sayı olsun. n seçmen, k adaydan oluşan A kümesine ait bir üyeyi seçerken aşağıda tanımlanan "çoğunlukçu uzlaşı" sistemini kullanmaktadır. Buna göre, her seçmen, adayları kendi tercihine göre bir sütun halinde yukarıdan aşağıya doğru sıralar. Bu "oy sütunları" (herhangi bir sırayla) yan yana yazılarak $k \times n$ bir "oy matrisi" elde edilir.

$a \in A$ adayının oy matrisinin i. sırasında kaç kez geçtiğini a_i sayısı ile gösterelim; l_a tam sayısı da $\sum_{i=1}^{l} a_i > \frac{n}{2}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük l sayısı olsun. $\bar{l} = \min_{a \in A} l_a$ olmak üzere; $\{a \in A | l_a = \bar{l}\}$ kümesinin tek elemanlı olmasına yol açan oy matrislerine geçerli oy matrisleri diyeceğiz ve böyle her matris için, çoğunlukçu uzlaşıya göre yukarıdaki kümeye ait tek aday seçilmiş olacaktır.

Öte yandan, $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots \geq \omega_k \geq 0$ koşulunu sağlayan $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ gerçel sayılarına bir ağırlık sistemi; her geçerli oy matrisi için de, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i a_i$ sayısına a adayının toplam ağırlıklı puanı diyelim. Bir $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$

ağırlık sistemi, tüm geçerli oy matrisleri için, çoğunlukçu uzlaşıya göre seçilen adayın toplam ağırlıklı puanının diğer bütün adaylarınkinden büyük olmasına yol açıyorsa, bu ağırlık sistemi çoğunlukçu uzlaşıyı temsil ediyor diyeceğiz.

(a) $k = 3$ için, çoğunlukçu uzlaşıyı temsil eden bir ağırlık sisteminin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

(b) $k > 3$ ise, böyle bir ağırlık sisteminin bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm:

$n = 2m + 1$ olsun.

Her aday, oy matrisinde $2m + 1$ kez geçecektir.

a.

$k = 3$ için, $\bar{l} = 2$ olduğunda, a adayının birinci geldiğini, b adayının da ikinci olduğunu varsayalım. Tanım gereği $l_a = 2$ dir. İlk 2 sırada toplamda $4m + 2$ tercih yer alacağı ve a adayın en fazla $2m + 1$ oyu bu sırada yer alacağından, geri kalan 2 adaya ilk sırada $4m + 2 - (2m + 1) = 2m + 1$ oy kalacaktır. Güvercin yuvasına göre, bu adaylardan çok oy alanı, b, en az $\left\lceil \frac{2m+1}{2} \right\rceil = m + 1$ oy alacaktır. Bu durumda, bu aday için de $l_b = 2$ olacaktır. Bu durumda $\bar{l}$ tanımlı değildir. Demek ki, 3 aday olduğunda, $\bar{l} < 2$ olmalı.

$\bar{l} = 1$ için, a adayı birinci, b adayı da ikinci olsun.

	1	2	...	m	$m+1$	$m+2$	...	$2m+1$
w_1	a	a	a	a	a	b	b	b
w_2	b	b	b	b	b			
w_3						a	a	a

a adayının alabileceği en küçük toplam ağırlık; $(m + 1) w_1 + mw_3$ olacaktır.

b adayının alabileceği en büyük toplam ağırlık; $mw_1 + (m + 1) w_2$ olacaktır.

Bu oy matrisinin çoğunlukçu uzlaşıyı temsil etmesi için;

$$(m + 1) w_1 + mw_3 > mw_1 + (m + 1) w_2$$

olmalı. Biraz düzenlersek

$$w_1 - w_2 > m (w_2 - w_3)$$

elde ederiz. $w_1 > w_2 = w_3$ seçtiğimizde, yukarıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır. Demek ki, $k = 3$ için, çoğunlukçu uzlaşıyı temsil eden bir ağırlık sistemi bulunabiliyor.

b.

$k > 3$ için,

$\bar{l} = 1$ olduğunda

	1	2	...	m	$m+1$	$m+2$	...	$2m+1$
w_1	a	a	a	a	a	b	b	b
w_2	b	b	b	b	b			
w_3								
...								
w_k						a	a	a

$$(m + 1) w_1 + mw_k > mw_1 + (m + 1) w_2 \Rightarrow w_1 - w_2 > m (w_2 - w_k)$$

$\bar{l} = 2$ olduğunda,

$k = 4$ için:

İlk iki sırada yer alan toplam $4m+2$ oyun en fazla $3m$ tanesi birinci gelemeyen adaylara ait olmalı. Bu durumda, birinci gelen a adayının en az $m+2$ oyu ilk iki sırada yer almalı.

	1	2	...	m	$m+1$	$m+2$	...	$2m+1$
w_1	b	b	b	b	c	d	d	d
w_2	a	a	a	a	a	a	c	c
w_3					b	b	b	b
w_4							a	a

a adayı için en küçük toplam ağırlık ile, b adayı için en büyük toplam ağırlığı karşılaştırırsak,

$$(m+2)\,w_2+(m-1)\,w_4 > mw_1+(m+1)\,w_2 \Rightarrow w_2-w_4 > m\,(w_1-w_4)$$

elde ederiz. $\bar{l}=1$ ve $k=4$ durumunda $w_1-w_2 > m\,(w_2-w_4)$ olduğu için, bu iki eşitsizliği birleştirdiğimizde, $\frac{w_1-w_2}{m} > w_2-w_4 > m\,(w_1-w_4) \Rightarrow 1 \geq \frac{w_1-w_2}{w_1-w_4} > m^2$ olur. Bu da $m>1$ olan oy matrisleri için bir ağırlık sisteminin bulunmadığını gösterir.

$k>4$ için:

	1	2	...	m	$m+1$	$m+2$	...	$2m+1$
w_1	b	b	b	b	c	d	d	d
w_2	a	a	a	a	a		c	c
w_3					b	b	b	b
...								
w_k							a	a

$$(m+1)\,w_2+mw_k > mw_1+(m+1)\,w_3 \Rightarrow m\,(w_2-w_3) > m\,(w_1-w_k)-(w_2-w_3)$$

olacaktır. $\bar{l}=1$ için daha önce elde ettiğimiz eşitsizlik ile bu eşitsizliği birleştirirsek $w_1-w_2 > m\,(w_2-w_k) \geq m\,(w_2-w_3) > m\,(w_1-w_k)-(w_2-w_3)$

$$\Rightarrow w_1-w_2+w_2-w_3 > m\,(w_1-w_k) \Rightarrow w_1-w_3 > m\,(w_1-w_k) \Rightarrow 1 \geq \frac{w_1-w_3}{w_1-w_k} > m$$

elde ederiz ki, bu da $m>1$ olan oy matrisleri için bir ağırlık sisteminin bulunmadığını gösterir.

4 Tüm a,b,c,d ve pozitif e gerçel sayıları için

$$(a^3+b^3+c^3+d^3) \leq e^2(a^2+b^2+c^2+d^2)+f(e)(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

eşitsizliğini doğru kılan en küçük $f(e)$ değerini e cinsinden bulunuz.

Çözüm:

$a=b=c=d=2e^2$ olduğunda $32e^6 \leq 16e^6+f(e)\cdot 64e^8 \Rightarrow \dfrac{16e^6}{64e^8} \leq f(e)$. Bu durumda $f(e) \geq \dfrac{1}{4e^2}$.

$f(e)=\dfrac{1}{4e^2}$ olduğunda $AO \geq GO$ dan $\dfrac{a^4}{4e^2}+a^2e^2 \geq 2\sqrt{\dfrac{a^4}{4e^2}\cdot a^2e^2}=a^3$ elde edilir. Diğerleri için de aynı eşitsizliği uygulayıp taraf tarafa topladığımızda

$$(a^3+b^3+c^3+d^3) \leq e^2(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{4e^2}(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

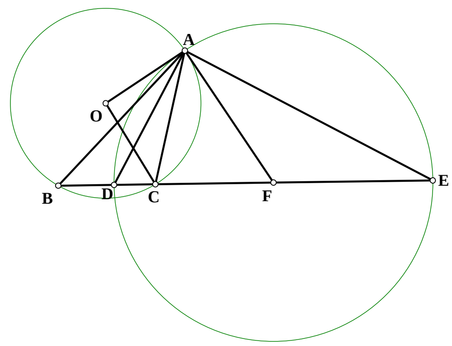
elde ederiz. O halde en küçük $f(e)$ değeri $\dfrac{1}{4e^2}$ dir.

5 Bir ABC üçgeninin A açısının iç ve dış açıortaylarının BC doğrusunu kestiği noktalar D ve E ile gösterilmek üzere, $[DE]$ çaplı F merkezli çember ile ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberi ve bu iki çembere dıştam teğet olan bir d doğrusu çiziliyor. d doğrusunun çembere değdiği noktalardan FO doğrusuna indirilen dikmelerin ayakları P, Q ve bu iki çemberin ortak kirişinin uzunluğu m ise, $|PQ|=m$ olduğunu ispatlayınız.

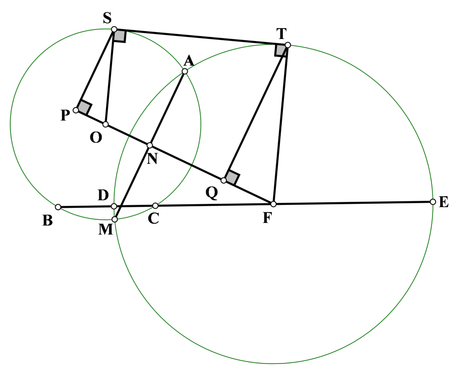
Çözüm:

F merkezli DE çaplı çember BC ye ait A dan geçen Apolonyus çemberidir. Gerçi Apolonyus çemberine has bir özellik kullanmayacağız.

İlk önce çevrel çember ile Apolonyus çemberinin dik kesiştiğini gösterelim.



$AF = DF \Rightarrow \angle ADF = \angle DAF \Rightarrow \angle ABC + \angle BAD = \angle DAC + \angle CAF$ olur. $\angle BAD = \angle DAC$ olduğu için $\angle CAF = \angle ABC$ olacağından AF, (ABC) çemberine teğettir (teğet kiriş açı ile çevre açının eşitliği). Yani $\angle OAF = 90^\circ$ cepte.



Ortak teğet doğrusu çevrel çembere S de, diğer çembere de T de değsin. AM, bu iki çemberin ortak kirişi olsun. AM bu iki çemberin kuvvet eksenidir. (AM nin ST ile kesiştiği noktanın çemberlere göre kuvveti eşit olacağından AM ST yi ortalar.) OF doğrusuna diktir ($APMF$ deltoid olduğu için köşegenler diktir ve birbirini ortalar). Ortak teğet doğru parçası ST yi iki eşit parçaya böler. Bu durumda $SPQT$ dik yamuğunda AM orta taban doğrusu olacağından $PA = AQ$ ve AM ile PQ, N de kesişiyorsa $PN = NQ$ eşitlikleri elimizde var. $APMF$ deltoidinde $AN = AM$ olduğunda göre $AN = PN = NQ$ yani $\angle PAQ = 90^\circ$ olduğunu göstereceğiz. İki çemberin dik kesiştiğini daha önce göstermiştik.

$\angle PAQ = \angle OAF \Leftrightarrow \angle FAQ = \angle OAP$ olduğunu göstereceğiz. $OS \parallel TF$ ve $SP \parallel TQ$ olduğu için $\angle PSO = \angle QTF$. Dolayısıyla da $\triangle OSP \sim \triangle FTQ$ olacaktır. $\dfrac{OP}{QF} = \dfrac{OS}{FT} = \dfrac{OA}{FA}$ orantısı elde edilir. O nun AN ye göre simetriği O' olsun. $AP = AQ$ olduğu için $\triangle QAO' \cong \triangle PAO$ olacaktır. Bu durumda $AO' = AO$, $O'Q = OP$ ve $\dfrac{OP}{QF} = \dfrac{OS}{FT} = \dfrac{OA}{FA}$olduğu için $\dfrac{O'Q}{QF} = \dfrac{O'A}{FA}$ orantısını elde ederiz. Bu da $O'AF$ üçgeninde AQ nun açıortay olduğu gösterir.

$\angle O'AQ = \angle QAF = \angle OAP \Rightarrow \angle OAF = \angle QAP \Rightarrow AN = PN = NQ \Rightarrow PQ = AM = m$ elde edilir.

$\boxed{6}$ Üç boyutlu uzayda, her biri, kenarları x, y ve z eksenlerine paralel bir dikdörtgenler prizması biçiminde olan $D_1, D_2, \ldots, D_n$ bölgeleri verilmiş olsun. Her D_i bölgesinin x eksenine, y eksenine ve z eksenine paralel olan kenarlarının uzunluklarını sırasıyla x_i, y_i ve z_i ile gösterelim. Tüm D_i ve D_j bölgeleri için, $x_i < x_j$ veya

$y_i < y_j$ veya $z_i < z_j$ ise, $x_i \leq x_j$ ve $y_i \leq y_j$ ve $z_i \leq z_j$ dir. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ bölgesinin hacmi 1997 ise, $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_m}\}$ altkümesinin bulunduğunu gösteriniz.

(i) $k \neq l \Rightarrow D_{i_k} \cap D_{i_l} \neq \emptyset$

(ii) Hacim $(\bigcup\limits_{k=1}^{m} D_{i_k}) \geq 73$.

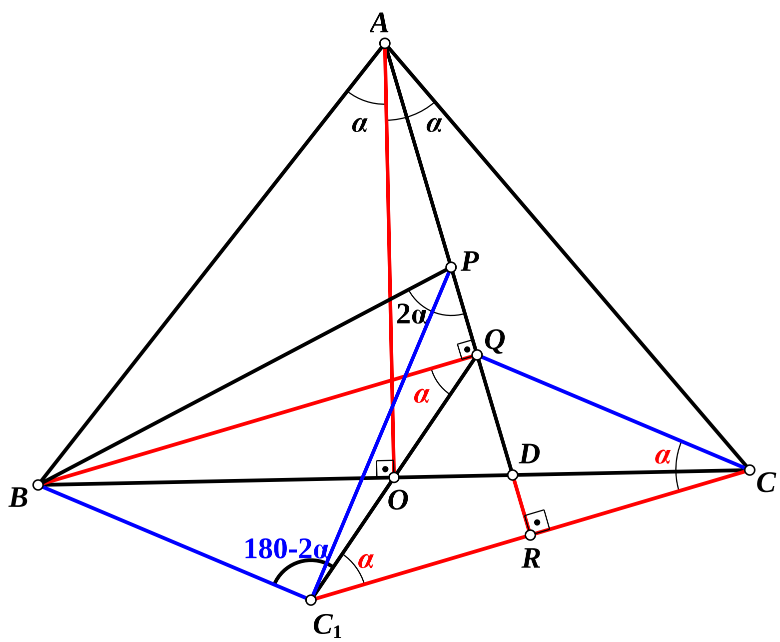
6. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1998

1 İkizkenar ABC üçgeninin ($|AB| = |AC|$) $[BC]$ tabanı üzerinde $|BD| : |DC| = 2 : 1$ olacak biçimde bir D noktası, $[AD]$ üzerinde ise $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPD})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BAC})/2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

C noktasının AD doğrusuna göre simetriği C_1, B noktasından AD doğrusuna indirilen dikmenin ayağı Q; A noktasınndan $[BC]$ ye çizilen yüksekliğin ayağı Q olsun. (Şekilden izleyiniz.)

$CC_1 \parallel BQ$, $|BD| : |DC| = |BQ| : |CR| = 2 : 1$ olduğu için $BQCC_1$ bir paralelkenardır ve $|BC_1| = |QC| = |C_1Q|$'dur.



Şimdi, $\angle BAC = 2\alpha$ olsun. Bu takdirde, $\angle BPD = 2\alpha$, $\angle BAO = \alpha$ olur ve B, O, Q, A noktaları çembersel olduğu için $\angle BQO = \angle QBC_1 = \angle QCC_1 = \alpha$ olur. Diğer yandan,

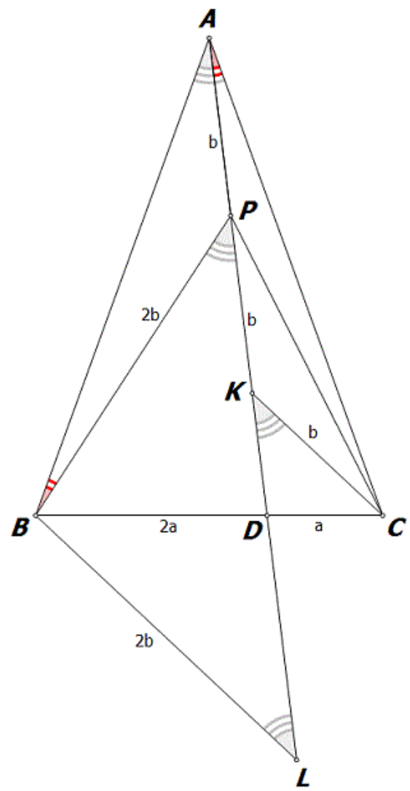
$\angle BC_1Q = 180 - 2\alpha$ ve $\angle BPQ = 2\alpha$ olduğundan, B, P, Q, C_1 noktalarının çembersel olduğu ve böylece, $\angle QPC_1 = QBC_1 = \alpha$ olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\angle CPD = \angle C_1PD = \angle QPC_1 = \alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$$

Kaynak:

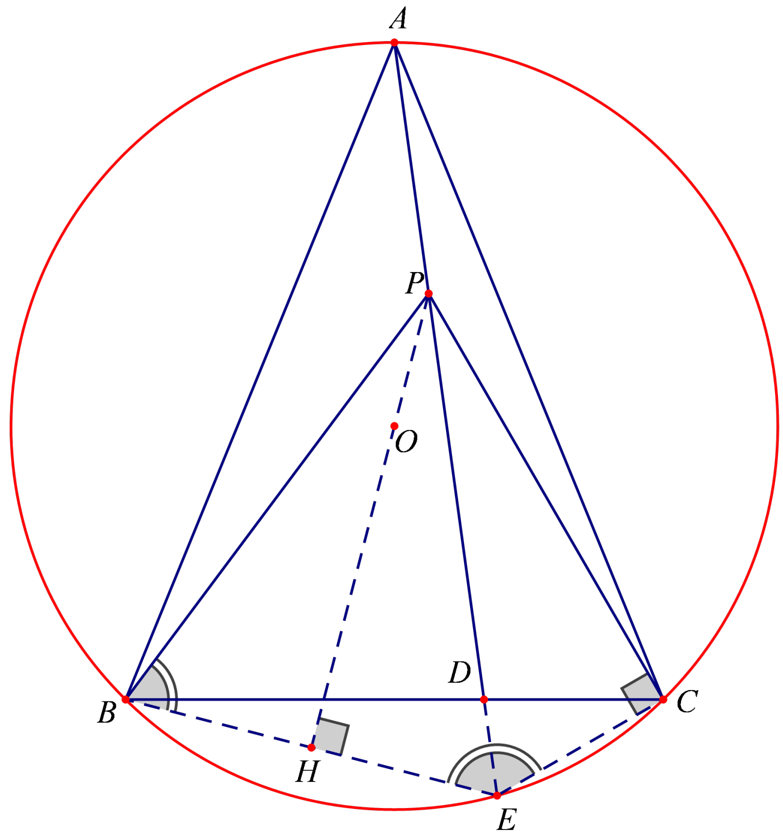
Matematik Dünyası 1999-III

Çözüm 2:



$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPD}) \Longrightarrow m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{PAC})$ olur. $[AD$ üzerinde $\triangle ABP \cong \triangle CAK$ olacak şekilde K noktası alalım. Tekrar $[AD$ üzerinde $|BP| = |BL|$ olacak şekilde L noktası alalım. $CK \| LB$ olduğundan $|AP| = |CK| = b$ dersek $|BL| = |BP| = 2b$ olur. $\triangle ABP \cong \triangle CAK$ olduğundan $|BP| = |AK| = 2b$ olur ve $|PK| = b$ bulunur. PKC ikizkenar üçgeninden $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{DKC})/2 = m(\widehat{BAC})/2$ olduğu görülür.

Çözüm 3:



ABC üçgeninin çevrel çemberi ile AD nin kesişimi E olsun. $|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{CEA}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ dir. Dolayısıyla BEC üçgeninde ED iç açıortay olur. Açıortay teoreminden dolayı $\dfrac{|EB|}{|EC|} = \dfrac{|BD|}{|DC|} = 2$ olur. Açı eşitliklerinden $m(\widehat{PBE}) = m(\widehat{PEB})$ olduğunu görmek kolaydır. PBE ikizkenar üçgeninde $[BE]$ nin orta noktası H olsun. $|BH| = |HE| = |EC|$ ve $PH \perp BE$ dir. $PHE \cong PCE$ (K-A-K eşliği) olduğundan $m(\widehat{PCE}) = 90^o$ olur. $PHEC$ deltoidinde $m(\widehat{HPE}) = m(\widehat{CPE})$ olur. Bu ise, $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BAC})/2$ eşitliğine denktir.

Çözüm 4:

Basit açı hesabıyla, $\angle ABP = \angle BPD - \angle BAP = \angle BAC - \angle BAP = \angle PAC = \alpha$.

Alan kenar oranlarından $[ABP] : [ACP] = BD : DC = 2 : 1$ elde edilir.

BP nin orta noktası M olsun. $[ABM] = [APC]$ olacaktır.

Sinüs Alan formülünden $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AP \cdot \sin\alpha$ ve $AP = BM = MP$ olur.

$AB = CA$, $BM = AP$ ve $\angle ABM = \angle CAP$ olduğu için $\triangle ABM \cong \triangle CAP$.

$\angle BAM = \angle ACP = \beta$ dersek $\angle AMP = \angle CPD = \alpha + \beta$ olur.

$AP = MP$ olduğu için $\angle MAP = \alpha + \beta$ ve $\angle BAC = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot \angle CPD$.

2 Tüm $0 \le a \le b \le c$ gerçel sayıları için

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \ge 60abc$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

$(a+3b)(b+4c)(c+2a)-(a+3b)(b+2a)(c+4c)$
$=(a+3b)((b+4c)(c+2a)-(b+2a)(c+4c))$
$=(a+3b)\underbrace{(b-c)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-4c)}_{\leq 0}\geq 0$ ve
$(a+3b)(b+2a)-(a+2a)(b+3b)$
$=\underbrace{(a-b)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-3b)}_{\leq 0}\geq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla,
$(a+3b)(b+4c)(c+2a)>(a+3b)(b+2a)(5c)\geq(3a)(4b)(5c)=60abc$ 'dir.

Kaynak:

Matematik Dünyası 1999-III

Çözüm 2:

Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden,

$$a+b+b+b\geq 4\sqrt[4]{ab^3},$$
$$b+c+c+c+c\geq 5\sqrt[5]{bc^4},$$
$$c+a+a\geq 3\sqrt[3]{ca^2}$$

'dir. Taraf tarafa çarparsak,

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}=60abc\frac{c^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}}$$
$$=60abc\frac{c^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{12}}}\frac{c^{\frac{1}{20}}}{b^{\frac{1}{20}}}\geq 60abc(1)(1)=60abc.$$

Çözüm 3:

b nin bir kısmını a olarak, c nin bir kısmını da b olarak yazarsak eşitsizlikten daha küçük bir değer elde etmiş oluruz.

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq\left(a+\frac{1}{3}a+\frac{8}{3}b\right)\left(b+\frac{2}{3}b+\frac{10}{3}c\right)(c+2a)$$
$$=\frac{4}{3}(a+2b)\cdot\frac{5}{3}(b+2c)(c+2a)$$

elde edilir.
$a+b+b\geq 3\sqrt[3]{ab^2}$, $b+c+c\geq 3\sqrt[3]{bc^2}$ ve c+$a+a\geq 3\sqrt[3]{ca^2}$ olduğu için

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq\left(a+\frac{1}{3}a+\frac{8}{3}b\right)\left(b+\frac{2}{3}b+\frac{10}{3}c\right)(c+2a)$$
$$=\frac{4}{3}(a+2b)\cdot\frac{5}{3}(b+2c)(c+2a)\geq\frac{20}{9}\cdot 27abc=60abc$$

elde edilir.

Çözüm 4:

$b = a + k$ ve $c = b + m = a + k + m$ olsun.

Tanım gereği $k \geq 0$ ve $m \geq 0$ olacaktır.

$(4a + 3k)(5a + 5k + 4m)(3a + k + m) \geq 60a(a + k)(a + k + m)$ olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$(4a + 3k)(5a + 5k + 4m)(3a + k + m) \geq 60a^3 + 120a^2k + 60a^2m + 60akm$

Bu aşamadan sonra sağ taraftaki her terime karşılık sol taraftaki benzer terimin katsayısını karşılaştırdığımızda, sol taraftakilerin daha büyük veya sağ taraftakilere eşit olduğunu göreceğiz. Sol taraftaki bütün terimler sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olduğu için eşitsizlik doğru olacaktır.

Yinede tüm terimleri açarak bunun doğruluğunu gösterelim.

$60a^3 + 125a^2k + 68a^2m + 80ak^2 + 87akm + 16am^2 + 15k^3 + 27k^2m + 12km^2$

$\geq 60a^3 + 120a^2k + 60a^2m + 60akm$

$\Rightarrow 5a^2k + 8a^2m + 20ak^2 + 27akm + 16am^2 + 15k^3 + 27k^2m + 12km^2 \geq 0.$

$\boxed{3}$ Bir çemberin üstündeki noktalar üç renge boyanıyorlar. Köşelerini çember üstünde aynı renge boyanmış noktaların oluşturduğu sonsuz sayıda ikizkenar üçgenin bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Köşeleri çember üstünde bulunan herhangi bir düzgün 13-gen alalım. Bu 13-genin aynı renge boyanmış en az beş köşesi vardır. Bu beş köşeden en az üçünün ikizkenar bir üçgen oluşturduğunu göstereceğiz. Bu ise $\mathbb{Z}_{13} = \{1, \ldots, 13\}$ kümesinin 5 elemanlı herhangi bir P altkümesinde $x \neq y$, $x + y \equiv 2z \pmod{13}$ olacak biçimde $x, y, z \in P$ bulunduğunu göstermeye eşdeğerdir. Son önermenin doğru olmadığını varsayalım.

$$S = \{x + y \pmod{13} | x, y \in P,\ x \neq y\}$$

dersek, S'nin en az 9 değişik elemanının olduğu görülür. ($P = \{x, y, z, u, v\}$ olsun ve $x+y \equiv z+u$ olduğunu varsayalım. Bunun dışında P'den alınan iki değişik çiftin toplamları $\pmod{13}$ eşitse, genelliği yitirmeden, bunun $z + y \equiv x + v$ biçiminde olacağı görülür. O zaman da, varsayımımızın aksine $u + v \equiv 2y$ olur.) Ancak bu durumda da, S'ye ait en az bir eleman $\{2x, 2y, 2z, 2u, 2v\}$ kümesine aittir.

Kaynak:

Matematik Dünyası 1999-III

Çözüm 2:

Van der Waerden teoremi gereği, $1, 2, \ldots, n$ dizisinde 3 renkli 3 terimli aritmetik alt dizi bulunabilir. Bu şekildeki en küçük n sayısı $W(3, 3) = 27$ dir. Bu da düzgün $27-$gende tek renkli bir ikizkenar üçgen olacağı anlamına gelir.

Bizim sorumuzda aritmetik dizi mod$n$ ye göre çembersel olabileceği için daha az köşeli bir $n-$gen bulunabilir. (Bir önceki çözümde $n = 13$ ün sağladığı gösterilmişti.)

Wikipedia'daki makalede Van der Waerden Teoremi'nin 3 renkli 3 terimli aritmetik alt dizi için ispatı verilmiş. Örnek olarak da $n = 7(2 \cdot 3^7 + 1)(2 \cdot 3^{7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$ terimli bir dizi seçilmiş. Yani Van der Waerden teoreminden çıkan sonuç, yeterince büyük n ler için aritmetik alt dizi bulunabileceği. Wikipedia'daki $W(3, 3) \leq 7(2 \cdot 3^7 + 1)(2 \cdot 3^{7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$ için verilen ispat bu sorunun çözümü için verilebilir.

Çözüm 3:

Matematik Dünyası'nda yer alan resmi çözümden faydalanarak sonuca gidebildiğimi düşünüyorum; ama resmi çözümdeki her önermeyi doğrulayamıyorum. O yüzden resmi çözümden faydalanarak yaptığım kendi çözümümü (anlayışımı) paylaşıyorum.

Düzgün 13-geni ele alalım. Güvercin Yuvası İlkesi gereği aynı renkte $\lceil \frac{13}{3} \rceil = 5$ köşe vardır.

Köşeleri $1, 2, \dots, 13$ olarak numaralandıralım. Herhangi üç köşe arasında $\bmod 13$ te aritmetik dizi oluşuyorsa bu üç köşe ikizkenar üçgen oluşturur. Bu da $z - x \equiv y - z \pmod{13}$, eşdeğer biçimde $x + y \equiv 2z \pmod{13}$ anlamına gelir.

Aynı renkli 5 köşe arasında ikizkenar üçgenin varlığını ispatlarsak, düzgün 13-geni merkezi etrafında $\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{13}\right)$ döndürerek sonsuz sayıda çokgen elde ederiz. Dolayısıyla sonsuz sayıda ikizkenar üçgen elde ederiz.

Aynı renki köşeler $P = \{x, y, z, u, v\}$ olsun. Bunlardan hiçbirisi için $a + b \equiv 2c \pmod{13}$ şeklinde bir ilişki olmadığını varsayalım.

5 sayı, $\binom{5}{2} = 10$ ikili belirtir: $x+y, x+z, x+u, x+v, y+z, y+u, y+v, z+u, z+v, u+v$. Bu sayılardan bazıları birbirine eşit olabilir. Bu sayıların oluşturduğu kümeye S diyelim. S nin herhangi bir elemanı $S' = \{2x, 2y, 2z, 2u, 2v\}$ kümesinde yer almamalı. $2x \equiv 2y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{13}$ olacağı için ve $|P| = 5$ olduğu için S' kümesi tam olarak 5 elemanlıdır. $|S| + |S'| \le 13$ olacağı için $|S| \le 8$ dir.

Bu da S nin (bazıları tekrarlı) 10 eleman adayı arasından üç tanesi arasında $a \equiv b \equiv c \pmod{13}$ bağıntısı ya da $a \equiv b \ \wedge \ c \equiv d \pmod{13}$ bağıntısı sağlayan 4 farklı eleman adayı olması gerektiği anlamına gelir.

Önce $a \equiv b \equiv c \pmod{13}$ olamayacağını, sonra da $a \equiv b \ \wedge \ c \equiv d \pmod{13}$ şeklindeki sayıların varlığının varsayımımız üzerinde bir çelişki oluşturacağını göstereceğiz.

$x + y \equiv y + z \pmod{13}$ olamaz; çünkü bu $x \equiv z \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu durumda $|P| = 5$ olduğu için üç ayrık çift bulamayız. (Bunun için en az 6 eleman gerekirdi.)

Diğer duruma geçelim: $a \equiv b \ \wedge \ c \equiv d \pmod{13}$

$a = x + y$, $b = z + u$ olsun.

$c = x + z$ ise $d = y + u$ ya da $d = y + v$ ya da $d = u + v$ olabilir.

$d = y + u$ olamaz; çünkü $a + c \equiv b + d$ den $2x \equiv 2u \Rightarrow x \equiv y \pmod{13}$.

$d = y + v$ olduğunda $a + c \equiv b + d$ den $2x \equiv u + v \pmod{13}$ olacağı için bu varsayımımız ile çelişir.

$d = u + v$ olduğunda $b + x \equiv a + d$ den $2z \equiv y + v \pmod{13}$ olacağı için bu varsayımımız ile çelişir.

Bu durumda S kümesi S' kümesinden en az bir eleman içerir. Yani düzgün 13-gende her zaman en az bir tek renkli ikizkenar üçgen elde ederiz.

Not: Burada verilen çözüm, resmi çözüm ile neredeyse aynı. Resmi çözümde bence "S'nin en az 9 değişik elemanının olduğu görülür." yerine "S'nin en fazla 8 değişik elemanının olduğu görülür." denmeliydi.

Çözüm 4:

Çember üzerindeki noktaları sonsuz sayıda düzgün 13−genlere bölelim. Her 13−gen için, Güvercin Yuvası Prensibi'ne göre en az 5 aynı renkte köşe bulunur: bu renk kırmızı olsun. Bu 5 köşenin herhangi bir dağılımında tek renkli ikizkenar üçgen oluşacağını göstereceğiz. Bu nedenle her 13−gen içinde tek renkli ikizkenar üçgen bulunacak. Sonsuz sayıda 13− gen için sonsuz sayıda tek renkli ikizkenar üçgen olacaktır.

İddia: Düzgün bir 13−genin 5 köşesi kırmızı renkli ise, bu 5 köşeden 3 ü ikizkenar üçgen olacak şekilde seçilebilir..

İspat: Bu 5 köşenin hiçbirinin ikizkenar üçgen oluşturmadığını varsayalım. Köşeleri $P_0, \dots, P_{12}$ olarak adlandıralım. mod13 te alınan indislerle, öncelikle P_i ve P_{i+2}'nin her ikisinin de kırmızı olamayacağını kanıtlayalım. Aksini varsayalım. Genelliği yitirmeden, P_{12} ve P_1 kırmızı olsun; o zaman P_{10}, P_0 ve P_3 kırmızı olamaz. Ayrıca, $(P_{11}, P_4), (P_4, P_7)$ ve (P_7, P_8) çiftlerinden her birinden en fazla bir köşe kırmızı olabilir; aksi halde her biri P_1 ile ikizkenar üçgen oluşturur. Benzer şekilde, $(P_2, P_9), (P_9, P_6)$ ve (P_6, P_5) çiftlerinden her birinden en fazla bir köşe kırmızı olabilir. Bu durumda $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\} \cup \{P_2, P_9, P_6, P_5\}$ kümesinden üç köşe kırmızıdır; genelliği yitirmeden iki köşenin $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\}$ kümesinden geldiğini varsayalım. P_4 ve P_8

köşelerinin her ikisi de kırmızı olamaz; çünkü P_{12} ile ikizkenar üçgen oluştururlar. Benzer şekilde P_{11} ve P_8 ikisi birden kırmızı olamaz; çünkü P_1 ile ikizkenar üçgen oluştururlar. Bu nedenle P_{11} ve P_7 köşeleri kırmızı olmalıdır. Ancak sonra kalan P_2, P_5, P_6, P_9 köşelerinden herhangi bir köşe, P_1, P_7, P_{11}, P_{12}'den ikisi ile ikizkenar üçgen oluşturur. Çelişkiden dolayı P_i ve P_{i+2} her ikisi birden kırmızı olamaz.

Şimdi P_i ve P_{i+1}'in kırmızı olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Varsayalım ki öyle. Genelliği yitirmeden P_6 ve P_7 kırmızı olsun. O zaman son paragraftaki sonuç nedeniyle P_4, P_5, P_8 ve P_9 kırmızı olamaz. $P_0P_6P_7$ üçgeninin ikizkenar olması nedeniyle P_0 da kırmızı olamaz. (P_3, P_{11}) ve (P_{11}, P_1) çiftlerinden her biri en fazla bir kırmızı köşe içerebilir; çünkü $P_3P_7P_{11}$ ve $P_1P_6P_{11}$ üçgenleri ikizkenar olur. Ayrıca, bir önceki paragraftaki sonuç nedeniyle P_1 ve P_3 köşelerinin ikisi birden kırmızı olamaz. Bu nedenle $\{P_1, P_3, P_{11}\}$ kümesinden en fazla biri kırmızı olabilir. Benzer şekilde, $\{P_{12}, P_{10}, P_2\}$ kümesinden en fazla biri kırmızı olabilir. Ancak o zaman en fazla dört kırmızı köşemiz olur, yine bir çelişki oluşur.

Bu nedenle eğer P_i kırmızı ise, $P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}$ kırmızı olamaz; o zaman en fazla dört kırmızı köşemiz olur, yine bir çelişki oluşur.

Kaynak: Mathematical Olympiads 1999–2000: Problems and Solutions from Around the World, Syf. 192-193.

$\boxed{4}$ $x^3 + 3367 = 2^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm:

3367 nin asal çarpanlara ayrılışı $3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$ dir. Eğer $x^3 \equiv 2^n \pmod 7$ ise, uygun bir $m \in N$ için $n = 3m$ olur. Böylece, $3367 = 2^n - x^3 = \underbrace{(2^m - x)}_{a}\underbrace{(2^{2m} + 2^m x + x^2)}_{b}$, $a^2 < b$ ve $ab = 7 \cdot\ 13 \cdot 37$ olduğu için aşağıdakilerden biri doğrudur:

(i) $a = 1$, $b = 7 \cdot 13 \cdot 37$,

(ii) $a = 7$, $b = 13 \cdot 37$,

(iii) $a = 13$, $b = 7 \cdot 37$,

$b - a^2 = 3 \cdot 2^m \cdot x$, $2^m \geq \sqrt[3]{3367} > 14$ olduğu için

(i) $b - a^2 = 3 \cdot 2 \cdot 561$ ve

(iii) $b - a^2 = 90 = 2 \cdot 3 \cdot 15$ geçerli olamaz; ancak (ii) durumu sözkonusu olabilir. Bu durumda $b - a^2 = 481 - 49 = 432 = 3 \cdot 2^4 \cdot 3^2$ olduğunda $n = 12$, $x = 9$ olmalı. Gerçekten $9^3 + 3367 = 2^{12}$ 'dir.

Kaynak:

Matematik Dünyası 1999-III

$\boxed{5}$ XOY açısının $[OX$ ve $[OY$ ışınları üzerinde sırasıyla M ve N değişken noktaları alındığında $|OM| + |ON|$ sabit ise, $[MN]$ nın orta noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

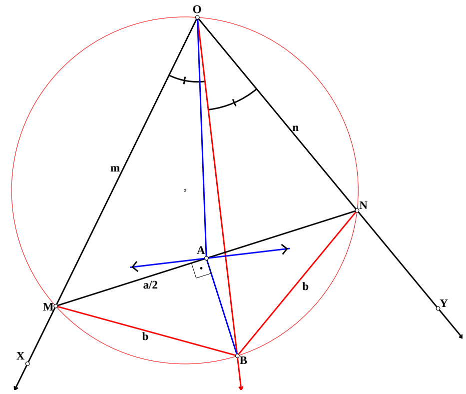
Çözüm 1:

$[MN]$'nin bir konumu şekildeki gibi olsun ve $|OM| = m$, $|ON| = n$, $|MN| = a$ diyelim. OMN üçgeninin çevrel çemberi ile MON açısının açıortayının kesişim noktası B ile gösterilmek üzere, $\angle MOB = 2\alpha$ ise,

$$\measuredangle(MB) = \measuredangle(BN) = 2\alpha$$

dır. Buradan $|MB| = |BN|$ elde edilir. $OMBN$ dörtgeninde Ptolemy Teoremi uygulandığında, $|BM| = b$ olmak üzere,

$$|OM| \cdot |BN| + |ON| \cdot |MB| = |OB| \cdot |MN|$$



ya da $mb + nb = |OB| \cdot a$ elde edilir. Buradan

$$b\,(m+n) = |OB| \cdot a, \quad b \cdot k = |OB| \cdot a \tag{1}$$

$[MN]$'nin orta noktası A ile gösterilmek üzere, $\angle MAB = 90^\circ$ ve BON açısı ile aynı yayı gördükleri için $\angle MNB = \alpha$ olur. Bu dik üçgende, $\cos\alpha = \dfrac{a}{2b}$, $a = 2b\cos\alpha$ dır. Bu değer (1) ‘de yazılarak

$$bk = |OB|\,2b\cos\alpha \;\Rightarrow |OB| = \frac{k}{2\cos\alpha} = sabit$$

elde edilir. O noktası, $|OB|$ ve açıortay sabit olduğundan B noktası sabittir. OMN üçgeninde $[OA]$ kenarortay olup,

$$|OA|^2 = \frac{m^2+n^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \tag{2}$$

MBN üçgeninde

$$[BA]^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \tag{3}$$

’tür.

(2) ve (3)‘ten

$$|OA|^2 - |BA|^2 = \frac{m^2+n^2}{2} - b^2 \tag{4}$$

OMB üçgeninde, $b^2 = m^2 + \left(\dfrac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - 2m\dfrac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$,

ONB üçgeninde, $b^2 = n^2 + \left(\dfrac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - 2n\dfrac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$ dır (Kosinüs Teoremi). Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak,

$$2b^2 = m^2 + n^2 + 2\left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - k^2,$$

$$b^2 = \frac{m^2+\ n^2}{2} + \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 - \frac{k^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+n^2}{2} - b^2 = \frac{k^2}{2} - \left(\frac{k}{2\cos\alpha}\right)^2 = sabit$$

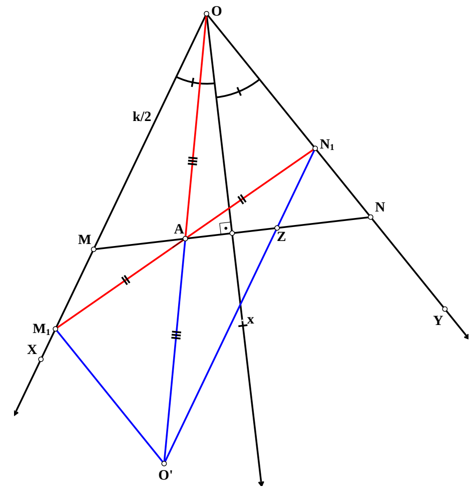
bulunur. O halde (4) ifadesi

$$|OA|^2 - |BA|^2 = sabit\text{tir.}$$

“Sabit iki noktaya uzaklıklarının kareleri farklı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu sabit noktaları birleştiren doğruya dik bir doğrudur.”

Dolayısıyla, A noktasının geometrik yeri, OB doğrusuna dik bir doğrudur.

Tersine $|OM| = |ON| = \frac{k}{2}$, Ox açıortay, $MN \perp Ox$, $A \in [M, N]$ olsun. OM_1N_1 üçgeninin $[M_1N_1]$ kenarının orta noktası A ise, $|OM_1| + |ON_1| = k$ olur. Çünkü A'yı orta nokta kabul edecek $[M_1N_1]$'in çizimi, O'nun A'ya göre simetriği olan O' bulunup $OM_1O'N_1$ paralelkenarının oluşturulması ile mümkündür. Bu durumda $O'N_1 \parallel OM_1$, $\angle OMN = \angle N_1ZN$ ve OMN üçgeni ikizkenar olduğundan,



$$\angle N_1ZN = \angle N_1NZ \Rightarrow |N_1Z| = |N_1N|$$

$|OM_1| = |OM| + |MM'|$ ve $\triangle M_1MA \cong \triangle N_1ZA$ olduğundan

$$|MM_1| = |N_1Z| = |N_1N|,$$

$$|ON_1| = |ON| - |NN_1| \text{ dir.}$$

Bu eşitliklerden,

$|OM_1| + |ON_1|$

$= |OM| + |MM_1| + |ON| - |MM_1|$

$= |OM| + |ON| = k$ bulunur.

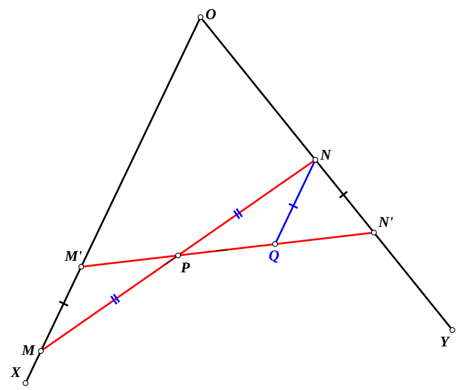
Kaynak:

Matematik Dünyası 1999-III

Çözüm 2:

Geometrik yer ile ilgili soru çözümlerinde sonuca götüren yollardan biri de iki örneklem almak. Özellikle bu örneklemden biri sabit ise ona bağlı birçok şey sabit olacaktır.

$OM + ON = k$ olduğu için $OM' = ON' = \dfrac{k}{2}$ şartını sağlayan M', N' noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası da geometrik yer üzerindedir. Bu arada $OM' = ON' = \dfrac{k}{2} = \mathit{Sabit}$ ve $\angle M'ON' = \mathit{Sabit}$ olduğu için $M'N'$ doğrusu da, doğru parçası da sabittir.



$MM' = NN'$ olduğu aşikar (değilse k dan MM' kadar alınıp NN' kadar veriliyor, yine k elde ediliyor).

$M'N'$ ile MN, P de kesişsin. N den $M'M$ ye çizilen paralel $M'N'$ yü Q da kessin.

$OM' = ON' \Rightarrow QN = NN' = MM'$ olacaktır. Paralellikten $\dfrac{QN}{MM'} = \dfrac{PN}{PM} = 1$ olacaktır. Yani MN doğru parçalarının orta noktaları $P \in M'N'$ dür. Geometrik yer $M'N'$ doğru parçasıdır.

Bu paralel çekmeli çözüm aslında Menelaus'tan başka bir şey değil. AMN üçgeninde M', P, N' noktaları için Menelaus uyguladığımızda da $PM = PN$ eşitliğini elde edeceğiz.

Tersinin ispatı da düzünden farksız. Aynı şekilde $OM + ON = k$ olduğunu göstereceğiz. İster Menealus uygulayın, isterse tekrardan $NQ \parallel OM$ doğrusunu çizin. $NN' = MM'$, dolayısıyla da $OM + ON = \dfrac{k}{2} + MM' + \dfrac{k}{2} - NN' = k$ elde edeceksiniz.

6 $n \times n$ bir satranç tahtasındaki karelerin köşelerinden bazıları, bu satranç tahtasının karelerinden oluşan her $k \times k$ ($1 \leq k \leq n$) karenin en az bir kenarının üstünde boyanmış bir nokta olacak biçimde boyanıyor. Eğer bu koşulu sağlamak için boyanması gereken en az nokta sayısını $\ell(n)$ ile gösterirsek,

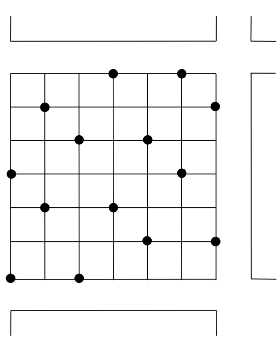
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Şekilde görülen boyanmış parçayı kaydırarak boyama işlemini sürdürürsek $n = 7k + 6$, $k \geq 0$, için

$$l\,(n) \leq \frac{2}{7}(n+1)^2$$



olduğunu görürüz. Eğer $n = 7k + s$, $0 \leq s \ < 6$ ise, $n = 7\,(k-1) + 6 + (s+1)$ ve $m = 7\,(k-1) + 6$ yazalım. Bu takdirde, $n \times n$ karenin içinde $m \times m$ karenin dışında kalan tüm noktaların boyandığı varsayılsa dahi

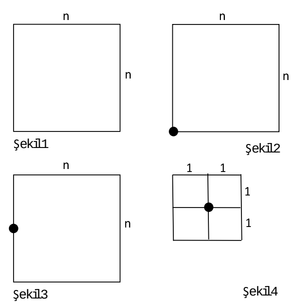
$$l(n) \leq l(m) + (s+1)\,n + (s+1)\,m < l(m) + 12n,$$
$$l(n) < \frac{2}{7}(m+1)^2 + \; 12n < \frac{2}{7}(n+1)^2 + 12n$$

olduğu görülür. Dolayısıyla her $n \geq\ 6$ için,

$$\frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7}\frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n} \qquad (*)$$

dir.

Şimdi, bir kare alalım. (Bak: Şekil 1). Bir 1×1 karenin kenarları üzerindeki boyanmış nokta sayısı t olsun. Problemin koşulu gereği $t \geq 1$ dir. Her 1×1 kare için $\frac{1}{t}$ sayısına o karenin **ağırlığı** diyelim. Boyanmış bir nokta alalım. Bu nokta ile kesişen tüm 1×1 karelerin ağırlıklar toplamına o noktanın **puanı** diyelim. Bu takdirde, boyanmış her bir noktanın puanı, nokta tam köşede ise (Bak: Şekil 2), ≤ 1; nokta bir kenar üzerinde ise (Bak: Şekil 3), ≤ 2 ve eğer nokta karenin içinde ise (Bak: Şekil 4), o noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ dir. (Son durumda, eğer dört kareden üçünün ağırlığı 1 ise, 2×2 karenin kenarında en az bir boyanmış nokta bulunacağından, dördüncü karenin puanı $\leq 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ eşitsizliğini sağlamalıdır.)



Diğer yandan, her biri 1×1 karenin boyanmış noktaların puanına yaptığı katkıların toplamı 1 dir. Çünkü, bir 1×1 kare üzerinde t adet boyanmış nokta varsa, karenin puanlara yapmış olduğu katkı

$$\frac{1}{t} + \cdots + \frac{1}{t} = t \cdot \frac{1}{t} = 1$$

olur. Demek ki, boyanmış noktaların puan toplamı n^2dir.

Şimdi $l(n)$ tane boyanmış nokta ve her boyanmış noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ olduğuna göre,

$$n^2 < \frac{7}{2} l(n) \Rightarrow \frac{l(n)}{n^2} \geq \frac{2}{7} \qquad (**)$$

olduğunu görürüz. $(*)$ ile $(**)$ birleştirilirse,

$$\frac{2}{7} \leq \frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7}\ \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n}$$

elde edilir ve Sandviç teoremi ile

$$\lim_{n \to \infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

olduğu görülür.

Kaynak:

Matematik Dünyası 1999-III

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1999

1 $0 \le x, y, z, w \le 36$ olmak üzere,

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$

denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

Çözüm:

Önce a bir tamsayı olmak üzere; $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{37}$ denkliğini sağlayan (x, y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısını bulalım. $a \equiv 0 \pmod{37}$ ise, $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{37}$ denkliği, $y^2 \equiv (6x)^2 \pmod{37}$ e dolayısıyla $y \equiv \pm 6x \pmod{37}$ denkliklerine eşdeğer olduğu için, çözüm olarak $2 \cdot 36 + 1 = 73$ (x, y) sıralı ikilisi elde edilir.

Şimdi de $a \not\equiv 0 \pmod{37}$ durumuna bakalım. $x^2 + y^2 \equiv x^2 - 36y^2 \equiv (x - 6y)(x + 6y) \pmod{37}$ olduğu için, aradığımız sayı $(x - 6y)(x + 6y) \equiv a \pmod{37}$ denkliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin sayısıdır. Öte yandan, $a \not\equiv 0 \pmod{37}$ olduğundan, her $1 \le u \le 36$ tamsayısı için, $uv \equiv a \pmod{37}$ ve $1 \le v \le 36$ koşullarını sağlayan tam olarak bir v tamsayısı bulunur. Böyle (u, v) sıralı ikilileri ile $u \equiv x - 6y$, $v \equiv x + 6y$, $0 \le x, y \le 36$ koşullarını sağlayan (x, y) sıralı ikilileri arasında bire-bir bir eşleme bulunduğundan, bu durumda, $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{37}$ bağıntısının çözümü olan 36 (x, y) ikilisi bulunur.

Diğer taraftan $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ denkliği, $w^3 \equiv -z^3 \pmod{37}$, dolayısıyla da $w \equiv -z$ veya $11z$ veya $-10z \pmod{37}$ bağıntılarına eşdeğerdir. Yani $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$, $0 \le z, w \le 36$ koşullarını sağlayan $36 \cdot 3 + 1 = 109$ (z, w) sıralı tamsayı ikilisi vardır. Sonuç olarak, (z, w) ikililerinin alabileceği toplam 37^2 değerden 109 u için, istenen koşulu sağlayan 73 (x, y) ikilisi, $37^2 - 109$ tanesi için de 36 (x, y) ikilisi vardır. Aranan sayı,

$$109 \cdot 73 + \left(37^2 - 109\right) \cdot 36 = 53317$$

dir.

Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

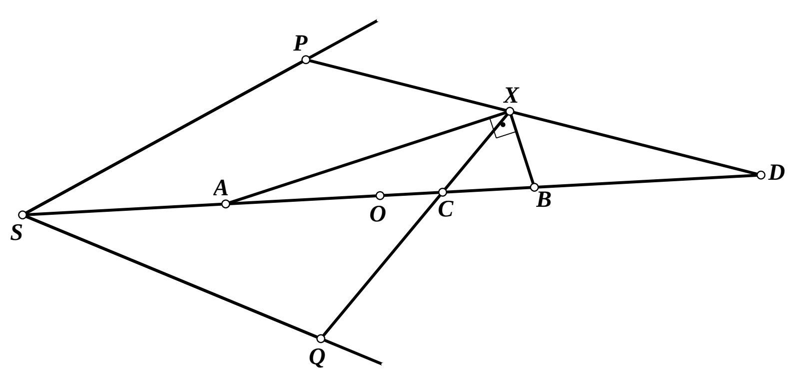
2 O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

SPQ üçgeni $(SP = SQ)$ ikizkenar üçgen olup, A noktası PQ yayının orta noktası ve dolayısıyla



XA, PXQ açısının açıortayıdır. Diğer taraftan, AXB açısı AB çapını gören bir çevre açı olduğundan bir dik açıdır. Bu nedenle XB, QXD açısının açıortayıdır. CXD üçgeninde XB ve XA açıortay olduklarından, açıortay teoremi gereğince,

$$\frac{CB}{BD}=\frac{AC}{AD}\left(\Leftrightarrow\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}\Leftrightarrow\frac{CB}{AC}=\frac{DB}{AD}\right)\Leftrightarrow\frac{CB}{AC}=\frac{DB}{AD}$$
$$\Rightarrow\frac{CB}{AB\cdot AC}=\frac{DB}{AB\cdot AD}\Rightarrow\frac{AB-AC}{AB\cdot AC}=\frac{AD-AB}{AB\cdot AD}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}\Rightarrow\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

bulunur.

Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

3 n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ için $|f(i)-f(j)|\le p$ şartını sağlayan

$$f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{-p,-p+1,\ldots,p-1,p\}$$

fonksiyonlarının sayısının $(p+1)^{n+1}-p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Verilen koşulları sağlayan ve aldığı en yüksek değer q olan fonksiyonların sayısını $Q(q)$ ile gösterelim. Önce $q\in\{0,\ldots,p\}$ olduğu duruma bakalım. Her $i,j\in\{0,\ldots,n\}$ için $|f(i)-f(j)|\le p$ koşulu nedeniyle, bu durumda, her $k\in\{0,\ldots,n\}$ için $f(k)\in\{q-p,\ q-p+1,\ldots,q\}$ olur. Aldığı tüm değerler bu kümeye ait olan $(p+1)^n$ tane fonksiyon bulunup, bunlardan q değerini hiç alamayanların sayısı p^n dir. Dolayısıyla, $Q(p)=(p+1)^n-p$ olur.

Eğer $q\in\{1,\ldots,p\}$ ise, benzer biçimde $Q(-q)=(p-q+1)^n-(p-q)^n$ bulunur. Verilen koşulları sağlayan fonksiyonların toplam sayısı,

$$(p+1)((p+1)^n-p^n)+\sum_{q=1}^{p}((p-q+1)^n-(p-q)^n)$$
$$=(p+1)^{n+1}-(p+1)p^n+p^n=(p+1)^{n+1}-p^{n+1}$$

olur.

Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

Çözüm 2:

$f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{-p,-p+1,\ldots,-1,0\}$ şeklinde $(p+1)^n$ fonsksiyon yazılabilir. Açıktır ki bu fonksiyonlardan birinin herhangi iki elemanı arasındaki fark p den fazla olamaz.

$f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{-p+1,-p+1,\ldots,0,1\}$ fonksiyonlarından görüntü kümesinde 1'i içermeyenleri yukarıda saydık. O halde bu fonksiyonlardan 1'i içerenleri genel toplamımıza ekleyeceğiz. Toplam $(p+1)^n$ tane fonksiyondan, p^n tanesi 1 içermez. O halde $(p+1)^n-p^n$ tanesi 1 içerir.

Bu son yaptığımızı 1 den başlayıp p ye kadar devam ettirmemiz gerekiyor.

O halde aradığımız yanıt

$$(p+1)^n+((p+1)^n-p^n)\cdot p=(p+1)^{n+1}-p^{n+1}.$$

4 Her $n>1$ için $a_n=a_{n-1}(2-a_{n-1})$, $\frac{1}{2}<a_1<1$ ve $\sum_{n=1}^{2000}a_n=1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

Çözüm 1:

Her $n > 1$ için,

$$1 - a_n = 1 - a_{n-1}(2 - a_{n-1}) = (1 - a_{n-1})^2;$$

dolayısıyla da

$$1 - a_n = (1 - a_1)^{2^{n-1}}$$

olur. (a_n) verilen koşuları sağlayan bir gerçel sayı dizisi ise,

$$1 = 2000 - 1999 = 2000 - \sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000} (1 - a_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{2000} (1 - a_1)^{2^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_1)^n = \frac{1 - a_1}{a_1} < 1$$

olacağı için, böyle bir dizinin bulunmadığı gösterilmiş olur.

Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

Çözüm 2:

Benzer bir çözümü dizinin genel terimini bulmadan yapacağız.

$1 - a_n = 1 - a_{n-1}(2 - a_{n-1}) = (1 - a_{n-1})^2$

$b_n = 1 - a_n$ olsun.

$b_n = b_{n-1}^2$ ve $0 < b_1 < \dfrac{1}{2}$ olacaktır.

$b_n = b_{n-1}b_{n-1} < \dfrac{1}{2} \cdot b_{n-1}$ olacağı için $\displaystyle\sum_{n=1}^{2000} b_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{2000}} < 1$ olacaktır.

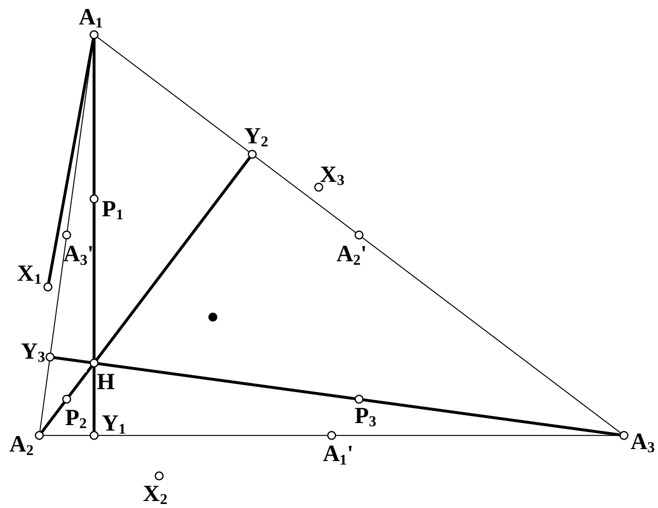
$\displaystyle\sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000} (1 - b_n) = 2000 - \sum_{n=1}^{2000} b_n > 1999$ olacaktır. Dolayısıyla eşitliği sağlayan dizi yoktur.

$\boxed{5}$ Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 veY_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1, A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 \leq \frac{3}{2} R$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 1:



Çevrel çemberin merkezi O, $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberi ile yüksekliklerin kesişim noktaları P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilmek üzere A_1 noktasının $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine göre kuvveti: A_1 den çizilen teğetin uzunluğu t_1 olduğundan,

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot A_1Y_1$$

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{t_1^2}{h_1} = A_1P_1$$

ve benzer biçimde t_2, t_3 için de bu eşitlikler yazılarak,

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i$$

bulunur. Yükseklik ayaklarından geçen çember, aynı zamanda kenarların orta noktaları olan A_1', A_2', A_3' den ve HA_1, HA_2, HA_3 ün orta noktaları olan P_1, P_2, P_3 den geçer ve $A_iP_i = OA_i'$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle

$$\sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3} OA_i'$$

olur. (İkinci tarafı hesaplayalım.) $A_1A_3'OA_2'$ kirişler dörtgeni olduğundan Ptolemy Teoremi gereğince,

$$OA_1 \cdot A_2'A_3' = OA_2' \cdot A_1A_3' + OA_3' \cdot A_1A_2' \tag{1}$$

ve benzer biçimde $A_2A_1'OA_3'$, $A_3A_2'OA_1'$ dörtgenlerinden de,

$$OA_2 \cdot A_3'A_1' = OA_1' \cdot A_2A_3' + OA_3' \cdot A_2A_1', \tag{2}$$

$$OA_3 \cdot A_1'A_2' = OA_1' \cdot A_3A_2' + OA_2' \cdot A_3A_1' \tag{3}$$

'dür. Bu $(1), (2),$ (3) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak; $OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ olduğu göz önünde tutulup, $A_2A_3 = a, A_3A_1 = b, A_1A_2 = c$ alındığında, $A_3'A_2' = \frac{a}{2}$, $A_3'A_1' = \frac{b}{2}$, $A_1'A_2' = \frac{c}{2}$ olacağından,

$$\frac{a+b+c}{2} = OA_1'\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right) + OA_2'\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right) + OA_3'\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

$$= OA_1'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{a}{2}\right)+OA_2'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{b}{2}\right)+OA_3'\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{c}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(OA_1'+OA_2'+OA_3')-\left(\frac{a\cdot OA_1'+b\cdot OA_2'+c\cdot OA_3'}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sum_{i=1}^{3}OA_i' - \text{Alan}\,(A_1A_2A_3)\,.$$

$\text{Alan}\,(A_1A_2A_3) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$ (r: iç yarıçap) yazıldığında,

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}\sum_{i=1}^{3}OA_i' - \frac{a+b+c}{2}r$$

$$\Rightarrow R = \sum_{i=1}^{3}OA_i' - r \Rightarrow \sum_{i=1}^{3}OA_i' = R+r$$

Her üçgende çevrel yarıçap (R) ile iç yarıçap (r) arasında $R \geq 2r$ bağıntısı vardır. O halde $R \geq 2r \Rightarrow r \leq \frac{R}{2}$ ve $R + r \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ olur. Buradan

$$\sum_{i=1}^{3}OA_i' = \sum_{i=1}^{3}A_iP_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3R}{2}$$

bulunur.

Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

Çözüm 2:

Dokuz nokta çemberinin özelliklerini kullandıktan sonra Erdös-Mordell eşitsizliğine göre

$$3R = OA + OB + OC \geq 2\,(OA_1' + OA_2' + OA_3')$$

sonucu elde edilebilir. Aslında ilk çözümde bunun ispatı yapılıyor bize.

Ya da

$$OA' = R\cdot\cos\angle A, OB' = R\cdot\cos\angle B \text{ ve } OC' = R\cdot\cos\angle C$$

eşitlikleri yazılarak problem

$$cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}$$

ye indirgenebilir (Jensen).

Çözüm 3:

Çevrel çemberin merkezi O, $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberi ile yüksekliklerin kesişim noktaları P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilmek üzere A_1 noktasının $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine göre kuvveti: A_1 den çizilen teğetin uzunluğu t_1 olduğundan,

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot A_1Y_1$$

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{t_1^2}{h_1} = A_1P_1$$

ve benzer biçimde t_2, t_3 için de bu eşitlikler yazılarak,

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i$$

bulunur.

Carnot teoremine göre;

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i = A_1P_1 + A_2P_2 + A_3P_3 = R + r$$

dir. Euler eşitsizliğini $(R \geqslant 2r)$ de göz önüne alırsak

$$A_1P_1 + A_2P_2 + A_3P_3 \leqslant \frac{3}{2}R$$

bulunur.

6 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

Çözüm 1:

Belli bir anda, herhangi bir işlemciye girilmemiş sayılarla, işlemcilerin ekranlarındaki sayılara "işlem görecek kalem" diyelim. $n(c)$ ile, c zaman birimi sonundaki işlem görecek kalem sayısını gösterelim. $n(0) = 40+8 = 48$ dir. $\overline{c}$ zaman sonunda istenen toplam elde edilmişse $n(\overline{c}) = 1$ olur. (Burada genelliği yitirmeden her işlemcinin kullanıldığını varsayıyoruz.) Bir zaman biriminde en fazla 8 işlem yapılabilir; ayrıca yine bir zaman biriminde, işlem görecek kalem sayısı, en fazla yarıya indirilebilir. Dolayısıyla,

$$n(c) - n(c+1) \leq \min \left\{ \frac{n(c)}{2}, 8 \right\},$$

ya da eşdeğer biçimde,

$$n(c+1) \geq \max \left\{ \frac{n(c)}{2}, n(c) - 8 \right\}$$

olur. Şimdi $M(0) = 48$; $M(c+1) = \max \left\{ \left\lceil \frac{M(c)}{2} \right\rceil, \ M(c) - 8 \right\}$ sistemine bakalım. ($\lceil x \rceil := x$'ten büyük ya da x'e eşit olan en küçük tamsayıdır.)

$\overline{C}, M\left(\overline{C}\right) = 1$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı; $\hat{C}$ da aranan yanıt ise; $\hat{C} \geq \overline{C}$ dir. $\overline{C}$ yı bulalım:

$$M(0) = 48; \qquad M(1) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{48}{2} \right\rceil, 40\right\} = 40 ;$$

$$M(2) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{40}{2} \right\rceil, 32\right\} = 32 ; \qquad M(3) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{32}{2} \right\rceil, 24\right\} = 24 ;$$

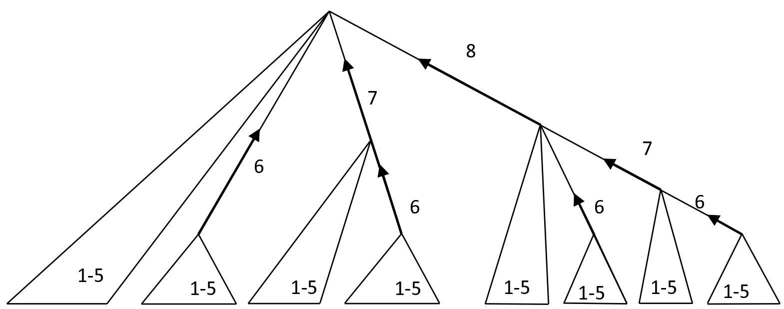
$$M(4) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{24}{2} \right\rceil, 16\right\} = 16 ; \qquad M(5) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{16}{2} \right\rceil, 8\right\} = 8 ;$$

$$M(6) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{8}{2} \right\rceil, 0\right\} = 4 ; \qquad M(7) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{4}{2} \right\rceil, -4\right\} = 2 ;$$

$$M(8) = \max\left\{\left\lceil \tfrac{2}{2} \right\rceil, -6\right\} = 1 .$$

Yani $\overline{C} = 8$ dir. Aranan sayı $\hat{C} \geq 8$ olur.

Aşağıdaki çizelgede, köşeler işlemcileri; üçgenler ilk beş zaman biriminde işlemcilere girilen sayıyı; yönlü kenarlar da, hangi işlemcinin kısmi toplamının hangi işlemciye aktarıldığını göstermek üzere; istenen toplamın 8 zaman biriminde elde edilebileceği görülmektedir. Yani $\hat{C} = 8$ dir.



Kaynak:

Matematik Dünyası 2000-II

Çözüm 2:

Ekranı kararan işlemcinin bir daha kullanılmadığını düşünerek sonuca gitmeye çalışacağım. Böyle düşünmemdeki neden, soruda aktarma yapan işlemcinin ekranında 0 yazar şeklinde bir ifade olmaması.

Büyük ihtimalle çözüm için işlemcilerin ekranının kararmasına gerek yok; ama soruda böyle verdiği için buna göre bir çözüm yapacağım.

Bir işlemciye dışarıdan bir sayı verildiyse o işlemci Y (yükleme) işlemi, başka bir işlemciden sayı alan işlemci T (toplama) işlemi, başka bir işlemciye sayı veren işlemci A (aktarma) işlemi, boşta duran işlemci de B (boşta) işlemi yapmış olsun.

8 işlemci ile 8 birim zamanda (adımda) şöyle bir toplama gerçekleştirilebilir:

İlk 5 sürede, 40 sayı işlemcilere yüklenir.

Sonra $2 \to 1$, $4 \to 3$, $6 \to 5$, $8 \to 7$ şeklinde aktarma yapılır.

Sonra $3 \to 1$, $7 \to 5$ şeklinde aktarma yapılır.

Sonra da $5 \to 1$ şeklinde aktarma yapılır.

Daha az sayıda sürede bu toplama işleminin yapılamayacağını göstereceğiz.

$p \le 5$ işlemci ile sadece yüklemeler (en az) $\left\lceil \dfrac{40}{p} \right\rceil \ge \dfrac{40}{5} = 8$ birim zamanda yapılabilir.

Bu durumda; 8 den az sürede tamamlamak için $p = 6$, $p = 7$ ya da $p = 8$ işlemci kullanılabilir. Hiç kullanılmayan işlemcileri yok gibi düşüneceğiz, yani onlar için B, yani boşta demeyeceğiz.

$p = 6$ işlemci kullanıldığını varsayalım. 40 tane Y yapılacağı için, 7 birim zamanda tamamlamaya çalışacağız. Toplamda $7 \times 6 = 42$ işlem yapılması gerek. 6 işlemcinin toplamlarını birbirine aktarmak için sadece ilk kısmi toplam hesapları için bile $3T$, $3A$ yani 6 işlem gerekecek. $40 + 6 > 42$ olduğu için; $p = 6$ işlemci ile 7 birim zamanda bu toplama işlemi yapılamaz.

$p = 7$ işlemci kullanıldığını varsayalım. $7 \times 7 = 49$ işlem yapılması gerek. $40Y$ işlemi yüklemeler için gerekli. 7 işlemcinin kısmi toplamları için $6T$ ve $6A$ işlem gerekli. $40 + 12 > 49$ olduğu için; $p = 7$ işlemci ile 7 birim zamanda bu toplama işlemi yapılamaz.

$p = 8$ işlemci kullandığımızı varsayalım. $7 \times 8 = 56$ işlem yapılması gerek. $40Y$ işlemi yüklemeler için gerekli. 8 işlemcinin kısmi toplamları için $7T$ ve $7A$ işlem gerekli. Toplamda $40 + 14 = 54$ işlem oldu. 3 tane B durumu (işlemi) bulursak; $p = 8$ işlemci ile 7 birim zamanda bu toplama işleminin yapılamayacağını göstermiş olacağız. İlk aktarma işleminin t_1, ikinci aktarma işleminin $t_2 \ge t_1$, son aktarma işleminin t_7 de yapıldığını varsayalım. Bir adımda en fazla 4 aktarım yapılabileceği ve son aktarımın gerçekleştiği sürede başka aktarım yapılamayacağı için (aksi halde iki aktarımın kısmi toplamları tekrardan aktarılmalı) $t_7 - t_1 \ge t_7 - t_2 \ge 2$ olmalı. Bu da ilk iki aktarımda kullanılan işlemcilerin en az 2 şer kez B durumunda kalacağı anlamına gelir. En az 4 tane B durumu elde etmiş olduk. $(40 + 14) + 4 = 58 > 56$ olduğu için $p = 8$ işlemci ile 7 birim zamanda bu toplama işlemi yapılamaz.

Not: $p = 6, 7$ işlemci için B durumunu kullanmamıza gerek kalmadı. Yani aktarma yapan işlemcinin kararınca bir daha kullanılmadığı varsayımını yapmamıza gerek kalmadı.

$p = 8$ işlemci için $3B$ durumunu aktarma yapan işlemcinin bir daha kullanılabileceği şekilde bulabilirsek; çözümün başındaki kabulü yapmamıza gerek olmayacaktır.

Çözüm 3:

Ekranı kararan işlemcinin bir daha kullanılabildiği durum için de bir çözüm vermeye çalışacağım.

Amacımız, 40 sayının toplamını 8 işlemci kullanarak minimum sürede hesaplamak. Her işlemci, bir zaman biriminde şu işlemlerden birini gerçekleştirebilir:

- bir sayıyı yükleme (Y),
- iki sayıyı toplama (T),
- bir sayıyı başka bir işlemciye aktarma (A), veya
- boşta kalma (B).

8 İşlemci ile 8 Birim Zamanda Çözüm

(1) **Yükleme Aşaması** (5 birim zaman)
- 40 sayı, 8 işlemciye dağıtılır ve yüklenir. Her işlemci bir zaman biriminde bir sayı yükleyebilir.
- 8 işlemci ile her bir zaman biriminde 8 sayı yüklenebilir.
- Bu nedenle, tüm 40 sayının yüklenmesi için gereken süre:

$$\lceil 40/8 \rceil = 5 \,\text{birim zaman.}$$

(2) **Aktarım Aşaması** (3 birim zaman.)
- Adım 1: $P_2 \to P_1$, $P_4 \to P_3$, $P_6 \to P_5$ ve $P_8 \to P_7$.
- Adım 2: $P_3 \to P_1$ ve $P_7 \to P_5$ aktarılır.
- Adım 3: $P_5 \to P_1$. P_1 işlemcisi toplam sonucu barındırır.

Bu aktarım aşaması 3 zaman birimi sürer.

Yükleme ve aktarım aşamalarını toplarsak:

$$5\,(\text{yükleme}) + 3\,(\text{aktarım}) = 8\,\text{birim zaman.}$$

8 Zaman Biriminden Daha Az Sürenin İmkansız Olduğunun Kanıtı

8 zaman biriminden daha az sürede işlemi tamamlamanın imkansız olduğunu kanıtlamak için gereken minimum işlem sayısını hesaplayacağız ve bu işlemlerin mevcut işlemcilerle 8 birimden az sürede gerçekleştirilemeyeceğini göstereceğiz.

t ile toplam birim zamanı, p ile de tüm işlemler yapılırken kullanılan farklı işlemci sayısını ifade edelim.

Her işlemci t zaman biriminde t işlem gerçekleştirebilir. 8 işlemci ile toplam $8t$ işlem yapılabilir.

Toplam İş Yükünün Ana Bileşenleri

1. **Yükleme İşlemleri:**

40 sayının yüklenmesi tam olarak 40 işlem gerektirir.

2. **Aktarım ve Toplama İşlemleri:**

p işlemci kullanıldığı durumda en az $(p-1)$ aktarım ve $(p-1)$ toplama işlemi gerekir, toplamda $2(p-1)$ işlem.

3. **Boşta Kalma İşlemleri:**

- Eğer bir adımda en çok p işlemci aktifse, kalan en az $8-p$ işlemci o adımda boşta kalır.

- Son adımda, en az 6 işlemci boşta kalır; çünkü sadece ya bir işlemciye yükleme yapılabilir ya da birer işlemci toplama ve aktarımda yer alır.

Toplam boşta kalma işlemleri:

$$(t-1)(8-p)+6$$

Toplam İş Yükü Denklemi

Toplam işlem sayısı şu koşulu sağlamalıdır:

$$\text{Yükleme İşlemleri} + \text{Aktarım} + \text{Toplama İşlemleri} + \text{Boşta Kalma İşlemleri} \leq 8t$$

Yerine koyarsak:

$$40 + 2(p-1) + (t-1)(8-p) + 6 \leq 8t$$

Terimleri açıp:

$$40 + 2p - 2 + 8t - 8 - pt + p + 6 \leq 8t$$

Düzenlersek:

$$p(t-3) \geq 36$$

elde ederiz.

$t = 7$ ise:

$$p(7-3) = 4p \geq 36 \implies p \geq 9$$

olacaktır. Mevcut işlemci sayısı 8 olduğu için bu imkansızdır.

Bu nedenle, $t \geq 8$.

Sonuç:

8 işlemci ile 40 sayının toplamını hesaplamak için gereken minimum süre:

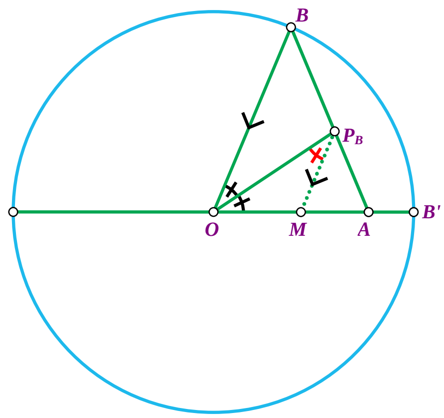
$$\boxed{8\,\text{birim zaman.}}$$

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2000

1 Merkezi O ile gösterilen bir çember ve bu çemberin iç bölgesinde bir A noktası alınıyor. B noktası çemberin üzerinde ve OA doğrusunun dışında olmak üzere, AOB açısının iç açıortayı ile $[AB]$ nın kesişiminin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm 1:

B değiştikçe değişen bu nokta P_B olsun. P_B den OB ye çizilen paralel OA yı M de kesin.



Paralellikten ve iç açıortay teoreminden

$$\frac{MP_B}{OB} = \frac{AP_B}{P_BB} = \frac{OA}{OB+OA} \Rightarrow MP_B = \frac{OA \cdot OB}{OB+OA}$$

elde edilir. Paralellikten dolayı

$$MO = MP_B = \frac{OA \cdot OB}{OB+OA} = Sabit$$

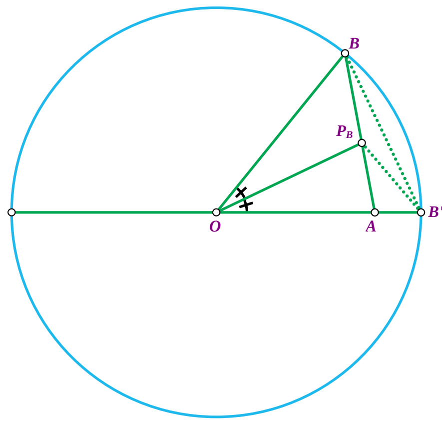
olacağı için M noktası sabit bir noktadır. P_B nin M ye uzaklığı da sabit olduğu için P_B, M merkezli $\frac{OA \cdot OB}{OB+OA}$ yarıçaplı çember üzerindedir. Soruda $B \notin OA$ dediği için geometrik yer M merkezli çemberin O dan geçen çapı hariç kısmıdır.

Not:

Burada es geçsek de, geometrik yer problemlerinde prensip gereği tersi de gösterilir. Yani bulunan geometrik yer üzerinde bir nokta alınıp, sorudaki şartı sağladığı sınanır. Bu, şunun için yapılır. Belki bulduğumuz küme bir çember değil, yaydır. Doğru değil doğru parçasıdır. Doğru parçası değil, doğru parçasına ait bir alt kümedir.

Çözüm 2:

$[OA$ çemberi B' de kessin.



$P_BB = P_BB'$. Açıortay teoreminden $\dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{AO}{OB} = \dfrac{AP_B}{P_BB} = \dfrac{AP_B}{P_BB'}$ elde edilir. P_B ile O, A ve B' noktalarına olan uzaklıkları oranı sabit $\left(\frac{OA}{OB}\right)$ olan noktalardır. Öyleyse P_B, A ve B' noktalarına ait O dan geçen Apolonyus çemberi üzerindedir.

$\boxed{2}$ Her n pozitif tamsayısı için

$$P_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$$

şeklinde tanımlanıyor. Her a pozitif tamsayısı için,

$$P_n(x) = (1 + ax + x^2R(x))Q(x)$$

olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı ile, katsayıları tam sayılar olan $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

n, ilk k asal sayının çarpımı olsun.

$k = 2$ için, $n = 6$ dır.

$$P_6(x)(x-1) = x^6 - 1 = (x-1)\underbrace{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}_{x^2R(x)+2x+1} \cdot \underbrace{\left(x^2-x+1\right)}_{Q(x)}.$$

$a = 2$ için $n = 6$, $R(x) = x + 2$ ve $Q(x) = x^2 - x + 1$ olarak bulunabiliyor.

Genel olarak $(\cdots + x + 1)$ şeklinde a ifadeyi yan yana çarpasak, ax li bir terim elde ederiz.

$k = 3$ için, $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

$$P_{30}(x)(x-1) = x^{30} - 1$$

polinomunun $x^2 - 1$, $x^6 - 1$, $x^{10} - 1$ polinomları ayrı ayrı böler. Ama hep birlikte bölmez.

Benzer şekilde $x - 1$, $x + 1$, $x^3 - 1$, $x^3 + 1$, $x^5 - 1$, $x^5 + 1$ polinomları da $x^{30} - 1$ i ayrı ayrı böler. Ama hep birlikte bölmez.

Bu durumda $x^2 + x + 1$ ile $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomları da $x^{30} - 1$ i ayrı ayrı böler. Bu iki polinomun ebob ları 1 ise $x^{30} - 1$ i ikisi birlikteyken böler. Yani

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)|x^{30}-1$$

Bu iki polinomun aralarında asal olduğu

$$x^4+x^3+x^2+x+1=x^2\left(x^2+x+1\right)+x^2+x+1-x^2=\left(x^2+x+1\right)(x+1)-x^2$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda

$$x^{30}-1=Q(x)(x-1)\underbrace{(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}_{\cdots+3x+1}$$

şeklinde n sayısı ile $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomları bulunabilir.

İddia:

$p>q$ asal sayıları için,

$$\operatorname{ebob}\left(x^p-1,x^q-1\right)=x-1$$

İspat:

$(p,q)=1$ olduğu için, Öklid algoritması uyguladığımızda $(x^p-1,x^q-1)=(x^{p \mod q}-1,x^q-1)=\ldots=(x^r-1,x^{\operatorname{ebob}(p,q)}-1)=x-1$ olacaktır. ■

Soruya geri dönersek,

$k=a$ için, n sayısı ilk a asal sayının çarpımı olacak.

Her $p|n$ asal sayısı için $x^p-1|x^n-1$ olacağı aşikar. Bu durumda $1+x+\cdots+x^{p-1}|x^n-1$.

Bu şekilde asal sayılardan a tane olduğu için, en az a tane $(1+x+\ldots)$ şeklinde bölen vardır. Bu a bölenin hepsinin ikişerli olarak aralarında asal olduğunu yukarıdaki iddiada gösterdik. Bu durumda bu a bölenin hepsi birlikte çarpandır. Bu durumda

$$x^n-1=(x-1)\underbrace{\ldots}_{Q(x)}(1+ax+\underbrace{\ldots}_{x^2R(x)})$$

elde edilir.

Not:

n asalken $P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ polinomlarının indirgenemez olduğunu Eisenstein Kriteri ile de gösterebiliriz.

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
P_{n(n+1)}(x) &= x^{n^2+n-1}+x^{n^2+n-2}+\cdots+x+1\\
&= \frac{x^{n(n+1)}-1}{x-1}\\
&= \frac{x^n-1}{x-1}\cdot(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{n\cdot n})\\
&= P_n(x)\cdot P_{n+1}(x^n)
\end{aligned}$$

İddia: $P_{n+1}(x)\mid P_{n+1}(x^n)$

İspat: $P_{n+1}(x^n)(x-1)=(x^{n+1}-1)S(x)+0$ olduğunu göstermemiz isteniyor.

$(1+x^n+\cdots+x^{n^2})(x-1)=(x+x^{n+1}+x^{2n+1}+\cdots+x^{n\cdot n+1})-(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{n^2})$.

$P_{n+1}(x^n)(x-1)$ sayısının $x^{n+1}-1$ ile bölümünden kalanı bulmak için $x^{n+1}=1$ yazacağız.

$(n,n+1)=1$ olduğu için $0\cdot n,1\cdot n,\ldots,n\cdot n$ sayıları $\mod (n+1)$ de tam kalan sistemi oluşturur. Yani, 0 dan n ye tüm kalanları alır. (İspatı: $xn\equiv yn \pmod{n+1}\implies (x-y)n\equiv 0 \pmod{n+1}\implies x\equiv y \pmod{n+1}$)

Dolayısıyla bunların 1 fazlaları da, $1+0\cdot n,1+1\cdot n,\ldots,1+n\cdot n$ sayıları da, $\mathrm{mod}(n+1)$ de tam kalan sistemi oluşturur.

O halde $P_{n+1}(x^n)(x-1)$ polinomu $x^{n+1}-1$ ile kalansız bölünür.■

İddianın sonucu olarak da $P_{n(n+1)}(x)=P_n(x)\cdot P_{n+1}(x^n)=P_n(x)\cdot P_{n+1}(x)Q(x)$ elde edilir.

Şimdi de sorunun çözümü için tümevarım uygulayalım.

$a = 1$ için $n = 2$, $R(x) = 0$, $Q(x) = 1$ bulunur.

a için $n, Q(x), R(x)$ bulunduğunu varsayalım.

O halde;

$$\begin{aligned} P_{n(n+1)} &= P_n(x) \cdot P_{n+1}(x) Q'(x) \\ &= (1 + ax + x^2 R(x))(1 + x + \cdots + x^n) Q'(x) \\ &= (1 + (a+1)x + R'(x)) Q'(x) \end{aligned}$$

olacağı için $a + 1$ için de $n(n+1)$ sayısı, $R'(x)$, $Q'(x)$ polinomları bulunur.

Aşağıdaki tabloda a sayısına karşılık gelen n sayısını gözlemleyebiliriz:

a	1	2	3	4	...
n	1	2	6	42	...

Kaynak: Barış Koyuncu'nun AoPS deki çözümü biraz değiştirilerek buraya taşınmıştır.

$\boxed{3}$ Tüm $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ için tanımlanmış ve en çok n sıralı (x, y) ikilisinde farklı değerler alan her $f(x, y)$, $g(x, y)$ fonksiyon çifti için $x \notin X$ ve $y \notin Y$ iken $f(x, y) = g(x, y)$ olmasını sağlayacak biçimde, her biri 1000 elemanlı $X, Y \subset \{1, 2, \ldots, 2000\}$ kümeleri bulunabiliyorsa, n tamsayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm 1:

Tanım:

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & f(x, y) = g(x, y) \\ 0, & f(x, y) \neq g(x, y) \end{cases}$$

olsun.

x_i sayısı verildiğinde, y bilinmeyeni için $h(x_i, y) = 1$ denkleminin çözüm kümesi S_i olsun.

$x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ dizisi; $\{1, 2, \ldots, 2000\}$ kümesinin

$$2000 \geq |S_1| \geq |S_2| \geq \cdots \geq |S_{2000}| \geq 0$$

şeklinde bir permütasyonu olsun.

Gözlem:

$$\left| \bigcap_{i=1}^{1000} S_i \right| \geq 1000$$

olduğunda, $\bigcap_{i=1}^{1000} S_i$ kümesinin herhangi 1000 elemanı, $y_1, y_2, \ldots, y_{1000}$ olsun.

$X = \{x_{1001}, x_{1002}, \ldots, x_{2000}\}$ ve $Y = \{y_{1001}, y_{1002}, \ldots, y_{2000}\}$ olarak seçildiğinde, $x \notin X$ ve $y \notin Y$ iken, yani $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{10000}\}$ ve $y \in \{y_1, y_2, \ldots, y_{1000}\}$ iken, $1 \leq i, j \leq 1000$ olmak üzere; her (x_i, y_i) çifti için $h(x_i, y_i) = 1$ olacağı tanımda belirtilmişti.

Demek ki, $\left| \bigcap_{i=1}^{1000} S_i \right| \geq 1000$ olduğunda, her $h(x, y)$ için, her biri 1000 er elemanlı $X, Y \subset \{1, 2, \ldots, 2000\}$ kümeleri bulunabiliyor.

İddia 1:

$n = 3000$ olduğunda, herhangi bir $h(x, y)$ için bahsedilen şekilde X ve Y kümeleri bulunabilir.

İspat:

$S_i' = \{1, 2, \ldots, 2000\} - S_i$ olsun.

Tanım gereği,

$$2000 \geq |S_1| \geq |S_2| \geq \cdots \geq |S_{2000}| \geq 0$$

olduğu için,

$$0 \le |S'_1| \le |S'_2| \le \cdots \le |S'_{2000}| \le 2000$$

olacaktır.

$y \in S'_i$ ise $h(x_i, y) = 0$ olacağı tanımda verilmişti. Bu durumda $h(x, y) = 0$ olan ikililerin sayısı $n = 3000$ olduğu için,

$$\sum_{i=1}^{2000} |S'_i| \le n = 3000$$

dir. $|S'_{1000}| > 2$ olsaydı,

$$n = 3000 \ge \sum_{i=1}^{999} |S'_i| + \sum_{i=1000}^{2000} |S'_i| \ge \sum_{i=1}^{999} |S'_i| + 3 \cdot 1001 \ge 3003$$

olacaktı. Demek ki, $|S'_{1000}| \le 2$.

$|S'_{1000}| = 2$ olduğunda,

$$n = 3000 = \sum_{i=1}^{1000} |S'_i| + \sum_{i=1001}^{2000} |S'_i| \ge \sum_{i=1}^{1000} |S'_i| + 2 \cdot 1000 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1000} |S'_i| \le 1000$$

olacaktır. $|S'_{1000}| < 2$ olduğunda, $0 \le |S'_i| \le |S'_2| \le \cdot \le |S'_{1000}| \le 1$ olduğu için, yine

$$\sum_{i=1}^{1000} |S'_i| \le 1000$$

olacaktır.

Her iki durumda da $\sum\limits_{i=1}^{1000} |S'_i| \le 1000$ olduğu için, $\bigcup\limits_{i=1}^{1000} |S'_i|$ kümesi en fazla 1000 elemanlı olabilir. Diğer bir deyişle, $\bigcup\limits_{i=1}^{1000} |S'_i|$ kümesinin elemanı olmayan en az 1000 tane $a_k \in 1, 2, \dots 2000$ elemanı bulunabilir. a_k elemanı $\bigcup\limits_{i=1}^{1000} |S'_i|$ kümesinin dışında olduğu için, $a_k \notin S'_i$, yani $a_k \in S_i$ dir. Demek oluyor ki, bu en az 1000 eleman $S_1, S_2, \dots, S_{1000}$ kümelerinin hepsi tarafından içeriliyor. Yani

$$\left| \bigcap_{i=1}^{1000} S_i \right| \ge 1000$$

dir. Bu şart sağlandığında, her $h(x, y)$ için, her biri 1000 er elemanlı $X, Y \subset \{1, 2, \dots, 2000\}$ kümeleri bulunabildiğini gözlem bölümünde göstermiştik. ■

İddia 2:

3001 (x, y) çifti için 0 değeri alan aşağıdaki $h(x, y)$ fonksiyonu için, bahsedilen şekilde X ve Y kümelerini bulmak mümkün değildir.

Her $a \in \{1, 2, \dots, 2000\}$ için $h(a, a) = 0$,

$h(1, 2) = h(2, 3) = \cdots = h(1000, 1001) = h(1001, 1) = 0$,

aksi takdirde $h(x, y) = 1$.

İspat:

X ve Y kümelerinin bulunabildiğini varsayalım.

$X' = \{1, 2, \dots, 2000\} - X$ ve $Y' = \{1, 2, \dots, 2000\} - Y$ olsun. $|X'| = |Y'| = 1000$ dir.

Herhangi $a \in \{1, 2, \dots, 2000\}$ sayısı için, $a \in X'$ ise, $a \in Y'$ olmak zorunda. Aksi takdirde, $a \in X'$ ve $a \in Y'$ iken $h(a, a) = 1$ olması gerekecek ki, bu da $h(x, y)$ fonksiyonunun tanımına aykırı.

Demek ki X' ve Y' kümeleri ayrık. $|X'| = |Y'| = 1000$ olduğu için de $X' \in Y' = \{1, 2, \dots, 2000\}$ dir.

$1 \in X'$ olduğunu varsayalım. $h(1, 2) = 0$ olduğu için, $2 \notin Y'$ olmalı. Bu durumda $2 \in X'$ dür.

Bunu böyle devam ettirirsek, $1000 \in X' \Rightarrow 1001 \notin Y' \Rightarrow 1001 \in X'$ elde edilir. Halbu ki, $|X'| = 1000$ elemanlı, 1001 elemanlı değil.

Benzer şekilde, $1 \in Y'$ olduğunu varsayalım. $h(1001, 1) = 0$ olduğu için, $1001 \notin X'$ olmalı. Bu durumda $1001 \in Y'$ dür.

Bunu böyle devam ettirirsek, $3 \in Y' \Rightarrow 2 \notin X' \Rightarrow 2 \in Y'$ elde edilir. Halbu ki, $|Y'| = 1000$ elemanlı, 1001 elemanlı değil.

Demek ki, $n = 3001$ olduğunda, soruda bahsedilen şekilde X ve Y kümeleri bulmak her zaman mümkün olmayabiliyor. ■

Sonuç:

n tam sayısı en çok 3000 olabilir. ■

Not:

Bu soru aşağıdaki soruyla özdeştir.

$2m \times 2m$ bir matrisin n elemanı 0, diğerleri 1 dir. Bu şekilde herhangi bir matrisin tam olarak m satırını ve m sütununu sildiğimizde tüm elemanları 1 olan $m \times m$ bir matris elde edilebiliyorsa, n nin alabileceği en büyük değerin $3m$ olduğunu gösteriniz.

Bu problemin genel hali literatürde Zarankiewicz problemi olarak geçiyor. Bizim sorumuzdaki özel hali için On the Half-Half Case of the Zarankiewicz Problem makalesine müracaat edebilirsiniz.

Çözüm 2:

Bir önceki çözümün not kısmında belirtilen matris dönüşümünü yaparak, soruyu daha sözel bir dille çözelim:

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & f(x, y) = g(x, y) \\ 0, & f(x, y) \neq g(x, y) \end{cases}$$

olsun.

Sorudaki tanım gereği; $h(x, y)$ fonksiyonu en çok n ikili için 0 değerini alabiliyor. Bu fonksiyona eşdeğer gösterim, elemanlarının en çok n tanesi 0, gerisi 1 olan 2000×2000 bir matris olacaktır.

Bu durumda sorumuz, aşağıdaki soruya dönüşür:

Yeni Soru:

$0 - 1$ lerden oluşan 2000×2000 matris nasıl verilirse verilsin, öyle 1000 satır ve öyle 1000 sütun silindiğinde geride sadece 1 lerden oluşan 1000×1000 matris kalabiliyorsa; bu matristeki 0 ların sayısı en çok kaç olabilir?

Biraz inceleme yapalım.

$n = 0$ ise matriste sadece 1 ler vardır. Bu durumda hangi 1000 satır ve 1000 sütunu silersek silelim geriye 1 lerden oluşan 1000×1000 bir matris kalır.

$n = 1$ ise matriste bu tek 0 değerini içeren sütunun yer aldığı 1000 sütunu ve herhangi 1000 satırı silersek; yine sadece 1 lerden oluşan 1000×1000 lik bir matris elde ederiz.

Soru bizden n yi kaça kadar artırabileceğimizi bulmamızı istiyor.

M_1 matirisinden bazı sütunların yerini değiştirerek M_2 matrisini elde edelim. M_1 den 1000 satır ve 1000 sütun silerek istediğimiz 1000×1000 matrisi elde ettiğimizi düşünelim. Aynı satırları ve M_1 deki sütunların M_2 deki karşılıklarını silersek de M_2 matrisinden sadece 1 lerden oluşan 1000×1000 matrisi elde ederiz. O halde; çözüme giderken sütunların yerini değiştirebiliriz.

Şimdi de, sütunları içerdikleri 0 sayısına göre azalan sırada sıraladığımız yeni bir matris düşünelim.

$n = 3000$ değerini inceleyelim.

- 1001. sütunda 2 den fazla sayıda 0 olamaz. Aksi halde, ilk 1000 sütunda 3000 den fazla 0 olur.
- 1001. sütunda tam olarak 2 tane 0 olduğunu varsayalım. Bu durumda ilk 1000 sütunda en az 2000 tane 0 olacaktır. $n = 3000$ olduğu için de ikinci 1000 sütunda en fazla 1000 tane 0 olabilir.

- 1001. sütunda tam olarak 1 tane 0 olduğunu varsayalım. Bu durumda ikinci 1000 sütunda yine en fazla 1000 tane 0 olacaktır.

Her durumda, ikinci 1000 sütunda en fazla 1000 tane 0 olacaktır.

İlk 1000 sütunu sildiğimizi varsayalım. İkinci 1000 sütundan 0 ları içeren satırları silelim. Toplamda en fazla 1000 tane 0 olacağı için silinecek satırların sayısı da en fazla 1000 olacaktır. 1000 e tamamlamak için geriye kalanlardan istediğimiz (rastgele) satırları da silerek sadece 1 lerden oluşan 1000×1000 bir matris elde ederiz.

O halde, $n = 3000$ için de sorudaki şart sağlanıyor.

$n = 3001$ durumu için; aşağıdaki gibi bir matris oluşturalım:

- İlk 1000 satır için; i. satırın i. ve $(i+1)$. elemanları 0 olsun.
- 1001. satırın 1. ve 1001. elemanları 0 olsun.
- Diğer satırlar için de; i. satırın i. elemanı 0 olsun.

$$
\begin{array}{|ccccc|ccccc|}
\hline
0 & 0 & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & & & & \\
\hline
0 & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Dikkat edilirse, $1000 \times 2 + 2 + 999 = 3001$ tane 0 var.

Silinecek sütunları X kümesi ile, silinecek satırları da Y kümesi ile ifade edelim.

Köşegendeki tüm elemanlar 0 olduğu ve $|X| + |Y| = 2000$ olduğu için $|X \cap Y| = 0$ olmalı. Yani k. sütunu silersek, k. satırı silmememiz lazım. Aksi halde köşegenin üzerinde 0 lardan biri silinmemiş olur.

1. sütunun silindiğini varsayalım. 1. satır silinemeyeceği için 2. sütundaki ilk eleman, bir sütun silme işlemi ile silinmeli. O halde, 1. sütun silindiyse, 2. sütun da silinmeli.

Bu böyle devam ettiğinde 999. sütundan dolayı 1000. sütun; 1000. sütundan dolayı da 1001. sütun silinmeli. Halbuki; silinebilecek sütun sayısı 1000. Bu durumda bir çelişki elde etmiş olduk.

Şimdi de 1. satırın silindiği durumdan başlayalım. 1. satır silindiği için, 1. sütun silinemez. 1. sütun 1001. satırdaki 0 ın silinmesi için 1001. satırın da silinmesi gerekir.

1001. satırdan dolayı, 1000. satır; 1000. satırdan dolayı, 999. satır silinmeli. Bu böyle devam ettiğinde 3. satırdan dolayı; 2. satır da silinecek. Bu durumda silinmesi gereken satır sayısı 1001 olacak. Yine çelişki elde etmiş olduk.

O halde; $n = 0, 1, \ldots, 3000$ değerleri için söz konusu X ve Y kümeleri bulunabiliyor. $n = 3001$ için; öyle kötü bir örnek verilebiliyor ki, 1000 er elemanlı X ve Y kümeleri bulunamıyor.

Bu durumda aradığımız yanıt, en çok $\boxed{3000}$ dir.

$\boxed{4}$ p asal bir sayı olsun. Derecesi p'den küçük olan, katsayıları $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ kümesinde yer alan ve tüm m, n tam sayıları için

$$T(n) \equiv T(m) \pmod{p} \Rightarrow n \equiv m \pmod{p}$$

koşulunu sağlayan bir $T(x)$ polinomunun derecesinin en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm:

$p = 2$ için $T(x) = x$ polinomu verilen denkliği sağlar. Bu durumda $p = 2$ ise $\max\deg(T) = 1 = p - 1$.

$p > 2$ asal sayısı için $T(x) = x^{p-2}$ polinomunu ele alalım.

$m, n \not\equiv 0 \pmod p$ ve $T(n) \equiv T(m) \equiv n^{p-2} \equiv m^{p-2} \pmod p$ olsun.

Her iki tarafı mn ile çarpalım.

$$mn^{p-1} \equiv nm^{p-1} \pmod p$$

ve Fermat'ın Küçük Teoreminden

$$n^{p-1} \equiv m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

olacağı için

$$n \equiv m \pmod p$$

elde edilir.

Yani her $p > 2$ asal sayısı için derecesi $p - 2$ olan ve sorudaki gerektirmeyi sağlayan bir $T(x)$ polinomu bulunabiliyor. Geriye kontrol edilmesi gereken tek bir sayı kalıyor: $p - 1$.

$T(x) = a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0$ polinomu verilen şartı sağlasın. $i \not\equiv j$ olduğunda $T(i) \equiv T(j)$ olamaz. Bu durumda tüm $T(i)$ sayıları farklıdır. Yani $T(x)$ birebir ve örtendir.

$\sum\limits_{i=0}^{p-1} T(i)$ toplamını iki yoldan sayalım.

Birincisi birebir ve örtenlikten $\sum\limits_{i=0}^{p-1} T(i) \equiv \sum\limits_{i=0}^{p-1} i \equiv \dfrac{(p-1)p}{2}$ elde ederiz. p asal sayısı tek olduğu için sonuç olarak $\sum\limits_{i=0}^{p-1} T(i) \equiv \dfrac{p-1}{2} \cdot p \equiv 0 \pmod p$ elde ederiz.

Diğer yoldan saydığımızda da $T(i)$ lerin toplamının p ye bölünmesi gerekecek.

$T(0) = a_0$

$T(1) = a_{p-1} \cdot 1^{p-1} + \cdots + a_0$

$\vdots$

$T(p-1) = a_{p-1} \cdot (p-1)^{p-1} + \cdots + a_0$

polinomlarını alt alta toplarsak

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} T(i) &= a_{p-1}\left(1^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1}\right) \\ &\quad + a_{p-2}\left(1^{p-2} + \cdots + (p-1)^{p-2}\right) \\ &\quad + \cdots + a_1\left(1 + 2 + \cdots + (p-1)\right) + p \cdot a_0\end{aligned}.$$

Fermat'ın Küçük teoreminden a_{p-1} in parantezinde olan tüm sayılar 1 e denk olacağı için

$\sum\limits_{i=0}^{p-1} T(i) = \underbrace{a_{p-1}(p-1)}_{\not\equiv 0 \pmod p} + a_{p-2}\left(1^{p-2} + \cdots + (p-1)^{p-2}\right) + \cdots + \underbrace{a_1\left(1 + 2 + \cdots + (p-1)\right)}_{\equiv 0 \pmod p} + \underbrace{p \cdot a_0}_{\equiv 0 \pmod p}$ elde ederiz.

İddia:

$0 < a < p - 1$ için $\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^a \equiv \sum\limits_{i=1}^{p-1} i^1 \equiv 0 \pmod p$.

İspat:

Her p asal sayısı için bir g ilkel kökü vardır. (Bunun ispatı için internete bakınız.)

İlkel kök tanımı gereği $j = 1, \ldots, p-1$ için g^j sayıları $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ kümesini örter. Bu durumda herhangi bir $i = 1, 2, \ldots, p-1$ sayısı için buna denk g^j sayısı bulabiliriz.

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^a \equiv \sum_{j=1}^{p-1} (g^j)^a \equiv \sum_{j=1}^{p-1} (g^a)^j \equiv \underbrace{g^a + g^{2a} + \cdots + g^{(p-1)a}}_{\text{Geometrik Seri}} \equiv \frac{g^{pa} - g^a}{g^a - 1} \pmod p$$

$a \neq p-1$ olduğu için $g^a \not\equiv 1 \pmod p$ ve Fermat'ın Küçük Teoremince $g^{pa} \equiv (g^a)^p \equiv g^a$ olacağı için $\dfrac{g^{pa}-g^a}{g^a-1}$ sayısı p ile bölünür. ■

Soruya geri dönersek,

$$\sum_{i=0}^{p-1} T(i) = \underbrace{a_{p-1}(p-1)}_{\not\equiv 0 \pmod p} + \underbrace{a_{p-2}\left(1^{p-2}+\cdots+(p-1)^{p-2}\right)}_{\equiv 0 \pmod p} + \cdots + \underbrace{a_1\left(1+2+\cdots+(p-1)\right)}_{\equiv 0 \pmod p} + \underbrace{p \cdot a_0}_{\equiv 0 \pmod p} \not\equiv 0 \pmod p.$$

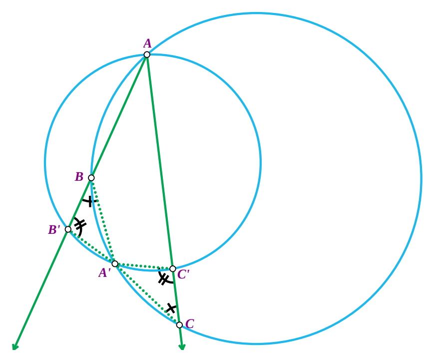
Bu durumda diğer yoldan saydığımızın tersi bir durumla karşılaştık. Yani çelişki elde ettik.

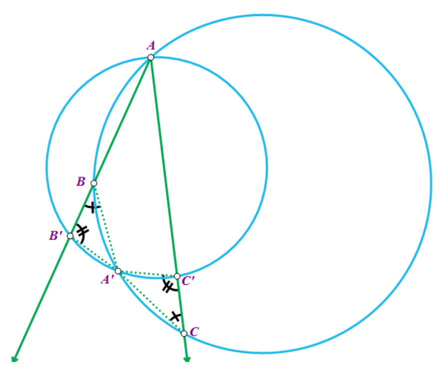
Sonuç olarak, $\max \deg(T) = \max(1, p-2)$ elde etmiş olduk.

5 Bir a pozitif gerçel sayısı ve tepesi A noktasında bulunan bir açı verilmiş olsun. A dan geçen ve bu açının kenarlarını $|AB| + |AC| = a$ koşulunu sağlayan B ve C noktalarında kesen tüm çemberlerin A nın dışında bir ortak noktasının daha bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

$B' \in [AB$ ve $C' \in [AC$ olmak üzere $AB' + AC' = AB + AC = k$ olsun. $B'B = CC'$ olduğu aşikar.





Bu iki üçgenin çevrel çemberleri A dışında A' noktasında kesişsin.

$AB'A'C'$ kirişler dörtgeninde $\angle A'B'B = \angle A'C'C$ ve $ABA'C$ kirişler dörtgeninde $\angle A'CC' = \angle ABB'$ olduğundan $\triangle A'BB' \sim \triangle A'C'C$ olur.

$BB' = CC'$ olduğundan $\triangle A'BB' \cong \triangle A'C'C$ yani $A'B = A'C$ ve $A'B' = A'C'$. Yani AA', BAC açısının açıortayıdır.

$AB' = AC' = \dfrac{a}{2}$ alındığında A' noktası sabit bir üçgende açıortayın çevrel çemberi kestiği nokta, yani sabit bir nokta olacaktır.

Demek ki (ABC) çemberlerinin hepsi A' noktasından geçer.

Çözüm 2:

$\angle BAC = \alpha$ olsun. (ABC) ile A açısının açıortayı P noktasında kesişsin. Ptolemy teoreminden

$$(AB + AC) \cdot BP = AP \cdot BC.$$

BCP üçgeninde Sinüs teoreminden $\dfrac{BC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{BP}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ elde edilir.

İki eşitliği birleştirirsek

$$AP = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} = Sabit$$

elde ederiz. AP sabit ve $|AP|$ sabit olduğuna göre P noktası da sabittir. Tüm ABC üçgenlerinin çevrel çembeleri sabit P noktasından geçer.

6 Her $x \in [0,1]$ için $f^n(x) = x$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayının bulunmasını olanaklı kılan tüm $f : [0,1] \to [0,1]$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.
($x \in [0,1]$ olmak üzere, $f^n(x)$; $f^1(x) = f(x)$ ve her k pozitif tam sayısı için $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$ bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor.)

Çözüm:

$f(a) = f(b) \Rightarrow f^n(a) = f^n(b) = a = b$ olacağı için f birebir ve örtendir. Bu durumda sürekli f fonksiyonu ya artandır ya azalandır. (Aksi durumda, en az iki nokta için f aynı değeri alırdı.)

(a) f azalan olsun.
$f(0) = 1$ ve $f(1) = 0$ olmalı. Bu durumda fonksiyon $y = x$ doğrusunu bir $0 < k < 1$ noktasında kesmeli. Bu noktada $f(k) = k$ dır.
$0 < a < k$ şeklinde bir sayı alalım. Bu sayı için $f(a) = b$, $f(b) = c$ olsun.
(i) $f^2(a) = c > a$ olarak kabul edelim.
$b > k > c > a$ olduğu için $f(a) > f^2(a) > a$ dır.
Her iki tarafın f sini alırsak, (f azalan bir fonksiyon olduğu için) eşitsizlik yön değiştirecektir.
Bu durumda $f^2(a) < f^3(a) < f(a)$ olur. Bir önceki eşitsizliğimizdeki $a < f^2(a)$ ifadesini de bu yeni eşitsizliğe eklemlersek $a < f^2(a) < f^3(a) < f(a)$ ele ederiz.
Her tarafın tekrar f sini alırsak, $f(a) > f^3(a) > f^4(a) > f^2(a) > a$ elde edeceğiz.
Sonuç olarak $f^n(a)$ sürekli $f(a)$ ile $f^2(a)$ arasında yer alıyor. Bu durumda $c > a$ için $f^n(a) \neq a$ olduğunu gözlemlemiş olduk.
(ii) $f^2(a) = c < a$ olarak kabul edelim.
$b > k > a > c$ olduğu için $f(a) > a > f^2(a)$.
Her iki tarafın f sini alırsak $f^2(a) < f(a) < f^3(a)$. Elde edilen eşitsizliği $f^2(a) < a < f(a)$ ile birleştirirsek $f^2(a) < a < f(a) < f^3(a)$ elde edeceğiz.
f almaya devam edersek;
$f^3(a) < f(a) < f^2(a) < f^4(a) \Rightarrow f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a)$, dolayısıyla da $f^n \notin \left[f(a), f^2(a)\right]$ elde edeceğiz. $a \in \left(f(a), f^2(a)\right)$ olduğu için de $c < a$ için $f^n(a) \neq a$ elde etmiş olduk.
Geriye sadece bir ihtimal kalıyor.
(iii) $f^2(a) = c = a$.
Bu durumda her x için $f^2(x) = x$ olacaktır. Bu tarzda fonksiyonların genel tanımını ise şöyle yapabiliriz.
g fonksiyonu; $0 < k < 1$ için $g : [0,k] \to [k,1]$, $g(0) = 1$, $g(k) = k$ olacak şekilde sürekli ve azalan bir fonksiyon olarak tanımlansın.
Bu durumda soruda aradığımız azalan f fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , 0 \leq x \leq k \\ g^{-1}(x) & , k < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde olacaktır.

(b) f artan olsun.
$f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olacaktır.
(i) $f(a) > a \Rightarrow f(f(a)) > f(a) > a \Rightarrow f^n(a) > a$
ve
(ii) $f(a) < a \Rightarrow f(f(a)) < f(a) < a \Rightarrow f^n(a) < a$
olduğu için geriye sadece
(iii) $f(a) = a$
kalıyor.
Bu durumda tek artan f fonksiyonu $f(x) = x$.

Not:

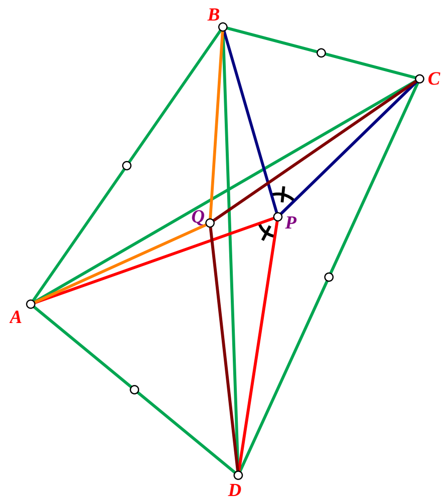
Bu sorunun benzeri, Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri kitabında (5. Basım - 2003, Syf. 220, Problem 6.19) geçmektedir.

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2001

1 Konveks bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarının orta dikmeleri bu dörtgenin iç bölgesindeki bir P noktasında; $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri de dörtgenin iç bölgesindeki bir Q noktasında kesişiyor. $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ ise, $\widehat{AQB} = \widehat{CQD}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\angle APD = \angle BPC$ olduğu için $\angle BPD = \angle APC$ ve $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{PD}{PA} = 1$ olduğu için de $K.A.K$ dan $\triangle PAC \cong \triangle PDB$ elde edilir. Yani $AC = BD$ dir.



Benzer mantıkla $\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{QD}{QC} = \dfrac{BD}{AC} = 1$ olduğu için $K.K.K$ dan $\triangle QBD \cong \triangle QAC$ eşliği elde edilir. Bu durumda $\angle AQC = \angle BQD$ elde edilir. Buradan da

$$\angle AQC - \angle BQC = \angle BQD - \angle BQC \Rightarrow \angle AQB = \angle CQD$$

elde edilir.

2 Bir $(x_n)_{-\infty<n<\infty}$ gerçel sayı dizisi, her n tam sayısı için,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 10}{7}$$

bağıntısını sağlıyor. Bütün n tam sayıları için $x_n < M$ olmasını sağlayan bir M gerçel sayısı varsa, x_0 teriminin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm:

İddia: $x_0 \in [0, 5]$ için bir M sayısı bulunabilir.

İspat:

$\dfrac{x_{-1}^2 + 10}{7} > 0$ olduğundan x_0 negatif olamaz, aslında her n için $x_n > 0$'dır.

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2 + 10}{7} - x_n = \dfrac{x_n^2 - 7x_n + 10}{7} = \dfrac{(x_n - 5)(x_n - 2)}{7}$, $x_n \notin [2, 5]$ için sıfırdan büyüktür yani $x_n \notin [2, 5]$ için dizi artandır.

$x_0 > 5$ için $x_n < M$ olmasını sağlayan bir M gerçel sayısının varlığı için dizinin üstten limiti var olmalıdır, $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ dersek $L = \dfrac{L^2+10}{7}$ için $L = 2$ veya $L = 5$ elde edilir fakat dizinin artanlığından bu mümkün değildir.

$5 \geq x_0 \geq 2$ için $x_n \geq 0$ olduğundan $5 \geq x_0 \geq 2 \iff 25 \geq x_0^2 \geq 4 \iff 35 \geq x_0^2+10 \geq 14 \iff 5 \geq \dfrac{x_0^2+10}{7} = x_1 \geq 2$ elde edilir tümevarımdan tüm $n > 0$ için $5 \geq x_n \geq 2$'dir. $5 \geq \dfrac{x_{-1}^2+10}{7} \geq 2$ aynı şekilde $5 \geq x_{-1} \geq 2$ elde edilir tümevarımdan $n < 0$ için $5 \geq x_n \geq 2$ olur.

$2 > x_0$ için $x_n \geq 0$ olduğundan $2 > x_0 \iff 4 > x_0^2 \iff 14 > x_0^2+10 \iff 2 > \dfrac{x_0^2+10}{7} = x_1$ elde edilir tümevarımdan $n > 0$ için $x_n < 2$ elde edilir. $2 > \dfrac{x_{-1}^2+10}{7}$'den aynı şekilde $2 > x_{-1}$ elde edilir tümevarımdan $n < 0$ için $x_n < 2$ elde edilir, kanıtı bitirdiği açıktır.

3 Aynı büyüklükteki n parçadan oluşan bir keki, her parçayı en çok bir kez keserek, k kişi arasında eşit olarak paylaştırmak istiyoruz. n nin pozitif bölenlerinin sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; k nin böyle bir paylaşımı olanaklı kılan değerlerinin sayısının $n + d(n)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$[x]$ ile x i aşmayan en büyük tamsayıyı gösterelim.

$k \leq n$ için kişi başına düşen kek bir parçadan az olmadığından, kekleri 1 den n ye kadar numaralandırdığımızı düşünürsek, her $1 \leq i \leq k$ için sadece $[i.\frac{n}{k}]$ numaralı kekleri bir kez kesmemiz yeterli olacaktır. Dolayısıyla böyle bir paylaşımın yapılabileceği açıktır.

Şimdi $k > n$ durumunu inceleyelim. k istenen şekilde bir paylaşımı olanaklı kılsın. Kişi başı düşen kek bir parçadan az olacağından hiç kesilmemiş bir kek olamaz. Demek ki her kek tam olarak bir kez kesilmiş ve bu parçalar iki kişi arasında paylaştırılmıştır. Köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ile isimlendirilmiş bir graf düşünelim. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ burada kekleri bölüştüreceğimiz k kişiyi temsil ediyor. n parça kekten her biri için o kek i. kişi ile j. kişi arasında bölüştürülmüşse A_iA_j kenarını çizelim. Her kek tam olarak iki kişi arasında bölüştürüldüğünden grafımızda tam olarak n kenar bulunmaktadır.

İlk olarak, bu grafta hiç ***çevrim*** bulunmadığını gösterelim. Genelliği bozmadan, diyelim ki grafta $A_1A_2\ldots A_mA_1$ grafta yer alan bir ***çevrim*** olsun. Bu durumda bu m kişi kendi aralarında en az m kek paylaşmış olur. Öyleyse bu m kişiden öyle birisi vardır ki en az 1 kek almıştır. Fakat $k > n$ olduğundan, kişi başı düşen kek miktarı 1 den az olmalıdır ki bu çelişkidir. Demek ki grafımızda ***çevrim*** yoktur.

Lemma: İçerisinde hiç ***çevrim*** bulundurmayan bir grafın köşeleri kesişmeyen bağlantılı ağaçların bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Yani grafın köşeleri her bir grup bağlantılı ağaç oluşturacak şekilde gruplara ayıracağız ve kenarlar sadece aynı grup içerisinde yer alan köşeler arasında olacaktır.

İspat: Bir köşe alalım ve bu köşeden ulaşabileceğimiz tüm köşeleri bu köşe ile aynı gruba dahil edelim. Eğer dışarıdan bu gruba kenar olamaz, yoksa biz ilk seçtiğimiz köşeden ulaşabileceğimiz tüm köşeleri o köşe ile aynı gruba dahil etmiş olmazdık. Ayrıca grafta hiç ***çevrim*** bulunmadığından ilk grup bağlantılı bir ağaçtır. Her defasında kalan köşeler içinden bir tane seçip aynı işlemi tekrarlarsak, grafın köşelerini kesişmeyen bağlantılı ağaçların birleşimi olarak ifade etmiş oluruz, Lemma'nın ispatı tamamlandı.

Şimdi sorumuza dönelim.

Başlangıçtaki grafımızı G ile isimlendirelim. Bu grafı ayırdığımız kesişmeyen bağlantılı ağaçları da $G_1, G_2, \ldots, G_s$ ile isimlendirelim. G_i deki köşe sayısı v_i, kenar sayısı da e_i olsun.

Teorem: Bağlantılı bir ağacın kenar sayısı köşe sayısından bir eksiktir.

Yukarıdaki teoremden $e_i = v_i - 1$ diyebiliriz. Öte yandan G grafı k köşe ve n kenara sahip olduğundan $v_1+v_2+\cdots+v_s = k$ ve $e_1+e_2+\cdots+e_s = n$ bulunur. Son eşitlikte $e_i = v_i - 1$ yazarsak $v_1+v_2+\ldots v_s - s = n$ buluruz ve dolayısıyla $k - s = n$ yani $s = k - n$ elde ederiz. Her bir G_i grafı için o grafta toplam e_i kenar vardır, yani e_i kek dağıtılmıştır. Herkesin eşit miktarda kek alması gerektiğinden, bu grafta her köşe $\dfrac{e_i}{v_i}$ kek almıştır.

Dolayısıyla $e_i = v_i - 1$ olduğundan ve herkesin eşit miktarda kek alması gerektiğinden $\dfrac{v_i - 1}{v_i} = 1 - \dfrac{1}{v_i}$

ifadelerinin her biri eşit olmalıdır. Yani $v_1 = v_2 = \cdots = v_s$ olmalıdır. $v_1 + v_2 + \cdots + v_s = k$ ve $s = k - n$ olduğundan $v_i = \dfrac{k}{k-n}$ olmalı. Öyleyse $k - n | k$ yani $k - n | n$ olmalıdır. Bu da ancak, uygun bir $d | n$ için $k = n + d$ sağlanırken mümkündür. Böyle d lerin sayısı da $d(n)$ olduğundan k ların sayısı en fazla $n + d(n)$ dir.

Geriye sadece, her $d|n$ için $k = n + d$ değerlerinin sağladığını göstermek kaldı. $n = dm$ olsun. Kişi başı düşen kek miktarı $\dfrac{n}{k} = \dfrac{m}{m+1}$ parça olmalı. n parça keki yan yana dizip bütün bir kek gibi düşünelim. Ve bu keki en soldan başlayarak, her n parçanın $\dfrac{m}{m+1}$ i büyüklüğünde parçalara ayıralım. $\dfrac{pm}{m+1}$ ve $\dfrac{qm}{m+1}$ tamsayı değilken $[\dfrac{pm}{m+1}] \neq [\dfrac{qm}{m+1}]$ olduğunu ispatlarsak, zaten $\dfrac{pm}{m+1}$ ifadesi $p < m+1$ için tamsayı olmadığından, her kek tam olarak bir parçaya ayrılmış olur ve ispat biter.

Aksini varsayalım, bir (p, q) ikilisi ve tam sayı olmayan bir k rasyonel sayısı için $k = [\dfrac{pm}{m+1}] = [\dfrac{qm}{m+1}]$ olsun. Öyleyse $km + k \leq pm$, $qm \leq km + k + m$ olur. Genelliği bozmadan $p < q$ kabul edelim. $qm \geq pm + m$ olacağından $km + k + m \leq qm \leq km + k + m$ olur, yani $qm = km + k + m$ olmalıdır. $pm \leq qm - m$ olacağından $km + k \leq pm \leq km + k$ olur, yani $\left[\dfrac{pm}{m+1}\right] = k = \dfrac{pm}{m+1}$ olmalıdır. Fakat bu durumda da $\dfrac{pm}{m+1}$ tamsayı olur ki bu varsayımımızla çelişkidir. Demek ki $\dfrac{pm}{m+1}$ ve $\dfrac{qm}{m+1}$ tamsayı değilken $[\dfrac{pm}{m+1}] \neq [\dfrac{qm}{m+1}]$ olur.

Böylece örneğimiz istenen şartı sağlar, tam olarak $n + d(n)$ tane k değeri için uygun bir kesim mümkündür.

4 $3^x + 11^y = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) sıralı pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm:

Denklemi mod8'de inceleyelim: $3^x + 11^y \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$

mod8'de karekalanlar $0, 1, 4$ olabilir. O zaman $3^x + 11^y \equiv 4 \pmod 8$ olmalı. Buradan x çift, y tek veya x tek, y çift olur.

i.

$x = 2k$ olsun.

$(z - 3^k)(z + 3^k) = 11^y$

$z - 3^k = 11^m$

$z + 3^k = 11^{m+n}$

$11^{m+n} - 11^m = 2.3^k$ (Sol taraf her zaman 10'a bölünür; fakat sağ taraf hiçbir zaman bölünmez. Çözüm gelmez.)

ii.

$y = 2m$ olsun. $3^x = (z - 11^m)(z + 11^m)$

$z - 11^m = 3^b$

$z + 11^m = 3^{b+c}$

$3^b(3^c - 1) = 2.11^m$ (Sağ taraf 3'e bölünmez. $b = 0$ olmalı. Aynı zamanda, soruda x, y, z pozitif verildiğinden ve $y = 2m$ olduğundan, m pozitiftir. Sağ taraf 11'e bölünür.)

$3^c \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow c = 5t$ olmalı.

$(3^t - 1)(3^{4t} + 3^{3t} + 3^{2t} + 3^t + 1) = 2.11^m$

$3^t - 1 = 2.11^d$ ve $3^{4t} + 3^{3t} + 3^{2t} + 3^t + 1 = 11^p$

$d = 0$ ise $t = 1$, $c = 5$, $x = 5$, $m = 2$, $y = 2m = 4$, $z = 11^2 + 1 = 122$

$d \geq 1$ ise $3^t \equiv 1 \pmod{11}$

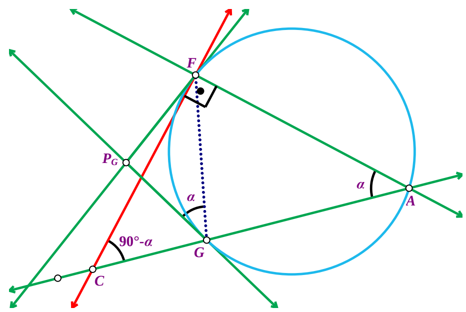
$3^{4t} + 3^{3t} + 3^{2t} + 3^t + 1 \equiv 5 \pmod{11}$ çözüm gelmez.

Tek pozitif tam sayı çözüm üçlüsü $(5, 4, 122)$.

5 A noktasından geçen ve biribirine dik olmayan iki doğru ile bu doğrulardan birinin üstünde A dan farklı bir F noktası verilmiş olsun. A ve F noktalarından geçen ve ikinci doğruyu A dan farklı bir G noktasında daha kesen çemberin F ve G deki teğetlerinin kesişim noktası P_G ise, P_G nin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

FA ya F de dik olan doğru AG yi C de kessin.



Teğet-Kiriş açılardan $\angle FGP_G = \angle P_GFG = \angle FAG = \alpha$, $\angle FP_GG = 180^\circ - 2\alpha$ ve $\angle FCA = 90^\circ - \alpha$ elde edilecektir. $P_GF = P_GG$ ve $\angle FP_GG = 2 \cdot \angle FCA$ olduğu için C noktası P_G merkezli $P_GF = P_GG$ yarıçaplı çember üzerindedir. Bu durumda $P_GC = P_GF$ elde edilir. FC nin orta noktası M olsun. $P_GM \perp FC$ ve $P_GM \parallel AF$ olacaktır. Bu durumda P_G nin AF doğrusuna uzaklığı $\dfrac{FC}{2}$ dir. AFC dik üçgeninde $FC = AF \cdot \tan\alpha$ olduğu için P_G nin AF ye uzaklığı $\dfrac{AF \cdot \tan\alpha}{2}$ elde edilir. AF sabit, $\tan\alpha$ sabit olduğu için P_G noktasının AF den uzaklığı sabittir. Bu durumda P_G noktalarının geometrik yeri AF ye paralel bir doğrudur.

Şimdi de tersini ispatlayalım. Geometrik yer üzerindeki her P_G noktası için, A ve F den geçen çembere P_G noktasından çizilen teğetlerin çembere F de ve diğer doğru üzerinde bir noktada teğet olacağı G noktasının bulunabileceğini göstereceğiz.

P_G nin AF ye uzaklığının $\dfrac{AF \cdot \tan\alpha}{2}$ olduğunu biliyoruz. FA ya F de dik olan doğru diğer doğruyu C de kessin. $FC = \mathrm{AF} \cdot \tan\alpha$ olacağı için P_G den FC ye inilen dikme FC yi ortalayacaktır. Bu durumda $P_GC = P_GF$ olur. P_G merkezli, $P_GF = P_GC$ yarıçaplı çember AC yi G de kessin. $\angle GP_GF = 2 \cdot \angle FCG$ olacağı için $\angle P_GGF = \angle P_GFG = \angle FAG$ olacaktır. Bu durumda P_GG ile P_GF doğruları $\triangle AFG$ nin çevrel çemberine teğet olacaktır.

6 $n \times n$ bir santranç tahtasının birim karelerini, her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için i inci satır ve i inci sütundaki toplam $2n - 1$ kare farklı renklerde olacak biçimde, k renk kullanarak boyamak istiyoruz.

(a) $n = 2001$ ise, $k = 4001$ için böyle bir boyama işleminin yapılamayacağını gösteriniz.

(b) $n = 2^m - 1$ ise, $k = 2^{m+1} - 1$ için bu işlemin gerçekleştirilebileceğini kanıtlayınız.

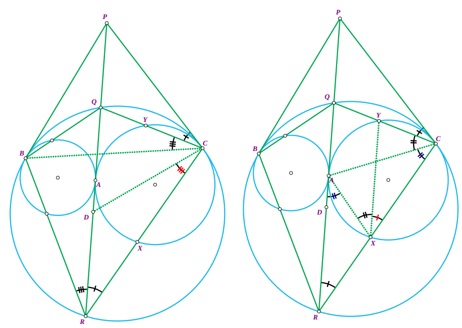
10. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2002

1 $n \geq 2$ bir tam sayı ve $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının bir permütasyonu olmak üzere, gerçel eksen üstünde $1, 2, ..., n$ noktalarına sırasıyla $a_1, a_2, ..., a_n$ elma yerleştiriliyor. A, B, C isimli çocuklara sırasıyla $x_A, x_B, x_C \in \{1, 2, \ldots, n\}$ noktaları veriliyor. Her $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için, kendilerine verilen noktalar k ye en yakın olan çocuklar a_k elmayı paylaşıyor. (Elmalar istenildiği kadar küçük parçalara ayrılabiliyor.) Çocuklardan hiçbiri, diğer ikisinin noktaları aynı kalmak üzere, topladığı elma miktarı eskisine göre kesin artacak biçimde kendisine $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinde yeni bir nokta seçemiyorsa, (x_A, x_B, x_C) ye bir denge konumu diyoruz. n nin hangi değerleri için, bir denge konumunun var olmasını sağlayan uygun bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dağılımının bulunduğunu belirleyiniz.

2 Bir A noktasında dıştan teğet olan iki çember, bir Γ çemberine B ve C noktalarında içten teğettir. Γ çemberinin küçük çemberlere A noktasında teğet olan kirişinin orta noktası D dir. Çemberlerin merkezleri doğrudaş değilse, BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezinin A olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

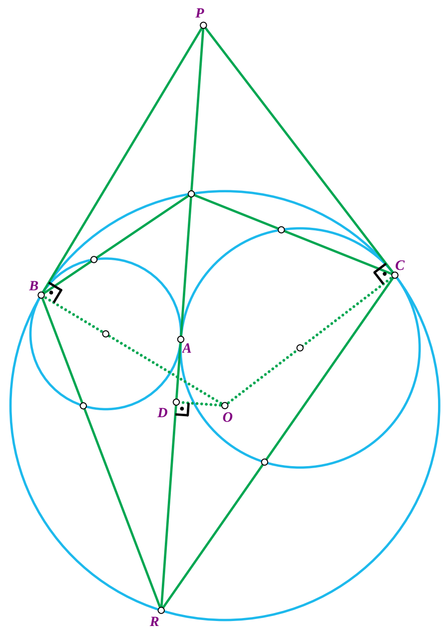
Γ çemberinin B ve C noktalarındaki teğetleri P de kesişsin. OP çaplı çember, B, C ve D noktalarından geçeceği için O, B, C, D noktaları çemberseldir. Bu durumda $\angle BDP = \angle BOP = \angle POC = \angle PDC$ olduğu için, DA doğrusu BCD üçgeninde bir iç açıortaydır.



PD doğrusu çemberi şekildeki gibi Q ve R noktalarında kessin.

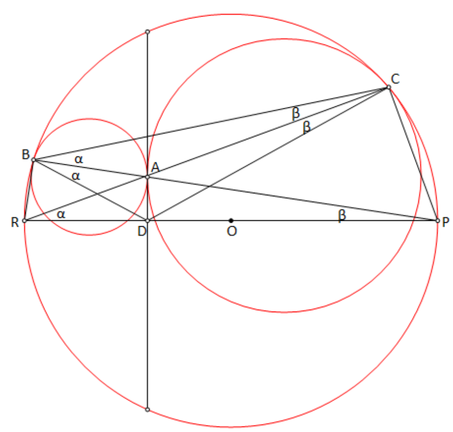
$2 \cdot \angle BRC = \angle BOC = \angle BDC \Rightarrow \angle QDC = \angle BRC$ ve $\angle BRQ = \angle QCB \Rightarrow \angle QDC = \angle QCB + \angle QRC = \angle DCR + \angle QRC \Rightarrow \angle DCR = \angle BCQ$ elde edilir. Bu durumda CA nın $\angle BCD$ nin açıortayı olması için CA nın $\angle QCR$ nin açıortayı olması gerekir. Bu da aslında bilindik bir problem. İspatlayalım.

CQ ile CR, çemberi sırasıyla Y ve X noktalarında kessin.



Teğet-Kiriş açıların eşitliğinden $\angle PRC = \angle QCP = \angle YXC$ olduğu için $XY \parallel RQ$ elde ettik. Bu durumda $\angle ACX = \angle RAX = \angle AXY = \angle ACY$ olur ki, bu da CA nın $\angle QCR$ nin açıortayı olduğu anlamına gelir.

Çözüm 2:



BA ve CA nın çemberi kestiği noktalar sırasıyla P ve R olsun. P ve R noktaları kirişin ayırdığı yayların orta noktalarıdır. *

Buradan $[RP]$ çap olup D noktasında kirişe diktir ($P - D - R$ doğrusal noktalardır) . $[RP]$ çap olduğundan $m\left(\widehat{RPB}\right) = 90^\circ$ ve $m\left(\widehat{PCR}\right) = 90^\circ$ olur. Diğer taraftan $[AD] \perp [RP]$ bulunduğundan $ABRD$ ile $ACPD$ dörtgenleri birer kirişler dörtgenidir. O merkezli çembere göre; $m\left(\widehat{BCR}\right) = m\left(\widehat{BPR}\right)$ ve $m\left(\widehat{CBP}\right) = m\left(\widehat{CRP}\right)$, $ACPD$ ve $ABRD$ dörtgenlerine göre de $m\left(\widehat{ACD}\right) = m\left(\widehat{APD}\right)$ ve $m\left(\widehat{ABD}\right) = m\left(\widehat{ARD}\right)$ olup AB ve AD, BDC üçgeni için birer iç açıortay olduğundan A iç merkezdir.

* ispatı : **burada**

3 Çizge Hava Yolları (ÇHY), Çizge Cumhuriyeti'nin bazı kentleri arasında uçak seferleri düzenlemektedir. Her kentten en az üç farklı kente sefer vardır ve yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak, Çizge Cumhuriyeti'nin

herhangi bir kentinden başka bir kentine ulaşmak mümkündür. Bunu, yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak herhangi bir kentten bir diğerine ulaşmanın hala mümkün kalacağı, ancak kentlerin en az $\dfrac{2}{9}$ undan sadece bir seferin olacağı bir şekilde yapmanın olanaklı olduğunu kanıtlayınız.

$\boxed{4}$ $0 \leq x, y < p$ ve $y^2 \equiv x^3 - x \pmod{p}$ koşullarını sağlayan (x, y) sıralı tam sayı ikililerinin sayısının p olmasına yol açan tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm:

$p = 2$ durumunu aradan çıkaralım. $\{(0,0),(1,0)\}$ olduğu için $p = 2$ sağlar.

Şimdi (x, y) ikililerinin sayısı tek olduğu için denkliğin $y = 0$ ken çözümü olmalı. Aksi halde çözüm sayısı, $(-x, y)$ de bir çözüm olduğundan çift olurdu. Bu durumda $0 \equiv x^3 - x \pmod{p} \Rightarrow x \equiv 0, 1, -1 \pmod{p}$ şeklinde 3 çözüm garanti bulunur. Demek ki geriye kaldı $p - 3$ çözüm. Bu çözümler çiftler halinde olduğu için $\dfrac{p-3}{2}$ daha x değeri için denkliğin sağlanması gerekecek.

Euler kriteri: $y^2 = a \pmod{p} \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

(Fermat'ın Küçük Teoreminden rahatça ispatlanabilir.)

$p = 4k + 1$ olsun. $\dfrac{p-3}{2} = 2k - 1$ adet x değeri arıyoruz.

$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$ denkliğini a sağlıyorsa, $-a$ da sağlar. Ya da tam tersi.

Bu durumda $f(x) = x^3 - x = y^2$ polinomu a değeri için bir kuadratik kalana eşit oluyorsa, $f(a) = -f(-a)$ olduğu için $-a$ değeri için de bir kuadratik kalana eşittir. Yani (a, y_1) bir çözümse $(a, -y_1)$, $(-a, y_2)$, $(-a, -y_2)$ ler diğer çözümlerdir. Yani çift sayıda x değeri vardır; halbuki $2k - 1$ adet bekliyorduk. Çelişki.

$p = 4k + 3$ olsun. $\dfrac{p-3}{2} = 2k$ adet x değeri arıyoruz.

$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2k+1} \equiv 1 \pmod{p}$ olduğu için a bir kuadratik kalan ise $-a$ bir kuadratik kalan olamaz. Ya da tam tersi.

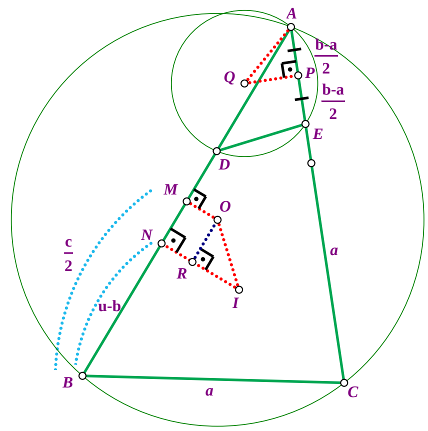
Bu durumda $f(2), f(-2), f(3), f(-3), \ldots, f(2k+1), f(-(2k+1))$ çiftlerinden tam olarak bir tanesi kuadratik kalan olmalı. Bunların adedi de $2k$.

Sonuç olarak $p = 2$ ve $p = 4k + 3$ formundaki asal sayılar için (x, y) ikililerinin sayısı p tanedir.

$\boxed{5}$ Kenar uzunlukları $|BC| < |AC| < |AB|$ koşulunu sağlayan dar açlı bir ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde sırasıyla $|BD| = |BC| = |CE|$ olacak biçimde D ve E noktaları alınıyor. ADE üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklığa eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

İç teğet çember AB ye N de dokunsun. AB nin orta noktası M, AE nin orta noktası P olsun.



$BN = u{-}b$, $BM = \dfrac{c}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{c}{2}-(u-b) = \dfrac{b-a}{2}$ olarak bulunur. Bu durumda $\sin\angle OIN = \dfrac{NM}{OI} = \dfrac{\frac{b-a}{2}}{OI}$ olur.

AQP üçgeninde

$$\sin\angle AQP = \frac{AP}{AQ} = \frac{\frac{b-a}{2}}{AQ}$$

ve

$$2\cdot\angle ADE = \angle EQA \Rightarrow \angle AQP = \angle ADE$$

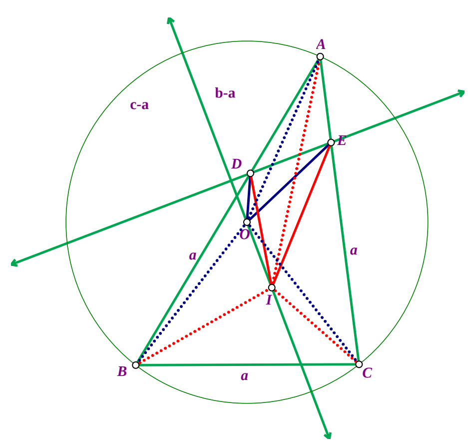
olduğu için de $\sin\angle ADE \ = \dfrac{\frac{b-a}{2}}{AQ}$ olarak bulunur.

Bu durumda,

$$\angle ADE = \angle AQP \Rightarrow OI = AQ$$

olacağı için, $\angle ADE = \angle AQP$ olduğunu göstereceğiz.

OI ile ED yi kesiştirirsek, $\angle ADE = \angle OIN \Leftrightarrow DE \perp OI$ olur.



$OE^2 - OD^2$ farkıyla O nun DE üzerindeki izdüşümünün yerini tespit edebiliriz.

$IE^2 - ID^2$ farkıyla da I nın DE üzerindeki izdüşümünün yerini tespit edebiliriz.

Bu iki fark eşitse, bu durumda $OI \perp DE$ olacaktır.

Bu farkları hesaplamaya çalışalım. Üçgenlerde Stewart Teoremini uygulayacağız.

Stewart'ın Özel Halinden $OE^2 = OC^2 - AE \cdot EC = R^2 - (b-a)\,a$,

Stewart'ın Özel Halinden $OD^2 = OB^2 - AD \cdot DB = R^2 - (c-a)\,a$ olacağı için

$$OE^2 - OD^2 = a\,(c-a) - a\,(b-a) = a\,(c-b)$$

elde ederiz.

I noktası için her şey bu kadar kolay olmayacak tabii ki.

Stewart'tan $IE^2 = \dfrac{IC^2 \cdot AE + AI^2 \cdot CE}{AC} - AE \cdot CE$,

$$IE^2 = \frac{IC^2\,(b-a) + AI^2 \cdot a}{b} - a\,(b-a)$$

Benzer şekilde $ID^2 = \dfrac{IB^2 \cdot AD + AI^2 \cdot BD}{AB} - AD \cdot BD$,

$$ID^2 = \frac{IB^2\,(c-a) + AI^2 \cdot a}{c} - a\,(c-a)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} IE^2 - ID^2 &= a\,(c-a) - a\,(b-a) + \frac{IC^2\,(b-a) + AI^2 \cdot a}{b} - \frac{IB^2\,(c-a) + AI^2 \cdot a}{c} \\ &= OE^2 - OD^2 + \frac{IC^2 \cdot c\,(b-a) + AI^2 \cdot ac - IB^2 \cdot b\,(c-a) - AI^2 \cdot ab}{bc} \\ &= OE^2 - OD^2 + \frac{IC^2 \cdot c\,(b-a) + IA^2 \cdot a\,(c-b) + IB^2 \cdot b\,(a-c)}{bc} \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $IC^2 \cdot c\,(b-a) + IA^2 \cdot a\,(c-b) + IB^2 \cdot b\,(a-c) = 0$ olduğunu göstermeye çalışacağız.

I dan AC ye inilen dikme, kenarı $b = (u-c) + (u-a)$ şeklinde böleceği için,

$$CI^2 - AI^2 = (u-c)^2 - (u-a)^2 = (2u-a-c)\,(u-c-u+a) = b\,(a-c)$$

elde ettik.

Benzer şekilde, $BI^2 - CI^2 = a\,(c-b)$ ve $AI^2 - BI^2 = c\,(b-a)$ elde edilir.

$$IC^2 \cdot c\,(b-a) + IA^2 \cdot a\,(c-b) + IB^2 \cdot b\,(a-c)$$

$$= IC^2\left(AI^2 - BI^2\right) + IA^2\left(BI^2 - CI^2\right) + IB^2\left(CI^2 - AI^2\right) = 0$$

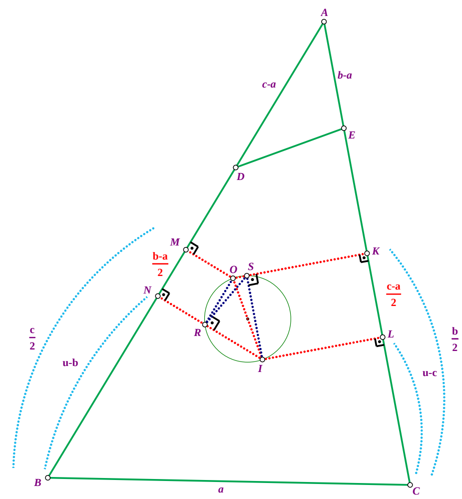
elde ederiz.

Demek ki, $IE^2 - ID^2 = OE^2 - OD^2$.

Öyleyse, $OI \perp DE$ dir.

Çözüm 2:

AB nin orta noktası M, AC nin orta noktası K olsun.



İçteğet çember AB ye N de, AC ye L de dokunsun.

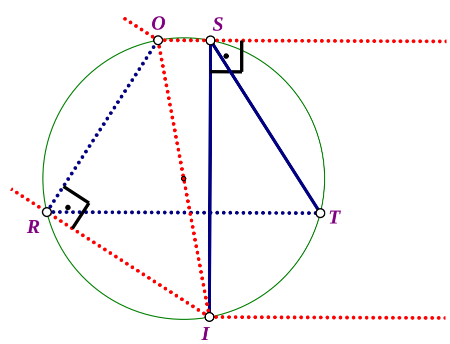
$$BM = \frac{c}{2}, BN = u - b \Rightarrow MN = \frac{b-a}{2}$$

Benzer şekilde,

$$KL = \frac{c-a}{2}$$

elde edilir.

OI çaplı çember, IN yi R de, OK yı S de kessin. Çember üzerinde $OS \parallel RT$ olacak şekilde T noktası alalım. $ST = OR = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{AE}{2}$ ve $SI = \dfrac{c-a}{2} = \dfrac{AD}{2}$ olacaktır.



Aynı zamanda

$$OS \parallel RT \Rightarrow SI \perp RT \Rightarrow \angle TRI + \angle RIS = \angle TSI + \angle RIS = 90^\circ \Rightarrow \angle RIS = 90^\circ - \angle TSI.$$

$ANIL$ kirişler dörtgeninde,

$$\angle BAC + \angle NIL = 180^\circ \Rightarrow \angle RIS = \angle NIL - 90^\circ = 90^\circ - \angle BAC$$

elde edilir.

Bu durumda $\angle BAC = \angle TSI$ ve $\dfrac{ST}{AE} = \dfrac{SI}{AD} = \dfrac{1}{2}$ olduğu için $K.A.K$ dan $\triangle TSI \sim \triangle EAD$ olacaktır. Benzerlik oranları $\frac{1}{2}$ dir. Bu durumda $\triangle ADE$ nin çevrel çemberinin yarıçapı, $\triangle TSI$ nın çevrel çemberinin yarıçapının iki katı, yani $\triangle TSI$ nın çapı kadar olacaktır. Bu durumda, $\triangle ADE$ nin çevrel çemberinin yarıçapı OI ya eşittir.

Çözüm 3:

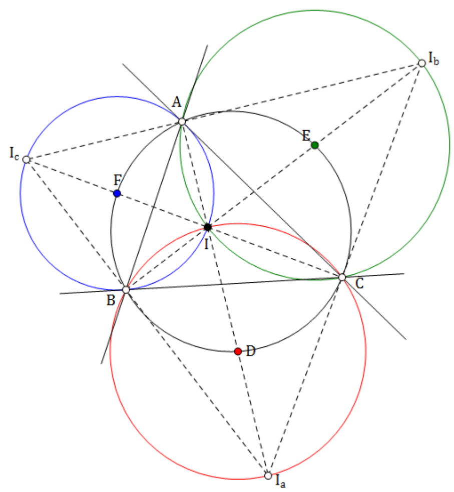
ABC üçgeninde I ; iç çemberin merkezi ve I_a, I_b, I_c de ilgili kenarların dış teğet çemberlerinin merkezleri olsun.

1. $A - I - I_a, B - I - I_b, C - I - I_c$ noktaları doğrusaldır.

2. $I_aI_bI_c$ üçgeninde I diklik merkezidir.

3. ABC üçgeninin çevrel çemberi, $I_aI_bI_c$ üçgeninin dokuz nokta çemberi olduğundan, $[I_aI], [I_bI], [I_cI]$ doğru parçalarının orta noktalarından geçer.

4. Bu orta noktalar sırasıyla IBC, ICA, IAB üçgenlerinin çevrel merkezleridir

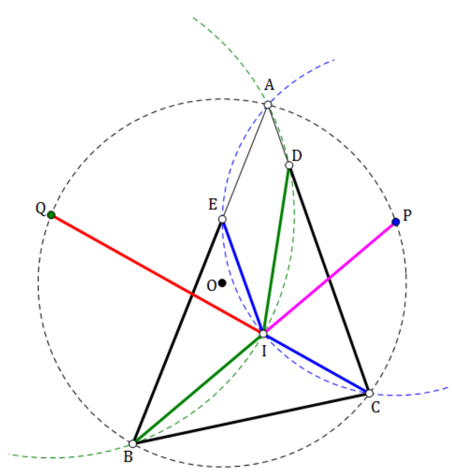


$|BE| = |BC|$ ve BI açıortay olduğundan $|IE| = |IC|$ dir. Buna göre $AEIC$ kirişler dörtgenidir.

Benzer şekilde,$|ID| = |IB|$ ve $ADIB$ de kirişler dörtgenidir.

BI nın (ABC) çemberini kestiği P noktası AIC üçgeninin çevrel çember merkezidir.

Benzer şekilde,CI nın (ABC) çemberi ile kesim noktası olan Q da AIB üçgeninin çevrel çember merkezidir.



$T; (ADE)$ çemberinin merkezi olsun.

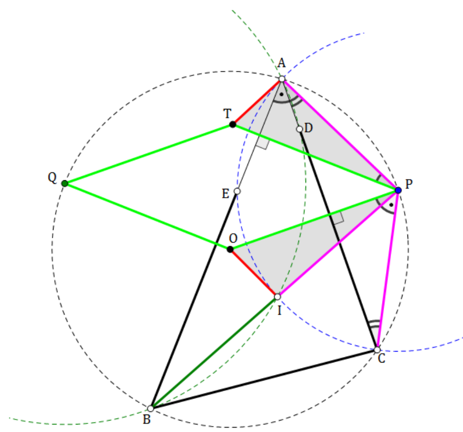
Kesişen çemberlerde merkezler doğrusu, kuvvet eksenlerine dik olduğundan, $OP \perp AC, QT \perp AC, OQ \perp AB, PT \perp AB$ dir.

Buna göre $OP \parallel QT$ ve $OQ \parallel PT$ dir. Ayrıca $|OP| = |OQ|$ olduğundan $OPTQ$ bir eşkenar dörtgendir yani, $|PT| = |PO|$ eşitliği vardır.

$\angle BAC = \angle BPC$ ve $\angle CAP = \angle ACP$ olduğundan , $\angle APT = \angle OPI$ dir.

Son olarak; $|AP| = |AI|, |PT| = |PO|$ eşitliklerinide göz önüne alırsak ATP üçgeni ile IOP üçgenlerinin eşliği söz konusudur.

O halde; $|OI| = |AT|$ dir.



6 n pozitif bir tam sayı olsun ve $\mathbf{R}^n$ ile sıralı gerçel sayı n lilerinin kümesini gösterelim. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının, her $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için, $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)} \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir σ permütasyonunun bulunduğu $\mathbf{R}^n$ ye ait $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemanlarının kümesini de T ile gösterelim. Aşağıdaki koşulu sağlayan bir d gerçel sayısının bulunduğunu kanıtlayınız:

Her $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ için,

$$a_i = \frac{1}{2}(b_i + c_i), \quad |a_i - b_i| \leq d, \quad |a_i - c_i| \leq d \quad (1 \leq i \leq n)$$

koşullarını yerine getiren $(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n) \in T$ vardır.

11. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2003

1 $n \geq 2$ arabanın katıldığı bir yarışta, 1 den n ye kadar numaralanmış arabalar, başlangıç noktasından numara sırasına göre belli aralıklarla ayrılıyor. Yarış boyunca bir araba bir başkasını en çok bir kez geçiyor ve her araba toplam olarak aynı sayıda araba tarafından geçiliyor. Ayrıca herhangi farklı iki arabanın yarış boyunca geçtikleri arabaların sayıları birbirinden farklı olup, arabalar bitiş noktasına farklı zamanlarda varıyor. n nin bu durumu olanaklı kılan tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm:

(Burak VARICI, Mehmet Efe AKENGİN)

Tüm $n \geq 3$ tek tamsayıları bu durumu olanaklı kılar.

Arabalara $A_1, A_2, .., A_n$ diyelim ve A_i yarışa i. sırada başlamış olsun. $1 \leq i \leq n$ için A_i yarışı x_i.sırada bitirmiş olsun ve k_i farklı arabayı geçmiş olsun. Herhangi arabanın geçildiği araba sayısına k diyelim.

$1 \leq i \leq n$ için k_i ler farklı ve 0 dan büyük eşit olduğundan öyle j var ki $k_j \geq n-1$. Diğer taraftan bir araba başka bir arabayı en fazla 1 kez geçebileceği için, $k_j \leq n-1$. Dolayısıyla $k_j = n-1$ olur ve eşitlik durumunun sağlanması için $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $(0, 1, \ldots, n)$ in bir permütasyonu olmalıdır.

Geçme ve geçilme sayıları eşittir ve her araba k kez geçilmiştir. Bu nedenle: $nk = 0 + 1 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow k = \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+$, demek ki n tek tamsayı olmalıdır.

Şimdi her $n \geq 3$ tek tamsayısı için böyle bir yarışın mümkün olduğunu ispatlayalım.$A_{i_1} \to A_{i_2} \to \cdots \to A_{i_n}$ ile , $A_1, A_2, .., A_n$ arabalarının yarış sırasındaki pozisyonlarını gösterelim öyle ki i_n en önde ve i_1 en arkada olsun. Örneği şöyle kuracağız:

Yarışa $A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_1$ şeklinde başlanmış olsun. Önce $A_{\frac{n+3}{2}}$, $A_{\frac{n+1}{2}}$ ile $A_{\frac{n-1}{2}}$i arasına, ardından $A_{\frac{n+5}{2}}$, $A_{\frac{n-1}{2}}$ ile $A_{\frac{n-3}{2}}$ arasına, ardından $\ldots$, son olarak benzer şekilde A_n aracı A_1 ile A_2 arasına yerleşsin.

Böylece $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ için $A_{\frac{n+1}{2}+k}$ aracı $2k-1$ araç geçmiş olur. $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ için A_k aracı da $k-1$ kez geçilmiş olur. Yine $0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ için A_{n-k} aracı k kez geçilmiş olur ve şu durum elde edilir:

$$A_{\frac{n+1}{2}} \to A_{\frac{n+3}{2}} \to A_{\frac{n-1}{2}} \to A_{\frac{n+5}{2}} \to \cdots \to A_2 \to A_n \to A_1.$$

Son olarak sırasıyla, $A_{\frac{n+1}{2}}$ aracı tüm araçları ; $A_{\frac{n-1}{2}}$ aracı $A_{\frac{n+1}{2}}$ dışındaki araçları ; $A_{\frac{n-3}{2}}$ aracı $A_{\frac{n+1}{2}}$ ve $A_{\frac{n-1}{2}}$ aracı dışındaki araçları ; $\ldots$; A_2 aracı da sadece A_n ve A_1 araçlarını geçsin:

$$A_{\frac{n+3}{2}} \to A_{\frac{n+5}{2}} \to \cdots \to A_n \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{\frac{n+1}{2}}$$

Yukarıdaki sıralama sağlanır ve arabalar yarışı bu sırayla bitirirler. Bu durumda $(1 \leq k \leq \frac{n-1}{2})$ için A_k aracı $\frac{n-1}{2} + k + 1$ kez geçilmiş olur. A_{n-k} aracı da $\frac{n-1}{2} - k$ kez geçilmiş olur. A_k aracı da $2k-2$ araç geçmiş olur. Sonuç olarak her araç toplamda $\frac{n-1}{2}$ kez geçilir ve A_k ile $A_{\frac{n+1}{2}+k}$ araçları da hep birbirinden farklı sayıda (tek ve çift) araç geçer. Örnek sorudaki şartı sağlar.

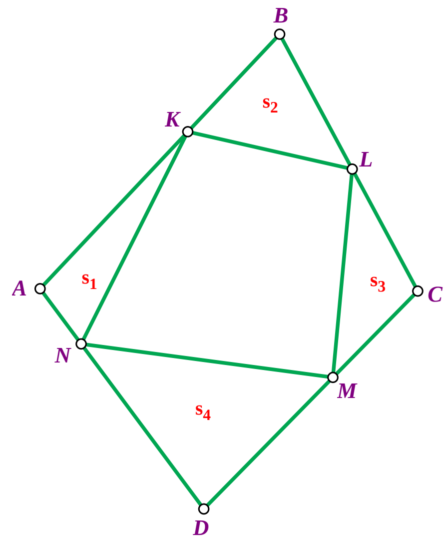
O halde cevap "n tek" tir.

2 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarları üstünde sırasıyla K, L, M ve N noktaları alınıyor. $Alan(AKN) = s_1$, $Alan(BKL) = s_2$, $Alan(CLM) = s_3$, $Alan(DMN) = s_4$ ve $Alan(ABCD) = s$ olmak üzere,

$$\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4} \leq 2\sqrt[3]{s}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



$$\frac{s_1}{s} = \frac{s_1}{[ABD]} \cdot \frac{[ABD]}{s} = \frac{AN \cdot AK}{AD \cdot AB} \cdot \frac{[ABD]}{s} = \frac{AN}{AD} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{[ABD]}{s}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{s_1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{AN}{AD} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{[ABD]}{s}}\,.$$

$AO \geq GO$ dan $\dfrac{\dfrac{AN}{AD} + \dfrac{AK}{AB} + \dfrac{[ABD]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{AN}{AD} \cdot \dfrac{AK}{AB} \cdot \dfrac{[ABD]}{s}} = \sqrt[3]{\dfrac{s_1}{s}}$ elde edilir.

Benzer şekilde

$$\frac{\dfrac{BK}{AB} + \dfrac{BL}{BC} + \dfrac{[BAC]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_2}{s}},$$

$$\frac{\dfrac{CL}{BC} + \dfrac{CM}{CD} + \dfrac{[CBD]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_3}{s}},$$

$$\frac{\dfrac{DM}{CD} + \dfrac{DN}{AD} + \dfrac{[DAC]}{s}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{s_4}{s}}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{\frac{AN}{AD} + \frac{DN}{AD} + \frac{AK}{AB} + \frac{BK}{AB} + \frac{BL}{BC} + \frac{CL}{BC} + \frac{CM}{CD} + \frac{DM}{CD} + \frac{[ABD]+[BCD]+[BAC]+[DAC]}{s}}{3}$$

$$\geq \frac{\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4}}{\sqrt[3]{s}}$$

olur. Düzenlersek,

$$\frac{1+1+1+1+\dfrac{s+s}{s}}{3} = \frac{6}{3} = 2 \geq \frac{\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4}}{\sqrt[3]{s}}$$

Eşitlik durumu,

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AK}{AB} = \frac{[ABD]}{s} \Rightarrow \frac{AN}{DN} = \frac{AK}{BK} = \frac{[ABD]}{[CBD]},$$
$$\frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{[BAC]}{s} \Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{CL}{BL} = \frac{[BAC]}{[CAD]},$$
$$\frac{CL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{[CBD]}{s} \Rightarrow \frac{CL}{BL} = \frac{CM}{DM} = \frac{[CBD]}{[ABD]},$$
$$\frac{DM}{CD} = \frac{DN}{AD} = \frac{[DAC]}{s} \Rightarrow \frac{DM}{CM} = \frac{DN}{AN} = \frac{[DAC]}{[ABC]},$$

iken sağlanır. Birleştirsek, $KLMN$ kenarları $ABCD$ nin köşegenlere paralel olan bir paralelkenar ve

$$\frac{AK}{BK} = \frac{[ABD]}{[CBD]} = \frac{[CAD]}{[BAC]} = \frac{[CBD]}{[ABD]} = \frac{[BAC]}{[CAD]}$$

olur. Bu durumda $[ABD] = [CBD]$ ve $[CAD] = [BAC]$ olduğu için köşegenler birbirlerini ortalar, yani $ABCD$ paralelkenar olur.

Yani, eşitlik durumu $ABCD$ dörtgeni paralelkenarken ve K, L, M, N noktaları orta noktalar iken sağlanır.

3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, her $t \in (0, 1)$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$,

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2003} \text{ ve } a_{2004} = a_1$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(Burak VARICI)

n üzerinden tümevarımla, verilmiş $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $a_{n+1} = a_1$ sayıları için $\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} f(a_{k+1})a_k$ olduğunu ispatlayalım.

Öncelikle bir lemma tanımlayalım.

Lemma: $x \geq y \geq z$ şartını sağlayan $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $f(x)(y - z) + f(z)(x - y) \geq f(y)(x - z)$.

İspat: $0 \leq \dfrac{y - z}{x - z} \leq \dfrac{x - z}{x - z} = 1$ olduğundan, soruda verilen eşitsizlikte $(t, x_1, x_2) = (\dfrac{y - z}{x - z}, x, z)$ yazabiliriz:
$f(x).\dfrac{y - z}{x - z} + f(z).(1 - \dfrac{y - z}{x - z}) \geq f(x.\dfrac{y - z}{x - z} + (1 - \dfrac{y - z}{x - z}).z) \Rightarrow f(x).\dfrac{y - z}{x - z} + f(z).\dfrac{x - y}{x - z} \geq f(y)$ bulunur, ki bu da $x - z$ ile çarpılırsa istenilen elde edilir. ■

Şimdi Lemma'yı $a_1 = a_2 = a_3$, $a_4 = a_1$ sayıları için uygularsak:

$f(a_1)(a_2 - a_3) + f(a_3)(a_1 - a_2) \geq f(a_2)(a_1 - a_3) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{3} f(a_k)\, a_{k+1} \geq \sum\limits_{k=1}^{3} f(a_{k+1})\, a_k$ bulunur.

Yani tümevarım hipotezi $k = 3$ için doğrudur. Varsayalım ki $k = 3, 4, .., n$ için doğru olsun. $k = n + 1$ için ispatlayalım.

Elimizde $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n+1}$ sayıları olsun. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ sayıları için tümevarımdan $f(a_1)a_2 + f(a_2)a_3 + \cdots + f(a_n)a_1 \geq f(a_2)\, a_1 + f(a_3)\, a_2 + \cdots + f(a_1)a_n$ sağlanır.

Diğer taraftan, Lemma'yı $(x, y, z) = (a_1, a_n, a_{n+1})$ için uygularsak:

$$f(a_n)(a_{n+1} - a_1) + f(a_{n+1})a_1 \geq f(a_1)(a_{n+1} - a_n) + f(a_{n+1})a_n$$
$$\Leftrightarrow \; f(a_1)(a_n - a_{n+1}) + f(a_{n+1})(a_1 - a_n) \geq f(a_n)(a_1 - a_{n+1})$$

Bu son iki eşitsizliği toplarsak $n + 1$ için istenilen eşitsizlik elde edilir. Dolayısıyla ispat biter. ■

Kaynak:

Burak Varıcı

4 $2^{2n+1} + 2^n + 1$ sayınsın tam kuvvet olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm:

(Burak VARICI)

Cevap: Tek çözüm $n = 4$ tür.

Öncelikle, $n = 1$ için $2^3 + 2^1 + 1 = 11$ ve $n = 2$ için $2^5 + 2^2 + 1 = 37$ olduğundan, $n \geq 3$ varsayabiliriz.

$2^{2n+1} + 2^n + 1 = x^k$, p de k nın en küçük asal böleni olsun. $x^{\frac{k}{p}} = m$ dersek, $2^{2n+1} + 2^n + 1 = (x^{\frac{k}{p}})^p = m^p$ olur. p üzerinden iki durum vardır:

(i) $p = 2$. Dolayısıyla $8.2^{2n-2} + 2^n + 1 = m^2$ olduğundan $7 \cdot 2^{2n-2} = m^2 - (2^{n-1} + 1)^2 = (m - 2^{n-1} - 1) \cdot (m + 2^{n-1} + 1)$ bulunur.

$n \geq 2$ için $7 \cdot 2^{2n-2}$ ifadesi çifttir. Dolayısıyla m tektir, $m = 2m_1 + 1$ ($m_1 \in \mathbb{N}$) olsun. $7 \cdot 2^{2n-4} = (m_1 - 2^{n-2}).(m_1 + 2^{n-2} + 1)$ elde edilir. İki durum vardır:

(a) m_1 çifttir. Bu durumda $(m_1 - 2^{n-2}).(m_1 + 2^{n-2} + 1)$ ifadesinde çarpanlardan biri tek biri çift olduğundan, $m_1 + 2^{n-2} + 1 \in \{1, 7\}$ sağlanır. $m_1 + 2^{n-2} + 1 > 1$ olduğundan, $m_1 - 2^{n-2} = 2^{n-4}$, $m_1 + 2^{n-2} = 6$ olmalıdır. Ancak bu durumda iki ifadeyi toplarsak:
$2m_1 = 2^{2n-4} + 6 \;\Rightarrow\; m_1 = 2^{2n-5} + 3$ bulunur. Fakat m_1 çift demiştik, çelişki! Bu durumda çözüm yoktur.

(b) m_1 tektir. $(m_1 - 2^{n-2})$ tek çarpanı 1 e veya 7 ye eşit olmak üzere iki durum vardır.
$m_1 - 2^{n-2} = 1$ durumunda $m_1 + 2^{n-2} = 7 \cdot 2^{2n-4} - 1$ olur. İki ifadeyi toplarsak:
$2m_1 = 7 \cdot 2^{2n-4} \Rightarrow m_1 = 7 \cdot 2^{2n-5}$. Fakat m_1 tek demiştik, çelişki! Bu durumda da çözüm yoktur.
$m_1 - 2^{n-2} = 7$ ise $m_1 + 2^{n-2} = 2^{2n-4} - 1$ olur. İki ifadeyi toplarsak: $2m_1 = 2^{2n-4} + 6 \Rightarrow m_1 = 2^{2n-5} + 3$. Diğer taraftan, $m_1 - 2^{n-2} = 7 \;\Rightarrow\; 2^{2n-5} - 2^{n-2} = 4$ bulunur.
Dolayısıyla $2^{2n-7} - 2^{n-4} = 1$. Buradan $n = 4$ çözümü gelir. Gerçekten de, $2^9 + 2^4 + 1 = 529$ bir tam kuvvettir.

(ii) $p > 2$ ise, $2^{2n+1} + 2^n + 1 = m^p \;\Rightarrow\; 2^n(2^{n+1} + 1) = (m - 1).\sum\limits_{i=0}^{p-1} m^i$.

m tek olduğundan $\sum\limits_{i=0}^{p-1} m^i \equiv \sum\limits_{i=0}^{p-1} 1^i \equiv p \equiv 1 \pmod 2$ bulunur. Dolayısıyla $2^n | m - 1$, $m = 2^n \cdot s + 1$ ($s \in \mathbb{Z}^+$) sağlanır.

$\Rightarrow\; 2^{n+1} + 1 = s \cdot \sum\limits_{i=0}^{p-1} (2^n s + 1)^i \geq \sum\limits_{i=0}^{2} (2^n + 1)^i > 2^{2n} + 1 \Rightarrow\; 2^{n+1} > 2^{2n},\; 1 > 2^{n-1}$ bulunur ki bu hiçbir $n \in \mathbb{N}$ için mümkün değildir. Demek ki bu durumda çözüm yoktur.

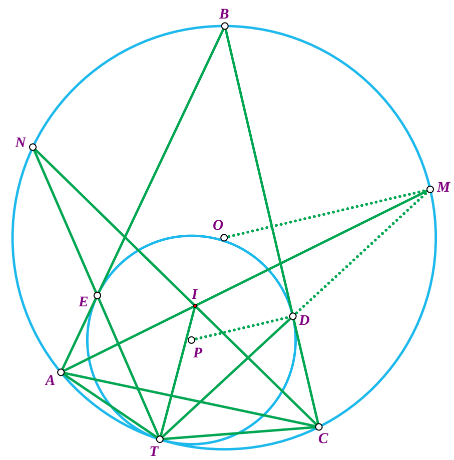
Sonuç olarak, $2^{2n+1} + 2^n + 1$ ifadesini tam kuvvet yapan tek pozitif tamsayı $n = 4$ dür. ■

5 Bir ABC üçgeninin AB ve BC kenarlarına teğet olan bir S çemberi, ABC üçgeninin çevrel çemberine de bir T noktasında teğettir. I, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ise, $\widehat{ATI} = \widehat{CTI}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

O, $\triangle ABC$ nin çevrel merkezi; P, kenarlara teğet olan çemberin merkezi olsun.

P merkezli S çemberi, AC ye D de, AB ye E de dokunsun.



AI, çevrel çemberi M de kessin. M, AC yayının orta noktası olduğu için $OM \perp BC$ dir.

Aynı zamanda, $PD \perp BC$ olduğu için, $PD \parallel OM$ dir. O, P, T noktaları doğrusal olduğu için, $\triangle TOM \sim \triangle TPD$ olacaktır. Bu durumda T, D, M noktaları doğrusaldır.

Benzer şekilde, CI çemberi N de kesiyorsa, T, E, N noktaları da doğrusal olacaktır.

A, T, C, M, B, N noktaları için Pascal Teoremi uygulandığında E, I, D noktaları doğrusal olur.

Pascal Teoremine takılmadan (aslında Pascal'ın ispatını yapıyoruz) şöyle yapabiliriz:

$\angle ANE = \angle IMD$, $\angle ENI = \angle DMC$, $\angle NAE = \angle ICD$, $\angle IAE = \angle BCM$ olduğu için, INA üçgeninde E noktası için, IMC üçgeninde D noktası için Ceva Teoreminin Trigonometrik halini uyguladığımızda, $\angle NIE = \angle DIC$ ve $\angle EIA = \angle DIM$ çıkacaktır. Bu da E, I, D noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir.

$\angle BAC = 2\alpha$ ve $\angle BCA = 2\theta$ dersek, $\angle ATN = \theta$, $\angle CTM = \alpha$, $\angle NTM = \angle BED = \angle BDE = \alpha + \theta$, $\angle EIA = \theta$ ve $\angle DIC = \alpha$ olacaktır.

$\angle EIA = \angle ETA = \theta$ olduğu için $EITA$ dörtgeni kirişler dörtgeni olacaktır. Bu durumda, $\angle ETI = \angle EAI = \alpha$, dolayısıyla da $\angle ATI = \alpha + \theta = \angle CTI$ olacaktır.

Not:

IMO 1993 Shortlist'inde (İspanya-1) I nın DE üzerinde olduğu sorulmuş.

IMO 1978, $AB = BC$ iken $I \in DE$ sorulmuş.

6 $m \times n$ bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ya da 1 yazılarak elde edilen bir yazılıma, 0 ve 1 lerin sayısı eşitse, *eşit* bir yazılım diyoruz. a gerçel bir sayı olmak üzere, m satır ve n sütunun her biri için, o satır ya da sütun içindeki 1 lerin yüzdesi a dan küçük ya da $100 - a$ dan büyük olmayacak şekilde bir eşit yazılımı olanaklı kılan m ve n sayıları bulunuyorsa, a ya *güzel* sayı diyoruz. En büyük güzel sayıyı bulunuz.

Çözüm:

(Sinan KARAL)

İddiamız en büyük güzel sayının 75 olduğudur. 75 için örnek şekildeki gibidir.Her satır ve sütunda ya bir tane 1 ya da üç tane 1 vardır, yani 1'lerin oranı hep ya $\leq \%25$ ya da $\geq \%75$ tir.

0	0	0	1
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1

Varsayalım bir $a > 75$ güzel sayı olsun. Bir m ve n için de m x n satranç tahtasını 1 ve 0 lar ile kaplamış olalım. Tam olarak m_1 satırda 1 lerin yüzdesi $\geq a$ ve tam olarak $m_2 = m - m_1$ satırda da 1 lerin yüzdesi $\leq 100 - a$ olsun. Benzer şekilde n_1 ve n_2 sayılarını sütunlarda tanımlayalım. Genelliği bozmadan, $m_2 \geq m_1$ varsayabiliriz çünkü 0 ve 1 lerin yazılımı birbirine göre simetriktir.

1 lerin yüzdesi $\leq 100 - a$ olan n_2 sütundaki 1 lerin toplam sayısı $\leq \dfrac{(100-a).n_2m}{100} < \dfrac{n_2(m_1+m_2)}{4}$

Diğer taraftan, bu yazılım eşit olduğu için tüm tahtadaki 1 lerin toplam sayısı : $\dfrac{mn}{2} = \dfrac{(m_1+m_2)(n_1+n_2)}{2}$ dir. Demek ki kalan n_1 sütunda :

$$\frac{(m_1+m_2)(n_1+n_2)}{2} - \frac{n_2(m_1+m_2)}{4} = \frac{(2n_1+n_2)(m_1+m_2)}{4}$$

den fazla sayıda 1 var. Bu 1 lerin en fazla n_1m_1 tanesi tanımladığımız n_1 sütun ve m_1 satırın kesişiminde olabilir. Dolayısıyla n_1 sütunun üstündeki 1 lerin

$$\frac{(2n_1+n_2)(m_1+m_2)}{4} - m_1n_1 = \frac{n_2m_1 + n_2m_2 - 2m_1n_1 + 2n_1m_2}{4}$$

den fazlası, aynı zamanda 1 lerin yüzdesi $\leq 100 - a$ olan m_2 satır üstünde.

Fakat biz, bu m_2 satır üstünde $\dfrac{(100-a)n}{100}.m_2$ den fazla 1 olamayacağını biliyoruz.

$$\Longrightarrow \frac{(n_1+n_2)}{4}m_2 \geq \frac{100-a}{100}m_2.n > \frac{n_2m_1 + n_2m_2 - 2m_1n_1 + 2n_1m_2}{4}$$

$$\Longrightarrow 2m_1n_1 > n_2m_1 + n_1m_2 ...(*)$$

bulunur.

$m_2 \geq m_1$ olduğundan, $(*)$ dan : $2m_1n_1 > n_2m_1 + n_1m_2 \geq n_2m_1 + n_1m_1$

$$\Longrightarrow \boxed{n_1 > n_2}$$

Şimdi, $(*)$'ı bulana kadar yaptığımız hesabın benzerini 0 ları sayarak yaparsak :

$2m_2n_2 > n_2m_1 + n_1m_2$ bulunur, $(*)$ ile toplarsak :

$$m_1n_1 + m_2n_2 > n_2m_1 + n_1m_2 \iff (m_1 - m_2)(n_1 - n_2) > 0$$

bulunur. Fakat

$$m_1 - m_2 \leq 0 \text{ ve } n_1 - n_2 > 0$$

olduğundan çelişki elde edilir.

Demek ki güzel sayı ≤ 75 olmalıdır. İspat biter.

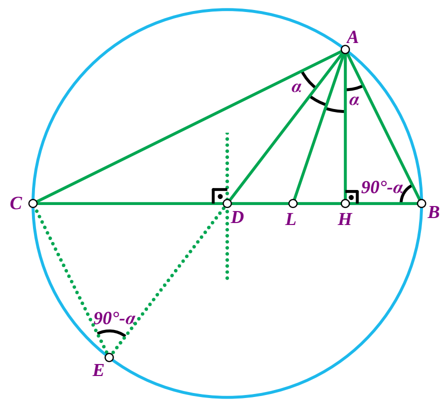
12. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2004

1 $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A köşesine ait yükseklik, açıortay ve kenarortayın ayakları, sırasıyla, H, L ve D noktalarıdır. $m(\widehat{HAL}) = m(\widehat{DAL})$ olması için gerek ve yeter koşulun, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

İddia:

$\angle HAL = \angle DAL$ ise $\angle BAC = 90°$



AL açıortay olduğu için $\angle BAH = \angle CAD$.

$[AD$, $\triangle ABC$ nin çevrel çemberini E de kessin. $\angle ABH = 90° - \angle BAH = \angle AEC$ ve $\angle AEC + \angle EAC = 90°$ olduğu için AE çevrel çemberin çapıdır. Çemberin merkezi hem BC nin orta dikmesi üzerinde, hem de AE üzerinde olacak. AE doğrusu ile BC doğru parçasının orta dikmesi D noktasında kesişir. O halde D, çevrel çemberin merkezi, yani, $\angle BAC = 90°$.

İddia:

$\angle BAC = 90°$ ise $\angle HAL = \angle DAL$

$\angle ACB = \angle DAC = \angle BAH$ ve AL açıortay olduğu için

$$\angle HAL = \angle LAB - \angle BAH = \angle LAC - \angle DAC = \angle DAL$$

elde edilir.

Bu durumda $\angle HAL = \angle DAL \Leftrightarrow \angle BAC = 90°$.

Not:

Bir açının köşesinden geçen bir doğrunun, o açının açıortayına göre simetriğine o doğrunun izogonal eşleniği denir. Özel olarak, kenarortayın izogonal eşleniğine kenarortaysı denir. Bir üçgende yüksekliğin izogonal eşleniği, çevrel çemberin merkezinden geçer. Dik üçgende hipotenüse ait yükseklik, hipotenüse ait kenarortaysıdır.

Bu soru Ulusal Matematik Olimpiyatı 1. Aşama - 2012'de de soruldu.

2 Bir ülkedeki 80 kentten bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Her kentten en az 7 başka kente doğrudan uçak seferi bulunmakta olup, herhangi bir kentten bir diğerine doğrudan ya da sonlu sayıda aktarma yaparak uçakla ulaşmak mümkündür. Karşılıklı uçak seferleri hangi kentler arasında düzenlenmiş olursa olsun, herhangi bir kentten bir diğerine en çok k aktarmayla ulaşılmasını olanaklı kılan en küçük k sayısını bulunuz.

Çözüm:

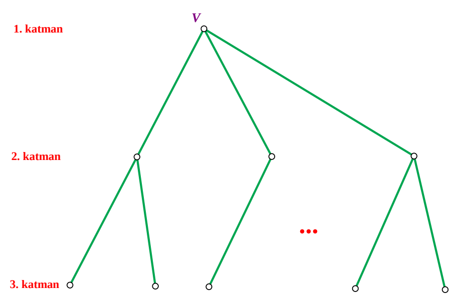
(Burak VARICI)

Bunu mümkün kılan en küçük k sayısı 26 dır.

80 kentimizi 80 köşeli bir grafın köşeleri ve karşılıklı uçak seferlerini de bu köşeler arasındaki yönlü kenarlar olarak düşünelim. k aktarma ile, yani grafımızı düşünürsek en fazla $k+1$ kenar üzerinden herhangi bir köşeden başka bir köşeye her zaman ulaşılmasını sağlayan en küçük k'yı arıyoruz. Ayrıca her köşenin derecesinin en az 7 olduğunu biliyoruz.

Öncelikle $k = 26$ aktarma için bir örnek verelim: K_m ile m köşeli bir complete grafı gösterelim. Eğer her $v_1 \in K_i$, $K_j$deki köşelerden her birine direkt bağlı ve her $v_2 \in K_j$, K_i deki köşelerden her birine direkt bağlı ise bu durumu $K_i \leftrightarrow K_j$ ile gösterelim. Dolayısıyla eğer $K_i \leftrightarrow K_j$ ise bu $i + j$ köşe bir K_{i+j} oluşturur.

Grafımız şu şekilde olsun: $\underbrace{K_5 \leftrightarrow K_3}_{8 \text{ Köşe}} \leftrightarrow \underbrace{K_3 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow K_3}_{8 \text{ Köşe}} \leftrightarrow \underbrace{K_3 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow K_3}_{8 \text{ Köşe}} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \underbrace{K_3 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow K_3}_{8 \text{ Köşe}} \leftrightarrow \underbrace{K_3 \leftrightarrow K_5}_{8 \text{ Köşe}}$ Aradaki $K_3 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow K_3$ üçlülerinden 8 tane olsun. Dolayısıyla toplamda 80 köşe vardır ve her köşenin derecesi en az 7 dir.



Diğer taraftan en soldaki K_5 teki bir köşeden başlarsak, en sağdaki K_5 e en az 27 kenar üzerinden yani 26 aktarma ile gidebiliriz. Ayrıca bu grafta belirtilen kenar bağlantıları dışında bir kenar da olmasın. Şimdi 27 nin maksimum olduğunu ispatlayalım.

Grafımızı bir ağaç şeklinde ifade edeceğiz. Bir V köşesi seçelim ve ağacın en tepesine koyalım. V nin bir alt katmanına V nin direkt bağlı olduğu köşeleri yerleştirelim. Ondan sonra gelen her k. katmana, $1, 2, .., (k-1)$. katmanlarda bulunmayan ve $(k-1)$.katmandaki köşelerden en az birine direkt bağlı olan köşeleri yerleştireceğiz. Grafımızın sonlu sayıda köşesi olduğundan, sonlu sayıda katman yer alır.

Toplam m katman olsun. t. katmanda da a_t $(1 \le t \le m)$ alsın. Grafımız bağlantılı olduğundan bu "katmanlandırma" tüm köşeleri kapsar.

Dolayısıyla $a_1 + a_2 + .. + a_m = 80$ ve l. katmandaki bir köşenin direkt bağlı olduğu köşeler sadece l. ,$(l-1)$. veya $(l+1)$. katmanlarda yer alabilir.

Fakat bir $v_1 \in l$.katman alırsak, $7 \le der(v_i) \le (a_l - 1) + a_{l-1} + a_{l+1}$ olduğundan her $m - 1 \ge l \ge 2$ için $a_{l-1} + a_l + a_{l+1} \ge 8$ olmalıdır.

Ayrıca benzer mantıkla $a_1 + a_2 \ge 8$ ve $a_{m-1} + a_m \ge 8$ olduğunu söyleyebiliriz. $m \le 28$ olduğunu göstermek istiyoruz, çünkü böylece V'den herhangi bir köşeye en fazla $m - 1 \le 27$ kenar kullanılarak ve dolayısıyla 26 aktarmada ulaşılmış olacak.

Aksini varsayalım, $m > 28$ olsun. Her r için $a_r > 0$ olduğundan:

$$\begin{aligned}
80 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\
&= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \cdots + (a_{24} + a_{25} + a_{26}) + (a_{27} + a_{28} + ..a_{m-2}) + (a_{m-1} + a_m) \\
&> (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \cdots + (a_{24} + a_{25} + a_{26}) + (a_{m-1} + a_m) \\
&\ge 8 + 8 + \cdots + 8 = 80.
\end{aligned}$$

Böylece çelişki elde ederiz. Demek ki $m \le 28$ ve dolayısıyla $m - 1 \le 27$ bulunur.

Dolayısıyla en fazla 26 aktarma ile istenilen yere ulaşılır. ▹

3 (a) n^2-1, n^2-2 ve n^2-3 sayılarından her biri için, bu sayının pozitif bölenlerinin sayısını 10 yapan bir n tam sayısı bulunuz.
(b) n^2-4 ün pozitif bölenlerinin sayısının, n tam sayısının hiçbir değeri için 10 olamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

(a) $n=7$ için $n^2-1=,2^4 3^1$ olur ve pozitif bölenleri sayısı 10 olur.
$n=235$ için $n^2-2=7^4 23^1$ olur ve pozitif bölenleri sayısı 10 olur.
$n=4936$ için $n^2-3=37^4 13^1$ olur ve pozitif bölenleri sayısı 10 olur.

(b) Genelliği bozmadan n yi pozitif kabul edelim. n^2-4 ün pozitif bölen sayısının 10 olması için, p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $n^2-4=p^9$ veya $n^2-4=p^4q$ olmalıdır.

(i) $n^2-4=p^9$ sağlanıyorsa:
$(n-2)(n+2)=p^9$ olur. $n+2>1$ olduğundan $p|n+2$ olmalıdır. Eğer $p|n-2$ ise $p|4$ olur. Öyleyse $p=2$ dir ve $n^2=2^9+4$ sağlanır, ki bu durumda n tamsayı olamaz. Eğer $p\nmid n-2$ ise $n-2=1$ yani $n=3$ olur. Dolayısıyla $p^9=5$ bulunur ve p tamsayı olamaz. Yani $n^2-4=p^9$ un çözümü yoktur.

(ii) $n^2-4=p^4q$ sağlanıyorsa:
$(n-2)(n+2)=p^4q$ olur. $(n-2,n+2)=d$ olsun. $d\neq 1$ ise $d^2|p^4q$ olacağından,$p|d$ olmalıdır. Öyleyse $p|n-2$, $p|n+2$ ve dolayısıyla $p|4$ yani $p=2$ elde ederiz. Yani $(n-2)(n+2)=16q$ olmalıdır. $4\nmid n-2$ olsaydı $4\nmid n+2$ ve $16\nmid (n-2)(n+2)$ olurdu ve çelişki elde ederdik. $4|n-2$ ve $4|n+2$ olmalıdır. Öyleyse $n-2=4,\ n+2=4q$ ya da $n-2=4q,\ n+2=4$ olmalıdır. İki durumdan da çözüm gelmediği barizdir. Demek ki $d=1$ sağlanmalıdır. Bu durumda $n-2=p^4,\ n+2=q$ yada $n-2=q,\ n+2=p^4$ olmalıdır. İlk olarak $n-2=p^4,\ n+2=q$ durumunu inceleyelim. p^4+4 asal olmalı; fakat $p^4+4=(p^2-2p+2)(p^2+2p+2)$ olduğundan $p^2-2p+2=1$ olmalı ve $p=1$ bulunur, yani bu durum mümkün değildir. Şimdi de $n-2=q,\ n+2=p^4$ durumunu inceleyelim. p^4-4 asal olmalı; fakat $p^4-4=(p^2-2)(p^2+2)$ olduğundan $p^2-2=2$ olmalı ve buradan da çözüm gelmez.

Sonuç olarak, n^2-4 ün hiçbir zaman 10 pozitif böleni olamaz.

4 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini göstermek üzere, tüm $m,n\in\mathbb{Z}$ için, $f(n)-f(n+f(m))=m$ koşulunu sağlayan bütün $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

(Burak VARICI)

Cevap: Bu şartı sağlayan hiç $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu yoktur.

$P(m,n)$ ile $f(n)-f(n+f(m))=m$ denklemini ifade edelim.

Varsayalım bir $a,b\in\mathbb{Z}$ikilisi için $f(a)=f(b)$ sağlansın. Sırasıyla $P(m,a)$ ve $P(m,b)$ ye bakarsak $a=f(n)-f(n+f(b))=f(n)-f(n+f(b))=b$ ve dolayısıyla $a=b$ bulunur. Demek ki f fonksiyonu birebirdir.

$P(0,0): f(0)-f(f(0))=0\Rightarrow\ f(0)=f(f(0))$. Fonksiyon birebir olduğundan $f(0)=0$ buluruz.

$$P(m,0): f(0)-f(f(m))=m\Rightarrow f(f(m))=-m\ \ldots(*)$$

$(*)$'ı kullanarak $P(f(m),n)$ i incelersek:

$f(n)-f(n+f(f(m))=f(n)-f(n-m)=f(m)\Rightarrow\ f(n)=f(m)+f(m-n)$ elde ederiz. $a=n-m$, $b=m$ şeklinde bir dönüşüm yaparsak:

$f(a+b)=f(a)+f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$. Yani fonksiyon Cauchy Eşitliği'ni sağlar.

Bu durumda $f(1)=c$ olmak üzere fonksiyon $f(x)=cx$ biçiminde olmalıdır.

Bunu ilk denklemde yerine yazarsak:

$cn-c(n+cm)=m\ \ \Rightarrow\ cm^2=-m$ bulunur. Fakat bu da $m\neq 0$ için $c^2=-1$ demektir, bu durum c'nin tamsayı olmasıyla çelişir.

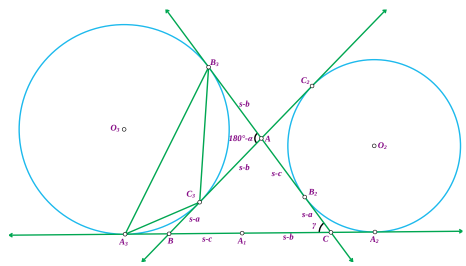
Dolayısıyla böyle bir $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu yoktur. $\triangleright$

5 Bir ABC üçgenin, $[BC]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, BC, CA ve AB doğrularına değme noktaları, sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1; $[CA]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_2, B_2 ve C_2; $[AB]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_3, B_3 ve C_3 olsun. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ve $A_3B_3C_3$ üçgenlerinin çevrelerinin toplamının, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapına oranının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm:

(Burak VARICI)

Cevap: Bu oranın alabileceği en büyük değer $9 + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ dir ve eşitlik eşkenar üçgen için sağlanır.



a, b, c ile üçgenin kenar uzunluklarını ve α, β, γ ile de iç açıları gösterelim. s ile $\triangle ABC$ nin yarıçevresi, her $\triangle XYZ$ üçgeni için de Ç (XYZ) ile üçgenin çevresi belirtilsin.

$M = \dfrac{\text{Ç}(A_1B_1C_1) + \text{Ç}(A_2B_2C_2) + \text{Ç}(A_3B_3C_3)}{R}$ olsun. M nin alabileceği en büyük değeri bulmaya çalışıyoruz.

İlk olarak $a + BC_3 = A_3B + b = CA_3 = CB_3 = AC_3 + b \Rightarrow a - b = AC_3 - BC_3$. Diğer taraftan $AC_3 + C_3B = c$ olduğundan $AC_3 = s - b$ ve $C_3B = s - a$ bulunur.

Dolayısıyla $CB_3 = CA_3 = s$ sağlanır. Sırasıyla CA_3B_3, AB_3C_3 ve BA_3C_3 üçgenlerinde Sinüs Teorem'inden:

$A_3B_3 = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}.s$, $B_3C_3 = 2(s-b).\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $A_3C_3 = 2(s-a).\cos\dfrac{\beta}{2}$.

Dolayısıyla da $\text{Ç}(A_3B_3C_3) = (a+b+c).\sin\dfrac{\gamma}{2} + 2(s-b).\cos\dfrac{\alpha}{2} + 2(s-a).\cos\dfrac{\beta}{2}$ bulunur. Benzer şekilde:

$\text{Ç}(A_1B_1C_1) = (a+b+c).\sin\dfrac{\alpha}{2} + 2(s-b).\cos\dfrac{\gamma}{2} + 2(s-c).\cos\dfrac{\beta}{2}$ ve

$\text{Ç}(A_2B_2C_2) = (a+b+c).\sin\dfrac{\beta}{2} + 2(s-a).\cos\dfrac{\gamma}{2} + 2(s-c).\cos\dfrac{\alpha}{2}$ sağlanır.

Bu eşitlikleri kullanarak: $M = \dfrac{(a+b+c)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2}\right) + 2a\cos\dfrac{\alpha}{2} + 2b\cos\dfrac{\beta}{2} + 2c\cos\dfrac{\gamma}{2}}{R}$ elde edilir. $(*)$

Şimdi, M ifadesini parçalayarak her ifadenin alabileceği en büyük değerlere bakalım. İki ifadeyi inceleyeceğiz:

(i) $\dfrac{(a+b+c)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2}\right)}{R} \leq \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ sağlanır. Bunu ispatlarken $\dfrac{a+b+c}{R} \leq 3\sqrt{3}$ ve $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3}{2}$ eşitsizliklerini kullanacağız.

(a) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu ve her $x \in [0, \pi]$ için $f''(x) = -\sin x \leq 0$ olduğundan, fonksiyon $x \in [0, \pi]$ aralığında konkavdır. Dolayısıyla $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ için Jensen Eşitsizliği'nden:

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{R} = 2\left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right) \leq 3\sqrt{3}$$

elde edilir.

(b) Yine $f(x) = \sin x$ fonksiyonu ve $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in [0, \pi]$ için Jensen Eşitsizliği'nden:

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

bulunur.

Sonuç olarak, $\dfrac{(a+b+c)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)}{R} \leq \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ elde ederiz.

(ii) $\dfrac{2a\cos\frac{\alpha}{2} + 2b\cos\frac{\beta}{2} + 2c\cos\frac{\gamma}{2}}{R} \leq 9$ sağlanır. Öncelikle $a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2}$ ifadesine bakalım. Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ varsayalım. Dolayısıyla $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ sağlanır.

Ayrıca $f(x) = \sin x$ fonksiyonu, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan olduğundan,

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geq \sin\frac{\beta}{2} \geq \sin\frac{\gamma}{2}$$

bulunur. $\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} \leq \cos\frac{\beta}{2} \leq \cos\frac{\gamma}{2}$.

Yani $a \geq b \geq c$ ve $\cos\frac{\alpha}{2} \leq \cos\frac{\beta}{2} \leq \cos\frac{\gamma}{2}$. Chebyshev Eşitsizliği'nden:

$$a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right) \quad \ldots (1)$$

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu ve $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f''(x) = -\cos x \leq 0$ olduğundan, fonksiyon $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında konkavdır. Dolayısıyla Jensen Eşitsizliği'nden

$$\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right) \leq \cos\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Bunu (1)'de yerine koyarsak:

$a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$ sağlanır. Buradan ve $(i)-(a)$ dan hareketle, $\dfrac{2a\cos\frac{\alpha}{2} + 2b\cos\frac{\beta}{2} + 2c\cos\frac{\gamma}{2}}{R} \leq 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{a+b+c}{R}\right) \leq 9$ bulunur.

Ana eşitsizliğimize dönersek, (i) ve (ii)'den:

$M = \dfrac{(a+b+c)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) + 2a\cos\frac{\alpha}{2} + 2b\cos\frac{\beta}{2} + 2c\cos\frac{\gamma}{2}}{R} \leq 9 + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ elde ederiz. Eşitlik, Jensen Eşitsizliklerinde eşitlik varken, yani $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ iken sağlanır, İspat biter. □

$\boxed{6}$ $n, m \geq 0$ tam sayıları için, $K(n, 0) = \phi$ ve

$$K(n, m+1) = \{k \mid 1 \leq k \leq n \text{ ve } K(k, m) \cap K(n-k, m) = \phi\}$$

ise, $K(2004, 2004)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

Cevap: $|K(2004, 2004)| = 127$

İddia-1: Her pozitif tamsayı, 2 nin farklı kuvvetlerinin toplamı biçiminde tek türlü ifade edilebilir.

İspat: Tümevarımla ispatlayalım. $n = 1$ ve $n = 2$ için doğruluğu bariz. İddiamız $1, 2, \dots, n-1$ için doğru olsun, n için de doğru olacağını gösterelim. $2^t \leq n < 2^{t+1}$, $t \in \mathbb{Z}$ ve $n = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots 2^{x_k}$, $x_1 > x_2 > \cdots > x_k$ olsun; böyle bir yazılımın her zaman bulunduğu açıktır, örnek olarak iki tabanında yazılım verilebilir. Eğer $x_1 < t$ olsaydı; $2^t \leq n \leq 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{t-1} = 2^t - 1$ olurdu ve çelişki elde ederdik. $x_1 > t$ olamayacağı zaten açıktır, demek ki $x_1 = t$ olur. Tümevarım varsayımından $n - 2^t$ nin yazılımı da tek türlü belirli olacağından; n in yazılımı da tek türlüdür. Böylece iddianın ispatı tamamlandı.

Her $n = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_k}$ pozitif tamsayısı için, $S_n = \{2^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, 2^{x_k}\}$ olarak tanımlayalım. İddia-1 den ötürü S_n tek türlü belirlidir.

İddia-2: Her $m \geq n$ için $K(n, m) = K(n, n)$ eşitliği sağlanır.

İspat: n üzerine tümevarımla ispatlayacağız. $n = 0$ için $K(0, m) = \{k | 1 \leq k \leq 0 \text{ ve } K(k, m) \cap K(-k, m) = \emptyset\} = \emptyset$ olur, çünkü $1 \leq k \leq 0$ şartını sağlayan k değeri yoktur. İddiamız $1, 2, \dots, n-1$ için doğru olsun, n için de doğru olacağını gösterelim. $m = n$ durumu açıktır, varsayalım $m \geq n + 1$ olsun. Tanım gereği, $K(n, m) = \{k | 1 \leq k \leq n \text{ ve } K(k, m-1) \cap K(n-k, m-1) = \emptyset\}$ sağlanır.

$m - 1 \geq n \geq k$ ve $m - 1 \geq n - 1 \geq n - k$ olduğundan, tümevarım varsayımını kullanarak, her $k \leq n - 1$ için $K(k, m-1) = K(k, k) = K(k, n-1)$ ve $K(n-k, m-1) = K(n-k, n-k) = K(n-k, n-1)$ olduğu söylenebilir. Öyleyse $K(n, m) = \{k | 1 \leq k \leq n-1 \text{ ve } K(k, n-1) \cap K(n-k, n-1) = \emptyset\} \cup \{k | \, k = n \; ve \; K(n, m) \cap K(0, m) = \emptyset\}$ bulunur. Diğer taraftan, $K(0, m-1) = \emptyset = K(0, n-1)$ olduğundan, $\{k | \, k = n \; ve \; K(n, m-1) \cap K(0, m-1) = \emptyset\} = \{n\} = \{k | \, k = n \; ve \; K(n, n-1) \cap K(0, n-1) = \emptyset\}$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu eşitliği $K(n, m)$ ifadesinde yerine yazarsak; $K(n, m) = \{k | \, k = n \; ve \; K(n, n-1) \cap K(0, n-1) = \emptyset\} \cup \{k | 1 \leq k \leq n-1 \text{ ve } K(k, n-1) \cap K(n-k, n-1) = \emptyset\} = K(n, n)$ bulunur, tümevarım varsayımı n için doğrudur.

Dolayısıyla tümevarımdan iddia ispatlanmış olur.

$K(n, n) = K_n$ olarak tanımlayalım, yukarıdaki iddiadan ötürü her $1 \leq m \leq n-1$ için $K(m, m) = K(m, n-1)$ ve $K(n-m, n-1) = K(n-m, n-m)$ sağlanır. Bunu K_n de yerine yazarsak$K_n = \{k | \, k = n \; ve \; K(n, n-1) \cap K(0, n-1) = \emptyset\} \cup \{k | 1 \leq k \leq n-1 \text{ ve } K(k, n-1) \cap K(n-k, n-1) = \emptyset\} = \{n\} \cup \{m | 1 \leq m \leq n-1 \text{ ve } K_m \cap K_{n-m} = \emptyset\}$ bulunur ... (*).

İddia-3: K_n, S_n in boş olmayan tüm altkümelerinin elemanları toplamının oluşturduğu kümedir.

İspat: n üzerinden tümevarımla kanıtlayalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için iddianın doğruluğu kolayca kontrol edilir. İddiamız $1, 2, \dots, n-1$ için doğru olsun, n için de doğru olacağını gösterelim. İspatlamamız gereken şey, $S_m \subset S_n \iff m \in K_n$ olduğudur.($S_m \subset S_n$ olması, m nin S_n in bir altkümesinin elemanları toplamı şeklinde ifade edilebildiği anlamına gelmektedir.) İfadenin iki yönünü de inceleyelim:

$S_m \subset S_n \Rightarrow m \in K_n$: İlk olarak, tümevarım varsayımından, her $1 \leq m \leq n-1$ için $a \in K_m, K_{n-m} \iff S_a \subset S_m, S_{n-m} \iff S_a \subset S_m \cap S_{n-m}$ elde edilir. Fakat $S_m \subset S_n$ ise $S_{n-m} = S_n / S_m$ olacağından $S_m \cap S_{n-m} = \emptyset$ sağlanır. Demek ki $S_a \subset S_m \cap S_{n-m}$ ve dolayısıyla da $a \in K_m, K_{n-m}$ olan bir a yoktur. Sonuç olarak, $1 \leq m \leq n-1$ için $S_m \subset S_n$ durumunda $K_m \cap K_{n-m} = \emptyset$ sağlanır ve (*) dan $m \in K_n$ olur. Ayrıca $m = n$ durumunda, (*) dan ötürü $S_n \subset S_n \iff n \in K_n$ de sağlanır.

$S_m \subset S_n \Leftarrow m \in K_n$: Bunun için, $S_m \not\subset S_n$ ise $m \notin K_n$ olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım $S_m \not\subset S_n$ ve $m \in K_n$ olsun. (*) dan ötürü $K_m \cap K_{n-m} = \emptyset$ olmalıdır. Dolayısıyla $S_m \cap S_{n-m} = \emptyset$ bulunur. Öyleyse $S_n = S_m \cup S_{n-m}$ olur; fakat bu da $S_m \not\subset S_n$ olması ile çelişir. Demek ki $m \notin K_n$ olmalıymış.

Sonuç olarak tümevarım varsayımı n için de doğrudur, tümevarımdan iddia ispatlanmış olur.

İddia-3 den ötürü $S_{2004} = \{1024, \; 512, \; 256, \; 128, \; 64, \; 16, 4\}$ dür. S_{2004} ün boş olmayan altkümelerinin sayısı $2^7 - 1 = 127$ dir. Öte yandan İddia-1 den, bu altkümelerden elemanları toplamı aynı olan farklı iki tanesi yoktur, çünkü bu alt kümelerdeki elemanların toplamı, farklı sayıların ikinin kuvvetleri toplamı şeklindeki yazılımını vermektedir. Öyleyse cevabımız 127 olacaktır.

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2005

1 Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4} \geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Kuvvetler Ortalaması eşitsizliğinden

$$\left(\frac{a^4+c^4}{2}\right)^{1/4} \geq \left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)^{1/2} \Rightarrow \sqrt{a^4+c^4} \geq \frac{a^2+c^2}{\sqrt{2}}$$

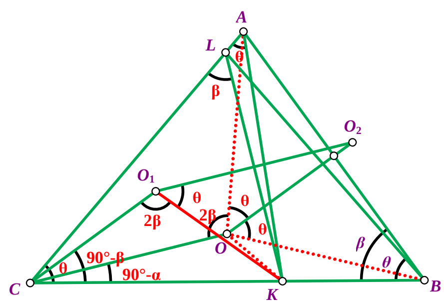
Diğer terimler için de aynısını yapıp taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4} \\ \geq \frac{2a^2+2b^2+2c^2+2d^2}{\sqrt{2}} \\ \geq \sqrt{2}\cdot(a^2+d^2+b^2+c^2) \\ \geq 2\sqrt{2}(ad+bc)\end{aligned}$$

2 $|CB| > |AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde, $[AC]$ nın orta dikmesi $[BC]$ yi K; $[BC]$ nin orta dikmesi de AC yi L de kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; CKL ve OAB üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri de sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere, OCO_1O_2 dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\angle ALB = 2\angle ACB = \angle AKB = \angle AOB$ olduğu için, A, L, O, K, B noktaları çemberseldir. LK doğru parçası, O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin ortak kirişi olduğu için, O_1O_2 doğrusu, LK doğru parçasının orta dikmesidir. Benzer şekilde OO_2 doğrusu, AB doğru parçasının orta dikmesidir.



Bu durumda, $\angle ACB = \angle AOO_2$ ve $\angle COA = 2\angle CBA$ ve $\angle COO_2 = 2\angle CBA + \angle ACB$.

$ALKB$ kirişler dörtgeninde, $\angle ABC = \angle ABK = \angle CLK$ olduğu için, $\angle CO_1K = 2\angle CLK = 2\angle ABC$ olacaktır. $\angle O_2O_1K = \dfrac{\angle AO_1K}{2} = \angle ACK$ olduğundan $\angle CO_1O_2 = 2\angle ABC + \angle ACB$ elde edildi. Bu durumda $\angle CO_1O_2 = \angle COO_2 = 2\angle ABC + \angle ACB$

$= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC - \angle BAC + \angle ABC = 180° - (\angle BAC - \angle ABC)$ olur.

$\angle CO_1K = 2\angle ABC$ ve $\angle COB = 2\angle CAB$ olduğu için, $\angle O_1CO = \angle O_1CK - \angle OCK$

$= 90° - \angle ABC - (90° - \angle BAC) = \angle BAC - \angle ABC = 180° - \angle CO_1O_2$ olur.

Böylelikle, CO_1O_2O bir paralelkenar olmuş oldu.

3 $n+1$ kentin bulunduğu bir ülkede, bu kentlerden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. A ve B kentleri arasında yapılan bir karşılıklı sefer, aynı gün içinde hem A dan B ye, hem de B den A ya yapılan bir uçuş ikilisi anlamına gelip, bir kentten diğerine karşılıklı olmayan tek yönlü bir sefer mevut değildir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. A kenti için, bir günde A dan kalkan uçak sayısını d_A ile gösteriyoruz. Başkent dışındaki tüm A kentleri için $d_A \leq n$ ve yine başkent dışındaki ve aralarında karşılıklı uçak seferi bulunmayan farklı herhangi iki A, B kenti için, $d_A + d_B \leq n$ koşulları sağlanmaktadır. $n+1$ kent arasında yer alan başkentten bir gün içinde yapılan uçak seferlerinin sayısı konusunda ise, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Bu ülkede bir günde en çok kaç karşılıklı uçak seferi yapılabileceğini ve bu en çok karşılıklı sefer sayısını olanaklı kılan tüm uçuş çizelgelerini belirleyiniz.

Çözüm:

(Sinan KARAL)

İddiamız en fazla $\binom{n+1}{2}$ sefer olabileceğidir.

Kentlerimiz $V_1, V_2, \cdots V_n$ ve başkentimiz de V olsun.

V_i şehrinden başkente giden seferlerin sayısı b_i, V_i'nin başkent dışında seferi olduğu şehirlerin sayısı r_i olsun.V den çıkan yolların sayısı y, $(V_1, \cdots, V_n)$ arasındaki yolların sayısı x olsun.

Tüm $(V_i, V_j)_{(i \neq j)}$ ikilileri üzerinden seferleri sayalım.Bir V_i ve V_j ikilisi aldığımızda, bu ikisinden çıkan seferlerin toplam sayısı (bir seferi iki kez de sayabiliriz, farketmez.)

$d_{V_i} + d_{V_j} = b_i + b_j + (d_{V_i} - b_i) + (d_{V_j} - b_j)$ dir. Yani bu saymada $\sum\limits_{i \neq j}(d_{V_i} + d_{V_j})$

toplamında V den çıkan her sefer (mesela V ile V_1 arasında bir yol) d_{V_1} bu toplamda kaç kez geçmişse o kadar kez, yani $2n-2$ kez sayılır.Bir V_i ve V_j yi bağlayan sefer ise d_{V_i} ve d_{V_j} kaç kez geçmişse o kadar yani $2(2n-2) = 4n-4$ kez sayılır.

Dolayısıyla $\sum\limits_{i \neq j}(d_{V_i} + d_{V_j}) = (2n-2)Y + (4n-4)X$ bulunur.... (1)

Diğer taraftan, $\sum\limits_{i \neq j}(d_{V_i} + d_{V_j}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i \neq j}(d_{V_j} + d_{V_i})$ sağlanır.Yani V_i şehrini sabit tutarak toplamı inceleyelim:

V_i'den sefer olan şehirler $V_{k_1}, V_{k_2}, \cdots, V_{k_{r_i}}$ olsun. Dolayısıyla bir $j \neq k_\ell$ için $V_i + V_j \leq n$ yazabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j}(d_{V_j} + d_{V_i}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j \neq i, k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}} (d_{V_i} + d_{V_j}) + \sum_{j \in k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}} (d_{V_i} + d_{V_j}) \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j \neq i, k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}} n + \sum_{j \in k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}} (n+n) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [n(n - r_i - 1) + 2n.r_i] = \sum_{i=1}^{n} (n^2 - n + nr_i) = n^3 - n^2 + n(r_1 + \cdots + r_n)$$

$r_1 + \cdots + r_n \leq 2X$ sağlanır, çünkü $r_1 + \cdots + r_n$ toplamı $V_1, \cdots, V_n$ arasındaki toplam sefer sayısından küçük eşittir.(V_i şehrinden diğer şehirlere en az r_i sefer vardır.)

$\implies$ (1)'i de kullanarak: $(2n-2)Y + (4n-4)X \leq n^3 - n^2 + 2X.n$

$\implies$ $(2n-2)(x+y) \leq [2X - (n^2 - n)] + [n^3 - n]$

$\implies$ $x + y \leq \left[\dfrac{2X - n^2 + n}{2n-2} \right] + \binom{n+1}{2}$ bulunur.

$x+y \le \binom{n+1}{2}$ olduğunu ispatlamak istiyoruz. $2X \le n^2-n$ ise sorun yok. $2X > n^2-n$ olsun. Dolayısıyla her V_a ile V_b arasında en az 1 sefer olmalı, aksi takdirde $d_{V_A}+d_{V_b} \le n$ olur ve $\sum_{i\neq a,b} d_{V_i} \le n$ olduğundan:

$2X \le \sum_{i=1}^{n} d_{V_i} \le n+(n-2)n = n^2-n$ olur, çelişki.

Yani her V_a ve V_b arasında sefer var. Bu durumda her V_i şehrinden en az $n-1$ sefer başkent dışındaki şehirlere olacağından, V_i şehrinin mümkün n. seferi ya başkente ya da başka bir şehredir.Yani $Y \le n$ olur ve tam $n-Y$ şehrin başkent dışındaki şehirlere en fazla n seferi olur.

$\implies 2X \le (n-Y)+(n^2-n)$, $x+y \le \frac{n^2-n}{2}+\frac{n+Y}{2} \le \frac{n^2-n}{2}+n = \binom{n+1}{2}$

Demek ki bu durumda zaten $x+y \le \binom{n+1}{2}$.

Sonuç olarak, $x+y \le \binom{n+1}{2}$ bulunur ve eşitlik durumunun sağlanması için:

i) $2X \le n^2-n$ iken, $i=1,\cdots,n$ için $r_i = d_{V_i}-b_i$ olacak, yani her V_i şehrinden başka şehirlere en fazla 1 sefer olacak. Ayrıca $X=\binom{n}{2}$ olacak, yani başkent dışında her şehir arasında tam 1 sefer var. $Y=n$ olacağından, başkentten de diğer her şehre tam 1 sefer var. Yani ülkedeki her şehir arasında o gün içinde karşılıklı tam 1 sefer var, bu durumda şartların sağlandığı açıktır.

ii) $2X > n^2-n$ iken, eşitlik durumu için $Y=n$ olmalı,

yani $X = \binom{n+1}{2} - Y = \frac{n^2-n}{2}$, çelişiki!

Demek ki bu durumda eşitlik olamaz.

İspat biter.

4 $5^m+7^n=k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m,n,k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm:

Denklemi mod4'te incelediğimizde $1^m+(-1)^n \equiv 0,1,0,3 \pmod 4$ olacağı için n tek olmalı.

mod7'de

5^m in kalan sınıfı $\{5,4,6,2,3,1\}$,

k^3 in kalan sınıfı $\{1,1,6,1,6,6,0\}$

olduğu için $m \equiv 3 \pmod 6$ yani $m=3a$ olmalı.

Bu durumda denklem $5^{3a}+7^n=k^3$ e dönüşür.

$7^n = k^3-(5^a)^3 \Rightarrow 7^n = (k-5^a)\left((k-5^a)^2+3\cdot k\cdot 5^a\right)$

İkinci çarpan ilkinden büyük olduğu için $k-5^a \equiv 0 \pmod 7$ olduğunda $3\cdot k\cdot 5^a \equiv k \equiv 0 \pmod 7$ gerekeceği için $k-5^a \equiv 0 \pmod 7$ olamaz.

Bu durumda geriye sadece $k-5^a=1$ durumu kalıyor. Yerine yazarsak $1+3\cdot k\cdot 5^a = 7^n$ elde ederiz. $a\ge 1$ için mod5'te incelersek, $n\equiv 0 \pmod 4$ elde ederiz ki bu başlangıçta bulduğumuz n tek olmalı yargısıyla çelişir. O halde $a\ge 1$ için bir çözüm yok.

Geriye sadece $a=0$ ve dolayısıyla $k-5^a=1 \Rightarrow k=2$ durumu kalıyor. Bu durumda denklemin tek çözümü $(m,n,k)=(0,1,2)$ oluyor.

5 Kenar uzunlukları a,b,c ve iç teğet çemberinin yarıçapı r olan bir üçgende,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\sqrt{u\left(u-a\right)\left(u-b\right)\left(u-c\right)} = ur \Rightarrow \left(u-a\right)\left(u-b\right) = \frac{ur^2}{\left(u-c\right)}$$

$$\frac{\left(u-a\right)+\left(u-b\right)}{2} \geq \sqrt{\left(u-a\right)\left(u-b\right)}$$

$$\Rightarrow c \geq 2\sqrt{\left(u-a\right)\left(u-b\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\left(u-a\right)\left(u-b\right)} = \frac{u-c}{4ur^2}$$

Benzer şekilde, $\frac{1}{a^2} \leq \frac{u-a}{4ur^2}$ ve $\frac{1}{b^2} \leq \frac{u-b}{4ur^2}$ elde edilir. Taraf tarafa topladığımızda,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leq \frac{u-a}{4ur^2}+\frac{u-b}{4ur^2}+\frac{u-c}{4ur^2} = \frac{3u-2u}{4ur^2} = \frac{1}{4r^2}$$

elde ederiz. Eşitlik $a=b=c$ iken sağlanır.

6 Terimleri tam sayılar olan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde, her $n \geq N$ için,

$$a_n = \left|\{i \mid i \leq i < n \text{ ve } a_i + i \geq n\}\right|$$

olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı varsa, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin en çok kaç değeri sonsuz kere alabileceğini belirleyiniz?

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

$\max\{a_i\} = K$ olsun.

İddia: a_i dizisinin üstten sınırı vardır.

İspat: $\max\{a_1,\ a_2,\ \dots, a_N\} = K$ olsun. $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m-1$ için $a_i \leq K$ olsun. $a_m \leq K$ olduğunu gösterelim. $i \leq m-K-1$ için $a_i \leq K$ olduğundan $a_i + i < m$ olur ve dizinin tanımı gereği $a_m \leq K$ bulunur ve iddianın ispatı tamamlanır.

İddia: a_i dizisi bir yerden sonra periyodik devam eder.

İspat: İlk iddiadan a_i terimi yalnızca kendinden önceki K terime bağlıdır. Dizinin alttan ve üstten sınırı da olduğundan $\{a_{m+1},\ a_{m+2}, \dots,\ a_{m+K}\} = \{a_{s+1}, a_{s+2}, \dots,\ a_{s+K}\}$ olan m ve s bulunmaktadır. Dizi de yalnızca kendinden önceki K terime bağlı olduğundan, $a_{m+i} = a_{s+i}$ olur ve dizi a_m teriminden sonra $s-m$ periyoduyla devam eder ve iddianın ispatı tamamlanır.

Dizi a_L teriminden itibaren periyodik olsun. $\max\{a_i \mid\ i \geq L\} = M$ olsun. Bundan sonra dizinin yalnızca a_L den sonraki kısmını inceleyelim. Dizinin tanımından dizi yalnızca kendinden önceki M terime bağlı olarak değişir.

İddia: $a_i = M$ ise $a_{i-M} = M$ dir.

İspat: Dizinin tanımından ve her terim yalnızca kendinden önceki M terime bağlı olduğundan $a_{i-1} \geq 1,\ a_{i-2} \geq 2,\ \dots, a_{i-M} \geq M$ dir. Dolayısıyla $a_{i-M} = M$ olur ve iddianın ispatı tamamlanır.

İddia: $a_k < M-1$ ise $a_{k+M-1} < M-1$ dir.

İspat: Öncelikle $a_{k-1} = M$ olamayacağını gösterelim. Diyelim $a_{k-1} = M$ olsun. Dizinin periyoduna t dersek $a_{k+tM-1} = M$ olur. Bir önceki iddiayı da kullanarak $a_{k+M-1} = M$ olur. Fakat $a_k + k < k+M-1$ olduğundan ve her terim önceki M terime bağlı olduğundan $a_{k+M-1} < M$ olur ve çelişki elde ederiz. Yani $a_{k-1} < M$ olmalıdır. Bu kez de $a_{k-1}+k-1 < M$ olacağından $a_{k+M-1} < M-1$ elde ederiz ve iddianın ispatı tamamlanır.

Şimdi $a_k < M-1$ olamayacağını gösterelim. Diyelim $a_k < M-1$ olsun. $a_n = M$ olan bir n alalım. Dizinin periyoduna t dersek $a_{n+tM} = M$ olur. Daha önce ispatladığımız iddialardan da $a_n = a_{n+m} = \cdots = a_{n+lm} =$

$\cdots = M$ olur. Son iddiayı kullanarak $a_k < M-1$ olduğundan $a_{k+l(M-1)} < M-1$ elde ederiz. $k+l(M-1) \equiv n \pmod{M}$ olan l bulunur; çünkü $M-1$ ile M aralarında asaldır. Öyleyse bu l için $a_{k+l(M-1)} = M$ olur; fakat $a_{k+l(M-1)} < M-1$ olmalıydı, çelişki elde ettik. Yani $a_k < M-1$ olamaz. Öyleyse a_i dizisi yalnızca $M-1$ ve M değerlerini sonsuz kez alabilir, yani cevabımız en fazla 2 dir. Şimdi de cevabın 2 olduğu duruma örnek verelim.

$a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-2} = 0,\ a_{N-1} = 1,\ a_N = 2$ alırsak a_n dizisi a_N den itibaren $2, 1, 2, 1, \ldots$ şeklinde devam eder ve böylece dizi 2 değerini sonsuz kez alır.

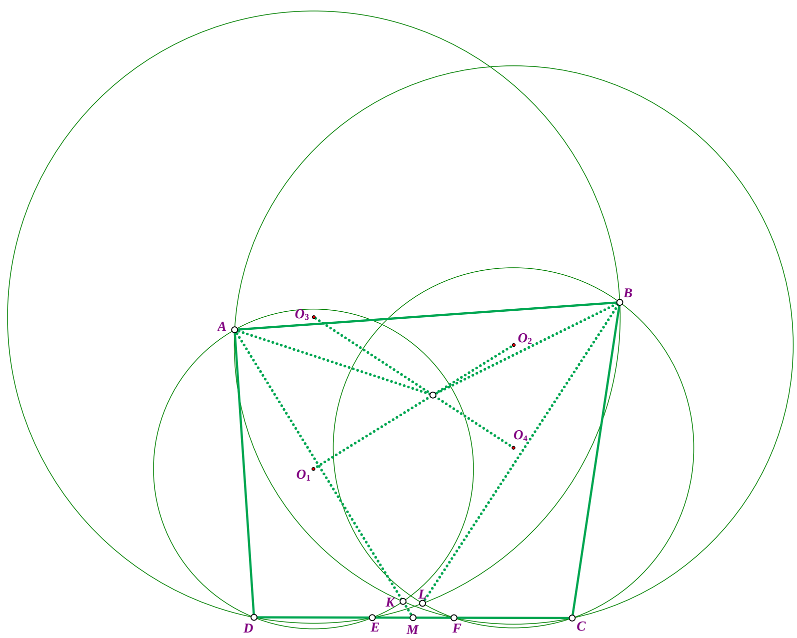
14. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2006

1 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

(Selim Bahadır)

Çözüm 1:

AK doğrusu CD yi M de kessin.



(ADE) çemberine göre, $MK \cdot MA = ME \cdot MD = ME\,(ME + ED)$.

(ACF) çemberine göre, $MK \cdot MA = MF \cdot MC = MF\,(MF + FC)$.

$$ME^2 + ME \cdot ED = MF^2 + MF \cdot FC \Rightarrow ME^2 - MF^2 + ED\,(ME - MF) = 0$$

$$\Rightarrow (ME - MF)\,(ME + MF + ED) = 0 \Rightarrow ME = MF$$

M noktasının (BDE) çemberine göre kuvveti, (BCF) çemberine göre kuvvetine eşit olacağından M, bu iki çemberin kuvvet ekseni üzerindedir. Yani, BL doğrusu da CD yi M de kesecek.

$$EM \cdot MD = MF \cdot MC$$

$$\Rightarrow MK \cdot AM = ML \cdot MB$$

olduğu için A, K, L, B noktaları çemberseldir.

Çözüm 2:

AK ile BL doğrularının CD üstünde kesiştiğini göstereceğiz, ki bu direkt olarak kesişim noktası için birkaç çembere göre kuvvetten istenen çemberselliği verecek.

$AK \cap CD = P$ ve $BL \cap CD = Q$ olsun

P ve Q noktaları sırasıyla $(ADEK) - (AKFC)$ ve $(BLED) - (BLFC)$ çemberlerinin kuvvet ekseni üzerindedir. Dolayısıyla $PE \cdot PD = PF \cdot PC$ ve $QE \cdot QD = QF \cdot QC$ olur. Bu ise $P \equiv Q$ çakışıklığını doğurur (Neden?). Sonrasında P noktasının $(ADEK)$ ve $(BLFC)$ çemberlerine göre kuvvetinden $PE.PD = PK.PA = PF.PC = PL.PB$ elde edilir, istenen çembersellik $L \in (ABK)$ şeklinde elde edilir.

2 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklı bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap: $t = \dfrac{2006}{14}$.

Tüm öğrencilerin öğretmenlerle tanışık olduğu durumu düşünürsek tüm öğrenci ve öğretmen ikilileri için bu oran $\frac{2006}{14}$ e eşittir ve dolayısıyla $t \leq \frac{2006}{14}$ elde ederiz.

Şimdi $t = \frac{2006}{14}$ ün istenen şartı sağlayacağını ispatlamamız yeterlidir. $1 \leq i \leq 14$ için, a_i ile, i. öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısını; $1 \leq j \leq 2006$ için, b_j ile de j. öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısını gösterelim. Öğrencilerimizi 1 den 2006 ya kadar, öğretmenlerimizi de 1 den 14 e kadar numaralandıralım. T, birbirini tanıyan tüm (i, j) öğretmen-öğrenci ikililerinin kümesi olsun. Bu gösterimle, $|\{\ j :\ (i, j) \in T\ \}| = a_i \geq 0$ ve $|\{\ i :\ (i, j) \in T\ \}| = b_j \leq 1$ olduğunu gözlemleyelim.

$\dfrac{a_i}{b_j}$ oranının maksimum olmasını sağlayan $(i, j) \in T$ ikilisi vardır, bu ikili $(i_0, j_0) \in T$ olsun. Dolayısıyla $(i, j) \in T$ için, $\dfrac{a_{i0}}{b_{j0}} \geq \dfrac{a_i}{b_j}$ koşulunu sağlanır. Şimdi, tüm $(i, j) \in T$ için, $\dfrac{a_{i0}}{b_{j_0}} \cdot \dfrac{1}{a_i} \geq \dfrac{1}{b_j}$ eşitsizliklerini toplarsak,

$$\frac{a_{i0}}{b_{j0}} \cdot \Big(\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i}\Big) \geq \sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{b_j}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi,

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{14} \sum_{\{j:\ (i,j)\in T\}} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{14} \frac{|\ \{j:\ (i,j)\in T\}\ |}{a_i} = \sum_{\{i:\ a_i \neq 0\}} \frac{a_i}{a_i} = \sum_{\{i: a_i \neq 0\}} 1 \leq 14$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \sum_{\{i:\ (i,j)\in T\}} \frac{1}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \frac{|\ \{i:\ (i,j)\in T\}\ |}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \frac{b_j}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} 1 = 2006$$

bulunur. Son eşitlikte eşitlik durumu vardır, çünkü sorudaki varsayım gereği her öğrenci en az bir öğretmen tanımaktadır.

Dolayısıyla $\dfrac{a_{i0}}{b_{j0}} \cdot 14 \geq \dfrac{a_{i0}}{b_{j0}} \cdot \sum_{(i,j)\in T} \dfrac{1}{a_i} \leq \sum_{(i,j)\in T} \dfrac{1}{b_j} \geq 2006 \Rightarrow \dfrac{a_{i0}}{b_{j0}} \geq \dfrac{2006}{14}$ bulunur. Demek ki (i_0, j_0) öğretmen-öğrenci ikilisi için bu oran $\geq \dfrac{2006}{14}$ dür, ispat biter.

3

$$P_n(x) = (x^2+x+1)^n - (x^2+x)^n - (x^2+1)^n - (x+1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

polinomunun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Okan Tekman)

Çözüm:

Cevap: $0 \le k \le l$ tamsayılar olmak üzere, $n = 7^k$ ve $n = 7^k + 7^l$ formatındaki sayılar bu şartı sağlar.

Öncelikle bir Lemma tanımlayalım:

Lemma: $Q(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom, p bir asal sayı ve m de bir pozitif tamsayı olmak üzere, $[Q(x)]^{p^m}$ ile $Q(x^{p^m})$ polinomlarının katsayıları mod$p$ de birbirine denktir.

İspat: Öncelikle $m = 1$ için ispatlayalım, sonra tümevarımla Lemma'yı her m için ispatlayacağız. $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ olarak tanımlayalım.

$[Q(x)]^p = \sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} x^{i_1+i_2+\dots+i_p}$ şeklindedir. $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} x^{i_1+i_2+\dots+i_p}$ ifadesi toplamda $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_p})$ nin permütasyonlarının sayısı kadar geçmektedir. Dolayısıyla $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p})$ nin permütasyonlarının sayısının p ile böldüğü durumları, p modunda baktığımızdan ötürü çıkarabiliriz. Diğer taraftan, bu permütasyonların sayısı $\dfrac{p!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_t!}$ $(k_1+k_2+\dots+k_t = p)$ formatındadır ($i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere x_i tane y_i nin permütasyonlarının sayısı $\dfrac{(x_1+x_2+\dots+x_n)!}{x_1! x_2! \dots x_n!}$ dir.) ve p asal olduğundan, bu ifadenin p ile bölünmediği tek durum, $k_1 = p,\ t = 1$ durumudur. Bu istisnai durum da ancak $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_p}$ iken mümkündür. Yani p modunda bu şartın sağlanmadığı tüm ifadeler 0 a denktir. Sonuç olarak $[Q(x)]^p = \sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} x^{i_1+i_2+\dots i_p} \equiv \sum_{i=1}^n a_i{}^p x^{pi} \pmod p$ bulunur. Son olarak, Küçük Fermat Teoremi'nden $a_i{}^p \equiv a_i \pmod p$ olduğundan bu polinomun katsayıları da mod$p$ de $\sum_{i=1}^n a_i x^{pi} = Q(x^p)$ polinomun katsayılarına denk olur ve Lemma'nın $m = 1$ ispatı tamamlanır.

Şimdi, varsayalım Lemma bir $m \ge 1$ doğrudur, $m+1$ için inceleyelim. Tümevarım varsayımını m için kullanarak: $[Q(x)]^{p^{m+1}} = [Q(x)]^{p^m}.[Q(x)]^{p^m} \dots .[Q(x)]^{p^m} \equiv \left[Q\left(x^{p^m}\right)\right]^p \pmod p$. Diğer taraftan, $R(x) = Q(x^{p^m})$ polinomu için Lemma'nın $m = 1$ durumunu kullanarak $[R(x)]^p \equiv R(x^p) \pmod p$ olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak $[Q(x)]^{p^{m+1}} \equiv \left[Q(x^{p^m})\right]^p \equiv Q\left(x^{p^{m+1}}\right) \pmod p$ bulunur. Tümevarım varsayımı $m+1$ için de doğrudur, tümevarımdan ispat biter.

Şimdi, Lemma'yı $p = 7$ için kullanarak $0 \le k \le l$ tamsayılar olmak üzere, $n = 7^k$ ve $n = 7^k + 7^l$ sayılarının şartı sağlayacağını ispatlayalım:

$P_{7^k}(x) = (x^2+x+1)^{7^k} - (x^2+x)^{7^k} - (x+1)^{7^k} + x^{2\cdot 7^k} + x^{7^k} + 1$

$\equiv ((x^{7^k})^2 + x^{7^k} + 1) - ((x^{7^k})^2 + x^{7^k}) - (x^{7^k} + 1) + x^{2\cdot 7^k} + x^{7^k} + 1 \equiv 0 \pmod 7$,

$n = 7^k$ şartı sağlar.

$P_{7^k+7^l}(x) = (x^2+x+1)^{7^k+7^l} - (x^2+x)^{7^k+7^l} - (x+1)^{7^k+7^l} + x^{2.(7^k+7^l)} + x^{7^k+7^l} + 1$

$\equiv ((x^{7^k})^2 + x^{7^k} + 1)\cdot((x^{7^l})^2 + x^{7^l} + 1) - ((x^{7^k})^2 + x^{7^k})\cdot((x^{7^l})^2 + x^{7^l}) - (x^{7^k}+1)\cdot(x^{7^l}+1) + + x^{2.(7^k+7^l)} + x^{7^k+7^l} + 1 \equiv 0 \pmod 7$,

$n = 7^k + 7^l$ istenen şartı sağlar.

Şimdi diğer n tamsayıları için koşulun sağlanmayacağını gösterelim. $n = 1$ ve $n = 2$ şartı sağladığından, $n > 2$ varsayabiliriz.

Lemma'yı kullanarak

$P_{7m}(x) = (x^2+x+1)^{7m} - (x^2+x)^{7m} - (x+1)^{7m} + x^{14m} + x^{7m} + 1$

$\equiv ((x^7)^2 + x^7 + 1)^m - ((x^7)^2 + x^7)^m - (x^7+1)^m + (x^7)^{2m} + (x^7)^m + 1 = P_m(x^7) \pmod 7$ bulunur. Yani $7m$ istenen şartı sağlıyorsa m de sağlar, dolayısıyla genelliği bozmadan n nin 7 ile bölünmediğini varsayabiliriz.

$n > 2$ için P_n polinomunda x^3 ün katsayısının $n(n-1)$ olduğu açıktır. $(n, 7) = 1$ olduğundan, $7|n-1$ sağlanmalıdır. $a \ge 1$ ve $b \ge 2$ tamsayılar ve $7 \nmid b$ olmak üzere, $n = 1 + 7^a b$ olsun.

Tüm denklikler 7 modunda olmak üzere, Lemma'yı kullanarak

$(x^2+x+1)^n \equiv (x^2+x+1)\ (x^2+x+1)^{7^a b} \equiv (x^2+x+1)(x^{2\cdot 7^a}+x^{7^a}+1)^{\ b}$
$\equiv 1+x+x^2+bx^{7^a}+bx^{7^a+1}+bx^{7^a+2}+$ (derecesi $2\cdot 7^a$ veya daha büyük olan terimler)
$(x+1)^n \equiv 1+x+bx^{7^a}+bx^{7^a+1}+$ (derecesi $2\cdot 7^a$ veya daha büyük olan terimler)
$(x^2+1)^n \equiv 1+x^2+$ (derecesi $2\cdot 7^a$ veya daha büyük olan terimler)
$(x^2+x)^n \equiv$ (derecesi $2\cdot 7^a$ veya daha büyük olan terimler)
elde ederiz (En son denklikte $b\geq 2$ olduğunu kullandık).

Buradan $P_n(x) \equiv bx^{7^a+2}+$ (derecesi $2\cdot 7^a$ veya daha büyük olan terimler) çıkar. Bu da b sayısı 7 ile bölünmediği için $P_n(x)$ polinomunun x^{7^a+2} teriminin katsayısının 7 ile bölünmediğini kanıtlar. Demek ki diğer n tamsayıları için koşulun sağlanmaz, ispat biter.

4 $n\geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$t = a_1+a_2+\ldots+a_n = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$$

ise,

$$\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$$

olduğunu gösteriniz.

(Refail Alizade)

Çözüm:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni kullanarak:

$(\sum\limits_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}).(\sum\limits_{i\neq j}a_i a_j) \geq (\sum\limits_{i\neq j}a_i)^2 = (n-1)^2.(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2 = (n-1)^2 t^2$ bulunur.

Öte yandan, $\sum\limits_{i\neq j}a_i a_j = (\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}{a_i}^2 = t^2 - t$ olduğundan, $\sum\limits_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t^2}{\sum\limits_{i\neq j}a_i a_j} = \frac{(n-1)^2 t^2}{t^2-t} = \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$
elde edilir, ispat biter.

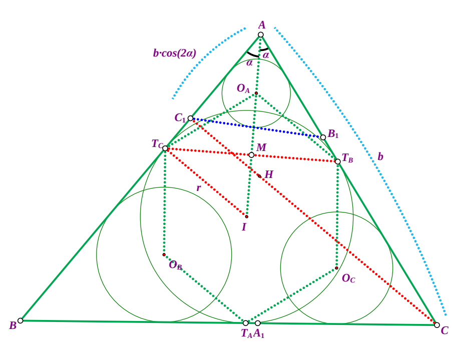
5 Dar açılı bir ABC üçgeninin yükseklikleri $[AA_1]$, $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ olsun. AB_1C_1, BC_1A_1 ve CA_1B_1 üçgenlerinin iç merkezleri, sırasıyla, O_A, O_B ve O_C olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına, sırasıyla, T_A, T_B ve T_C noktalarında teğet ise, $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Tagiyev)

Çözüm:

$AC = b$ ve $\angle BAC = 2\alpha$ olsun. $AC = b\cdot\cos 2\alpha$ olacaktır.

İster BC_1B_1C kirişler dörtgeni olduğu için $(A.A)$ dan, ister $AB_1 = c\cdot\cos 2\alpha$ eşitliğinden dolayı $(K.A.K)$ dan $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ olacaktır. Benzerlik oranı $\cos 2\alpha$ dır.



Benzer üçgenlerin, açıortayları da benzer olacağından $\dfrac{AO_A}{AI} = \cos 2\alpha$ olur.

T_C den AI ya inilen dikmenin ayağı M ve $IT_C = r$ olsun. $\angle MT_CI = \alpha$ olacağı için

$MI = r{\cdot}\sin\alpha$, $MT_C = r{\cdot}\cos\alpha$ ve $AM = r{\cdot}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ olacaktır. Diğer taraftan, $\triangle AT_CI$ üçgeninde $AI = \dfrac{r}{\sin\alpha}$, dolayısıyla da $AO_A = r\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$ olacaktır.

$$AM - MI = r\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - r\cdot\sin\alpha = r\cdot\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = r\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = AO_A$$

olduğu için

$$AM = MI + AO_A = MO_A + AO_A \Rightarrow O_AM = MI \Rightarrow O_AT_C = T_CI = r$$

elde edilir. Diğer uzunluklar için de aynı şeyleri yaptığımızda $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin tüm kenarlarının r ye eşit olduğu görülür.

6 Kenarları, alanı ve iç açılarının derece cinsinden ölçüleri rasyonel sayılar olan bir üçgenin bulunmadığını ispat ediniz.

(Selim Bahadır)

Çözüm:

Varsayalım bir ABC üçgeni için bu şart sağlanır. Üçgenimizin kenar uzunlukları a, b, c; çevrel çemberi yarıçapı R ve iç açıları da A, B, C olsun.

Varsayımımız gereği olarak, radyan cinsinden baktığımızda A, B, C açıları π nin rasyonel katıdır. $A(ABC) = \dfrac{abc}{4R}$ olduğundan R de rasyoneldir. $a = 2R\sin A$ olduğundan $\sin A$ da rasyoneldir. Benzer şekilde $\sin B$ ve $\sin C$ rasyonel olmalıdır. İki lemma tanımlayalım:

Lemma-1: $\forall\ n$ pozitif tamsayısı için öyle bir $S_n(x)$ polinomu vardır ki, $S_n(x)$ in başkatsayısı 1, katsayıları tamsayı olsun ve $S_n(2\cos\alpha) = 2\cos n\alpha$ sağlansın.

İspat: n üzerine tümevarımla ispatlayalım. $n = 1$ için $S_1(x) = x$ ve $n = 2$ için $S_2(x) = x^2 - 2$ polinomları istenen şartı sağlıyor. Lemmadaki iddia $\forall\ n \le m$ pozitif tamsayısı için doğru olsun, $m + 1$ için kanıtlayalım. $S_{m+1}(x) = xS_m(x) - S_{m-1}(x)$ alırsak sağladığı yarım açı formülünden kolayca görülür.

Lemma-2: $\alpha = \pi\cdot r$ olmak üzere $\cos\alpha$ rasyonel ve r rasyonel sayılar ise $\cos\alpha \in \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ sağlanır.

İspat: $n.r \equiv 0 \pmod 2$ sağlanacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ve Lemma-1 deki şartları sağlayan bir $S_n(x)$ polinomu alalım. $S_n(2\cos\alpha) = 2\cos n\alpha = 2\cos(nr\pi) = 1$ olur. $S_n(x) - 1 = P_n(x)$ olarak tanımlayalım. $2\cos\alpha = \dfrac{a}{b}$ olmak üzere (a, b tamsayı ve aralarında asal) $\dfrac{a}{b}$, $P_n(x)$ in bir köküdür. Rasyonel Kök Teoremi'nden, $P_n(x)$ her rasyonel kökü ya sıfırdır ya da kökün en sade halinin paydasındaki ifade polinomun baş katsayısını böler. Dolayısıyla $b|1$ veya $a = 0$ sağlanmalıdır, ki bu $\cos\alpha \in \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ demektir. Lemma-2 ispatlandı.

A, B, C açıları π nin rasyonel katı olduğundan $90^\circ - A,\ 90^\circ - B, 90^\circ - C$ sayıları da π nin rasyonel katıdır. $\cos(90^\circ - A) = \sin A$, $\cos(90^\circ - B) = \sin B$, $\cos(90^\circ - C) = \sin C$ nin rasyonel olduğunu biliyoruz. Lemma-2 den ötürü; $\cos(90^\circ - A) = \sin A \in \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ olmalıdır. Dolayısıyla derece cinsinde düşünürsek $A \in \{30^\circ, 90^\circ\}$ olmalıdır. Aynı şeyler B ve C için de geçerlidir, yani $B \in \{30^\circ, 90^\circ\}$ ve $C \in \{30^\circ, 90^\circ\}$ sağlanmalıdır. Fakat bu durumda Dolayısıyla $A+B+C$ toplamı 180° olamaz, varsayımımızla çelişir.

Sonuç olarak böyle bir üçgen bulunamaz.

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2007

1 Dar açılı bir ABC üçgeninin AC kenarını çap kabul eden çember, AB ve BC yi, A ve C dışında, sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberi, CK doğrusunu C dışında F noktasında; AL doğrusunu ise, A dışında D noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir E noktası alıp, BE ile AC nin kesiştiği noktaya N diyelim. Eğer

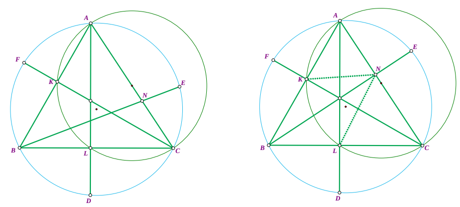
$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$

ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

Çözüm 1:

Soruda yükseklikler uzun uzun anlatılmış.



AC çap olduğu için AL yükseklik. Aynı şekilde, AK da yükseklik.

$$BF^2 - AF^2 = BK^2 - AK^2 = BC^2 - AC^2$$
$$CD^2 - BD^2 = CL^2 - BL^2 = AC^2 - AB^2$$

Taraf tarafa toplarsak,

$$CE^2 - AE^2 = BF^2 + CD^2 - AF^2 - BD^2 = BC^2 - AB^2$$

elde ederiz. Bu da $BE \perp AC$ demektir. Buradan gerisi de yüksekliklerin kesişimiyle oluşan kirişler dörtgenlerini görme.

BC çaplı çember K ve N den geçer, $\angle ANK = \angle ABC$ ve $\angle KNB = 90° - \angle ABC$.

AB çaplı çember L ve N den geçer, $\angle LNC = \angle ABC$ ve $\angle BNL = 90° - \angle ABC = \angle KNB$.

Çözüm 2:

Problem aslında Blanchet Teoremi ile genelleştirilebilir diye düşünüyorum.

AL ve CK , $\triangle ABC$ 'nin yükseklikleridir. H noktası diklik merkezi olmak üzere, H diklik merkezin üçgenin kenarlarına göre yansımasının çevrel çember üzerinde olduğunu biliyoruz (Çünkü $\angle FAB = \angle FCB = \angle BAL$ dir.). Bunun sonucu olarak

$$AF = AH \quad , \quad BD = BH = BF \quad \text{ve} \quad CD = CH$$

eşitlikleri elde edilir. Problem koşuluna göre

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AH^2 + BF^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$$

$$\iff AH^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2$$

bulunur. Bu ise $AHCE$ dörtgeninin karşılıklı kenarlarının kareleri toplamı eşit olduğundan köşegenlerin dik kesişmesi anlamına gelir. Dolayısıyla $HE \perp AC \iff BN \perp AC$ dır. Yani N noktası A 'dan çıkan dikmenin ayağıdır. H diklik merkezi ortik üçgen $\triangle KLN$ 'nin iç merkezi olduğundan $\angle KNB = \angle BNL$ olur.

2 2007×2007 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın i. satır ve j. sütunundaki birim kareyi (i, j) ile $x \le i$ ve $y \le j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı (x, y) birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her (i, j) birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

(Özgür Kişisel)

Çözüm:

(Mathematist)

(i, j) nin üzerinde yazılı olan sayının 2 modundaki değeri $f_{(i,j)}$ olsun.

Genelliği bozmadan, başlangıç hamlesi öncesinde bütün boyalı (i, j) birim kareleri üzerinde 1 yazılı olduğunu varsayabiliriz. Böylece başlangıç hamlesinde yaptığımız da, sonraki hamlelerde olduğu gibi, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamını yazmak olur. Dolayısıyla adımlara başlamadan önce her (i, j) boyalı birim karesi için $f_{(i,j)} = 1$ olur.

n ile tahtadaki toplam boyalı birim kare sayısı gösterilmek üzere, n üzerine tümevarım yaparak, her n pozitif tamsayısı için tahtadaki tüm sayıların tek sayı olmasının sağlanabileceğini ispatlayalım.

Eğer $n = 1$ ise, boyalı olan sadece bir (i, j) birim karesi vardır ve ilk adımdan sonra $f_{(i,j)} = 1$ olur. Diyelim ki önerme $n = k$ için doğru olsun. $n = k + 1$ durumuna bakalım:

Eğer $i \le r$ ve $j \le l$ ise $(i, j) \le (r, l)$ şeklinde tanımlanmak üzere boyalı birim kareler arasında bir büyüklük-küçülük sıralaması kuralım. Her sonlu kümenin en büyük bir elemanı olduğundan, bu sıralamaya göre en büyük olan en az bir eleman vardır (Birbiri arasında büyüklük-küçüklük sıralaması kurulamayan bazı en büyük elemanlar bulunabilir.). Bu elemanlardan biri (p, q) olsun.

Herhangi bir adımda (p, q) birim karesinin diğer boyalı birim kareler üzerinde bir etkisi yoktur. Eğer (p, q) birim karesini silersek, tümevarım prensibine göre, uygun bir N pozitif tamsayısı için N adımdan sonra kalan bütün birim karelerin üzerinde tek sayı yazıyor olacaktır. Dolayısıyla, eğer (p, q) yu silmezsek, N adım sonra $f_{(p,q)}$ dışındaki bütün birim kareler için $f_{(i,j)} = 1$ sağlanır.

Eğer $f_{(p,q)} = 1$ de sağlanıyorsa tümevarım biter. Diyelim ki $f_{(p,q)} = 0$. Demek ki ilk N adım $f_{(p,q)}$ ya 1 eklemiş ve 1 den 0 a değiştirmiş. Böylece (p, q) karesi dışında tüm kareler için başlangıç durumuna dönmüş olduk. Bu yaptığımız işlemler, diğer k kare için 2 modunda periyodik olduğundan, toplam $2N$ sonunda yapılan son N adım da $f_{(p,q)}$ ya 1 ekler ve bütün boyalı birim kareler için $f_{(i,j)} = 1$ olur, ispat biter.

3 $a + b + c = 3$ eşitliğini sağlayan tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \ge 4$$

olduğunu gösteriniz.

(Refail Alizade)

Çözüm:

(Mathematist)

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} \ge A.G.O. \ge \sum_{cyc} \frac{2b^2 + 2ab}{ab^2(4 - ab)} = 2 \sum_{cyc} \frac{a + b}{ab(4 - ab)}$$

$$\ge \sum_{cyc} \frac{4\sqrt{ab}}{ab(4 - ab)} = 4 \sum_{cyc} \frac{1}{(2 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab})\sqrt{ab}}$$

Diğer taraftan, $(\sqrt{ab} - 1)^2 \ge 0$ olduğundan, $\sqrt{ab}(2 - \sqrt{ab}) \le 1$ sağlanır. Bunu yerine yazarsak:

$$4\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{ab}(2-\sqrt{ab})(2+\sqrt{ab})} \geq 4\sum_{cyc}\frac{1}{2+\sqrt{ab}} \geq Cauchy-Schwarz$$

$$\geq 4\frac{(1+1+1)^2}{(2+\sqrt{ab})+(2+\sqrt{ab})+(2+\sqrt{ac})} = \frac{36}{6+\sum\limits_{cyc}\sqrt{ab}}$$

bulunur.

Son olarak, $\sum\limits_{cyc}\sqrt{ab} \leq AGO \leq \sum\limits_{cyc}\frac{a+b}{2} = 3$ olduğundan, $\frac{36}{6+\sum\limits_{cyc}\sqrt{ab}} \geq 4$ sağlanır.

Sonuç olarak, $\sum\limits_{cyc}\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)} \geq \frac{36}{6+\sum\limits_{cyc}\sqrt{ab}} \geq 4$ bulunur, ispat biter.

Not:

Çözümde kullanılan eşitsizlik literatürde Bergström Eşitsizliği (Cauchy Schwarz'ın farklı bir versiyonu) olarak bilinir.

4 $k > 1$ bir sayı, $p = 6k+1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1}-1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

Çözüm:

(Mathematist)

$k > 1$ olduğundan $p \neq 7$ öncelikle $128 \equiv 2^7 \equiv 1 \pmod{127}$ olduğundan $der_{127}2 = 7$ olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan 127 bir asal sayıdır ve dolayısıyla:

$$(127, m) > 1 \Leftrightarrow 127|m \Leftrightarrow 127|2^p - 1 \Leftrightarrow 2^p \equiv 1 \pmod{127} \Leftrightarrow 7|p$$

bulunur ki bu $p > 7$ olduğundan mümkün değil.

$\Rightarrow (127, m) = 1$. Dolayısıyla ayrı ayrı $m|2^{m-1}-1$ ve $127|2^{m-1}-1$ olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

$127|2^{m-1}-1 \Leftrightarrow 2^{m-1} \equiv 1 \pmod{127} \Leftrightarrow 7|m-1 \Leftrightarrow 7|2^0-2 \Leftrightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{7}$ bulunur. Diğer taraftan $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ve $6|p-1$ olduğundan $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{7}$ ve de $127|2^{m-1}-1$ doğrudur.

Ayrıca $m = 2^p - 1|2^{m-1}-1$ olduğunu ispatlamak için, $p|m-1$ olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü böylece $m-1 = pt$ olur ve $2^{m-1}-1 = (2^p-1)(2^{p.(t-1)} + 2^{p.(t-2)} + \cdots + 1)$ şeklinde yazılabilir.

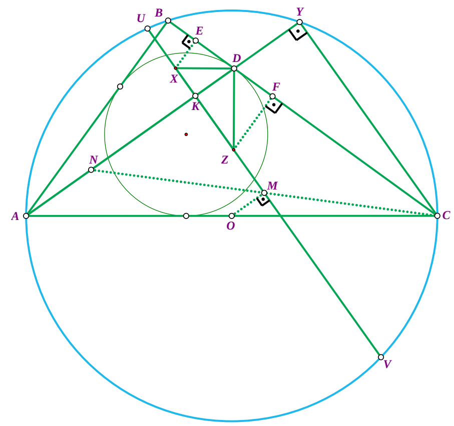
Diğer taraftan $2^p \equiv 2 \pmod{p} \Leftrightarrow m \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ denkliği Küçük Fermat Teoremi'nden sağlanır, ispat biter.

5 $m(\widehat{B}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC kenarına D noktasında değiyor. ABD ve ACD üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla X ve Z olmak üzere, XZ ve AD doğruları K noktasında kesişiyor. XZ nin ABC nin çevrel çemberini kestiği noktalar U ve V; UV doğru parçasının orta noktası M; AD nin ABC nin çevrel çemberini A dışında kestiği nokta Y olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

(Cafer Tayyar Yıldırım)

Çözüm:

X merkezli içteğet çember BC ye E de dokunsun. Z merkezli içteğet çember BC ye F de dokunsun.



DE ve DF uzunluklarını hesaplayacağız.

$AD = x$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ ve $u = \dfrac{a+b+c}{2}$ olsun.

$BD = u - b$ ve $CD = u - c$

$\triangle ABD$ üçgeninde $DE = \dfrac{c+u-b+x}{2} - c = \dfrac{x+u-b-c}{2}$ elde edilir.

$\triangle ADC$ üçgeninde $DF = \dfrac{b+u-c+x}{2} - b = \dfrac{x+u-b-c}{2} = DE$ olur.

X merkezli çemberin AD ye dokunduğu nokta ile Z merkezli çemberin AD ye dokunduğu nokta aynı olacağından, bu nokta, X ve Z doğrusal olacaktır. Bu durumda çemberler AD ye K da dokunurlar. Yani, $AD \perp XZ$.

M, UV kirişinin orta noktası olduğu için $OM \perp XZ$. Bu durumda $AD \parallel OM$ olacaktır. Dolayısıyla $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CM}{MN}$ elde edilir. $AD \perp XZ$ ile $AY \perp YC$ olduğu için $KM \parallel YC$ olur. Bu durumda, paralellikten, $\dfrac{NM}{NC} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{MK}{YC}$ elde edilir.

$\boxed{6}$ n kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, herhangi bir kentin tüm yolları kapansa bile, her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabiliyor. Farklı A ve B kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok k yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir l yolu için, A dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, l yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere B ye ulaşabiliyorsak, *A kenti B kentine k-yönlü bağlanabilir* diyoruz. Her A kenti başka her B kentine k-yönlü bağlanabiliyorsa, k en az kaç olur?

(Azer Kerimov)

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

Öncelikle $k \geq 2n-3$ olması gerektiğini ispatlayalım. Kentlerin $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}, A, B$ olduğu bir ülke alalım. Bu ülkenin ekonomik durumu çok iyi olmasın. Sadece A ile $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ ve B ile $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ şehirleri arasında ve A ile B arasında yollar yapılmış olsun. Bu ülkede hangi şehir kapanırsa kapansın geriye kalan şehirler kendi aralarında bağlantılıdır.

Eğer $k < 2n-3$ olsaydı bu ülkedeki yol sayısı $2n-3$ olduğundan en az bir yolu kendimiz yönlendiremeyecektik. Bu yol AB olsaydı $l = AB$ ve $B \to A$ yönünde olursa istenen sağlanamaz. Bu yol $1 \le i \le n-2$ için AK_i olsaydı $l = AK_i$ ve $K_i \to A$ yönünde olursa istenen sağlanamazdı. Bu yol $1 \le i \le n-2$ için K_iB olsaydı $l = K_iB$ ve $B \to K_i$ yönü için A dan başlayıp l den geçip B ye her kente en fazla bir kez uğrayarak ulaşamazdık. Yani A kenti B kentine $k-$ yönlü bağlanamazdı. Halbuki ülkenin herhangi iki şehri $k-$ yönlü bağlanabiliyordu. Bu bir çelişki olup $k \ge 2n-3$ olur. Şimdi $k = 2n-3$ ün yeterli olduğunu ispatlayalım.

Sorudaki şartları sağlayan bir G ülkesi alalım. G nin herhangi iki A ve B kenti için A kentinin B kentine $(2n-3)-$ yönlü bağlanabilir olduğunu ispatlayacağız. G nin iki A ve B farklı kentlerini alalım. Her şehirden en fazla bir kez geçerek A dan B ye (henüz yollar yönlendirilmemişken) gidebileceğimiz bir m_1 yolu alalım. A ve B dışındaki bir kenti silince geriye kalanlar bağlantılı olduğundan A ile B arasında her kentten en fazla bir kez geçen bir yol vardır. Eğer m_1 üzerinde olmayan kent yoksa tamam. Diyelim ki m_1 dışında kentler var. Bu kentler kümesi M_1 olsun. Her kentten en fazla bir kez geçen yollara “ekonomik yol” diyelim.

Sadece başlangıç ve bitiş kentleri m_1 de olan, M_1 den en az bir kent içeren bir ekonomik yol varsa bu ekonomik yol ve m_1 yolunun birleşimi m_2 olsun. m_2 dışındaki kentler kümesi M_2 olsun.

Sadece başlangıç ve bitiş kentleri m_2 de olan, M_2 den en az bir kent içeren bir ekonomik yol varsa bunu da alıyoruz ve bu ekonomik yol ile m_2 nin birleşimi m_3 olsun.

Bu şekilde ilerleyelim ve ekonomik yolların birleşimi şeklinde son olarak bir m elde edelim. m in dışında kent yoksa tamam. Diyelim ki m nin dışında en az bir kent var. Bunlardan biri C kenti olsun. B yi silince kalan kentler bağlantılı olduğundan C ile A arasında bir ekonomik yol bulunur. O halde m nin dışında kalan kentler kümesine M dersek C den başlayıp M den bazı kentlerden geçerek m deki bir kente ulaşan bir m' yolu olacak. m' yolunun m ile kesişmeden bir önceki şehri D olsun. ($D = C$ olabilir) m' yolunun m ile kesişen yerdeki şehri E olsun. E yi silince geriye kalan kentler yine bağlantılı olacağından D ile A arasında bir ekonomik yol olacaktır. O halde D ile başlayıp M deki bazı kentlerden geçip m ye E den farklı bir F noktasında ulaşan bir m'' yolu vardır. Bu yol $DX_1X_2 \dots X_sF$ olsun. Bu durumda $EDX_1 \dots X_sF$ yolu sadece başlangıç ve bitiş kentleri m de olan ve dışarıdan en az bir kent içeren bir yol olup bu m nin tanımıyla çelişir. O halde $M = \emptyset$ dir.

A dan B ye ulaşan sadece A ve B de kesişen yollar $l_1,\ l_2, \dots,\ l_s$ olsun. m_1 den dolayı $s \ge 1$ dir. Yani böyle en az bir yol vardır.

Oluşturduğumuz tüm kentleri içeren, birkaç ekonomik yolun birleşimi şeklindeki yolları ve şehirleri (yani m yi) alalım. $l_1,\ l_2, \dots,\ l_s$ s tane ekonomik yoldur. Diğer yollar $i \ne j$ olmak üzere l_i den bir kent ve l_j den bir kent uç kentleri olan ve daha başka en az bir kent içeren yollar, l_i den iki farklı kent uç kent içeren ve daha başka en az bir kent içeren yollar ve bunun bunlar için de tanımlanmış olan şekildeki yollardır. Sadece uç noktaları diğer yollarla kesişen ekonomik yollardan oluşan bir durum elde ettik. Bu yollardan biri p yolu olsun. p nin uç noktaları dışındaki şehir sayısı a_p olursa$p$ deki kenar sayısı $1 + a_p$ olur. O halde elde ettiğimiz durumda kenar sayısı $\sum_p 1 + a_p$ olur. $a_p \ge 1$ olup A ve B bu yollardan hiçbirinin içinde (yani ucunda olmayan) bir kent olmadığı için p yollarının sayısı en fazla $n-2$ dir. $\sum_p 1 + a_p = \sum_p a_p + \sum_p 1 = n - 2 + \sum_p 1 \le 2n-4$ elde ederiz.

En başta seçtiğimiz m_1 için m_1 i A ve B arasında en az bir köşe içerecek şekilde seçebileceğimizi gösterelim. A ya sadece B bağlı olsaydı B yi silince kalan kentler bağlantısız olurdu. A ile arasında doğrudan yol olan bir $R \ne B$ kentini alalım. A yı silince geriye kalan kentler bağlantılı olup R ile B arasında bir ekonomik yol var ve buna AR yolunu ekleyip bunu m_1 seçeriz. m_1 den önce de A ile B arasında kenar bulunsaydı onu seçer sonra m_1 i seçerdik. Ayrıca $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m$ yi oluşturunca her seferinde sadece uç noktaları m_i de olan en kısa ekonomik yolu alarak ilerleyeceğiz. Bu şekilde elde edeceğimiz son durumda en fazla $2n - 4 + 1 = 2n - 3$ yol bulunur.(AB yolunu da saydık)

Şimdi sadece uç noktaları kesişen ekonomik yollardan oluşan yol-kent haritası H olsun. H de uç noktası A olan $AX_1X_2 \dots X_s$ yolunu $A \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_s$ şeklinde yönlendirelim. Uç noktası B olan $Y_1Y_2 \dots Y_sB$ yollarını da $Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to B$ şeklinde yönlendirelim. Uç noktaları A ve B olan yollar ve A ile B arasındaki kenar $A \to B$ olur. Geriye kalan $Z_1Z_2 \dots Z_r$ yollarını $Z_1 \to Z_2 \to \cdots \to Z_r$ şeklinde veya $Z_r \to \cdots \to Z_2 \to Z_1$ şeklinde yönlendirelim. Kenar sayısı $2n-3$ ten fazla olmadığından bunu yapabiliriz.

Şimdi geriye kalan kenarlar nasıl yönlendirilirse yönlendirilsin herhangi l kenarı için A dan başlayıp l den geçerek B ye ulaşabileceğimizi ispatlayalım. H de ardışık iki köşe (özel durum olarak A ve B (eğer aralarında kenar varsa)) arasındaki kenar K_1K_2 seçilirse bu kenarın H de bulunduğu yol $L_1L_2 \dots L_sK_1K_2M_1M_2 \dots M_r$

olsun. (Yukarıdaki yönlendirmeyi yaparken bir $X_1 \ldots X_t$ yolunun yönü $X_1 \to \cdots \to X_t$ ise ($i < j$ olmak üzere) $X_i Y_1 \ldots Y_s X_j$ yolunun yönü $X_i \to Y_1 \to \cdots \to Y_s \to X_j$ olacak şekilde yapacağız)

p nin yönü $L_1 \to \cdots \to L_s \to K_1 \to K_2 \to \cdots \to M_1 \to \cdots \to M_r$ olsun. K_1 den ters yönde ilerleyecek bir trafik canavarı haritayı oluşturma biçimimizden dolayı A ya, K_2 den düz ilerleyen örnek sürücü B ye ulaşacağından K_1K_2 den geçip yönlere uyarak A dan B ye ulaşabiliyoruz.

Seçilen l kenarı iki farklı p ve q yolundan K_1 ve K_2 noktalarıysa ve bunun yönü $K_1 \to K_2$ olursa K_1 den ters yönde A ya, K_2 den düz ilerleyerek B ye ulaşırız. O halde yine l den geçen A ile başlayan B ile biten yönlere uyan bir yol vardır.

Aynı p yolunda iki farklı K_1 ve K_2 ardışık olmayan köşelerin seçilemeyeceğini ispatlayalım. Diyelim böyle K_1 ve K_2 var. O zaman K_1 ile K_2 arasında kenar vardır. p yolu $S_1S_2 \ldots S_v K_1 L_1 \ldots L_t K_2 R_1 R_2 \ldots R_u$ olursa $S_1 \ldots S_v K_1 K_2 R_1 \ldots R_u$ daha kısa bir yol olup bu haritayı oluşturma biçimimizle çelişir; çünkü her adımda uç noktaları m_i de olan geriye kalan köşeleri dışarıdan olan en kısa ekonomik yolu alıyorduk. Bu durumda $S_1 \ldots S_v K_1 K_2 R_1 \ldots R_u$ yu seçmiş olmamız ve dolayısıyla K_1K_2 yi kendimiz çizmiş olmamış gerekirdi ki K_1 ve K_2 H de ardışık olmayan köşeler olup bu bir çelişkidir.

AX kenarı veya YB seçilirse $A \to X \to \cdots \to B$ ve $A \to \cdots \to Y \to B$ den dolayı AX veya $YB = l$ olursa yine l den geçen ve şartları sağlayan bir yol vardır.

A ve B dışındaki her nokta bir yolun içinde nokta olduğundan bütün prosedür doğru olup A kenti B kentine $(2n-3)$ −yönlü bağlanabilir. Bu da soruyu bitirir.

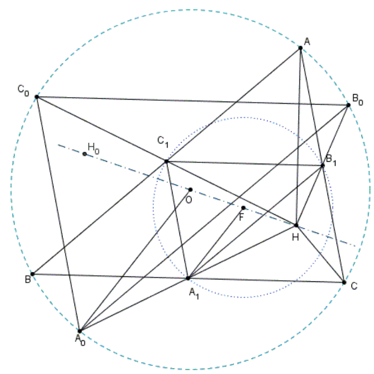
16. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2008

1 Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC, AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1$, $[HB_1$ ve $[HC_1$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O, H ve H_0 noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

(Ömer Faruk Tekin, Semih Yavuz)

Çözüm 1:

ABC üçgeninin dokuz nokta çemberinin merkezi F olsun

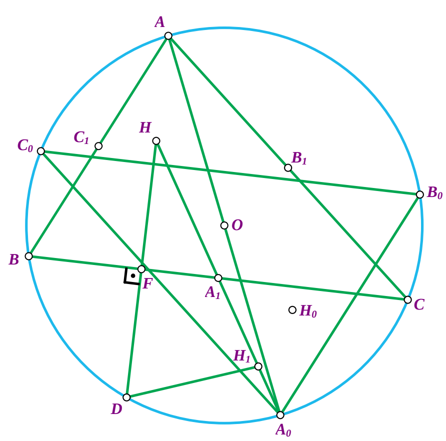


$2FA_1 = OA_1$ ve$|OF| = |FH|$ olduğundan $HA_1 = A_1A_0$ bulunur.Benzer şekilde $HC_1 = C_1C_0$ ve $HB_1 = B_1B_0$ olduğu gösterilir.Bu durumda

$C_1B_1A_1$ üçgeni ile $C_0B_0A_0$ benzer üçgenleri H merkezli homotetik üçgenlerdir.Ayrıca O noktası $C_1B_1A_1$ üçgeninin diklik merkezi olduğunda O, H, H_0 doğrusaldır.

Çözüm 2:

(Mehmet KAYSİ)



H den BC ye inilen dikmenin ayağı F, HF nin çemberi kestiği nokta D olsun. H nin A_1 e göre simetriği H_1 olsun. $[HF] = [FD]$ ve $[HA_1] = [A_1H_1]$ olduğundan $FA_1 \parallel DH_1$ olur. HFA_1 ile HDH_1 benzer üçgenlerdir ve benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir. O zaman $[DH_1]$ in orta dikmesi A_1 den geçer ve aynı zamanda BC nin orta dikmesi olur. Bu durumda $[DH_1]$ in orta dikmesi A_1 den ve O dan geçer. O dan $[DH_1]$ e inilen dik, $[DH_1]$ in orta noktasından geçtiği için H_1 çember üzerinde olmak zorundadır, yani H_1 ile A_0 çakışıktır. O zaman $[HA_1] = [A_1A_0]$ dır. Dahası, $m\left(\widehat{ADA_0}\right) = 90^\circ$ olduğundan $[AA_0]$ çaptır. (Yani A, O, A_0 doğrudaştır.)

Benzer şekilde B, O, B_0 ve C, O, C_0 da doğrudaştır. Yani $A_0B_0C_0$ üçgeni ABC üçgeninin O etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilmiştir. Bu durumda H_0 da H nin etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilmiştir. O zaman $m\left(\widehat{HOH_0}\right) = 180^\circ$ olur.

2 (a) $\dfrac{7^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

(b) $\dfrac{11^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

Çözüm:

(Mehmet KAYSİ)

(a) (i) $p \leq 3$ ise

$p = 2$ için ifadenin tamkare olmadığı görülür. $p = 3$ ifade 16 ya eşit olur, $p = 3$ ifadeyi tamkare yapar.

(ii) $p > 3$ ise

$p = 6k - 1$, $p = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ olabilir. İfadeyi düzenleyelip çarpanlara ayıralım.

$$\left(7^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(7^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = pa^2$$

$$A = 7^{\frac{p-1}{2}} - 1, B = 7^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

olsun.

A ve B sayılarının EBOB'u $B - A = 2$'yi böleceği için ve iki sayı da çift olduğundan $(A, B) = 2$ olur.

O zaman $b, c \in \mathbb{N}$ ve $(b, c) = 1$ olmak üzere $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ya da $A = 2pb^2, B = 2c^2$ olmak zorundadır.

1. Durum $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ise

$A = 7^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 2c^2$ ise $-1 \equiv 2c^2 (\text{mod} 7)$ ki bunun da çözümü yoktur.

2. Durum $A = 2pb^2, B = 2c^2$ ise

$6|pa^2$ ve $(p, 6) = 1$ olduğundan $36|pa^2$ olur.

$pa^2 = (7-1)\left(7^{p-1} + 7^{p-2} + \ldots + 7 + 1\right)$ 36 ile bölünüyorsa sağ taraf 6 ile bölünmelidir. Sağ taraf mod 6'da $p - 1$ e denk olduğundan $6|p - 1$ bulunur, yani $p = 6k + 1$ olmalıdır.

$B = 2c^2$ ve $p = 6k + 1$ ise $7^{3k} + 1 = 2c^2$ dir. Çarpanlara ayıralım:

$\left(7^k + 1\right)\left(7^{2k} - 7^k + 1\right) = 2c^2$.

$\left(7^{2k} - 7^k + 1\right) - \left(7^k + 1\right)\left(7^k - 2\right) = 3$ olduğundan bu iki sayının EBOB'u 1 veya 3 olabilir. Her iki sayı da 3 ile bölünmediğinden bu iki sayının EBOB'u 1 olur.

m, n tamsayılar olmak üzere, $7^k + 1 = 2n^2$, $7^{2k} - 7^k + 1 = m^2$ olmak zorundadır. Fakat $7^{2k} - 7^k + 1$ sayısı $\left(7^k - 1\right)^2$ ile $(7^k)^2$ arasında olduğu için tamkare olamaz. Bu durumdan hiç çözüm gelmez.

Tek çözüm $p = 3$ tür.

(b) (i) $p \leq 3$ ise

$p = 2, 3$ için ifadenin tamkare olmadığı görülür.

(ii) $p > 3$

Bir önceki sorudaki adımları 7 yerine 11 için tekrarlayalım.

1. Durum $A = 2pb^2, B = 2c^2$ ise

$B = 11^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 2c^2$, yani $11^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 2c^2 (\text{mod} 11)$ ifadesinin çözümü olmadığı için buradan çözüm gelmez.

2. Durum $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ise

$p = 4k+1$ ise $A = \left(11^k - 1\right)\left(11^k + 1\right) = 2c^2$ $\left(11^k + 1\right) - \left(11^k - 1\right) = 2$ ve sayılar çift olduğundan $\left(11^k - 1, 11^k + 1\right) = 2$ olur. O zaman, $11^k - 1 = 2m^2$ ve $11^k + 1 = 4n^2$ olacak şekilde m, n tamsayıları vardır. Fakat burada 2. denklemin çözümü yoktur. $(11^k = (2n)^2 - 1)$
$p = 4k+3$ ise, $3|11^{4k+2} - 1 = pa^2$ ve $(p,3) = 1$ olduğundan $9|11^{4k+2} - 1$ olur. Bu durumda $6|4k+2 = p-1$ olur, $p \equiv 3(\text{mod}4)$ ve $p \equiv 1(\text{mod}6)$ ise $p \equiv 7(\text{mod}12)$ olur. $p = 12l + 7$ olsun.. O zaman $A = 11^{6l+3} - 1 = 2c^2$ olur. Çarpanlarına ayıralım, $\left(11^{2l+1} - 1\right)\left(11^{4l+2} + 11^{2l+1} + 1\right) = pa^2$. $2l + 1 = t$ (t tek tamsayı) diyelim. $\left(11^{2t} + 11^t + 1\right) - (11^t - 1)(11^t + 2) = 3$ olduğundan bu iki sayının EBOB'u 1 veya 3 olabilir. Fakat iki sayı da 3 ile bölünmez, dolayısıyla EBOB 1 dir. EBOB=1 ve $11^{2t} + 11^t + 1$ tek olduğundan $11^{2t} + 11^t + 1$ tamkare olmak zorundadır. Fakat $(11^t)^2 < 11^{2t} + 11^t + 1 < (11^t + 1)^2$ olduğundan çözüm gelmez.

Bu şartı sağlayan p asalı yoktur.

3 $a + b + c = 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2 - ca + a^2)} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Semih Yavuz)

Çözüm:

(Mehmet KAYSİ)

$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)} + \frac{a^2c^2}{b^3(c^2-ac+a^2)} = S$ olsun.

$S \geq \frac{3}{ab+ac+bc}$ olduğunu göstereceğiz. $a + b + c = 1$

$(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) \geq 3abc(a + b + c) = 3abc$

İfadeyi düzenlersek $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{ab+ac+bc}$ buluruz.

$S \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ olduğunu gösterelim.

$$S \underbrace{\left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2b^2c} + \frac{b^2 - bc + c^2}{ab^2c^2} + \frac{a^2 - ac + c^2}{a^2bc^2}\right)}_{=\text{A olsun}} \geq \left(\tfrac{1}{c^2} + \tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{b^2} +\right)^2 \text{ (Cauchy-Schwarz)}$$

$\Rightarrow S \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}{A} \Rightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 \geq A\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ olduğunu gösterirsek çözümü tamamlamış oluruz.

Her iki tarafı hesaplayalim.

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{2}{a^2c^2} + \frac{2}{b^2c^2} \overset{?}{\geq} \left(\frac{1}{b^2c} - \frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2c} + \frac{1}{ac^2} - \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} - \frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Sadeleştirip, düzenleyelim.

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{3}{abc}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \overset{?}{\geq} 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{abc} + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{abc}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \overset{?}{\geq} \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{a^2+c^2}\right) + \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b^2+c^2}\right)$$

$r \in \mathbb{R}$ için $\sum x^r(x-y)(x-z) \geq 0$ (Shur eşitsizliği). Yukarıdaki eşitsizlik Shur eşitsizliğinde $r = 2$ durumuna denk geldiği için ispat tamamlanmış olur.

4 $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayıların ve $\mathbb{Z}$ de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

(i) $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 1$,

(ii) her $k \notin \{0,1\}$ için, $f(0,k) = 0$ ve

(iii) her $n \geq 1$ ve k için, $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-1,k-2n)$

koşullarını sağlıyorsa

$$\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$$

toplamının değerini bulunuz.

(Serhat Doğan)

Çözüm 1:

(Mehmet KAYSİ)

İddia 1: $k<0$ veya $k>n^2+n+1$ ise $f(n,k)=0$ dır.

İspat: n üzerinden tümevarım yapalım. $n=0$ için iddia doğrudur.

İddia $n-1$ için doğru olsun, yani $k<0$ ya da $k>n^2-n+1$ ise $f(n-1,k)=0$. Şimdi n ye bakalım.

$k<0$ ise $k-2n<0$ olacağından, $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)=0+0=0$ dır.

$k>n^2+n+1$ ise $k-2n>n^2-n+1$ olacağından $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)=0+0=0$ olur.

İddia 2: Her k tamsayısıiçin $f(n,k)=f(n,n^2+n+1-k)$.

İspat: Yine n üzerinden tümevarım yapalım. $n=0$ için iddia doğrudur.

İddia $n-1$ iddia doğru olsun, yani $0\le k\le n^2-n+1$ ise $f(n-1,k)=f(n-1,n^2-n+1-k)$ (1). Burada k yerine $k-2n$ yazarsak, $f(n-1,k-2n)=f(n-1,n^2-n+1-(k-2n))=f(n-1,n^2+n+1-k)$ (2). (1) ve (2) yi taraf tarafa toplayalım.

$f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)=f(n-1,n^2-n+1-k)+f(n-1,n^2+n+1-k)$

$=f(n-1,n^2+n+1-(k-2n))+f(n-1,n^2+n+1-k)$ ise $f(n,k)=f(n,n^2+n-1-k)$.

İddia 3: $\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k)=2^{n+1}$

İspat: Yine tümevarım yapalım. $n=0$ için iddia doğrudur.

İddia $n-1$ için doğru olsun, yani $\sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k)=2^n$.

n için bakalım.

$\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k)=\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$

$=\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k)+\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k-2n)$

$=\sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k)+\sum_{l=-2n}^{n^2-n+1} f(n-1,l)$

$=2^n+\sum_{l=0}^{n^2-n+1} f(n-1,l)=2^n+2^n=2^{n+1}$ (Burada iddia 1 birkaç kez kullanılıyor).

$k=0$'dan $k=n^2+n+1$'e kadar değisiyor yani n^2+n+2 terim var ve iddia 2'ye göre $f(n,k)=f(n,n^2+n+1-k)$. O zaman ilk $\frac{n^2+n+2}{2}$ terimin toplamı $\frac{2^{n+1}}{2}=2^n$ olur. Toplam şeklinde ifade edelim: $\sum_{k=0}^{\frac{n^2+n}{2}} f(n,k)=2^n$. Burada $n=2008$ koyarsak istenilen sonucu elde ederiz.

Çözüm 2:

(Mehmet KAYSİ)

$A=\{1,2,4,6,8,10,\dots 2n\}$ olsun.

İddia: $f(n,k)$ sayısı A kümesinin alt kümeleri arasında toplamları k olan altkümelerin sayısına eşittir.

İspat: İddia 0 için doğrudur. İddia $n-1$ için doğru olsun. n için bakalım.

Toplamı k olan kümelerden bazılarında $2n$ vardır, bazılarında yoktur. İçinde $2n$ varsa, bu kümelerin sayısı $f(n-1,k-2n)$ ye eşittir, çünkü $2n$ yi çıkardığımızda kalan sayılarin toplamı $k-2n$ olur. İçinda $2n$ yoksa, bu kümelerin sayısı $f(n-1,k)$ ye eşittir. Dolayısıyla $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$ olur.

A kümesindeki tüm elemanların toplamı n^2+n+1 dir. Bu yüzden toplamı k olan alt kümelerin sayısı ile toplamı $n^2+n+1-k$ olan alt kümelerin sayısı birbirine eşittir. (Toplamı k olan kümenin tümleyenindeki elemanların toplamı $n^2+n+1-k$ dır ve bu, bir eşleme belirtir.)

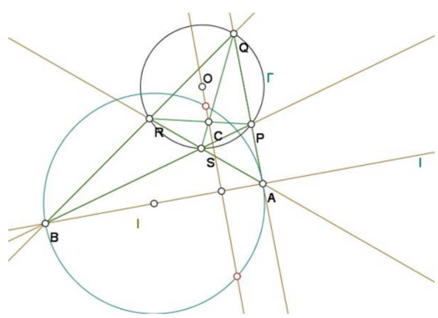
Soruda bize toplamları $0, 1, \ldots \frac{n^2+n}{2}$ olan elemanların sayısını soruyor. Yukarıdaki sonucu da göz önüne alırsak bu sayı tüm alt kümelerin sayısının yarısına eşittir. $|A| = n+1$ olduğundan cevap 2^n dir. $n = 2008$ için 2^{2008} bulunur.

$\boxed{5}$ Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. $PQ \cap RS = \{A\}$ ve $PS \cap QR = \{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P, Q, R, S noktalarının bulunmasını sağlayan ve ℓ doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A, B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

(Serhat Doğan)

Çözüm 1:

$QS \bigcap PR = C$ ve Γ nin merkezi O olsun. Brocard Teoremi'nde verilen notu kullanarak; AB çaplı çember Δolmak üzere Δ nın Γ ya dik olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan, Δ nın çapı l doğrusu üzerinde bulunduğundan, Δ çemberi l ye diktir. (T_7) dan: l yi ve Γ yı çakışık merkezli iki l^* ve Γ^* çemberine gönderen bir evirtim vardır. Bu evirtime göre Δ; bu çakışık merkezli iki çembere dik olan bir doğru veya çembere evirilir. Çünkü evirtim açıları değiştirmez. Fakat bir çemberin merkezdeş iki farklı çembere aynı anda dik olması mümkün olmadığından, (Bunun mümkün olması için iki merkezdeş çemberin ikisi için de yapılan evirtimlerde Δ nın evriğinin sabit kalması gerekir fakat bu mümkün değildir.) Δ nın evriği bu çakışık merkezli iki çembere dik olan bir doğrudur. $E(\Delta) = d^*$ olsun. Fakat d^* 'nin bir doğru olması ancak ve ancak evirtim merkezinin Δçemberi üzerinde olması ile mümkündür. Diğer taraftan, evirtim merkezi Lemma'ya göre O dan yani Γ nin merkezinden l ye inilen doğru üzerinde bulunan iki sabit noktadan birisi olması gerektiğinden, AB çaplı çember sabit iki evirtim merkezinden geçen bir çember olmalıdır. Dolayısıyla AB çaplı çemberlerin geometrik yeri, bu iki sabit evirtim merkezidir. □

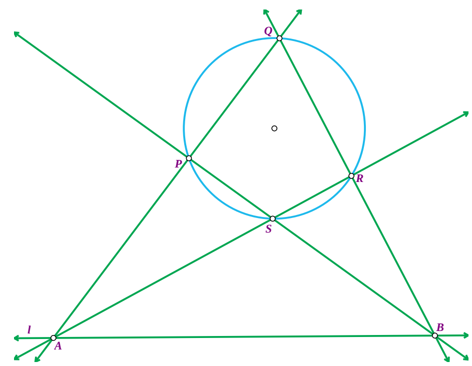


NOT:

Bu çözüm, Zeyd Yusuf Köroğlu ve Mehmet Efe Akengin'in "Evirtim" adlı matematik projesinden alınmıştır.

Çözüm 2:

(Mehmet KAYSİ)



Miguel Teoremi'nden APS ve BSR çemberleri AB üzerinde kesişirler, kesiştikleri nokta K olsun.

$$AP \cdot AQ = AS \cdot AR = AK \cdot AB$$

$$BR \cdot BQ = BS \cdot BP = BK \cdot BA$$

Aynı zamanda $AP \cdot AQ = AO^2 - r^2$ ve $BR \cdot BQ = BO^2 - r^2$ (r verilen çemberin yarıçapı, O ise merkezi), dolayısıyla

$AO^2 - r^2 = AK^2 + AK \cdot KB$ ve $BO^2 - r^2 = BK^2 + AK \cdot KB$. Buradan $AO^2 - AK^2 = BO^2 - BK^2 = AK \cdot KB + r^2$ bulunur.

$AO^2 - AK^2 = BO^2 - BK^2$ olduğundan $OK \perp AB$ ve $OK^2 = AK \cdot KB + r^2 \Rightarrow AK \cdot KB = OK^2 - r^2$, dolayısıyla $AK \cdot KB$ sabittir. OK doğrusu üzerinde $\sqrt{AK \cdot KB} = |KX|$ şartını sağlayan noktalar AB çaplı çember üzerinde bulunur.

$\boxed{6}$ 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t = 0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t = 1$ anında da, ağ yönetici, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t = 2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t = 2k + 1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m \geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2 \leq i \leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

(Azer Kerimov)

Çözüm:

(Mehmet KAYSİ)

Soruyu çizge sorusuna çevirip öyle çözelim. Çözümde bilgisayarları çizgenin köşeleri (noktaları), iki bilgisayar arasındaki ağı, çizgenin kenarları olarak; korsanı 1. oyuncu, ağ yöneticisini 2. oyuncu olarak; hamleleri ise noktaları ele geçirme olarak düşüneceğiz.

1. Durum: Çizgede hiç döngü yoksa

iddia 1: 1. oyuncu noktaların en az yarısını ele geçirir.

ispat: 1. oyuncu ilk hamlesi için rastgele bir nokta seçsin. Bu noktayı sildiğimizde, çizgede döngü olmadığı için çizge birbirinden kopuk alt çizgelere ayrılır. 2. oyuncu bu alt çizgelerden en fazla birini ele geçirebilir.

Eğer alt çizgelerden en büyük olan noktaların yarısından fazla sayıda nokta içermiyorsa, 1. oyuncu diğer alt çizgeleri alacağından noktaların en az yarısını ele geçirmeyi garantiler.

Eğer alt çizgelerden en büyüğü noktaların yarısından fazla nokta içeriyorsa, 1. oyuncunun ilk hamlesini değiştiriyoruz. Daha önce seçilen nokta yerine, bu nokta ile komşu olan ve en büyük alt çizgeye ait olan noktayı seçiyoruz. 2. oyuncu bir önceki durumda seçtiği alt çizgenin noktalarından birini seçmiyorsa, 1. oyuncu bir önceki durumda 2. oyuncunun ele geçirdiği noktaları ele geįrir ki bu noktaların sayısı da tüm noktaların sayısının yarısından az değildir. Aksi takdirde 1. oyuncunun ele geçirdiği noktaların sayısı en az 1 artar. 1. oyuncu ele geçireceği noktaların sayısı tüm noktaların en az yarısı olacak şekilde ilk hamlesini gözden geçirerek, amacına ulaşır.

2. Durum: Çizgede döngü varsa,

Bu durumu da üçe ayıracağız. Burada bir tanım vermemiz gerekiyor. Döngüdeki bir noktadan, döngüdeki noktaları kullanmadan gidilebilen noktardan oluşan ve kenarları verilen çizgenin kenarları olan alt çizgeye, o noktadan çıkan *kol* diyeceğiz. İspatın kalanını okurken çizgede kesişen 2 döngünün bulunmadığını unutmayalım.

1. oyuncunun noktaların üçte birini almayı garantileyeceğini gösterelim.

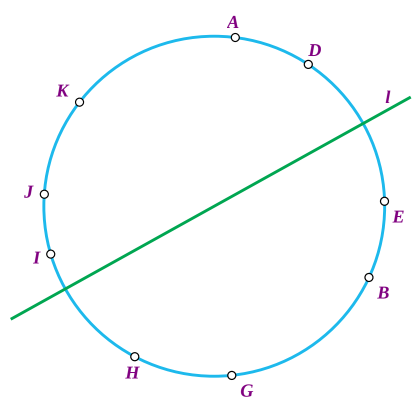
(i) Tüm döngülerin her bir kolu, tüm noktaların üçte birinden az sayıda nokta içeriyorsa

1. oyuncu ilk hamlesini kesinlikle bu döngü üzerinde yapmalıdır. Aksi takdirde 2. oyuncu, 1. oyuncunun hamle yaptığı kol ile döngünün bağlantısını keserek, 1. oyuncunun hedeflenenden az sayıda nokta almasını sağlayabilir. Aslında bu durumda herhangi bir kolun döngüye bağkandığı noktayı ele geçiren oyuncu, o kolu tümden ele geçirmiş olur. Dolayısıyla her iki oyuncu da mümkün olduğunca çok nokta ele geçirmek istiyorsa, döngü üzerinde nokta kalmayana kadar hamlelerini döngü üzerinde yapmak zorundadırlar.

Döngüdeki noktaları bir çember üzerine, noktalar arasında eşit uzaklıkta olacak şekilde dizdiğimizi düşünürsek, oyuncular birer yarım çember ele geçirecekler. 1. oyuncu hamlesini çember üzerinde bir noktaya yapsın, bu noktaya A noktası diyelim.

iddia 2: 2. oyuncu A noktasını içermeyen istediği yarım çemberi ele geçirebilir.

ispat: 2. oyuncu ele geçirmek istediği yarım çemberle diğer yarım çember arasına bir çizgi çizer. Sonra 2. oyuncu, 1. oyuncunun ele geçirdiği noktanın bu doğruya göre simetriğindeki noktayı ele geçirir.



Burada 2. oyuncu A ya karşılık B yi, D ye karşılık E yi, J ye karşılık H yi ele geçirir.

Bu durumda şunu ispatlamamız gerekiyor:

iddia 3: 1. oyuncu ilk hamlesinde öyle bir nokta ele geçirebilir ki, o noktayı içeren tüm yarım çemberler kollarıyla beraber en az istenilen sayıda nokta içerir.

ispat: Diyelim ki her nokta için o noktayı içeren en az bir adet yeterli miktarda nokta içermeyen bir yarım çember bulunsun. İlk olarak herhangi bir nokta alalım ve bu noktayı içeren ve yeterli miktarda nokta içermeyen bir yarım çember alalım. Daha sonra bu yarım çemberin uç noktalarından birini alalım, bu noktayı içeren en az bir yarım çember vardır, bu yarım çemberler içinde ilk yarım çemberimiz ile kesişimi en az olan yarım çemberi seçelim. İlk yarım çember ile ikinci yarım çember aynı yarım çemberler değilse, bu ikinci yarım çemberin ilk yarım çember üzerinde olmayan uç noktasını alalım ve aynı şekilde 3. yarım çemberi seçelim. Bu yarım çemberleri seçme şeklimizden dolayı(kesişimin en az olması) üçünün kesişimi boş kümedir. Ve bu da bu yarım çemberlerin çemberi çevrelemesini gerektirir. Yarım çemberlerin özelliği içerdiği noktaların sayısıyının toplam nokta sayısının 1/3 ünden daha az miktarda olmasıydı. Dolayısıyla elimizdeki 3 yarım çemberin içerdiği noktaların sayısının bütün noktaların sayısından küçük olması gerekir, fakat bu üç yarım çemberimiz bütün çemberi içeriyordu dolayısıyla kesinlikle bütün noktaların sayısından fazladır. Demek ki her nokta için uygun bir yarım çember bulunamaz ve en az bir nokta için o noktayı içeren bütün yarım çemberler yeterli sayıda nokta içerir.

Son olarak, atladığımız ilk yarım çember ile 2. yarım çemberin kesişmesi durumuna bakalım. Bu durumda ilk çemberin uç noktasını içeren ve tüm noktaların 1/3'ünden az sayıda nokta içeren tek yarım çember var demektir. Bu uç noktanın ilk yarım çember üzerinde olmayan komşusunu alalım. Kabulümüz gereği, bu noktayı içeren ve içerdiği noktaların sayısı 1/3'ten az olan bir yarım çember olmak zorundadır. Fakat bu yarım çember ilk çemberin seçtiğimiz uç noktasını içemez. Dolayıyla bu yarım çember ile ilk yarım çemberin bileşimi bize çemberin tamamını verir. Fakat bu iki yarım çemberdeki noktaların sayısı tüm noktaların 2/3' ü kadardı, çelişki. Demek ki her nokta için uygun bir yarım çember bulunamaz ve en az bir nokta için o noktayı içeren bütün yarım çemberler yeterli sayıda nokta içerir.

(ii) Bir kolu tüm noktaların üçte birinden fazla fakat üçte ikisinden az sayıda nokta içeren bir döngü varsa

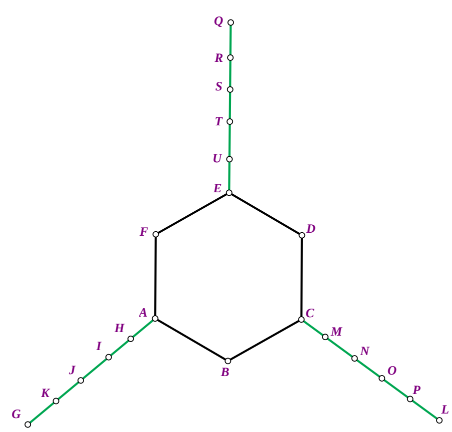
1. oyuncu bu kolun döngüye bağlandığı noktayı seçer. Bu durumda 1. oyuncu, 2. oyuncunun hamlesine göre ya kolu, ya da kol hariç çizgenin kalanını ele geçirir. Her iki durumda tüm noktaların en az üçte birini ele geçirmiş olur.

(iii) Tüm döngülerde, tüm noktaların üçte ikisinden fazla sayıda nokta içeren bir kol varsa

1. oyuncu ilk hamlesini bu döngü üzerinde yaparsa, 2. oyuncu kol üzerindeki döngüye en yakın noktayı seçerek, 1. oyuncunun döngü ile olan bağlantısını keser ve 1. oyuncunun hedeflenenden az sayıda nokta almasını sağlar. Bu yüzden 1. oyuncu ilk hamlesini döngü üzerinde yapmamalıdır. Bu durum 1. duruma çok benzer hale geldi. Yine 1. oyuncunu yapacaği hamle çizgeyi, birbirinden kopuk alt çizgelere ayırır.

Önce döngüdeki noktaları kırmızı renk ile işaretleyelim. Her döngüden birer kenar çıkararak, çizgeyi döngüsüz hale getirelim. 1. Durumdaki adımları takip edip 1. oyuncunun ilk hamlesini yapacağı noktayı belirleyelim. Bu nokta kırmızı noktalardan biri değildir, aksi takdirde tüm noktaların en az üçte ikisini içeren bir alt çizge bulunur. Sonra sildiğimiz kenarları tekrar çizelim. 1. durumdaki gibi 1. oyuncu tüm noktaların en az yarısını ele geçirmeyi garantiler.

Buraya kadar olan kısımda, 1. oyuncunun noktalardan en az 1/3'ünü ele geçirebileceğini gösterdik. Şimdi 1. oyuncunun noktalardan 1/3'ünden fazla sayıda nokta ele geçiremeyeceği bir örnek vererek çözümü tamamlayacağız.



Çözümde, 1. oyuncu hamlesini yaptıktan sonra 2. oyuncunun istediği yarım çemberi alabildiğini göstermiştik. Bu çizgede 1. oyuncu nasıl oynarsa oynasın, 2. oyuncu 2 kol almayı garantiler.

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2009

1 $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

(Okan Tekman)

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

Cevap: $p = 2,\ 7,\ 11$ değerleri için $p^3 - 4p + 9 =\ 3^2,\ 18^2,\ 36^2$ olarak bulunur.

$x^2 = p^3 - 4p + 9$ denklemini p asalı ve $x \in \mathbb{N}_0$ için çözeceğiz.

$p = 2$ ise $x = 3$ sağlıyor, yani $p = 2$ çözümdür. $p \neq 2$ durumuna bakmak yeterlidir.

$x^2 \equiv 9 \pmod p$ olduğundan; bir k tam sayısı için $x = kp - 3$ veya $x = kp + 3$ olmalıdır.

$x = kp-3$ ise; $(kp-3)^2 = p^3 - 4p + 9 \Rightarrow k^2p - 6k = p^2 - 4 \Rightarrow p|6k - 4$ olmalıdır. $p \neq 2$ olduğundan, $p|3k-2$ olmalıdır. Yani $p \leq 3k + 2$ olmalıdır.

$x = kp+3$ ise; $(kp+3)^2 = p^3 - 4p + 9 \Rightarrow k^2p + 6k = p^2 - 4 \Rightarrow p|6k+4$ olmalıdır. $p \neq 2$ ise $p|3k+2$ olmalıdır. Yani $p \leq 3k + 2$ olmalıdır.

İki durumda da $p \leq 3k + 2$ olmalıdır. Öyleyse $\dfrac{p-2}{3} \leq k \Longrightarrow \dfrac{p^2 - 2p - 9}{3} \leq kp - 3 \leq x$.

Şimdi x üzerinden iki durum inceleyelim:

i) $x \leq \dfrac{p^2}{4} \Rightarrow \dfrac{p^2 - 2p - 9}{3} \leq \dfrac{p^2}{4} \Rightarrow p \leq 8 + \dfrac{36}{p} \Rightarrow p \leq 11$;

ii) $x > \dfrac{p^2}{4} \Rightarrow x^2 = p^3 - 4p + 9$ olduğundan $\dfrac{p^4}{16} < p^3 - 4p + 9 \Rightarrow p < 16 - \dfrac{16(4p-9)}{p^3} \Rightarrow p \leq 13.$

Demek ki $p \leq 13$ olmalıdır, bu şartı sağlayan asallarda incelenirse yalnızca 7 ve 11 in sağladığı görülür. Yani, tüm çözümler $p = 2,\ 7,\ 11$ olarak bulunur.

2 Γ, ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A', $\widehat{BAC}$ nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kestiğini gösteriniz.

(Serhat Doğan)

Çözüm:

(Eren DURLANIK)

LEMMA:

$x,\ y,\ z,\ t$ pozitif açıları $x + y = z + t < 180$ ve $\dfrac{\sin\ x}{\sin\ y} = \dfrac{\sin\ z}{\sin\ t}$ şartını sağlıyor ise;$x = z$ ve $y = t$ olmalıdır.

İSPAT:

Eşitlikten ötürü $\sin\ x . \sin\ t = \sin\ y . \sin\ z$ dir. Öyleyse açı formüllerinden ötürü $cos(x-t) - cos(x+t) = cos(y-z) - cos(y+z)$ sağlanır. Ayrıca $x - t = z - y$ olduğundan $cos(x-t) = cos(y-z)$ ve dolayısıyla $cos(x+t) - cos(y+z) = 0$ olur.

Öyleyse; $2\ \sin\left(\dfrac{x+t-y-z}{2}\right)\sin(\dfrac{x+y+z+t}{2}) = 0$ dır. $\dfrac{x+y+z+t}{2} < 180$ olduğundan $\sin(\dfrac{x+y+z+t}{2}) \neq 0$ yani $\sin(\dfrac{x+t-y-z}{2}) = 0$ olmalıdır. Öyleyse $x + t = y + z$ olmalı ve $x + y = z + t$ olduğundan; $x = z$ ve $y = t$ sağlanmalıdır, Lemma ispatlandı.

Şimdi sorumuza dönelim.

$A,\ Q,\ S,\ E$ çembersel olduğundan $\angle SQE = \dfrac{A}{2}$ dır. Ayrıca A, Q, A', B noktaları da çembersel olduğundan $\angle BQE = \dfrac{A}{2}$ olmalıdır. Dolayısıyla Q, S, B doğrusaldır, aynı şekilde P, R, C noktaları da doğrusaldır. Çembersellikten $\angle AQB = \angle ACB = \angle AES = C$ dir. Yani $SE \parallel BC$ ve aynı şekilde $DR \parallel BC$ bulunur.

ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasından çizilen teğetle ER doğrusu M noktasında kesişsin. M, S ve D noktalarının doğrusal olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\angle SER = \angle QRM = \alpha$ olsun. ARM üçgeninde D noktasına göre ve AEM üçgeninde S noktasına göre Trigonometrik Ceva yaparsak:

$\dfrac{\sin(\angle AMD)}{\sin(\angle DMR)} = \dfrac{\sin\ C. \sin\ (C + \frac{A}{2})}{\sin\ \frac{A}{2}.\ \ \sin\ \alpha}$ ve $\dfrac{\sin\ (\angle SMA)}{\sin\ (\angle SMR)} = \dfrac{\sin\ C. \sin\ (C + \frac{A}{2})}{\sin\ \frac{A}{2}.\ \ \sin\ \alpha}$ bulunur. Buradan $\dfrac{\sin(\angle AMD)}{\sin(\angle DMR)} = \dfrac{\sin\ (\angle SMA)}{\sin\ (\angle SMR)}$ elde edilir. $\angle AMD + \angle DMR = \angle SMA + \angle SMR$ olduğundan Lemma'dan ötürü $\angle AMD = \angle SMA$ ve $\angle DMR = \angle SMR$ bulunur.

Yani M, S ve D noktaları doğrusal olur ve ispat tamamlanır.

3 Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerinin belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap: k nin en büyük değeri 2000 dir.

Ahmet' in seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlaması işlemine **birinci işlem**, en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlaması işlemine de **ikinci işlem** diyelim.

Öncelikle $k \le 2000$ olduğunu ispatlayalım. $k > 2001$ durumunda Ahmet 17 direk seçip $\dfrac{\binom{17}{2}}{17} = 8$ bunların her ikilisi arasına tel bağlayıp, kalan direklerden 1993 tanesini seçip 1993 gün boyunca bunların her biriyle başlangıçta seçtiği 17 direk ve bu 1993 direkten işlem yaptığı dışındakiler arasına tel bağlanırsa 2001 günün sonunda her ikilisi arasında tel bulunan, yani her ikilisinin farklı renkte boyanması gereken $1993 + 17 = 2010$ direk elde edilir. Ancak bu durumda Berna 2009 renk ile istediği şekilde boyama yapamaz. O halde $k \le 2000$ dir.

Ahmet 2000 günde ne yaparsa yapsın, Berna'nın iddiasını doğrulayabileceğini ispatlayalım. Ahmet birinci işlemi en fazla 2000 kez yapacağından işlemi yapmak için seçtiği direk ile arasına tel bağladığı ancak işlem yapmadığı direkler en fazla 2000 direğe bağlı olup, Ahmet'in işlem yapmak için seçtiği direkler 2009 renk ile boyanabilirse, bu direkler bağlı oldukları direklerde kullanılmayan bir renkle boyanabileceği için bunları yok varsayabiliriz. Ahmet a gün birinci işlemi, b gün ikinci işlemi yapmış olsun. $a + b = 2000$ dir. İlk işlemi yaptığı direkler kümesine A, ikinci işlemi yaptığı direkler kümesine B diyelim. $|A| = a$ olup A kümesi a renk ile boyanır. A daki tüm direklerle B deki tüm direkler arasında tel bulunduğundan B deki direklerin kendi aralarında $2009 - a$ renk ile boyanabileceğini ispatlarsak Berna'nın iddiası doğru olur.

İddia: Aralarındaki tel sayısı $n \in \mathbb{N}$ için $\binom{n}{2}$ ni aşmayan direkler en çok n renk ile boyanabilir.

İspat: Aralarında hiç tel olmayan en çok direk içeren grubu alalım, daha sonra geriye kalanlara aynısını uygulayarak telleri gruplayalım. Grupları oluşturma şeklimizden dolayı herhangi iki farklı gruptan aralarında tel bulunan birer direk bulunur. O halde grup sayısına m dersek en az $\binom{m}{2}$ tel bulunur. $\binom{m}{2} \le \binom{n}{2}$ olup $m \le n$ dir. Her grubu bir renge boyarsak direkler an fazla n renk ile boyanmış olur ve iddiayı ispatlamış oluruz.

$b\in \mathbb{N}_0$ olup $(b-8)(b-9) \geq 0 \Rightarrow b^2-17b+72 \geq 0 \Rightarrow b^2+17b+72 \geq 34b \Rightarrow (b+9)(b+8) \geq 34b \Rightarrow \binom{b+9}{2} \geq 17b$ olup iddiadan B deki direkler en çok $b+9$ renk ile boyanabiliyor. O halde tüm direkler en çok $a+(b+9) = 2000+9 = 2009$ renk ile boyanabiliyor. Sonuç olarak cevap $k = 2000$ dir.

$\boxed{4}$ Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1, B_1, C_1 dir. K, $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A, K, P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

(Hasan Hüseyin Eruslu)

Çözüm:

A, C_1, H, B_1 çembersel olduğundan $\angle LHB = A$ olur. A, B, B_1, K çembersel olduğundan $\angle BKB_1 = \angle BAB_1 = A$ öyleyse $\angle LHB = \angle BKB_1$ dir. Yani L, K, B_1, H çemberseldir. $\angle AC_1L = \angle AB_1B = \angle AKL = 90^\circ$ olduğundan A, C_1, L, K çemberseldir. Öyleyse; $\angle C_1AL = \angle C_1KL = \angle LKH = \angle LB_1H$ dır. $\angle ALC = 90^\circ + \angle C_1AL$ ve $\angle LB_1C = 90^\circ + \angle LB_1H$ dır.

Yani $\angle ALC = \angle LB_1C$ dir. Böylece ALC ve LB_1C üçgenleri benzerdir. Benzerlikten; $CL^2 = CB_1 \cdot CA$ elde edilir. B, A, B_1, A_1 çembersel olduğundan $CB_1 \cdot CA = CA_1 \cdot CB$ ve $CM = CL$ olduğundan $CM^2 = CB \cdot CA_1$ elde edilir. Dolayısıyla Öklid'den $\angle BMC = 90^\circ$ bulunur. $BP = BM$ ve C, A, C_1, A_1 çemberselliğinden ve Öklid'den $BP^2 = MB^2 = BA_1 \cdot BC = BA \cdot BC_1$ bulunur. Dolayısıyla Öklid'den $\angle BPA = 90^\circ$ olur ve aynı şekilde $\angle BQA = 90^\circ$ olur. Yani A, K, P, Q noktaları çemberseldir.

$\boxed{5}$ Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} + \frac{(c+a)(b^4-c^2a^2)}{bc+2ca+ab} + \frac{(a+b)(c^4-a^2b^2)}{ca+2ab+bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

$\sum \frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{a^4b+a^4c-b^3c^2-b^2c^3}{ab+2bc+ca} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{a^4b+a^4c}{ab+2bc+ca} \geq \sum \frac{b^3c^2+c^3b^2}{ab+2bc+ca}$ sağlanır. Bu son eşitsizliği ispatlayalım.

Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ kabul edebiliriz.

Bu durumda $\frac{1}{ab+2bc+ca} \geq \frac{1}{bc+2ca+ab} \geq \frac{1}{ca+2ab+bc}$ sıralamasının doğru olduğu açıktır. Ayrıca $a(b+c) \geq b(a+c) \geq c(a+b)$ olduğundan, $a^4(b+c) \geq b^4(a+c) \geq c^4(a+b)$ eşitsizliği de sağlanır. Dolayısıyla Chebishev Eşitsizliği'nden

$\sum \frac{a^4b+a^4c}{ab+2bc+ca} \geq \frac{1}{3}(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)\sum \frac{1}{ab+2bc+ca}$ elde edilir.

Benzer şekilde $a^3b^2+a^2b^3 \geq c^3a^2+a^3c^2 \geq b^3c^2+c^3b^2$ olduğundan, yine Chebishev Eşitsizliği'ni kullanarak

$\sum \frac{b^3c^2+c^3b^2}{ab+2bc+ca} \leq \frac{1}{3}(a^3b^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3b^2+c^3a^2+a^3c^2)\sum \frac{1}{ab+2bc+ca}$ olarak bulunur.

Son iki eşitsizlikten, $\frac{1}{3}\sum a^4b \sum \frac{1}{ab+2bc+ca} \geq \frac{1}{3}\sum a^3b^2 \sum \frac{1}{ab+2bc+ca} \Leftrightarrow \sum a^4b \geq \sum a^3b^2$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Son olarak Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni kullanarak:

$$\left(\sum a^4b\right) \cdot \left(\sum a^3b^2\right) = \left(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b\right)\left(b^3a^2+c^3a^2+a^3b^2+c^3b^2+a^3c^2+b^3c^2\right)$$

$$\geq \left(a^3b^2 + b^3a^2 + b^3c^2 + c^3b^2 + c^3a^2 + a^3c^2\right)^2 = \left(\sum a^3b^2\right)^2$$

ve dolayısıyla $\sum a^4b \geq \sum a^3b^2$ bulunur, ispat biter.

6 $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i | N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

(Okan Tekman)

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2010

1 Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hala mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük k sayısını belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevabımız 503.

Şeklimizi grafa dönüştürelim.G grafımız genelliği bozmadan bağlantılı olsun. v_0 başkent olsun. v_0'ı graftan kaldırdığımızı düşündüğümüzde geriye kendi içinde bağlantılı birbiriyle ayrık $C_1, C_{2,\ldots,}C_m$ altgrafları kalsın. v_0'dan altgraflara giden yolların toplamı 2010' dur. Bu yolların sayısını C_i için $d_{C_i}(v_0)$ ile gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{m} d_{C_i}(v_0) = 2010 \qquad (*)$$

Her altgraf için bu yollardan $d_{C_i}(v_0) - 1$ tanesini G'nin bağlantılılığı bozulmadan silebiliriz. Çünkü v_0'dan altgrafa giden bir kenar bağlantılılığı korumak için yeterlidir. Bu nedenle G'den $2010 - m$ tane kenar silebiliriz.Dolayısıyla problem altgraf sayısının maksimumunu bulmaya indirgendi.

$d_{C_i}(v_0) = 1$ olacak şekilde kaç altgrafımız olabileceğine bakalım.Eğer $d_{C_i}(v_0)$ tekse C_i başka tek dereceli bir köşeye daha sahiptir. Çünkü C_i altgrafında köşelerin dereceleri toplamı çifttir. Bununla birlikte eğer 2 köşe aynı dereceye sahipse bu derece çifttir. Tüm köşelerin dereceleri ≤ 2009 olduğundan en fazla 1005 tane tek dereceli köşe olabilir. Yani en fazla 1005 tane altgraf için $d_{C_i}(v_0)$ tektir.

Ayrıca $(*)$'dan ötürü $d_{C_i}(v_0)$ tek olan çift tane i olmak zorundadır. Yani en fazla 1004 altgraf için $d_{C_i}(v_0) = 1$ olabilir. Kalan her altgraf için $d_{C_i}(v_0) \geq 2$' dir.O halde $(*)$'dan ötürü toplam en fazla $1004 + \frac{2010-1004}{2} = 1507$ altgraf olabilir. Dolayısıyla her durumda $2010 - 1507 = 503$ kenar silebiliriz.

Şimdi 503' ten fazla kenar silemeyeceğimiz bir graf kuralım. v_0'a 1004 kenar ile $K_3, K_5, \ldots, K_{2009}$ bağlayalım. 1006 kenar ile de 503 tane K_2 bağlayalım. (K_n: n köşeli tam graf) $, K_5, \ldots, K_{2009}$'a giden kenarlardan hiçbirini silemeyiz. Kalan 503 tane K_2'nin her birinden en fazla 1 kenar silebiliriz.

$$k_{max} = 503.$$

2 P, ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

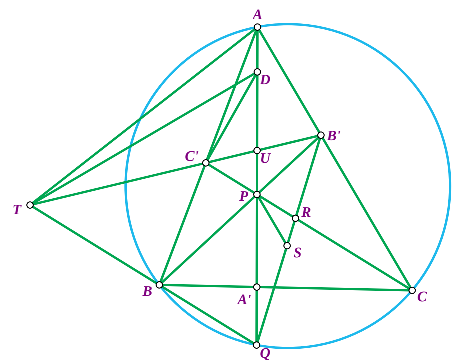
Çözüm:

(Burak VARICI)

$PS \parallel AC$ ve $\angle CAP = \angle BCP$ olduğundan $\angle QPC = \angle ACB = \angle AQB = \angle PQB$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $BQ \parallel PC$.

Önce $SQ = RB'$ ancak ve ancak $AB \parallel B'Q$ olduğunu göstereceğiz. PS ve AB' paralel olduğundan $\dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{SQ}{SB'}$ olduğunuz biliyoruz. Eğer $SQ = RB'$ ise, $BQ \parallel PC$ olduğundan $\dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{RB'}{RQ} = \dfrac{PB'}{PB}$ ve bu nedenle

$AB \parallel B'Q$. Diğer yandan eğer $AB \parallel B'Q$ ise $BQ \parallel PC'$ yi kullanırsak $\dfrac{RB'}{RQ} = \dfrac{PB'}{PB} = \dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{SQ}{SB'}$ elde ederiz. $\dfrac{RB'}{RQ} = \dfrac{SQ}{SB'} \Rightarrow \dfrac{RB'}{B'Q} = \dfrac{SQ}{B'Q} \Rightarrow SQ = RB'$ buluruz.



Şimdi $AB \parallel B'Q$ ancak ve ancak $\angle BAT = \angle BB'Q$ olduğunu göstereceğiz. $AP \cap B'C' = \{U\}$ olsun ve D, AP doğrusu ve $(C'PB')$ çemberinin ikinci kesim noktası olsun. $PC' \parallel QT$' yi kullanırsak $\dfrac{UD}{UB'} = \dfrac{UC'}{UP} = \dfrac{UT}{UQ}$, dolayısıyla $K.A.K$ dan $\triangle TDU \sim \triangle QB'U$, sonuç olarak TDC' ve $QB'P$ üçgenlerinin benzer olduğunu elde ederiz.

D 'nin A ile çakışık olamayacağını gösterelim (Bunu gösteriyoruz; çünkü aksi durumda $SQ = RB'$ olmasından bağımsız olarak $\angle BAT = \angle BB'Q$. Bu da ancak ve ancak önermesini bozar.). Çakışık olduğunu varsayalım. A, C', P, B' çemberseldir. $\angle PDB' = \angle PAB' = \angle B'C'P = \angle PCA'$, bundan dolayı da $C'B'$ ve BC paraleldir. A', AP ve BC' nin kesişim noktası olsun. Bunu takiben PBA' ve BAA' üçgenleri benzerdir ve bu nedenle $A'B^2 = A'P.A'A$. Benzer şekilde $A'C^2 = A'P.A'A$ dolayısıyla $A'B = A'C$, bu ise P' nin A' dan geçen kenarortay üzerinde olmamasıyla çelişir.

D' nin A ve U ile arasında olduğunu varsayalım. Eğer A, D ile U arasında ise benzer kanıt yine geçerlidir. Eğer $\angle BAT = \angle BB'Q$ ise, $\angle C'AT = \angle BAT = \angle BB'Q = \angle PB'Q = \angle C'DT$ ve T, A, D, C' çemberseldir. Bu nedenle $\angle PAB = \angle DAC' = \angle DTC' = \angle B'QP$ ($\triangle TDC' \cong \triangle QB'P$ olduğu için) ve dolayısıyla $AB \parallel B'Q$. Diğer yandan eğer $AB \parallel B'Q$ ise, $= \angle DTC' = \angle B'QP = \angle DAC'$, ve T, A, D, C' çemberseldir. Bu nedenle $\angle BAT$=$\angle C'AT = \angle C'DT = \angle PB'Q = \angle BB'Q$.

$$SQ = RB' \;\Leftrightarrow\; AB \parallel B'Q \;\Leftrightarrow\; \angle BAT = \angle BB'Q$$

$\boxed{3}$ Her n pozitif tam sayısı ve $a_1a_2\ldots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayıları için,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm 1:

(Burak VARICI)

Öncelikle $x^4 + 3 \ge (x+1)^2$ olduğunu görelim. $x^4 + 3 - (x+1)^2 = (x-1)^2\left(x^2+2x+2\right) \ge 0$ Bu nedenle her n pozitif tamsayısı ve $a_1a_2\ldots a_n = 1$ koşulunu sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} - \sum\limits_{i}^{k} \frac{x_i}{x_i+1}$ olsun. k üzerinden tümevarımla

$$x_1 x_2 \dots x_k = 1 \Rightarrow f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

olduğunu ispatlayacağız.

- $k = 1,\ x_1 = 1$ ve $f_1(x_1) = 0$
- $t = 1, 2, \dots, k-1$ ve $x_1 x_2 \dots x_t = 1$ için $f_t(x_1, x_2, \dots x_t) \geq 0$ olsun.
- $k > 1$ ve $x_1 x_2 \dots x_k = 1$ olsun. Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ ise $x_1 \leq 1 \leq x_k$ olur.

x_1 ve x_k yerine $x_1 x_k$ ve 1 yazalım.Tümevarımdan ötürü

$$f_k(x_1 x_k, x_2, \dots, x_{k-1}, 1) = \ f_{k-1}(x_1 x_k, x_2, \dots, x_{k-1}) \geq 0$$

O halde $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq f_k(x_1 x_k, x_2, \dots, x_{k-1}, 1)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) - f_k(x_1 x_k, x_2, \dots, x_{k-1}, 1)$$

$$= \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_k} - \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_k}{x_k+1} - \frac{1}{2x_1 x_k} + \frac{x_1 x_k}{x_1 x_k + 1} \geq 0$$

Paydaları eşitlersek $0 \leq (1 - x_1)(x_k - 1)\left(2{x_1}^2{x_k}^2 + {x_1}^2 x_k + {x_k}^2 x_1 + x_1 x_k + x_1 + x_k + 1\right)$ elde ederiz. $0 \leq x_1 \leq 1 \leq x_k$ olduğundan bu ifade doğrudur.

Çözüm 2:

(Burak VARICI)

Öncelikle $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{x}{\sqrt{x^4+3}} \iff x^4 + 3 \geq \ (x+1)^2 \iff (x-1)^2\left(x^2 + 2x + 2\right) \geq 0$ ki bu da açıktır.

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i+1}{2a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} \geq 2\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{a_i+1}\right) + \frac{n}{2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{2a_i} + \frac{2}{a_i+1}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} \geq \frac{5n}{2}$$

Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} \geq \frac{n}{2} \text{ ve } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{2a_i} + \frac{2}{a_i+1}\right) \geq 2n\sqrt[2n]{\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}} = 2n$$

Toplarsak eşitsizliklerin doğru olduğunu görürüz.

Çözüm 3:

(Burak VARICI)

Soruda istenenden daha kuvvetli bir şey ispatlayalım.

AGO' dan dolayı;

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\frac{n}{4}\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

O halde $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+n\geq 4\left(\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^4+3}}+\frac{a_2}{\sqrt{{a_2}^4+3}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^4+3}}\right)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Öncelikle $\frac{x}{x+1}\geq\frac{x}{\sqrt{x^4+3}} \iff x^4+3\geq (x+1)^2 \iff (x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)\geq 0$ ki bu da açıktır.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+n\geq 4\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{a_i}\geq 4\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i+1}\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+1}{a_i}+\frac{4}{a_i+1}\right)\geq 4n$$

Parantez içine AGO uygularsak $a_1a_2\ldots a_n=1$ olduğundan dolayı eşitsizliğin doğru olduğunu görürüz. Eşitlik durumu $a_i=1,\quad i=1,2,\ldots,n$ için.

$\boxed{4}$ A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, $[BC]$ yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP|=|EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgenin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB\cap EF=\{R\}$ ve $|EQ|$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

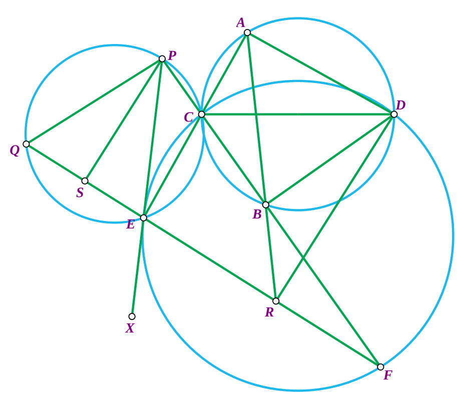
(Şahin Emrah)

Çözüm 1:

(Burak VARICI)

Öncelikle Q,E,F'nin doğrusallığını gösterelim. Q,E,C,P çembersel olduğundan $\angle PEQ=\angle PQE=\angle ECF$ ve PE doğrusu Γ çemberine teğet olduğu için $\angle ECF=\angle FEX$. Dolayısıyla Q,E,F noktaları doğrusaldır.

$PS\perp QF$ olduğunu biliyoruz. O halde $DR\perp QF$ olduğunu göstermeliyiz. Γ çemberinden dolayı $\angle RFD=\angle ACD=\angle ABD$. Bu nedenle R,B,D,F noktaları çemberseldir. CD çap olduğu için $\angle DBC=\angle DBF=\angle DRF=90^\circ$. $DR\perp QF \Rightarrow DR\parallel PS$.



Çözüm 2:

(Burak VARICI)

AB , D noktasına göre FCE üçgeninin Simson doğrusudur. O halde DR doğrusu EF'ye diktir. PE ışını üzerinde E'den sonra gelen bir X noktası için $\angle QEP = \angle EQP = \angle ECF = \angle XEF$. Bu nedenle Q, E, F noktaları doğrusaldır. PS, EQ'ya diktir ve dolayısıyla DR'ye paraleldir.

Çözüm 3:

A, D, E ve R noktalarının çembersel olduğunu gösterelim.

$$\angle PQC = \angle PEC = \angle CFD = \angle CDE \quad \text{ve} \quad \angle CBA = CBD$$

olduğundan $\angle ARE = ADE$ elde edilir, dolayısıyla A, D, E ve R noktaları ortak bir çember üzerindedir. CD kirişi çap olduğundan $\angle DRE = 180° - \angle CAD = 90° = \angle PSR \iff DR \parallel PS$ şeklinde istenen paralelliğe ulaşılır.

5 $0 \le a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim. $\mathcal{S}$ ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \le n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve $\mathcal{S}$ ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

(Okan Tekman)

Çözüm:

(Burak VARICI)

$P(x) = ax^2 + bx$ için $Q(x) = cx^2 + dx$ vardır ancak ve ancak $2^8 \cdot 1005^9 | a$ ve $(2010, b) = 1$ olduğunu ispatlayacağız. Böylece cevabımız:

$2 \cdot 2010^9 \cdot 2010^{18} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{67}\right) = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2010^{26}$ olacak.

Her n için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ olduğunu varsayalım. $n \mapsto P(n)$ mod2010^{18}'de birebirdir. Çinli Kalan Teoremini kullanırsak, her $p \in \{2, 3, 5, 67\}$ için $n \mapsto P(n)$ 'in modp^{18} 'de birebir olduğunu buluruz.

$p \in \{2, 3, 5, 67\}$ olsun. Eğer $p|b$ ise $P\left(p^{17}\right) \equiv P(0) \pmod{p^{18}}$ ki bu bir çelişkidir. Böylece $p \nmid b$. Eğer $p \nmid a$ ise $P\left(-a^{-1}b\right) \equiv P(0)\ \left(mod\ p^{18}\right)$ ki bu da bir çelişkidir. Böylece $p|a$. Bu nedenle $2010|a$ ve $(2010, b) = 1$.

$$Q(P(1)) \equiv 1 \implies c(a+b)^2 + d(a+b) \equiv 1 \quad (1)$$

$$Q(P(-1)) \equiv -1 \implies c(a-b)^2 + d(a-b) \equiv -1 \quad (2)$$

(1)'i $(a-b)$ ile, (2)'yi $(a+b)$ ile çarpıp çıkarırsak $2b\left(a^2 - b^2\right)c \equiv 2a \pmod{2010^{18}}$;

(1)'i $(a-b)^2$ ile, (2)'yi $(a+b)^2$ ile çarpıp çıkarırsak $2b\left(a^2 - b^2\right)d \equiv -2\left(a^2 + b^2\right) \pmod{2010^{18}}$ elde ederiz.

$\left(b\left(a^2 - b^2\right)\right)^{-1} \pmod{2010^{18}}$' in var olduğunu biliyoruz. O halde

$$c \equiv \left(b\left(a^2 - b^2\right)\right)^{-1} a + \varepsilon \frac{2010^{18}}{2} \pmod{2010^{18}}$$

$$d \equiv -\left(b\left(a^2 - b^2\right)\right)^{-1}\left(a^2 + b^2\right) + \varepsilon \frac{2010^{18}}{2} \pmod{2010^{28}}$$

ε, 0 ya da 1. Bu nedenle

$$Q(P(x)) - x \equiv$$

$$-\left(b\left(a^2 - b^2\right)\right)^{-1} a^2 x(x-1)(x+1)(ax+2b) + \varepsilon \frac{2010^{18}}{2} x(x-1) \pmod{2010^{18}}$$

Şimdi $x = 2$ koyarsak $2010^{18}|2^2 \cdot 3 \cdot a^2$ dolayısıyla $2^8 \cdot 1005^9|a$ elde ederiz.

Tersine gidersek, eğer $2^8 \cdot 1005^9|a$ ve $(2010, b) = 1$ ise, c ve d'yi yukarıdaki gibi tanımlarız.

Her n için $2|n(n-1)$ ve $2|an + 2b$ olduğundan $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ olur.

6 K, düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A, K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

(Umut Varolgüneş)

Çözüm:

(Muhammed Zahid Öztürk)

Cevabımız 4019. Eğer $n \geq 5$ ise n-gen için cevabın $2n - 1$ olduğunu göstereceğiz.

A bir kesişimli küme olsun öyle ki $|A| \geq n$. A'daki köşe sayısı doğru parçası sayısından büyük olmayacağından A bir döngü içerir. Bunu anlamak için tersini düşünelim. Bir döngü içermese bir ağaç olması gerekirdi, fakat n köşeli bir ağaçta en fazla $n - 1$ kenar olabilir. Bu yüzden bir döngü kesin vardır. PQ ve QR bu döngüde iki doğru parçası olsun. Döngüdeki her doğru parçası, XP ve RY hariç, PQ ve QR'nin ikisini birden kendi iç noktalarında keser. Bundan dolayı her doğru parçası PQ ve QR ye göre karşıdan karşıya geçmektedir. Burada döngünün tek sayıda doğru parçası içerdiğini ve döngüdeki köşelerden hiçbirinin $\angle PQR$ açısının iç bölgesinde olmadığını çıkarırız.

Şimdi bu döngüdeki köşelimizi adlandıralım. Döngümüzde k bir pozitif tamsayı olmak üzere $2k+1$ tane köşe olduğunu kabul edelim. Bu köşeler $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}$ olsun. Bu köşeleri saat yönünde sıralandırmış olmak için döngüdeki doğru parçalarının P_iP_{i+k}, P_iP_{i+k+1} olduğunu $1 \leq i \leq 2k+1$ için (İndisler $\bmod n$'e göredir) kabul edeceğiz. (Her doğru parçasının PQ ve QR ye göre karşılıklı olmasının doğal sonucu) Bu doğru parçalarını A^* ile gösterelim. Burada $2k+1$ tane doğru parçası olduğuna dikkat edelim. A bir kesişimli küme olduğundan A'daki diğer doğru parçaları ancak XP_i formunda olabilir; X, $\angle P_{i+k+1}P_iP_{i+k}$ açısının iç bölgesinde bir köşe. $|A| \geq n$ olduğundan tüm böyle doğru parçaları (A^{Δ} ile gösterelim) A'ya ait olmak zorundadır. Çünkü bu köşe döngüden sadece bir köşeye bağlı olabilir ya da başka bir deyişle döngümüzü kurarken elimizdeki tüm doğru parçalarını toplarsak da n sayısına ancak ulaşabiliriz. Bu nedenle eğer A bir kesişimli küme ve $|A| \geq n$ ise ve $|A| = n$' dir ve $A = A_{(P_1,P_2,\ldots,P_{2k+1})} = A^* \cup A^{\Delta}$.

Şimdi göstereceğiz ki eğer A ve B kesişimli kümeler ve $|A| = n = |B|$ ise A ve B ayrık olamaz. Ayrık olduklarını varsayalım. Her köşenin bağlı olduğu en az bir köşe olduğundan şöyle bir varsayımda bulunabiliriz. $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots, Q_{m-1}Q_m, Q_mQ_1$ bir döngü olsun öyle ki Q_iQ_{i+1} doğru parçaları i tekse A'ya, i çiftse B'ye ait olsun. ($Q_{m+1} = Q_1$) Öyle bir döngü vardır ki çokgenin her köşesi A ve B'den en az birer doğru parçasının bitiş noktasıdır. A ve B kesişimli olduğundan tüm Q_iQ_{i+1}' ler i tekse Q_1Q_2'yi, i çiftse Q_2Q_3'ü keser. Bu nedenle i çift ise tüm Q_i'ler ya Q_1Q_2'nin üzerindedir ya da Q_1Q_2'ye göre Q_3 ile farklı taraftadır. Ve i tek ise tüm Q_i'ler ya Q_2Q_3'ün üzerindedir ya da Q_2Q_3' ye göre Q_1 ile farklı taraftadır. m tektir ve Q_1 A^* 'ın bir köşesidir. O zaman Q_3 ya Q_mQ_1'in üzerindedir ya da Q_mQ_1' e göre Q_2 ile farklı taraftadır. Ve Q_{m-1} ya Q_1Q_2' nin üzerindedir ya da Q_1Q_2'e göre Q_m ile farklı taraftadır. XQ_1, B'ye ait bir doğru parçası olsun. XQ_1, Q_2Q_3 ve $Q_{m-1}Q_m$'in ikisini de kesmek zorundadır ve B'ye aittir. O halde X çokgende Q_2 ve Q_m arasındadır. Fakat bu durumda XQ_1 aynı zamanda A^{Δ} 'ya ve bu nedenle A'ya aittir. Çelişki!

Son olarak eğer P, Q, R, S, T çokgende beş ardışık köşe ise, $A_{(P,Q,R)} \cup A_{(R,S,T)}$ $2n - 1$ doğru parçası içerir.

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2011

1 $n \geq 2$ ve $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_k$; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A'_i \cap A_j$, $A_i \cap A'_j$ ve $A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[A, E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

(Selim Bahadır)

Çözüm:

(Mehmet KAYSİ)

Cevap: $2n - 3$.

Tümevarımla ispatlayacağız. $n = 3$ iken, $k \leq 3$ olduğunu görmek kolay ve 3'e örnek de $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Farzedelim ki $n - 1$ için cevap $2n - 5$ olsun.

n için k'nın en büyük değerini aldığı durumu ele alalım. $\{A_1, A_2, \ldots A_k\}$ 'ye koleksiyon diyelim. Koleksiyonda boş kümenin ve $\{1, 2, \ldots, n\}$'nin olamayacağı açık. Bu koleksiyon her i için, $\{i\}$ ve $\{i\}^{'}$ kümelerinden tam olarak birini içermek zorunda. Ikisini birden içeremez, ikisini de içermiyorsa bir tanesini ekleyerek koleksiyonu büyütebilirdik.

A bu koleksiyondaki bir küme ise, A'yı silip, $A^{'}$'ni eklersek tüm koşullar sağlanmaya devam eder. O zaman koleksiyondaki her kümenin eleman sayısının en fazla $\frac{n}{2}$ olduğunu kabul edebiliriz. Tek elemanlı olmayıp en az eleman sayısına sahip bir küme A olsun. Genelliği bozmadan $1, 2 \in A$ varsayabiliriz. B bu koleksiyonda $\{1\}$ ve $\{2\}$ dışında bir küme olsun.

$A \cap B = \varnothing$ ise, $1, 2 \notin B$,

$A \cap B^{'} = \varnothing$ ise, $A \subset B \Rightarrow 1, 2 \in B$,

$A^{'} \cap B = \varnothing$ ise, $B \subset A$, ama bu A ve B'nin seçiminden dolayı mümkün değil.

$A^{'} \cap B^{'} = \varnothing$ ise, $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. n tekse, $|A|, |B| \leq \frac{n-1}{2}$ olduğundan bu mümkün olamaz. n çiftse, tek olası durum $B = A^{'}$ olmasıdır, ama bu durumda da bahsi geçen dört kesişimden ikisi boş küme olur.

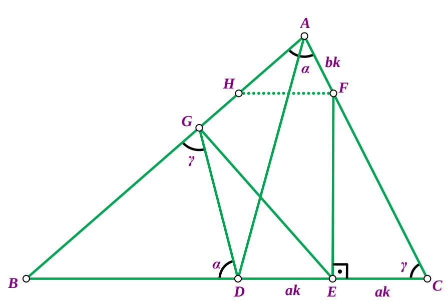
Yani B, 1 ve 2'nin ya iksini de içerir, ya da ikisini birden içermez. O halde $\{1\}$ ve $\{2\}$ yi silip $\{1, 2\}$'yi bir eleman gibi düşünürsek, $n-1$ için olan duruma geçmiş oluruz. Öyleyse n için cevap en fazla $2n-5+2 = 2n-3$ olabilir. $2n - 3$ için de örnek: tüm tek elemanlılar ve $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$,$\{1, 2, 3, 4\}$,$\ldots$, $\{1, 2, 3, \ldots, n - 2\}$

2 D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E, $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

Çözüm 1:

(Mehmet Efe AKENGİN)



ABC üçgeninin A, B C köşelerine ait açılar α, β, γ olsun ve BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları da a, b, c olsun.

A, G, D, C çembersel olduğundan, $\angle GDB = \angle BAC = \alpha$, $\angle BGD = \angle ACB = \gamma$, $\angle DFE = \angle EFC = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - \gamma ....(*)$

$AF \cdot BC = AC \cdot EC \Leftrightarrow \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{BC}{AF} = \dfrac{1}{k}$, $DE = EC = ak, AF = bk$. Dolayısıyla $FC = \dfrac{EC}{\cos\gamma} = \dfrac{ak}{\cos\gamma} \Rightarrow$
$b = AF + FC = bk + \dfrac{ak}{\cos\gamma} \Rightarrow k = \dfrac{b\cos\gamma}{b\cos\gamma + a} ....(1)$

Şekle baktığımızda, EF nin AGF ve BGE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ortak teğeti olduğunu ispatlamak doğal görünüyor. Yani $\angle GFE = \angle GAF = \alpha = \angle GDB$ olmalı, o da ancak G, F, E, D çembersel iken mümkün.

Fakat G, F, E, D çembersel $\Leftrightarrow \angle DGE = \angle DFE \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \angle DGE = 90^\circ - \gamma \Leftrightarrow \angle BGE = 90^\circ$. Yani, EF ortak teğettir $\Leftrightarrow AB \perp EG$.

$\angle GEB = x$ olsun. $\dfrac{\sin x}{\sin(180^\circ - \beta - x)} = \dfrac{GB}{BE} = \dfrac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin 90^\circ}$ olduğunu ispatlarsak,

$$\sin x \cdot \sin 90^\circ = \sin(180^\circ - \beta - x) \cdot \sin(90^\circ - \beta)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[-\cos(90^\circ + x) + \cos(90^\circ - x)] = \frac{1}{2}[\cos(90^\circ - x) - \cos(270^\circ - 2\beta - x)]$$
$$\Leftrightarrow \cos(270^\circ - 2\beta - x) = \cos(90^\circ + x) \Leftrightarrow 270^\circ - 2\beta - x = 90^\circ + x \Leftrightarrow x = 90^\circ - \beta$$

bulunur, ki bu da $\angle BGE = 90^\circ$ demektir.

$BE = a - ak \overbrace{=}^{(1)} \dfrac{a^2}{b\cos\gamma + a}$ ve B noktasına göre A, G, D, C den geçen çember için kuvvetten $BG = \dfrac{BD \cdot BC}{BA} = \dfrac{a(a - 2ak)}{c} \overbrace{=}^{(1)} \dfrac{a^2 \cdot (a - b\cos\gamma)}{c \cdot (b\cos\gamma + a)}$ sağlanıyor.

Buradan,

$$\frac{BE}{BG} = \frac{\frac{a^2}{a+b\cos\gamma}}{\frac{a^2}{c} \cdot \frac{a-b\cos\gamma}{a+b\cos\gamma}} \Rightarrow \frac{BG}{BE} = \frac{a - b\cos\gamma}{c} = \frac{c\cos\beta}{c} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin 90^\circ}$$

bulunur.

Dolayısıyla $\angle BGE = 90^\circ$, yani $EG \perp AB$ ispatlandı.

Yani EF iki çemberin ortak teğetidir.

Çözüm 2:

(Mehmet KAYSİ)

Şekle baktığımızda, EF nin AGF ve BGE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ortak teğeti olduğunu ispatlamak doğal görünüyor. Yani $\angle GFE = \angle GAF = \alpha = \angle GDB$ olmalı, o da ancak G, F, E, D çembersel iken mümkün. Dolayısıyla "EF ortak teğet $\Leftrightarrow G, F, E, D$ çemberseldir." diyebiliriz. Şimdi, G, F, E, D noktalarının çembersel olduğunu ispatlayalım:

ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait açılar α, β, γ olsun ve BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları da a, b, c olsun.

A, G, D, C çembersel olduğundan, $\angle GDB = \angle BAC = \alpha$, $\angle BGD = \angle ACB = \gamma$, $\angle DFE = \angle EFC = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - \gamma \ldots (*)$

$AF \cdot BC = AC \cdot EC \Leftrightarrow \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{BC}{AF} = \dfrac{1}{k}$, $DE = EC = ak, AF = bk$.

F den BC ye çizilen paralel AB yi H de kessin. $\triangle AHF \sim \triangle ABC$ den $AH = ck$ bulunur. Dolayısıyla eşitlikleri yerine yazarsak $\dfrac{AH}{EC} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow EH \| AC$ elde edilir.

Yani $HFCE$ bir paralelkenardır. $\angle EHF = \angle FCE = \angle FDE \Rightarrow H, D, E, F$ çemberseldir. Sonuç olarak, D, E, F, G, H çembersel bulunur, ispat biter.

$\boxed{3}$ $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

Çözüm 1:

(Mehmey KAYSİ)

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ötürü herhangi b gerçel sayısı için

$$(x + y^{20} + z^{11})(x^{2b-1} + y^{2b-20} + z^{2b-11}) \geq (x^b + y^b + z^b)^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} \leq \frac{x^{2b-1} + y^{2b-20} + z^{2b-11}}{(x^b + y^b + z^b)^2}$$

Benzer biçimde elde ettiğimiz eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, 1'den küçük eşit olduğunu göstermek istediğimiz toplamın,

$$\frac{x^{2b-1} + y^{2b-1} + z^{2b-1} + x^{2b-20} + y^{2b-20} + z^{2b-20} + x^{2b-11} + y^{2b-11} + z^{2b-11}}{(x^b + y^b + z^b)^2}$$

kesrinden küçük veya eşit olduğunu göstermiş oluruz.Yani uygun bir b için bu kesrin ≤ 1 olduğunu gosterirsek ispat tamamlanır.

Notasyon kolaylığı için $f(\alpha) = x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha$ olsun. O zaman bizim göstermek istediğimiz ifade

$$f(2b-1) + f(2b-20) + f(2b-11) \leq f(2b) + 2(x^b y^b + x^b z^b + y^b z^b)$$

Üç tane AGO uygulayarak $(x^b y^b + x^b z^b + y^b z^b) \geq f(\frac{b}{2})$ olduğunu görebiliriz. Ayrıca açık bir şekilde $x^b y^b + x^b z^b + y^b z^b = f(-b)$. Bizim amacımız

$$f(2b-1) + f(2b-20) + f(2b-11) \leq f(2b) + f(-b) + f(\frac{b}{2})(*)$$

olduğunu göstermek.

Lemma: $r \geq s \geq 0$ ise, $f(r) \geq f(s)$ ve $f(-r) \geq f(-s)$.

İspat: $s = 0$ ise, ifade basit bir AGO. $s > 0$ ise, kuvvetler ortası eşitsizliğinden dolayı

$$(\frac{f(r)}{3})^{\frac{1}{r}} \geq (\frac{f(s)}{3})^{\frac{1}{s}} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1 \Rightarrow (\frac{f(r)}{3})^{\frac{s}{r}} \geq (\frac{f(s)}{3}) \geq 1.$$

$f(r) \geq 3$ ve $r \geq s$ olduğundan $\frac{f(r)}{3} \geq \frac{f(s)}{3}$ olur.

$\Rightarrow f(r) \geq f(s)$. x, y, z yerine sırasıyla x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} koyarsak $f(-r) \geq f(-s)$ olur.

$b = 7$ alalım. Lemmadan ötürü

$$f(13) \leq f(14), f(-6) \leq f(-7) \text{ve} f(3) \leq f(\frac{7}{2}) \Rightarrow (*) \text{ doğrudur.}$$

Çözüm 2:

(Fehmi Emre KADAN)
Hölder eşitsizliğinden

$$(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})(x+y^{20}+z^{11}) \geq (x^7+y^7+z^7)^3$$

Buradan da

$$\frac{1}{(x+y^{20}+z^{11})} \leq \frac{(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})}{(x^7+y^7+z^7)^3}$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlamamız yeterlidir.

$$\sum_{cyc} \frac{(x^{10}+y+1)(x^{10}+1+z^{10})}{(x^7+y^7+z^7)^3} \leq 1$$

Son eşitsizliği düzenlersek

$$3+\sum_{cyc} x^{20}+3\sum_{cyc} x^{10}+\sum_{cyc} x+\sum_{sym} x^{10}y+\sum_{cyc} x^{10}y^{10} \leq (x^7+y^7+z^7)^3$$

haline dönüşür. Şimdi ise aşağıdaki lemmaları ispatlayalım:

Lemma 1: Her $x>0$ gerçel sayısı için

$$x^{21}+1 \geq x^{20}+x$$

İspat: $x^{21}+1 \geq x^{20}+x \Leftrightarrow (x-1)(x^{20}-1) \geq 0$ olur ve son eşitsizlik sağlanır.

Lemma 2: $xyz=1$ şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları iğin

$$\sum_{sym} x^{14}y^7 \geq 2\sum_{cyc} x^{10}y^{10}$$

İspat: İfadeyi homojen hale getirirsek $(14,7,0) \succ (\frac{31}{3}, \frac{31}{3}, \frac{1}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter.

Lemma 3: $xyz=1$ şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları için

$$\sum_{sym} x^{14}y^7 \geq \sum_{sym} x^{10}y$$

İspat: İfadeyi homojen hale getirelim. $(14,7,0) \succ (\frac{40}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter.

Lemma 4: $xyz=1$ Şartını sağlayan her $x,y,z>0$ gerçel sayıları için

$$\sum_{sym} x^{14}y^7 \geq 2\sum_{cyc} x^{10}$$

İspat: İfadeyi homojenleştirelim. $(14,7,0) \succ (\frac{41}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3})$ olduğundan Muirhead eşitsizliğinden ispat biter.

Lemmaları kullanarak;

$$3+\sum_{cyc} x^{20}+\sum_{cyc} x \leq 6+\sum_{cyc} x^{21} \tag{1}$$

$$\sum_{cyc} x^{10}y^{10} \leq \frac{1}{2}\sum_{sym} x^{14}y^7 \tag{2}$$

$$\sum_{sym} x^{10}y \leq \sum_{sym} x^{14}y^7 \tag{3}$$

$$3\sum_{cyc} x^{10} \leq \frac{3}{2}\sum_{sym} x^{14}y^7 \tag{4}$$

bulunur. (1), (2), (3) ve (4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$3+\sum_{cyc} x^{20}+3\sum_{cyc} x^{10}+\sum_{cyc} x+\sum_{sym} x^{10}y+\sum_{cyc} x^{10}y^{10} \leq 6+\sum_{cyc} x^{21}+3\sum_{sym} x^{14}y^7$$

buluruz. Son olarak

$$6+\sum_{cyc} x^{21}+3\sum_{sym} x^{14}y^7 = (x^7+y^7+z^7)^3$$

olduğundan çözüm biter.

4 $a_1 = 5$ ve $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı $a_{2011}+1$ sayısını bölüyorsa, $p = 3$ olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm 1:

(Muhammed Zahid ÖZTÜRK)

$\forall n$ için $a_n + 1$ in $4k+3$ formunda bir asal böleni var ise 3 olduğunu gösterelim.

$a_{n+1} - 2 = a_n^3 - 2a_n^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2} = a_n^2$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2} \cdot \dfrac{a_n-2}{a_{n-1}-2} \cdots \dfrac{a_2-2}{a_1-2} = a_n^2 \cdot a_{n-1}^2 \dots a_1^2$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}-2}{3} = a_n^2 \cdot a_{n-1}^2 \dots a_1^2$

$\Rightarrow a_{n+1}+1 = 3\left[a_n^2 \cdot a_{n-1}^2 \dots a_1^2 + 1\right]$.

$p | a_{n+1}+1 \Rightarrow p|3$ ya da $p | a_n^2 \cdot a_{n-1}^2 \dots a_1^2 + 1$.

İlk durumda $p = 3$ olmak zorunda.

İkinci durumda,

$(a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1)^2 \equiv -1 (\mod p)$

$\Rightarrow \left[(a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mod p)$

$\Rightarrow 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mod p)$

$\dfrac{p-1}{2}$ çift olmalıdır. Öyleyse $p = 4k+1$ formuda olmak zorundadır, $4k+3$ formunda olamaz.

Çözüm 2:

Çözüm [Lokman GÖKÇE]: Verilen bağıntıyı düzenlersek $a_{n+1}-2=a_n^2(a_n-2)$ olup $\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=a_n^2$ yazılır. Şimdi n ye 1 den 2010 a kadar değer vererek elde edilen ifadeleri taraf tarafa çarparsak, eşitliğin sol tarafı bir teleskopik çarpım olduğundan $\dfrac{a_{2011}-2}{a_1-2}=a_1^2\cdot a_2^2\cdots a_{2010}^2$ olur. Bir x tam sayısı için $a_1^2\cdot a_2^2\cdots a_{2010}^2=x^2$ olarak yazılabilir. $a_1=5$ olduğundan $a_{2011}-2=3x^2$ olup

$$a_{2011}+1=3(x^2+1)$$

bulunur. $a_{2011}+1$ sayısının $p=3$ asalına bölündüğü açıktır.

Koşullara uygun başka p asalı olmadığını ispatlamak için çelişki metodunu kullanalım. $p\equiv 3 \pmod 4$ ve $p\neq 3$ olan bir p asalı için $p \mid (a_{2011}+1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p \mid 3(x^2+1)$ olup $p\neq 3$ olduğundan $p \mid (x^2+1)$ dir. Dolayısıyla $x^2\equiv -1 \pmod p$ dir. Fakat kare kalanlar ve Legendre sembolü için temel bir özellik olarak $p\equiv 3 \pmod 4$ formunda bir asal sayı iken $\left(\dfrac{-1}{p}\right)=-1$ dir. Yani $x^2\equiv -1 \pmod p$ denkliğini sağlayan x tam sayısı yoktur, çelişki! İspatı için 4n+1 Asal bağlantısına bakılabilir. O halde $p \mid (a_{2011}+1)$ ve $p\equiv 3 \pmod 4$ koşullarına uygun biricik asal sayı $p=3$ tür.

5 M ve N düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalardan biri M ye, diğeri de N ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi $K(M,N)$ ile gösterelim. $K(M,N)$ nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm (M,N) ikililerini belirleyiniz.

(Selman Erol)

6 A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

(Yunus Emre DEMİRCİ)

Önce 212 için örnek verelim.

A daki ve B deki kentleri, her iki ülkede de 16 tane 106 kent ve 3 tane 105 kent olmak üzere 19'ar gruba ayıralım. Bu gruplar arasındaki uçuşları farklı havayolu şirketleri kontrol etsin (Uçuşlar bir ülkeden diğerine olduğu için toplam 19^2 havayolu şirketi olması gerekir). Bu durumda aynı havayolu şirketi kullanılarak en çok 212 kente ulaşılabilir.

Şimdi uygun havayolu ile her zaman 212 kente ulaşmanın mümkün olduğunu gösterelim.

$i\in\{1,2,\dots s\}$ olmak üzere, havayolu şirketi değiştirmeden ulaşılabilen kentlerin kümesi K_i, kentlerin sayısı ise k_i olsun (bir havayolu şirketi için birden fazla küme bulunabilir). Soruda verilen şarttan dolayı her kent en fazla 19 kümenin içinde olabilir. Yani, toplamda 4022 kent olduğundan, $\sum_{i=1}^n k_i \le 4022\cdot 19$ dur.

Öte yandan, i havayolu şirketi, K_i 'de bulunan kentler arasında en fazla $\frac{k_i^2}{4}$ uçuş düzenleyebilir. Toplam uçuş sayısı 2011^2 olduğundan $\sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{4}\ge 2011^2$, yani $\sum_{i=1}^n k_i^2 \ge 4\cdot 2011^2$ olur.

Şimdi, k_i 'lerden en az biri 212'den büyükse ispat biter.

Hepsinin en çok 211 olduğu duruma bakalım. Yani, $\sum_{i=1}^n k_i \le 4022\cdot 19$ ve $k_i\le 211$ iken, $\sum_{i=1}^n k_i^2$ nin alabileceği en büyük değere bakalım. $a\ge b>0$ iken, $(a+1)^2+(b-1)^2>a^2+b^2$ olduğundan, $\sum_{i=1}^n k_i^2$ en büyük değerini k_i lerin hemen hemen hepsi 211 iken alır. $363\cdot 211>4002\cdot 38$ olduğundan $363\cdot 211^2\ge \sum_{i=1}^n k_i^2 \ge 4\cdot 2011^2$ olur. Fakat $363\cdot 211^2<4\cdot 2011^2$ olduğundan, bu durum mümkün değildir.

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2012

1 Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

Öncelikle eğer sonsuz x için $P(x) = Q(x)$ eşitliği sağlanıyorsa P ve$Q$ polinomlarının her x için birbirine eşit olduğunu hatırlatalım.

Şimdi n yerine sırasıyla 1 ve 2 koyalım: Buradan $P(1) = |P(1)|!$ ve $P(2) = |P(2)|!$ eşitliklerini elde ederiz. Buradan da $P(1)$, $P(2) \in \{1, 2\}$ olduğu kolayca görülür. Şimdi durumları inceleyelim:

1. Durum: $P(2) = 1$. Her n pozitif tamsayısı için $P(n!) = |P(n)|! > 0$ olduğundan n yerine herhangi bir m pozitif tamsayısı için $m!$ koyduğumuzda eşitliğimiz $P((m!)!) = |P(m!)|! = P(m!)!$ halini alır. Yani kısaca $P(n!) = P(n)!$ olur. Bezout Teoremi'nden $n! - 2 | P(n!) - P(2) = P(n)! - 1$ olduğunu söyleyebiliriz. $m \geq 2$ için $n! - 2$ çift olur, bu nedenle $P(n)! - 1$ de çifttir. O halde $P(n)!$ sayısı tek olmalı. Buradan $P(n) \in \{0, 1\}$ olduğunu söyleyebiliriz. (Çünkü $P(n) > 1$ için $P(n)!$ sayısı daima çift olur.) Ancak bir $c \in \{0, 1\}$ tamsayısı için $P(x) = c$ olacak şekilde sonsuz x tamsayısı bulunabileceğinden her x tamsayısı için $P(x) = c$ olur. Ve $P(2) = 1$ olduğundan her x için $P(x) = 1$ bulunur.

2. Durum: $P(2) = 2$ ve $P(1) = 1$. Yine Bezout Teoremi'ni kullanarak $5 = 3! - 1 | P(3!) - P(1) = |P(3)|! - 1$ ve $4 = 3! - 2 | P(3!) - P(2) = |P(3)|! - 2$ olduğunu buluruz. Eğer $|P(3)| > 3$ ise $|P(3)|! - 2$ 4'e bölünmez. Eğer $|P(3)| < 3$ ise $|P(3)|! - 1$ sayısı 5'e bölünmez. O halde $|P(3)| = 3$ olmalıdır. Bu nedenle $P(6) = P(3!) = |P(3)|! = 6$ olur. Aynı şekilde $P(6!) = 6!$, $P((6!)!) = (6!)!$ bulunur ve iç içe faktoriyelleri kullanarak $P(x) = x$ şartını sağlayan sonsuz x elde ederiz. Dolayısıyla, sonsuz x tamsayısı için $P(x) = x$ olduğundan her x tamsayısı için $P(x) = x$ olur.

3. Durum: $P(2) = P(1) = 2$. Bezout Teoremi'nden $5 = 3! - 1 | P(3!) - P(1) = |P(3)|! - 2$ olduğu görülür. Bu durumun sağlanması için $|P(3)| = 2$ olmalıdır. Bu nedenle bir önceki durumda yaptığımız gibi $P(6) = P(3!) = |P(3)|! = 2$ olur. Aynı şekilde $P(6!) = 2$, $P((6!)!) = 2$ olur. Buradan da $P(x) = 2$ çözümünü buluruz.

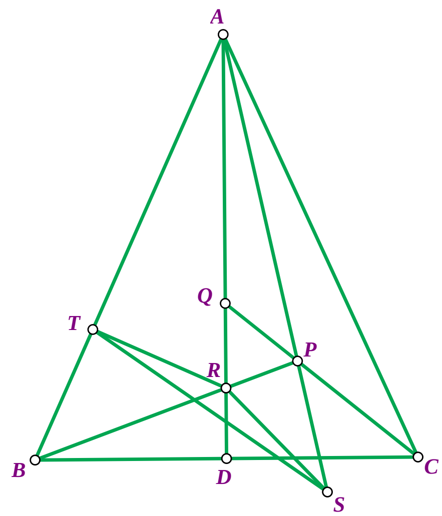
O halde verilen eşitliği sağlayan $P(x) = 1$, $P(x) = 2$, $P(x) = x$ olmak üzere üç polinom vardır.

2 ABC, $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D, A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90^\circ$ ve $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor.

$CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:



$\angle PAR = \alpha, \angle PBC = \beta$ ve $\angle BAD = \theta$ diyelim. O halde $\angle QBR = \alpha$ olur. Şimdi ABC üçgeninde P noktasına göre Trigonometrik Seva Teoremi'ni uygulayalım:

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos(\beta+\theta)} = 1 \tag{1}$$

$2\cos x \cdot \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ özdeşliği kullanılarak;

$2\cos(\alpha+\beta+\theta)\sin\beta = \sin(\alpha+2\beta+\theta) - \sin(\alpha+\theta)$,

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\theta) = \sin(\alpha+2\beta+\theta) - \sin(\theta-\alpha)$

eşitlikleri elde edelir. Şimdi bu eşitlikleri (1)'de yerine yazarsak ilk eşitliğimiz

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha+2\beta+\theta) - \sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+2\beta+\theta) - \sin(\theta-\alpha)} = 1$$

haline gelir.

Bunu da düzenleyerek şunu elde ederiz:

$$(\sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta-\alpha))\sin(\alpha+2\beta+\theta) = \sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2(\theta-\alpha)$$

$$\sin(\alpha+2\beta+\theta) = \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta-\alpha) = 2\sin\theta\cos\alpha \tag{2}$$

Bir de ATS üçgeninde R noktasına göre Trigonometrik Seva Teoremi uygulayalım:

$$\frac{\sin(\alpha+2\beta+\theta)}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(2\alpha)} \cdot \frac{\sin\angle RST}{\sin\angle RTS} = 1 \tag{3}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ ve (2)'den dolayı $\sin(\alpha+2\beta+\theta) = 2\sin\theta\cos\alpha$ olduğunu (3)'te yerine yazarsak $\sin\angle RST = \sin\angle RTS$ eşitliğini elde etmiş oluruz. Bu da $|TR| = |RS|$ olduğunun ispatıdır.

$\boxed{3}$ Tüm x, y gerçel sayıları için,

(i) $f\left(f(x^2) + y + f(y)\right) = x^2 + 2f(y)$ ve

(ii) $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

Tek çözüm $f(x) = x$ tir.

İlk önce f'nin birebir fonksiyon olduğunu kanıtlayalım. (i)'de y yerine 0 koyarsak eşitlik$f(f(x^2) + f(0)) = x^2 + 2f(0)$ olur. Her $a \geq 0$ için,

$$f(f(a) + f(0)) = a + 2f(0) \tag{1}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu da f'nin negatif olmayan reel sayılar için birebir olduğunu gösterir. Şimdi tüm sayılar için birebir olduğunu gösterelim. y_1 ve y_2 keyfi reel sayılar olsun. (i)'den dolayı herhangi sabit bir y sayısı için f üstten sınırlı değildir. Eğer $f(y_1) = f(y_2)$ ise (i)'den dolayı $f(f(x^2) + y_1 + f(y_1)) = f(f(x^2) + y_2 + f(y_2))$ olur. Yeterince büyük bir x için $f(x^2) + y_1 + f(y_1)$ ve $f(x^2) + y_2 + f(y_2)$ pozitif olur ve buradan da $y_1 = y_2$ olur.

Şimdi $f(0) = 0$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $f(0) \leq 0$ ise; (1)'de $a = -2f(0)$ yazalım.(a negatif olmayan bir sayı olduğundan bunu yazabiliriz.) $f(f(-2f(a)) + f(0)) = 0$ olur. Buradan bir c sayısı için $f(c) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Eğer (i)'de de $x = 0$ ve $y = c$ koyarsak $f(f(0) + c) = 0$ olduğunu buluruz. f birebir fonksiyon olduğundan dolayı da $f(0) + c = c$ yani $f(0) = 0$ olur.

Eğer $f(0) \geq 0$ ise; (i)'de $x = y = 0$ koyalım. $f(2f(0)) = 2f(0)$ bulunur. Şimdi (1)'de a yerine $3f(0) = f(0) + f(2f(0))$ yazalım. (a negatif olmayan bir sayı olduğundan bunu yazabiliriz.) Bu durumda eşitlik $f(a) = f(f(0) + f(2f(0))) = 2f(0) + 2f(0) = 4f(0)$ olur. Her iki tarafa $f(0)$ eklersek $f(f(a) + f(0)) = f(5f(0)) = 3f(0) + 2f(0) = 5f(0)$ (Bir defa (1)'i kullandık.) olur.

Şimdi (i)'de $x = 0$ ve $y = 2f(0)$ yazarsak; $f(5f(0)) = 4f(0)$ olur. Bu durumda $f(5f(0))$ iki farklı değer alır ve $4f(0) = 5f(0)$, $f(0) = 0$ olur.

Bu durumda (1)'de $f(0)$ yerine 0 koyarsak her $a \geq 0$ için $f(f(a)) = a$ olur. (i)'de x yerine 0, y yerine $f(a)$ koyarsak $f(f(a) + a) = 2f(f(a)) = 2a$ olur. Bir de x yerine 0, y yerine a koyarsak $f(a + f(a)) = 2f(a)$ olur ve her $a \geq 0$ için

$$f(a) = a \tag{2}$$

olur.

Herhangi bir y_0 için ${x_0}^2 + y_0 + f(y_0) > 0$ olacak şekilde x_0 bulunur. O halde (i)'yi ve (2)'yi kullanarak $f(x_0^2 + y_0 + f(y_0)) = x_0^2 + y_0 + f(y_0) = x_0^2 + 2f(y_0)$ eşitliğini elde ederiz. Buradan da her x için $f(x) = x$ olduğunu görürüz.

$\boxed{4}$ Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm 1:

(Lokman GÖKÇE)

$\dfrac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \dfrac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \dfrac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$ eşitsizliğinde $\dfrac{x}{y} = a$, $\dfrac{y}{z} = b$, $\dfrac{z}{x} = c$ dönüşümü yaparsak $abc = 1$ olup eşitsizlik $\dfrac{2a-1}{2c+1} + \dfrac{2b-1}{2a+1} + \dfrac{2c-1}{2b+1} \geq 1$ şekline dönüşür.

$\dfrac{2a-1}{2c+1} + \dfrac{2b-1}{2a+1} + \dfrac{2c-1}{2b+1} \geq 1$ (eşitsizliğinde payda eşitleyip düzenlersek)

$\implies 8a^2b + 8b^2c + 8c^2a + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 8abc + 4ab + 4bc + 4ca + 4a + 4b + 4c + 4$ ($abc = 1$ yazar ve $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ eşitsizliğini kullanırsak)

$\Longrightarrow 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a \geq a + b + c + 3$ (aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3$ olduğundan)

$\Longrightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq a + b + c$ elde edilir. Bu eşitsizlikte tekrar $\dfrac{x}{y} = a$, $\dfrac{y}{z} = b, \dfrac{z}{x} = c$ yazıp düzenlersek

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2z + z^2y + y^2x$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik ise (x, y, z) ve (x^2, y^2, z^2) üçlüleri için yeniden düzenleme eşitsizliğinin uygulanması olup, eşitsizlik doğrudur.

Eşitlik durumu yalnızca $x = y = z$ durumunda sağlanır.

Çözüm 2:

(Hüseyin Emekçi)

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} = \sum \frac{2x^2}{2yz+xy} - \sum \frac{xy}{2yz+xy}$$

$$\geq \frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} - \sum \frac{xy}{2yz+xy}$$

$$= \frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} - (3 - \sum \frac{2yz}{2yz+xy}) = \frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} - 3 + \sum \frac{2yz}{2yz+xy} \geq 1$$

$$=> \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} + \sum \frac{yz}{2yz+xy} = \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} + \frac{z}{2z+x} + \frac{x}{2x+y} + \frac{y}{2y+z} \geq 2$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} + \frac{z}{2z+x} + \frac{x}{2x+y} + \frac{y}{2y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} + \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}$$

$$= (x+y+z)^2 \left[\frac{1}{3(xy+yz+zx)} + \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}\right] \geq (x+y+z)^2 \left(\frac{4}{4(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2)}\right) \geq 2$$

$$\frac{2(x+y+z)^2}{4(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2)} \geq 1$$

.

Bu ifadenin doğru olduğu açıktır. İspat biter.

5 $x_i \in 1, 2, \ldots, 20, (1 \leq i \leq 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.

Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i (1 \leq i \leq 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*

$$x_i \leq y_i (1 \leq i \leq 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.

A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap, $\dfrac{1}{20^{2012}}$.

Daha genel halini $K = 20$, $n = 2012$ değişkenlerini kullanarak ispatlayalım.

$A = P$ veya $B = P$ olduğunda $|A \cap B|/(|A| \cdot |B|) = \dfrac{1}{|P|} = \dfrac{1}{K^n}$ oluyor.

Herhangi A alçalan, B yükselen kümeleri için $|A \cap B|/(|A| \cdot |B|) \le \dfrac{1}{K^n}$ olduğunu tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için, $A = \{x_1 \colon x_1 \in \mathbb{N}, 1 \le x_1 \le a_1 \le K\}$ ve $B = \{x_1 \colon x_1 \in \mathbb{N}, 1 \le b_1 \le x_1 \le K\}$ olsun.

İddia: $|A| \cdot |B| \ge K \cdot |A \cap B|$

İspat:

$$\begin{array}{rcl} |A| \cdot |B| & \ge & K \cdot |A_1 \cap B_1| \\ a_1(K - b_1 + 1) & \ge & K(a_1 - b_1 + 1) \\ K \cdot a_1 - a_1 b_1 + a_1 & \ge & K \cdot a_1 - K \cdot b_1 + K \\ K \cdot b_1 - K - a_1 b_1 + a_1 & \ge & 0 \\ (K - a_1)(b_1 - 1) & \ge & 0. \blacksquare \end{array}$$

$n-1$ için eşitsizlik doğru olsun. Yani $n-1$-lilerden oluşan herhangi A' alçalan ve B' yükselen kümeleri için $|A' \cap B'|/(|A'| \cdot |B'|) \le \dfrac{1}{K^{n-1}}$ olsun.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çoklularından oluşan A alçalan kümesini x_n sayısına göre gruplandıralım. A_i ile $x_n = i$ olan grubun son elemanın atılmasıyla oluşan $n-1$-liler kümesini gösterelim.

Öncelikle $|A| = \sum\limits_{i=1}^{K} |A_i|$ ve her A_i nin alçalan olduğunu fark edelim.

A_{i+1} in bir elemanı $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ olsun. $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i+1) \in A$ ise alçalanlık tanımından $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i) \in A$, dolayısıyla $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in A_i$ olacak. Bu durumda $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_K$ olur.

Benzer şekilde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çoklularından oluşan B yükselen kümesini x_n sayısına göre gruplandıralım. B_i ile $x_n = i$ olan grubun son elemanın atılmasıyla oluşan $n-1$-liler kümesini gösterelim. Her B_i yükselen ve $|B| = \sum\limits_{i=1}^{K} |B_i|$ olacaktır. Alçalan örneğine benzer şekilde $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_K$.

$n-1$-liler için doğru kabul ettiğimiz eşitlikten

$$|A \cap B| = \sum_{i=1}^{K} |A_i \cap B_i| \le \frac{1}{K^{n-1}} \sum_{i=1}^{K} |A_i| \cdot |B_i| \tag{1}$$

elde edilir.

$|A_1| \ge |A_2| \ge \cdots \ge |A_K|$ ve $|B_1| \le |B_2| \le \cdots \le |B_K|$ olduğu için Chebyshev Eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{K} |A_i| \cdot |B_i| \le \frac{1}{K} \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} |A_i| \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} |B_i| \right) = \frac{1}{K} \cdot |A| \cdot |B| \tag{2}$$

elde ederiz.

(1) ile (2) yi birleştirirsek

$$|A \cap B| \le \frac{1}{K^n} \cdot |A| \cdot |B|$$

sonucuna ulaşırız. $\blacksquare$

Kaynak:

Turkish Mathematical Olympiad 2012 Kitapçığı

Kleitman's Lemma

6 Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I, $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.

(a) P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

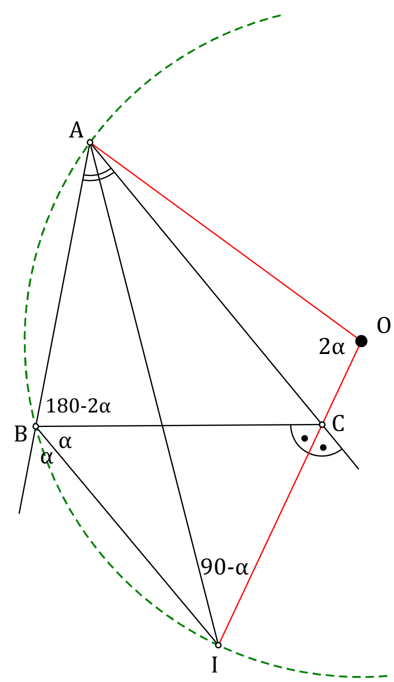
(b) Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

(Ufuk Kanat)

Çözüm:

(a) Çözümün daha anlaşılır olması için bahsi geçen üçgenlerin çevrel çember merkezlerinin bulunuşunu ayrıca irdeleyelim.

ABC bir üçgen ve I, A köşesine ait dış teğet çemberin merkezi olmak üzere; ABI üçgeninin çevrel çember merkezi IC üzerinde ve benzer şekilde, ACI ve BCI üçgenlerinin de sırasıyla IB ve IA üzerinde olacaktır. Bunu aşağıdaki örnek şekilde açılar arasındaki ilişkileri inceleyerek görebiliriz.



Bu açıklama yardımıyla (IAB) ile (ICD) çemberlerinin merkezleri olan P_1 ve P_3 , IF üzerinde , (IBC) ile (IDA) çemberlerinin merkezleri olan P_2 ve P_4 , IE üzerinde olacaktır.

Benzer şekilde (IAE) ile (ICF) çemberlerinin merkezleri olan Q_1 ve Q_3 , ID üzerinde, (IEC) ile (IFA) çemberlerinin merkezleri olan Q_2 ve Q_4 , IB üzerinde olacaktır.

Ayrıca açıortayın açısal özelliklerinden;

$$\angle BIA = \angle CID = \frac{\angle BFA}{2} = \alpha$$

ve

$$\angle EIB = \frac{\angle BCE}{2} = \frac{\angle DCF}{2} = \angle FID = \beta$$

olur.

Buraya kadar bulunanlar ile

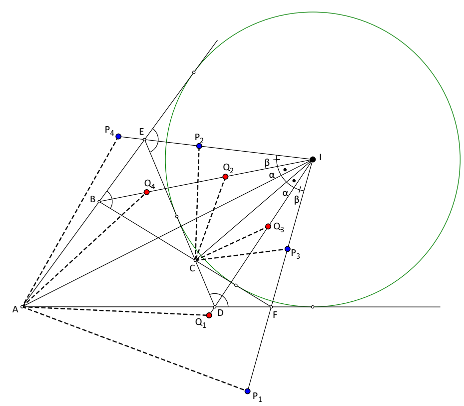
$$\Delta P_1AI \sim \Delta P_2CI, \Delta P_4AI \sim \Delta P_3CI, \Delta Q_1AI \sim \Delta Q_2CI, \Delta Q_4AI \sim \Delta Q_3CI$$

benzerliklerinin varlığını görebiliyoruz. Şimdi bu benzerliklerin getirdiği oranları yazalım.

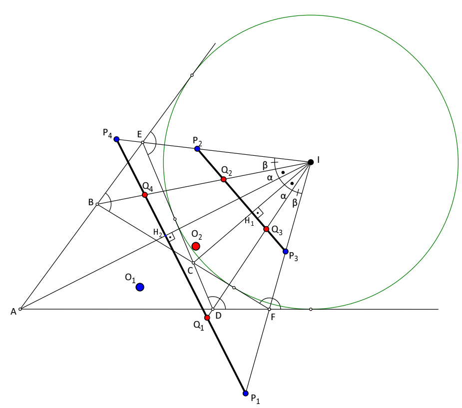
$$\Delta P_1AI \sim \Delta P_2CI, \Delta P_4AI \sim \Delta P_3CI \Rightarrow \frac{|AI|}{|CI|} = \frac{|IP_1|}{|IP_2|} = \frac{|IP_4|}{|IP_3|} \Rightarrow |IP_3| \cdot |IP_1| = |IP_2| \cdot |IP_4| \qquad (1)$$

$$\Delta Q_1AI \sim \Delta Q_2CI, \Delta Q_4AI \sim \Delta Q_3CI \Rightarrow \frac{|AI|}{|CI|} = \frac{|IQ_1|}{|IQ_2|} = \frac{|IQ_4|}{|IQ_3|} \Rightarrow |IQ_3| \cdot |IQ_1| = |IQ_2| \cdot |IQ_4| \qquad (2)$$

(1) ve (2) de bulunan eşitlikler bizden istenenin doğruluğunu göstermektedir.



(b) P_2, P_3, Q_2, Q_3 noktaları $[IC]$ 'nın, P_1, P_4, Q_1, Q_4 noktaları $[IA]$ 'nın orta dikme doğrusu üzerinde bulunurlar. Orta dikmelerin $[IC]$ve $[IA]$ nı kestiği notaları sırasıyla H_1 ve H_2 ile gösterelim.



$$\triangle IO_2O_3 \sim \triangle IO_1O4 \qquad (3)$$

ve

$$\triangle IP_2P_3 \sim \triangle IP_1P_4 \qquad (4)$$

benzerliklerini inceleyeceğiz.

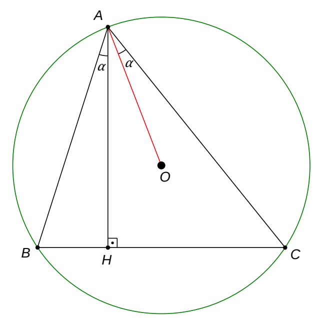
(3) benzerliği için üçgenleri çevrel çember yarıçapları sırasıyla r_1 ve r_2 olsun.Buna göre;

$$\frac{|AH_1|}{|AH_2|} = \frac{r_1}{r_2} \tag{5}$$

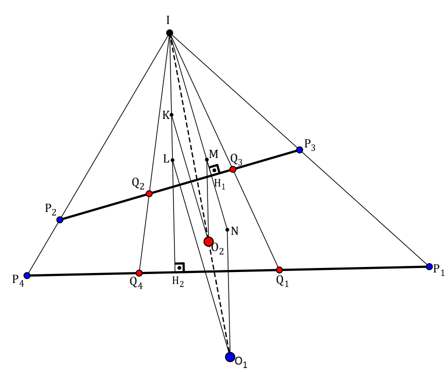
(4) benzerliği için üçgenlerin çevrel çember yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 olsun.Buna göre;

$$\frac{|AH_1|}{|AH_2|} = \frac{R_1}{R_2} \tag{6}$$

"Bir üçgende yüksekliğin izogonal eşleniği olan doğru,üçgenin çevrel merkezinden geçmektedir". Aşağıda verilen şekilde AH ile AO izogonal eşleniktir yani ; $\angle BAH = \angle CAO$



Buna göre, $\triangle IQ_2Q_3$ ve $\triangle IP_2P_3$ nin çevrel merkezleri bu üçgenlerin yüksekliği olan AH_1 in izogonal eşleniği AH_2 üzerinde bulunurlar.
Benzer şekilde, $\triangle IQ_1Q_4$ ve $\triangle IP_1P_4$ nin çevrel merkezleri de bu üçgenlerin yükseklikleri olan AH_2 nin izogonal eşlenği AH_1 üzerindedir.



$(IQ_2Q_3), (IP_2P_3), (IQ_1Q_4), (IP_1P_4)$ çemberlerinin merkezleri sırasıyla K, L, M, N olsun.
$MO_2 \perp P_1P_4, NO_1 \perp P_1P_4$ olduğundan $AH_2 \parallel MO_2 \parallel NO_1$ dir.
$LO_1 \perp P_2P_3, KO_2 \perp P_2P_3$ olduğundan $AH_1 \parallel KO_2 \parallel LO_1$ dir.
Buradan IKO_2M ile ILO_1N dörtgenlerinin birer paralelkenar olduğunu görüyoruz.
$|IK| = r_1, |IL| = R_1, |IM| = r_2, |IN| = R_2$
değerleri için (5) ve (6) eşitliklerini de göz önüne alırsak, temel benzerlik $O_1 - O_2 - I$ noktalarının doğrusallığını gerçekler.

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2013

1 $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor.

D noktasının BE doğrusuna göre simetriğinin, L, F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

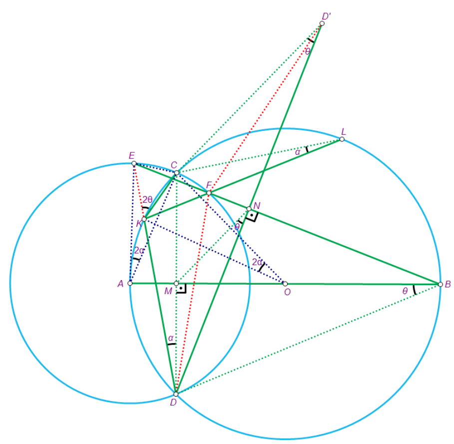
(Şahin Emrah)

Çözüm:

AB çaplı çemberin merkezi O, D nin BE ye göre simetriği D', CD nin orta noktası M, DD' ün orta noktası N olsun.

$AC = AE = r$ ve $KO = KC = R$ olsun. Sorudaki eşitlikten $CK/EC = R/r$ elde edilecektir. Bu da $\triangle EAC \sim \triangle KOC$ demektir.

$\angle EAC = \angle KOC = 2\alpha$ ise, $\angle KDC = \angle EDC = \alpha$ dolayısıyla da E, K, D noktaları doğrusal olacaktır.



$\angle EKC = 2\theta$ dersek, $\angle ECK = 90^\circ - \theta$ ve $\angle KCD = 2\theta - \alpha$, dolayısıyla da $\angle ECD = 90^\circ + \theta - \alpha = \angle EFD$ olacaktır. $\angle FND = 90^\circ$ olduğu için, $\angle FDN = \theta - \alpha$ ve $DN = ND'$ olduğu için de $\angle FD'N = \theta - \alpha$ dır.

$\angle EKC = 2\theta$ demiştik. Bu durumda $\angle CBD = 2\theta$ ve $\angle MBD = \theta$ dır.

$\angle DMB = \angle DNB = 90^\circ$ olduğu için D, M, N, B noktaları çembersel, yani $\angle MND = \angle MBD = \theta$ olacaktır.

$CM = MD$ ve $DN = ND'$ olduğu için $MN \parallel CD'$ ve $\angle CD'D = \angle MND = \theta$ dır.

$\angle FD'D = \theta - \alpha$ olduğunu göstermiştik. Bu durumda $\angle CD'F = \angle CD'D - \angle FD'D = \alpha = \angle CLK$ olduğu için C, D', L, F noktaları çemberseldir.

2 m pozitif bir tam sayı olsun.

(a) $1 + km^3$ sayısının bir tam küp olmasını ve $1 + kn^3$ sayılarının hiçbir $n < m$ pozitif tam sayısı için bir tam küp olmamasını sağlayan sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $p \equiv 2 \pmod 3$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı ve bir r pozitif tam sayısı için, $m = p^r$ ise, (a) kısmındaki koşulu sağlayan tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Şahin Emrah)

3 n hava yolu şirketinin ve 100 kentin bulunduğu bir ülkedeki kentlerden bazıları arasında karşılıklı olarak toplam 2013 uçak seferi yapılıyor. Bu seferleri kullanarak bu kentlerden herhangi birinden bir diğerine gitmek olanaklı olup, birinden diğerine doğrudan veya tek aktarma ile gidilemeyen en az iki kent bulumaktadır. Bu ülkedeki herhangi iki kent arasında tek bir şirketin uçuşlarını kullanarak gitmek mümkünse, n nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

4 $2^n + n = m!$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

$p \mid n$ olsun. $p \neq 2$ sayısı 2^n yi bölmez. O halde $m!$ i de bölmez. Buradan n nin her asal böleni p için $p > m$ elde edilir.

(i.) n nin 2 hariç en az iki asal böleni olursa p, q onlardan ikisi olsun, $n \geq pq > m^2$ elde edilir. $m! > 2^{m^2} + m^2$ olmalıdır. Ancak (m tane 2^m nin çarpımı) $2^{m^2} = 2^m.2^m \cdots 2^m > 1.2 \cdots m$ o halde buradan çelişki.

(ii.) $n = p^a.2^b$ olmalıdır. $a > 1$ ise $p > m$ den dolayı $n > m^a$ dır. $a \geq 2$ ise $n > m^2$ olur ki çelişki geleceğini az önce ispatlamıştık. O halde $a = 1$ olmalıdır. $n = p.2^b$ olur. $p \neq 2$ olduğundan $2^b \mid\mid m!$ olur. O halde m de tam olarak b tane 2 çarpanı olmalıdır. Ancak $m > 2^b$ olduğundan çelişki. $n = 2^a$ olması gerekir. $m \geq 3$ olduğundan $m!$ in çift olduğunu biliyoruz. O halde $2^{p^a} + p^a$ çift olmalı. $p = 2$ olmalı. $2^{2^a} + 2^a = m!$ olmalı. $m \geq 3$ için $3 \mid m!$ olduğundan $3 \mid 2^{2^a} + 2^a$ o halde a tek olmalı. $m \geq 5$ için $5 \mid 2^{2^a} + 2^a$ olmalı. $a = 1$ ise 5 ile bölünmez. $a \geq 2$ için $2^{2^a} \equiv 1 \pmod 5$ yani $2^a \equiv 4 \pmod 5$ olmalı. Ancak a tek olduğundan çelişki! $m = 3, 4$ olabilir. $m = 3$ için $n = 2$ sağlar.

(iii.) $n = 1$ olabilir. Buradan çözüm yoktur.

$(3, 2)$ tek köktür. İspat biter.

5 Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc)$$

olmasını sağlayan en büyük M gerçel sayısını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

Genelliği bozmadan a bu sayıların en küçüğü olsun. $b = a + u$ ve $c = a + v$ ve $u, v \geq 0$ olsun. Buradan $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc) = a(3 - M)(u^2 - uv + v^2) + u^3 - Muv^2 + v^3 \geq 0$ elde edilir. $a = b = 2, c = 1$ için $3 > \dfrac{5}{2} \geq M$ olur. Ayrıca $u^2 - uv + v^2 \geq 0$ dır. $a(3 - M)(u^2 - uv + v^2) \geq 0$ idir. $A.G.O$ dan $u^3 + v^3 = u^3 + 2 \cdot \left(\dfrac{v^3}{2}\right) \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} uv^2$ olduğundan $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} \geq M$ elde edilir. Ancak eşitlik durumu bulamadım. Yardımcı olabilecek varsa sevinirim.

6 Düzlemde yer alan ve aralarındaki uzaklıklar pozitif tam sayılar olan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarından her biri için, diğer noktaların bu noktaya olan uzaklıkları azalmayacak biçimde sıralandığında oluşan dizi hep aynı ise, n nin alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

Çözüm:

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarının ağırlık merkezi G olsun. Leibniz Teoremine göre herhangi M noktası için

$$\sum_{i=1}^{n} MP_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i<j\leq n} P_iP_j^2 + n \cdot MG^2.$$

M yerine sırasıyla $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarını koyduğumuzda $P_1G = P_2G = \cdots = P_nG$ elde ederiz.

Bu durumda, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktaları çemberseldir.

Genelliği bozmadan bu noktaların çember üzerinde saat yönünde $P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_n$ şeklinde dizildiğini kabul edelim.

Her P_i için ona en yakın iki nokta P_{i-1} ve P_{i+1} dir. ($P_0 = P_n$ ve $P_{n+1} = P_1$)

Her i için söz konusu uzunluklar dizisinin en küçük iki elemanı aynı olacağı için $P_1P_2 \ldots P_n$, kenarları $a, b, a, b, \ldots, a, b$ olan bir kirişler $n-$geni olacaktır. Bu durumda çokgenin bir dış açısı $\dfrac{2\pi}{n}$ olacaktır.

Çokgenin en küçük köşegeni Kosinüs teoreminden

$$P_{i-1}P_{i+1}^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\frac{2\pi}{n}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ nin rasyonel olması gerekmektedir.

Niven Teoremi veya buradaki sorunun çözümünden $n = 1, 2, 3, 4, 6$ olması gerekir; ama yeterli değildir.

$n = 1, 2$ için herhangi bir konfigürasyonun sorudaki durumu sağladığı açıktır.

$n = 3$ için üçgen eşkenar olmalıdır.

$n = 4$ için $P_1P_2P_3P_4$ bir dikdörtgendir. Köşegenlerin tam sayı olması için kenarlar $3-4-3-4$ gibi bir pisagor üçlüsünün en küçük iki elemanından oluşmalı.

$n = 6$ için kirişler altıgeninde $P_1P_2P_3P_4$ taban açıları 60° olan bir ikizkenar yamuk olacaktır. $P_1P_2 = a$ ve $P_2P_3 = b$ olmak üzere; $P_1P_4 = a + b$ ve $P_1P_3 = P_2P_4 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ olacaktır. Kenarları tam sayı ve bir açısı 120° olan birçok üçgen vardır. Bunlardan biri, $3-5-7$ üçgenidir. Yani $3-5-3-5-3-5$ kirişler altıgeni de istenen konfigürasyonlardan biridir.

Toparlarsak, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ dir.

Kaynak:

AoPS

Romanian Masters In Mathematics 2011/P5

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2014

1 Bir torbada üstlerine 1 den 2014 e kadar tam sayılar yazılmış 1007 siyah ve 1007 beyaz top bulunuyor. Her adımda torbadan 1 top çekerek masanın üstüne koyuyoruz ve istersek, o an masanın üstünde bulunan toplardan farklı renklerdeki herhangi ikisini seçip diğer bir torbaya koyabiliyoruz. Bunu yaparsak, bu iki topun üstlerinde yazılı olan sayıların farkının mutlak değeri kadar puan kazanıyoruz. 2014 adım sonunda en fazla kaç puan toplamayı garantileyebileceğimizi belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap $1007^2 = (2014 + \ldots + 1008) - (1 + \ldots + 1007)$ dir, daha fazla olamayacağı toplamdan dolayı açıktır (1007 adet pozitif sayı ile 1007 adet negatif sayının toplamından oluşacağından)

Topları en fazla 1007 olan beyazlar KB, en fazla 1007 olan siyahlar KS, en az 1008 olan beyazlar BB ve en az 1008 olan siyahlar BS olmak üzere dört grupta inceleyelim. KB ile BS nin, KS ile de BB nin eleman sayılarının aynı olduğu görülebilir ($|KB| = 1007 - |BB| = |BS|$). Bu grup ikililerini birbiriyle eşleyip ikisinin elemanlarını beraber çıkaracağız. Bu şekilde tüm topları çıkarabiliriz, çünkü çıkarabildiğimiz bir ikili oluşmadan en fazla 1007 top çekebiliriz, diğer 1007 hamlede ortadaki topları çıkararak tüm topları çıkarmış oluruz, istenen toplamın elde edildiği açıktır, ispat biter.

2 $x^3 = 3^y 7^z + 8$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz.

(Şahin Emrah)

Çözüm:

(L. Gökçe)

$x^3 - 8 = 3^y 7^z$ yazıp iki küp farkından $(x-2)(x^2+2x+4) = 3^y 7^z$ şeklinde çarpanlara ayıralım. a ve b gibi iki pozitif tamsayının en büyük ortak bölenini (a, b) ile gösterirsek her n tamsayısı için Euclid algoritması olarak bilinen $(a, b) = (a, b - na)$ eşitliği vardır. Buna göre $(x-2, x^2+2x+4) = (x-2, 12)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ancak $3^y 7^z$ ifadesi 2 ile bölünmeyeceğinden $(x-2, 12) \neq 2, 4, 6, 12$ dir. O halde $(x-2, 12) = 1$ veya 3 olabilir.

1. Hal: $(x-2, x^2+2x+4) = 1$ durumunu inceleyelim.

$x - 2 = 1, x^2 + 2x + 4 = 3^y 7^z$ için $x = 3$ olur fakat $3^y 7^z = 19$ denkleminin çözümü yoktur.

$x - 2 = 3^y, x^2 + 2x + 4 = 7^z$ denklemleri mod 3 te incelenirse çelişki elde edilir. Çözüm yoktur.

$x - 2 = 7^z, x^2 + 2x + 4 = 3^y$ için $(x+1)^2 = 3^y - 3$ olur. $(x+1)^2$ sayısı 3 ile bölünebilmesine rağmen 9 ile bölünemediğinden çözüm yoktur.

2. Hal: $(x-2, x^2+2x+4) = 3$ durumunu inceleyelim. Bu hal için $y \geq 2$ olmalıdır.

$x - 2 = 3, x^2 + 2x + 4 = 3^{y-1} 7^z$ için $x = 5$ olur fakat $3^{y-1} 7^z = 39$ denkleminin çözümü yoktur.

$x - 2 = 3 \cdot 7^z, x^2 + 2x + 4 = 3^{y-1}$ için $(x+1)^2 = 3^{y-1} - 3$ olur. $(x+1)^2$ sayısı 3 ile bölünebilmesine rağmen 9 ile bölünemediğinden çözüm yoktur.

İncelememiz gereken son alt durum $x - 2 = 3^{y-1}, x^2 + 2x + 4 = 3 \cdot 7^z$ dir. y çift sayı iken $x \equiv 1 \pmod 4$ ve y tek sayı iken $x \equiv 3 \pmod 4$ tür. Her iki durumda da $x^2 + 2x + 4 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $3 \cdot 7^z \equiv 3 \pmod 4$ olur. Bu ise z nin çift sayı olması demektir. $z = 2n$ diyelim. $x^2 + 2x + 4 = 3 \cdot 7^z$ denkleminde $x = 3^{y-1} + 2$ yazarsak $3^{2y-2} + 2 \cdot 3^{y-1} + 4 + 2 \cdot 3^{y-1} + 4 + 4 = 3 \cdot 7^{2n}$ olup düzenlersek $3^{2y-3} + 2 \cdot 3^{y-1} = 7^{2n} - 4$ olur. İki kare farkından $3^{y-1}(3^{y-2} + 2) = (7^n - 2)(7^n + 2)$ olur. $7^n - 2 \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan $3^{y-1} \nmid (7^n - 2)$ dir. Aralarında asallıktan dolayı $3^{y-1} \cdot k = 7^n + 2$ ve $\dfrac{3^{y-2} + 2}{k} = 7^n - 2$ olur. Taraf tarafa çıkararak 7^n terimlerini yok edersek $3^{y-2} = \dfrac{4k + 2}{3k^2 - 1}$ denkleminin yalnızca $k = 1$ için $y = 3$ şeklindeki çözümü vardır. Bu değere karşılık $n = 1$, $z = 2$, $x = 11$ elde edilir.

Denklemin tek çözümü $(x, y, z) = (11, 3, 2)$ dir.

3 D, E, F noktaları bir ABC üçgeninin sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ kenarları üstünde olmak üzere AD, BE, CF doğruları P noktasında kesişiyor ve A köşesinden geçen bir ℓ doğrusu ile $[DE$ ve $[DF$ ışınları sırasıyla, Q ve R noktalarında kesişiyor. $[DB$ ışını üstündeki bir M noktası ile $[DC$ ışını üstündeki bir N noktası için,

$$\frac{|QN|^2}{|DN|} + \frac{|RM|^2}{|DM|} = \frac{(|DQ| + |DR|)^2 - 2|RQ|^2 + 2|DM| \cdot |DN|}{|MN|}$$

eşitliği sağlanıyorsa, AD ve BC doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

4 Bir çemberin birbirine paralel olmayan iki kirişinin orta noktaları P ile Q ve bu kirişlerin uç noktalarından çembere çizilen teğet doğruların kesişim noktaları sırasıyla, A ve B dir. ABP üçgeninin diklik merkezinin AB doğrusuna göre simetriği olan R noktasından AP, BP, AQ, BQ doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, R_1, R_2, R_3, R_4 noktaları ise,

$$\frac{|AR_1|}{|PR_1|} \cdot \frac{|PR_2|}{|BR_2|} = \frac{|AR_3|}{|QR_3|} \cdot \frac{|QR_4|}{|BR_4|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

5 Hangi n pozitif tamsayıları için,

$$\{a_i + \frac{(-1)^i}{a_i} : 1 \leq i \leq n\} = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

koşulunu sağlayan birbirinden ve sıfırdan farklı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

6 Otuz altı hava alanından herhangi ikisi arasındaki karşılıklı uçuşlardan her biri beş havayolu şirketinden biri tarafından yapılacaktır. Ulaştırma Bakanlığı her hava alanına, o hava alanında aralarında aktarma yapılabilen aynı şirkete ait her uçuş ikilisi için 1 milyon lira destek vermeye karar veriyor. Bakanlığın bu uygulama için harcayacağı paranın en az ne kadar olabileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap: 3780

Öncelikle cevabın daha az olamayacağını gösterelim. Soruyu çizge cinsinden ifade edelim, köşeler şehirleri, kenarlar uçuşları, renkler şirketleri temsil etsin. Her A köşesinden çıkan i renkli kenar sayısı a_i olsun. İncelediğimiz toplam

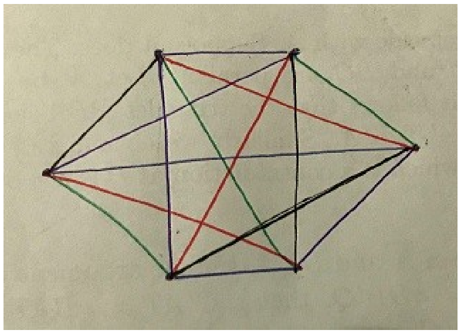
$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_3}{2} + \binom{a_4}{2} + \binom{a_5}{2} = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

Tüm köşeler için yazıp toplarsak toplam harcanan para

$\frac{1}{2}[\sum_{A \in G} a_i^2 - \sum_{A \in G} a_i] \geq \frac{1}{2}[\frac{1}{36 \cdot 5}(\sum_{A \in G} a_i)^2 - \sum_{A \in G} a_i]$

$\sum_{A \in G} a_i = \sum_{A \in G} der(A) = 36 \cdot 35 = 1260$ olduğunu göz önünde bulundurursak harcanan paranın minimum değeri 3780 çıkar.

3780 için örneği kurarken köşeleri 6 köşelik 6 gruba ayıralım. $V_{i,j}$ notasyonunda i grup numarasını, j gruptaki sırayı belirtsin. Her grubu kendi içinde resimdeki gibi boyayalım.



Mor 0, yeşil 1, mavi 2, siyah 3, kırmızı 4 olsun. $V_{a,x} - V_{b,y}$ ikilisi arasındaki kenarı şekilde $(a-b)$ kenarı ile $(x-y)$ kenarının toplamına boyayalım. ($a - a = 0$ kabul edelim.) Örneğin sağladığı biraz inceleme ile görülebilir.

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2015

1 m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

sayısı bir tam sayı ise, k nın bir tamkare olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

Çözüm:

Soruyu üç durumda inceleyelim.

$i)$ $m=n$ ise $k=m^2$ olur.

$ii)$ $m>n$ ise $m-n=x,\ m+n=y$ diyelim. $m=\dfrac{x+y}{2}$ ve $n=\dfrac{y-x}{2}$ olur.$4|(m+n)^2$ olduğundan y çifttir.Dolayısıyla x de çifttir. Yerine yazarsak,

$$k=\frac{y^2}{2(x+y)x^2+4} \Rightarrow y^2-2kx^2y-(2kx^3+4k)=0$$

olur. Diskriminantı tamkare olmalı.

$$\Delta = 4k^2x^4+8kx^3+16k=4t^2 \Rightarrow t^2=k^2x^4+2kx^3+4k$$

olur. $k\geq 1$ ve $x\geq 2$ olduğunu biliyoruz buradan,

$$(kx^2+x+1)^2 > k^2x^4+2kx^3+4k > (kx^2+x-1)^2$$

bulunur. $k^2x^4+2kx^3+4k=(kx^2+x)^2$ olmalı buradan $k=(\dfrac{x}{2})^2$ bulunur.

$iii)$ $m<n$ ise $n-m=x,\ m+n=y$ diyelim.Aynı şekilde x ve y'yi çift bulabiliriz. Yerine yazar ve düzenlersek,

$$y^2-2kx^2y+2kx^3-4k=0 \Rightarrow \Delta = 4k^2x^4-8kx^3+16k=4t^2 \Rightarrow t^2=k^2x^4-2kx^3+4k$$

olur.

$$(kx^2-x+1)^2 > k^2x^4-2kx^3+4k > (kx^2-x-1)^2 \Rightarrow k^2x^4-2kx^3+4k=(kx^2-x)^2 \Rightarrow k=(\frac{x}{2})^2$$

bulunur. Yani k her zaman tamkaredir.

2 x, y ve z herhangi ikisinin toplamı 1 den farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}+\frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2}+\frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2} \geq 2(x+y+z)-\frac{3}{4}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik durumunu sağlayan tüm (x,y,z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

Çözüm:

(Matematik Fatihi:)

$\dfrac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2} \geq^? x+y-\dfrac{1}{4}$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Bunu gösterelim. İfadeyi açıp düzenlersek $x^3+y^3+xy(xy+1) \geq^? 3xy(x+y) - \dfrac{(x+y)^2}{4} + x + y - \dfrac{1}{4} - 2(x+y)^2 + \dfrac{x+y}{2} \to xy(xy+1) + \dfrac{1}{4} + \dfrac{(x+y)^2}{4} + 2(x+y)^2 \geq^? 3xy(x+y) + x + y + \dfrac{x+y}{2}$ olur. $x+y=a, xy=b$ diyelim. $(a+\dfrac{1}{2})^2 + (\dfrac{3b}{2})^2 \geq^? 2(a+\dfrac{1}{2})(\dfrac{3b}{2})$ olur ki bu zaten tüm a, b gerçel sayıları için $(a-b)^2 \geq^? 0 \to a^2+b^2 \geq 2ab$ olduğundan doğrudur. İspat biter. Eşitlik ise $2xy+1 = 3(x+y), 2yz+1 = 3(y+z), 2zx+1 = 3(z+x)$ için $x=y=z=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ ve $x=y=z=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$ için sağlanır.

3 $n \geq 4$ olmak üzere düzlemde n nokta veriliyor. Tüm nokta ikilileri doğru parçalarıyla birleştirildikten sonra hiçbir doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarının sayısı en çok kaç olabilir?

(Melih Üçer)

4 2015 tablonun gösterildiği bir sergide her katılımcı bir tablo ikilisi seçip tahtaya yazıyor. Sonra Sahte Sanatçı (S.S.) tahtada yazılı ikililerden bazılarını seçip, bu ikililerin her birinde tablolardan herhangi birini daha güzel olarak işaretliyor. Daha sonra sanatçının yardımcısı (S.Y.) her adımında tahtadaki henüz kıyaslanmamış bir (A, C) tablo ikilisini, bir B tablosu için tahtada A, B den daha güzel ve B, C den daha güzel olarak belirtilmişse, A, C den daha güzel olarak işaretliyor. S.S., tahtaya hangi ikililer yazılmış olursa olsun en fazla k ikiliyi kıyaslayarak S.Y. nin sonlu adım sonucunda tahtadaki tüm ikilileri kıyaslanmasını sağlayabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Not: S.Y, henüz kıyaslanmamış bir (A_1, A_n) tablo ikilisini, $A_2, A_3 \cdots, A_{n-1}$ tabloları için A_1, A_2 den daha güzel; A_2, A_3 ten daha güzel; ... ; A_{n-1}, A_n den daha güzel olarak belirtilmişse, A_1, A_n den daha güzel olarak işaretleyebiliyor.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Cevap 2014 (genel durum için $n-1$). Cevabın daha az olamayacağına örnek olarak $(1, i)$ ikililerinin yazılı olduğu duruma bakabiliriz.

Çözüm için n tabloyu köşe olarak alan bir graf çizelim, Bir 1 köşesi alıp kenarlarından birini kırmızıya boyayalım, ulaştığımız köşeye 2 diyelim. Şimdi 2 den daha önce ulaşmadığımız bir köşeye giden bir kenar seçelim, bu kenarı kırmızıya boyayıp ulaştığımız kenara 3 diyelim. Eğer bir i köşesine vardığımızda komşularının hepsi daha önce ulaşılmış köşeler ise $i-1$ köşesinin komşularına bakalım, orada da yeni köşe yoksa yine bir önceki numaralı köşeye bakalım, yeni köşe bulana kadar böyle devam edelim.

n köşenin hepsine ulaştığımızda eğer grafımız bağlantılı ise $n-1$ kenar boyamış olacağız (eğer graf bağlantılı değilse orman oluşur, her ormanda köşe sayısının bir eksiği kadar kenar boyanır, dolayısıyla $n-1$ den az olur.) Boyalı (i, j) kenarını i den j ye yönlendirelim, bu $i > j$ demek olsun. Bundan sonra boyalı olmayan kenarların da yönünün belirli olduğunu görelim.

Bir $(k, l), k < l$ kenarı için kenar boyamamızda k ye l den önce ulaşılmıştır, dolayısıyla bu kenar var olduğundan grafta da $k, k+1, \ldots, l-1$ den herhangi biri l ye kırmızı kenarla bağlıdır. Bu da $k > l$ olduğunun belirli olması için yeterlidir, ispat biter.

5 En büyük iç açısı D olan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BC ve AD doğruları E, AB ve CD doğruları ise F noktasında kesişiyorlar. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde $\angle EPD = \angle FPD = \angle BAD$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $ABCD$ nin çevrel çemberinin merkezi O olmak üzere, FO doğrusu AD, EP, BC doğrularını sırasıyla X, Q, Y noktalarında kesiyor. $\angle DQX = \angle CQY$ ise $\angle AEB = 90°$ olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

6 n ile aralarında asal olan her a pozitif tam sayısı için $2n^2 \mid a^n - 1$ olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Melih Üçer)

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2017

1 25 çeşit yemeğiyle ünlü bir A köyünde yapılacak bir düğün için 2017 kişinin yaşadığı komşu B köyünden düğüne bazı kişiler davet edilecektir. B köyündeki her bir kişi bu 25 çeşit yemekten en az birini sevmektedir ve her yemek için B köyünde o yemeği seven en az bir kişi bulunmaktadır. B köyünden düğüne davet edilen kişilerin kümesine, her bir yemek davet edilen en az bir kişi tarafından seviliyorsa, *uygun davetli listesi* diyelim. Her uygun davetli listesinden en az bir eleman içeren bir kümeye ise *kamber grubu* diyelim. Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamber grubu olmayan herhangi bir kamber grubundaki herkesin sevdiği bir yemek bulunduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

Çözüm:

Söz konusu grup $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ olsun.

İddia 1: Buradan sadece A_1 i içeren bir uygun davetli listesi vardır.

Aksini varsayalım. O zaman A_1 i içeren her uygun davetli listesinde bu kamber grubundan başka bir eleman daha bulunur. Öyleyse $\{A_2, \ldots, A_k\}$ de bir kamber grubudur, çelişki.

Bu davetli listesi $\{A_1, B_1, \ldots, B_l\}$ olsun.

İddia 2: Bu davetli listesinden sadece A_1 in sevdiği en az bir yemek vardır.

Aksini varsayalım. O zaman A_1 in sevdiği her yemek için bu yemeği seven bir B_i bulunur. Bu durumda $\{B_1, \ldots, B_l\}$ uygun davetli listesidir, ama kamber grubunda bu listeden eleman yok, çelişki.

Bu yemekler $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ olsun.

İddia 3: Bu yemeklerden öyle biri vardır ki, verilen kamber grubu dışındakilerden o yemeği seven yoktur.

Aksini varsayalım. Her Y_i yemeği için bu yemeği seven bir C_i vardır (bunlar aynı kişi olabilir), o zaman C_i lerin birleşimi ile B_j leri içeren davetli listesi uygundur, ama kamber grubunda bu listeden eleman yok, çelişki.

Bu yemeklerden biri Y olsun.

İddia 4: A_i lerin tümü Y yi sever.

Aksini varsayalım, A_i Y yi sevmiyor olsun. Kamber grubundan sadece A_i yi içeren uygun davetli listesi $\{A_i, D_1, \ldots, D_n\}$ ye bakalım. D_i lerden hiçbiri Y yi sevmez, A_i de Y yi sevmediğinden bu davetli listesi uygun değildir, çelişki.

İddianın soruyu bitirdiği açıktır.

2 Karşılıklı kenarları paralel olmayan bir $ABCD$ dörtgeninde AB ile CD doğruları X de kesişiyor. A merkezli r_1 yarıçaplı çember ile D merkezli r_2 yarıçaplı çember P ve Q da, B merkezli r_1 yarıçaplı çember ile C merkezli r_2 yarıçaplı çember R ve S de kesişiyor.

$$|XA| \cdot |XB| + {r_1}^2 = |XC| \cdot |XD| + {r_2}^2$$

ise, P, Q, R, S noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

Çözüm:

Genelliği bozmadan B ve D, X e yakın olan köşeler olsun. A, B, D merkezli çemberlerin kuvvet merkezi T olsun. T den AB ye inilen dik ayağı U, CD ye inilen dik ayağı V olsun.

$|TA|^2 - r_1^2 = |TB|^2 - r_1^2 \Rightarrow |TA| = |TB| \Rightarrow |UA| = |UB|$

$|XB| \cdot |XA| = (|XU| - |UB|) \cdot (|XU| + |UA|) = |XU|^2 - |UA|^2 = |TX|^2 - |TA|^2$

Diğer yandan $|TA|^2 - r_1^2 = |TD|^2 - r_2^2$

Birleştirip yerine yazarsak,

$|TX|^2 - |TD|^2 = |XC| \cdot |XD|$

Diğer yandan $|TX|^2 - |TD|^2 = |XV|^2 - |VC|^2 = (|XV| - |VC|) \cdot (|XV| + |VC|) = (|XV| - |VC|) \cdot |XC|$

Birleştirirsek $|VD| = |VC| \Rightarrow |TC| = |TD|$

Dolayısıyla T A,B,C,D merkezli çemberlerin kuvvet merkezidir. PQ A ve C merkezli, RS B ve D merkezli çemberlerin kuvvet ekseni olduğundan T den geçer ve $|TR| \cdot |TS| = |TP| \cdot |TQ|$ T nin bu çemberlere göre kuvvetine eşittir.

Dolayısıyla $PQRS$ çemberseldir, **q.e.d**

3 n pozitif bir tam sayı olmak üzere $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ pozitif gerçel sayıları her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ koşulunu sağlıyor. $c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

(Serhat Doğan)

Çözüm:

n üzerinden tümevarım yapalım.

$n = 1, 2$ için ifadenin 1 e eşit olduğu kolayca görülür.

$n = k - 1$ için doğru olsun, $n = k$ için doğruluğunu gösterelim.

$d_i = a_{1i} + \ldots + a_{(k-1)i}$ olsun.

$1 \leq i \leq k-1$ için $\frac{1}{c_i} = \frac{1}{d_i + a_{ki}} = \frac{a_{ik}}{d_i \cdot a_{ik} + 1}$

$e_i = \frac{1}{d_i}$ tanımlayıp yerine yazarsak $1 \leq i \leq k-1$ için

$\frac{1}{c_i} = \frac{a_{ik} \cdot e_i}{a_{ik} + e_i}$ ve $\frac{1}{c_k} = \frac{1}{a_{ik} + \ldots + a_{(k-1)k} + 1}$ olmak üzere

$\frac{a_{1k} \cdot e_1}{a_{1k} + e_1} + \ldots + \frac{a_{(k-1)k} \cdot e_{k-1}}{a_{(k-1)k} + e_{k-1}} + \frac{1}{a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k} + 1} \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da

$\frac{a_{1k} \cdot e_1}{a_{1k} + e_1} + \ldots + \frac{a_{(k-1)k} \cdot e_{k-1}}{a_{(k-1)k} + e_{k-1}} \leq \frac{a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}}{a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k} + 1}$ olmasına denktir.

<u>Lemma:</u> $\frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 \cdot b_2}{a_2 + b_2} \leq \frac{(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)}{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)}$

Lemmayı ispatlamak için ifadeyi açıp düzenlersek $2a_1a_2b_1b_2 \leq (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2$ elde ederiz ki doğrudur.

Lemmayı tekrarlı bir şekilde kullanırsak

$\frac{a_{1k} \cdot e_1}{a_{1k} + e_1} + \ldots + \frac{a_{(k-1)k} \cdot e_{k-1}}{a_{(k-1)k} + e_{k-1}} \leq \frac{(a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}) \cdot (e_1 + \ldots + e_{k-1})}{(a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}) + (e_1 + \ldots + e_{k-1})}$ elde ederiz.

Son olarak $\frac{(a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}) \cdot (e_1 + \ldots + e_{k-1})}{(a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}) + (e_1 + \ldots + e_{k-1})} \leq \frac{a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k}}{a_{1k} + \ldots + a_{(k-1)k} + 1}$ olduğunu gösterelim.

Taraf tarafa çarpıp düzenlersek, ifade $e_1 + \ldots e_{k-1} \leq 1$ olmasına denktir ki tümevarım varsayımından doğrudur, **q.e.d**

4 $d(a)$ ile a pozitif tam sayısının farklı asal bölenlerinin sayısını gösterelim. Her n pozitif tam sayısı için $k - m = n$ ve $d(k) - d(m) = 1$ şartlarını sağlayan k, m pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

(Şahin Emrah)

Çözüm:

i) n tek ise, $m = n$ ve $k = 2n$ için şartın sağlanacağı açıktır.

ii) n çift ise, n'nin en büyük asal böleni p olsun.

iia) Her $q < p$ asal sayısı için $q|n$ ise p'den büyük en küçük asal sayı r olsun. $p < r < 2p$'dir.(Bertrand Postulatı) Dolayısıyla $r-1$ sayısının tüm asal bölenleri p'den küçüktür veya eşittir ve n'yi böler.$k = n \cdot r$ ve $m = n \cdot (r-1)$ seçersek, $d(k) = d(n)+1$ ve $d(m) = d(n)$ bulunur yani şart sağlanır.

iib) En az bir $q < p$ asal sayısı için $q \nmid n$ ise, n'yi bölmeyen en küçük asal r olsun, $r < p$'dir. $r-1$'in tüm asal bölenleri n'yi böler.Eğer $k = n \cdot r$ ve $m = n \cdot (r-1)$ seçersek, $d(k) = d(n)+1$ ve $d(m) = d(n)$ bulunur yani şart sağlanır.

$\boxed{5}$ Azalmayan bir $x_0, x_1, \cdots, x_{2017}$ pozitif tam sayı dizisinde $x_0 = 1$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ altdizisi tam olarak 25 farklı pozitif tam sayı içeriyor.

$$\sum_{i=2}^{2017} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq 623$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliği sağlayan dizilerin sayısını bulunuz.

(Serhat Doğan)

Çözüm:

İfadenin minimum değerini almasını sağlayan diziye bakalım.

<u>İddia 1:</u> Bu dizi için sözü geçen alt dizideki 25 pozitif tam sayı $1, 2, \ldots, 25$ tir.

Aksini varsayalım. Sayılar $a_1, \ldots, a_{25}$ olsun.

$a_1 > 1$ ise $x_1, x_2, \ldots x_{2017}$ yerine $(x_1 - 1), (x_2 - 1), \ldots, (x_{2017} - 1)$ yazarsak $x_i \cdot (x_i - x_{i-2})$ teriminde x_i azalır, $(x_i - x_{i-2})$ ise azalır veya sabit kalır, $(x_i - x_{i-2}) \neq 0$ olan en az bir i olduğundan ifadeye daha küçük bir değer aldıran bir dizi elde ederiz, çelişki.

$a_i > a_{i-1} + 1$ olan en küçük i ye bakalım. Benzer şekilde $a_i, \ldots, a_{25}$ e eşit olan sayıları bir eksikleriyle değiştirirsek ifadeye daha küçük bir değer aldıran bir dizi elde ederiz, çelişki.

<u>Gözlem:</u> Bir sayı dizide ikiden fazla geçiyorsa fazlalıkları atabiliriz.

$a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{i+k} = m$ olsun.

$a_{i+2} \cdot (a_{i+2} - a_i) = \ldots = a_{i+k} \cdot (a_{i+k} - a_{k-2}) = 0$,

$a_{i+k+1} \cdot (a_{i+k+1} - a_{i+k-1}) = a_{i+k+1} \cdot (a_{i+k+1} - a_i)$ ve

$a_{i+k+2} \cdot (a_{i+k+2} - a_{i+k}) = a_{i+k+2} \cdot (a_{i+k+2} - a_{i+1})$ olduğundan diziden $a_{i+2}, \ldots, a_{i+k}$ yi çıkardığımızda ifade değişmez. (dizi hala şartları sağlar)

Bu da demektir ki elimizde kalan $y_0, \ldots, y_n$ dizisi $1, 2, \ldots, 25$ sayılarının bir veya iki kere geçtiği bir dizidir.

<u>İddia 2:</u> 25 sayısı dizide tam bir kere geçer, yani sadece y_n terimi 25 e eşittir.

Aksini varsayalım. Son dört terim $y_{n-3}, 24, 25, 25$ olsun. Bu dizinin yerine $y_{n-3}, 24, 25$ ile biten diziye bakarsak ifade 25 azalır, yani ifadeye daha küçük bir değer aldıran bir dizi elde ederiz, çelişki.

<u>İddia 3:</u> $1, 2, \ldots, 24$ sayıları dizide iki kez geçer.

Aksini varsayalım. Dizide iki kez geçmeyen ilk sayı a olsun. Dizinin a yı içeren kesiti $a-1, a-1, a, a+1$ olmak üzere bunun yerine $a-1, a-1, a, a, a+1$ i içeren diziye bakarsak ifadeden $(a+1) \cdot ((a+1) - (a-1)) = 2a+2$ çıkarıp $a \cdot (a - (a-1)) + (a+1) \cdot ((a+1) - a) = 2a + 1$ eklemiş oluruz, yani ifadeye daha küçük bir değer aldıran bir dizi elde ederiz, çelişki.

Dolayısıyla dizimiz $1, 1, 2, 2, \ldots, 24, 24, 25$ olur ve toplam $2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 24 + 24 + 25 = 623$ olur.

$x_0, x_1, \ldots, x_{2017}$ dizisi ise $1, 2, \ldots, 24$ sayılarını en az iki kere içeren, 25 sayısını tam bir kere içeren herhangi bir dizidir. Bu dizilerin sayısı ise b sayısının dizide geçme sayısı $u_b \geq 2$ ve $v_b = u_b - 2 \geq 0$ olmak üzere $v_1 + \ldots + v_{24} = 2017 - 2 \cdot 24 = 1969$ denkleminin çözüm sayısıdır, bu da bilindik bir şekilde $\binom{1992}{23}$ olur.

6 Her biri 2017 br uzunluğunda olan sonlu sayıda çubuk bir levhanın üzerinde dikey olarak çakılı halde bulunuyor. Bu çubukların her birinin üzerinde serbestçe kaydırılabilen bir boncuk bulunuyor. Bazı boncuk ikilileri lastik parçalarıyla birbirlerine birleştirilmiştir. Bu düzenekte ayrıca, tüm lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Genç Karınca ve sadece uçlarındaki boncukların yükseklikleri arasında 1 br fark bulunan lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Yaşlı Karınca bulunuyor. Genç Karınca lastikleri kullanarak her boncuktan her boncuğa ulaşabiliyor.

Her boncuğun yerden yüksekliğinin tam sayı olduğu ve her lastik parçasının uçlarındaki boncukların farklı yükseklikte bulunduğu durumlara *geçerli durum* diyelim. Bu düzenekte en az bir geçerli durum varsa Yaşlı Karıncanın her boncuktan her boncuğa ulaşabildiği en az bir geçerli durum olduğunu gösteriniz.

(Azer Kerimov)

Çözüm:

Soruyu çizge teorisi kavramların kullanarak yeniden formüle edelim: Bir çizgenin her bir köşesi $0, 1, \ldots, 2017$ renklerinden birine, her kenarın uçlarındaki köşeler farklı renkte olacak şekilde boyanmış ise bu boyamaya *düzgün boyama* diyelim. Bir düzgün boyamada, x köşesinin rengi $f(x)$ ile gösterilmek üzere, herhangi a ve b köşeleri için, her $i = 1, \ldots, n-1$ için $|f(x_i) - f(x_{i+1})| = 1$ olacak şekilde $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ yolu bulunuyorsa bu boyamaya *süper düzgün boyama* diyelim. Soruda bizden göstermemiz istenen şu soruya denktir:

Bağlantılı bir G çizgesinin düzgün boyaması varsa, süper düzgün boyaması da vardır.

G düzgün boyanmış bir çizge olsun. G'nin süper düzgün boyamaya sahip en büyük alt çizgesi G_1 olsun. Biz $G_1 = G$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. Bir H çizgesinin köşeler kümesi $V(H)$, kenarlar kümesi $E(H)$ ile gösterilsin.

$$\min_{(x,y)\in E(G), x\in V(G_1), y\in V(G-G_1)} (|f(x) - f(y)|) = |f(x_0) - f(y_0)|$$

olsun. Tanımlara göre $|f(x_0) - f(y_0)| > 1$ 'dir. Ilk önce, $f(x_0) > f(y_0)$ kabul edelim. $G - G_1$ çizgesinde $f(y_0)$ renkli köşeleri $f(x_0) - 1$ rengine ve $f(x_0) - 1$ renkli köşeleri $f(y_0)$ rengine boyayalım. Bu yeniden boyama işleminden sonra elde edilen boyamanın da düzgün olacağını gösterelim: $G - G_1$ alt çizgesinde $f(x_0) - 1$ ve $f(y_0)$ renkleri yer değiştirmiştir ve sonuç olarak herhangi iki komşu köşe farklı renklerde olacaktır. Ayrıca, $|f(x_0) - f(y_0)|$ ifadesinin minimum olmasından dolayı yeniden boyamadan sonra $f(x) \neq f(y)$ koşulu tüm $x \in G_1$ ve $y \in G - G_1$ köşeleri için sağlanacaktır. $f(x_0) < f(y_0)$ simetrik durumunda da $G - G_1$ alt çizgesinde $f(y_0)$ renkli köşeleri $f(x_0) + 1$ rengine ve $f(x_0) + 1$ renkli köşeleri $f(y_0)$ rengine boyarsak benzer şekilde düzgün bir boyama elde edeceğiz. G_1 çizgesine y_0 köşesinin ve y_0 ile G_1 arasındaki tüm kenarların eklenmesiyle oluşan çizge G_2 olsun. Bu yeni boyama G_2 için bir süper düzgün boyamadır ve G_2 alt çizgesi G_1 alt çizgesini kapsamaktadır, çelişki. O halde $G_1 = G'$ dir ve bu da G 'nin bir süper düzgün boyamaya sahip olduğunu gösterir.

Kaynak: Tübitak Çözüm Kitapçığı

26. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2018

1 $x^2 + y^2 + x + y = xy(x+y) - \dfrac{10}{27}$

$|xy| \le \dfrac{25}{9}$

koşullarını sağlayan tüm (x, y) gerçel sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm:

$x + y = a$ ve $xy = b$ diyelim. Verilen bilgiler

$$a^2 - 2b + a = ab - \frac{10}{27} \implies b = (a-1) + \frac{64}{27(a+2)}$$

$$-\frac{25}{9} \le b \le \frac{25}{9}$$

olacaktır ($a = -2$ iken çözüm olmadığı kontrol edilebilir). Ayrıca $(x+y)^2 \ge 4|xy|$ olduğundan

$$\frac{a^2}{4} \ge b \ge -\frac{a^2}{4}$$

olacaktır. İki eşitsizliği birleştirirsek

$$\min\left\{\frac{25}{9}, \frac{a^2}{4}\right\} \ge b = a - 1 + \frac{64}{27(a+2)} \ge -\min\left\{\frac{25}{9}, \frac{a^2}{4}\right\}$$

Eğer $a \ge \dfrac{10}{3}$ veya $a \le -\dfrac{10}{3}$ ise $\dfrac{25}{9} \le \dfrac{a^2}{4}$ olacaktır.

$$\frac{25}{9} \ge a - 1 + \frac{64}{27(a+2)} \ge -\frac{25}{9} \implies 75(a+2) \ge 27a^2 + 27a + 10 \ge -75(a+2)$$

$$0 \ge (9a+14)(3a-10) \quad \text{ve} \quad \frac{(9a+17)^2}{3} + \frac{191}{3} \ge 0$$

$a > \dfrac{10}{3}$ veya $a \le -\dfrac{10}{3}$ ise $0 < (9a+14)(3a-10)$ olacaktır. Dolayısıyla $a = \dfrac{10}{3}$ olacaktır. Yerine yazarsak $b = \dfrac{25}{9}$ çıkar. x ve y için çözersek $(x, y) = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ bulunur.

Eğer $-\dfrac{10}{3} < a < \dfrac{10}{3}$ ise $\dfrac{25}{9} > \dfrac{a^2}{4}$ olacaktır.

$$\frac{a^2}{4} \ge a - 1 + \frac{64}{27(a+2)} \ge -\frac{a^2}{4} \implies 27a^2(a+2) \ge 108(a-1)(a+2) + 256 \ge -27a^2(a+2)$$

$$\implies 0 \le (3a+2)^2(3a-10) \quad \text{ve} \quad 27a^3 + 162a^2 + 108a + 40 \ge 0$$

$-\dfrac{10}{3} < a < \dfrac{10}{3}$ olduğundan $a \ne -\dfrac{2}{3}$ ise $0 > (3a+2)^2(3a-10)$ olacaktır. Dolayısıyla $a = -\dfrac{2}{3}$ olmalıdır. Bu değer için $27a^3 + 162a^2 + 108a + 40 \ge 0$ sağlanır. Yerine yazarsak $b = \dfrac{1}{9}$ elde edilir. x ve y için çözersek $(x, y) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ çözümünü buluruz.

Tüm çözümler $(x, y) = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right), \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$'dir.

2 Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB kenarlarını sırasıyla D, E, F noktalarında kesiyor. $[BE$ ışını üzerinde bir Q noktası $E \in [BQ]$ ve $m(\widehat{EDQ}) = m(\widehat{BDF})$ olacak şekilde alınıyor. $BE \perp AD$ ve $|DQ| = 2|BD|$ ise $m(\widehat{FDE}) = 60°$ olduğunu gösteriniz.

3 $a_1, a_2, \ldots$ dizisi her n pozitif tam sayısı için $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} = n^{10}$ şartını sağlıyor. c herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n > 1$ pozitif tam sayısı için
$\dfrac{c^{a_n} - c^{a_{n-1}}}{n}$ oranının tam sayı olduğunu gösteriniz.

4 Bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay BC kenarına teğet olan dış teğet çemberi $D \in [AE]$ olacak şekilde D ve E noktalarında kesiyor. $\dfrac{|AD|}{|AE|} \leq \dfrac{|BC|^2}{|DE|^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

BC kenarına ait dış teğet çemberin AC, BC, AB ye değme noktaları sırasıyla L, R, K olsun. Çemberin merkezi M olsun. $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{DAB}) = \theta, m(\widehat{LCM}) = m(\widehat{MCB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{MBK}) = \beta$ olsun. Çemberin yarıçapı r olsun. $MK \perp AK$ olduğundan $|AM| = \frac{r}{\sin\theta}$ dır. $|DM| = r$ olduğundan $|AD| = \frac{r}{\sin\theta} - r$ dir. Benzer şekilde $|AE| = \frac{r}{\sin\theta} + r$ dir. $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{\frac{r}{\sin\theta} - r}{\frac{r}{\sin\theta} + r} = \frac{1-\sin\theta}{\sin\theta+1}$ elde edilir. $MR \perp BC$ olduğundan $|BC| = r \cdot (\cot\alpha + \cot\beta)$ dır. $|DE| = 2r$ olduğundan $\frac{|BC|^2}{|DE|^2} = (\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{2})^2$ dir. $\oplus \in \{\leq, \geq\}$ olsun. Eşitsizliğin işareti yön değiştirmeyecek şekilde işlemler yapmak üzere, $(\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{2})^2 \oplus \frac{1-\sin\theta}{\sin\theta+1}$ ifadesini sağlayan $\oplus$'un $\geq$ olduğunu ispatlayacağız. $\alpha + \beta - \theta = 90°$ olduğu açıktır. $\theta = \alpha + \beta - 90°$ yazılır ve düzenlemeler yapıldığında ($\sin(\alpha - 90) = -\cos\alpha$ olduğundan) $(\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{2})^2 \oplus \frac{\cos(\alpha+\beta)+1}{1-\cos(\alpha+\beta)}$ elde edilir. $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ olduğundan $\cos(\alpha+\beta) = x$ olmak üzere ifade $\frac{1-x^2}{(2\sin\alpha\sin\beta)^2} \oplus \frac{x+1}{1-x}$ olur. Buda düzenlenirse $(1-x)^2 \oplus (2\sin\alpha\sin\beta)^2$ elde edilir. Her iki ifadesinde içi pozitif olduğundan eğer bu eşitsizlik sağlanıyorsa $1 - \cos(\alpha+\beta) \oplus 2\sin\alpha\sin\beta$ eşitsizliğide sağlanır. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ olduğundan ifade $1 \oplus \cos(\alpha-\beta)$ ya dönüşür. $\oplus = \geq$ olduğu açıktır. İspat biter.

5 a_1, a_2, a_3, a_4 pozitif tam sayıları bir çember etrafına yan yana olanlar aralarında asal olacak şekilde dizilemiyor. $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ olmak üzere en çok kaç (i, j, k) sıralı üçlüsü $(\text{ebob}(a_i, a_j))^2 \mid a_k$ şartını sağlar?

6 Başlangıçta masanın üzerinde birbirinden farklı 2018 kutu bulunuyor. İlk aşamada Yazan ve Bozan, ilk hamleyi Yazan yapmak üzere, sırayla 2016 şar hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen tahtada yazılı olmayan bir kutu ikilisi seçip tahtaya yazıyor. İkinci aşamada Bozan tahtadaki ikilileri 1 den 4032 ye kadar istediği gibi numaralandırıyor ve k numaralı ikilideki kutulara k şer top koyuyor. Bozan, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir mi?

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2019

1 a, b, c pozitif gerçel sayıları

$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{bc}-1)(\sqrt{ca}-1)=1$$

şartını sağlıyor.

$$a-\frac{b}{c},\ a-\frac{c}{b},\ b-\frac{c}{a},\ b-\frac{a}{c},\ c-\frac{a}{b},\ c-\frac{b}{a}$$

sayılarının en çok kaçı 1 den büyük olabilir?

2 Her n pozitif tam sayısı için $d(n)$ ile n nin pozitif bölenlerinin sayısını gösterelim. k verilmiş bir tek sayı olmak üzere,

$$\text{obeb}(k, d(a_1)d(a_2)\cdots d(a_{2019}))=1$$

olmasını sağlayan bir $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ artan aritmetik pozitif tam sayı dizisi bulunduğunu gösteriniz.

3 2019 öğrencinin bulunduğu bir okuldaki öğrenci kulüplerine sadece öğrenciler üye olabilmektedir. Her öğrenci kulübünün, kendi üyeleri arasından seçilmiş 12 kişilik bir yönetim kurulu vardır. Bir kulüp toplantısı ancak katılımcıların hepsi kulübün üyeleriyse ve kulübün yönetim kurulunun hepsi katılımcılar arasındaysa gerçekleşebilir. Bu okulda, eleman sayısı en az 12 olan her öğrenci kümesinin, tam olarak bir öğrenci kulübünün toplantılarını gerçekleştirebildiği biliniyor. Buna göre, tam olarak 27 üyesi olan öğrenci kulüplerinin sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

4 $|AB|=|AC|$ şartını sağlayan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde uç noktalardan farklı bir M noktası alınıyor. BM nin AC yi kestiği nokta E, BMC açısının iç açıortayının BC yi kestiği nokta F olmak üzere $m(\widehat{AFB})=m(\widehat{CFE})$ eşitliği sağlanıyor. ABC nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

$|AE|=m$, $|AB|=x$, $|BH|=y$, $m(\widehat{ABM})=\theta$, $m(\widehat{EFC})=\beta$, $m(\widehat{ABC})=\alpha$ ve $m(\widehat{HFD})=\phi$ olsun.

$[MF$ ışını çemberi ikinci kez D noktasında kessin. AD çizilirse BC ye dik olmalıdır çünkü $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{DAC})$ olur. Bu nedenle $AD \perp BC$ bulunur. $AD \cap BC=\{H\}$ olacak şekilde H noktamızı alalım. Bu bilgilerle şekildeki açıları yazalım.

$m(\widehat{MBC})=m(\widehat{CAM})=\alpha-\theta$, $m(\widehat{FAC})=\beta-\alpha$,$m(\widehat{AFM})=180-\beta-\phi$

ve $m(\widehat{AMD})=90$ olur.

$EFC \sim AFB$ olduğu kolayca görülebilir.

$\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{EC}{AB}=\dfrac{x-m}{x}$

$FC=x.k$ olsun. $BC=(x-m).k+xk=2y$ buradan $k=\dfrac{2y}{2x-m}$ bulunur.

$FC=2y.\dfrac{x-m}{2x-m}$

$HF=\dfrac{my}{2x-m}$ bulunur.

Pisagor teoreminden $AH=\sqrt{x^2-y^2}$ bulunur. Çemberde kuvvet teoreminden

$$AH.HD=BH.HC$$

olacağından $HD=\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$AMCF$ dörtgeninde köeşegenlere göre trigonometrik seva teoremi yazalım.

$$\frac{\sin(90-\alpha)}{\sin 90}.\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}.\frac{\sin(180-\beta-\phi)}{\sin(\phi)}.\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=1$$

olduğunu elde ederiz. (1)

BEA üçgeninde sinüs teoreminden

$\dfrac{m}{\sin\theta} = \dfrac{BE}{\sin 2\alpha}$ elde edilir. Bunu (1) de yerine koyalım.

$$\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\theta}.\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}.\frac{\sin(\beta+\phi)}{\sin(\phi)} = 2$$

$$\frac{BE}{m}.\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}.\frac{sin(\beta+\phi)}{\sin\phi} = 2$$

(2) elde edilir.

BEC üçgeninde sinüs teoreminden $\dfrac{(x-m)}{\sin(\alpha-\theta)} = \dfrac{BE}{\sin\alpha}$ buradan

$\dfrac{(x-m).\sin\alpha}{BE} = \sin(\alpha-\theta)$

AFC üçgeninde sinüs teoreminden

$\dfrac{\dfrac{2.y.(x-m)}{2x-m}}{\sin(\beta-\theta)} = \dfrac{AF}{\sin\alpha}$ buradan

$\dfrac{2y.(x-m).\sin\alpha}{(2x-m).AF} = \sin(\beta-\theta)$

Bulduklarımızı (2) de yerine koyalım.

$\dfrac{BE}{m}.\dfrac{\dfrac{(x-m).\sin\alpha}{BE}}{\dfrac{2.y.(x-m).\sin\alpha}{(2x-m).AF}}.\dfrac{\sin(\beta+\phi)}{\sin\phi} = 2$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $\dfrac{(2x-m).AF.sin(\beta+\phi)}{2my.\sin\phi} = 2$ elde edilir. (3)

AHF dik üçgeninden $\cos\beta = \dfrac{\dfrac{my}{2x-m}}{AF}$ elde edilir. (3) te yerine koyarsak

$\dfrac{2\sin\phi\cos\beta}{\sin(\beta+\phi)} = \dfrac{1}{2}$ Buradan

$4.\sin\phi\cos\beta = \sin(\phi+\beta) = \sin\phi.\cos\beta + \sin\beta.\cos\phi$ Buradan da

$3\cos\beta\sin\phi = \sin\beta\cos\phi$ buradan da $tan\beta = 3\tan\phi$ (4) bulunur.

DHF üçgeni yardımıyla $\tan\phi = \dfrac{\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{\dfrac{my}{2x-m}}$ yani $\tan\phi = \dfrac{y^2.(2x-m)}{\sqrt{x^2-y^2}.my}$

ADF üçgeninden $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\dfrac{my}{2x-m}} = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}.(2x-m)}{my}$ bu iki eşitliği (4) te yerine koyalım.

$\dfrac{3y^2.(2x-m)}{\sqrt{x^2-y^2}.my} = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}.(2x-m)}{my}$ sadeleştirmeler yapılırsa

$\dfrac{3y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} = \sqrt{x^2-y^2}$ elde edilir. Buradan

$3y^2 = x^2 - y^2$ ve $4y^2 = x^2$ bulunur. Buradan $2y = x$ olacağı açıktır. $BC = 2y$ olduğundan $AB = AC = x$ olduğundan dolayı $AB = AC = BC = 2y$ elde edilir. İspat biter.

Çözüm 2:

Açıların eşitliğinden $\triangle ABF \sim \triangle ECF$ olduğu görülebilir. Buradan $\dfrac{|BF|}{|FC|} = \dfrac{|BA|}{|CE|}$ elde edilir.

Öte yandan, iç açıortay teoreminden $\dfrac{|BF|}{|FC|} = \dfrac{|BM|}{|CM|}$ dir.

Yukarıdaki iki eşitlikten $\dfrac{|BA|}{|CE|} = \dfrac{|BM|}{|CM|} \Longrightarrow \dfrac{|BA|}{|BM|} = \dfrac{|CE|}{|CM|}$ elde edilir.

Çemberde açıdan $\angle ABM = \angle ACM = \angle ECM$ olduğundan, kenar-açı-kenar benzerliği gereği $\triangle BAM \sim \triangle CEM$ elde edilir. Dolayısıyla $\angle BMA = \angle CME$ dir.

Buradan $\angle BCA = \angle BMA = \angle CME = \angle CMB = \angle CAB$ elde edilir ki bu, $\triangle ABC$ nin üçüncü açısının da eşit olan diğer iki açıya eşit olduğunu gösterir. Yani $\triangle ABC$ eşkenardır. ■

5 $f : \{1, 2, \ldots, 2019\} \to \{-1, 1\}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ için öyle bir $\ell \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ vardır ki,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}:\ (\ell-i)(i-k)\geq 0} f(i) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}:\ 1\leq i\leq 2019} f(i)$$

toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

6 Bir $n > 2$ tam sayısı ve bir a tam sayısı verildiğinde $n \mid a^d - 1$ ve $n \nmid a^{d-1} + \cdots + a + 1$ şartlarını sağlayan bir d pozitif tam sayısı bulunuyorsa, *a tam sayısı n-ayırandır* diyelim. Bir $n > 2$ tam sayısı verildiğinde, $0 < a < n$ ve obeb$(a, n) = 1$ olup n-ayıran olmayan a tam sayılarının sayısına *n nin kusuru* diyelim. Kusuru en küçük mümkün değere eşit olan tüm $n > 2$ tam sayılarını bulunuz.

28. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2020

1 $n>1$ bir tam sayı olmak üzere, $\{1,2,\dots,n^2\}$ kümesinin k elemanlı her alt kümesinde $x^2 \mid y$ olacak şekilde x ve y elemanları bulunuyorsa, k nin alabilecegi en küçük değeri bulunuz.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde diklik merkezinden farklı bir P noktası alınıyor. A dan BP ve CP ye indirilen dikme ayakları sırasıyla D ve E, P den AB ve AC ye indirilen dikme ayakları sırasıyla F ve G dir. $[AP]$ doğru parçasının orta noktası X olmak üzere, DFX ve EGX üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası BC üzerinde yer alıyorsa, $AP \perp BC$ veya $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

Bahsi geçen çemberlerin $\triangle ABP$ ve$\triangle APC$ ücgenlerinin dokuz nokta çemberleri olduğu söylenebilir. $[BP]$ ve $[PC]$ nin orta noktaları sırasıyla T ve R olsun. $[AB]$ ve $[AC]$ nin orta noktaları sırasıyla Y ve Z olsun. Bahsi geçen çemberlerin (YTX) ve (XRZ) olduğu açıktır. Bu iki çemberin ikinci kesişim noktası H olsun. $\angle XHT + \angle TYX = 180^\circ$ olur. Simetrik şekilde $\angle XZR + \angle XHR = 180^\circ$ olur. Basit açı taşımayla $\angle THR = \angle TPR$ elde edilir. $\angle TLR = \angle TPR$ oldugundan H noktası $\triangle BPC$'nin dokuz nokta çemberi üzerindedir. Eğer bu nokta sorunun bize koştuğu "$[BC]$ üzerinde olma" şartını sağlıyorsa, ya $[BC]$'nin orta noktası yada P'den BC ye inilen dikme ayağı olur. ikinci durum ilk koşulu gosterir. ilk durumda ise $\angle ABP = \alpha$ olsun. $\angle PBC = \beta$ olsun. $\angle RHC = \beta$ olacağından ve $\angle ZLC = \alpha + \beta$ olacağından (orta tabanlıktan) $\angle ZLR = \alpha$ olur. Bu yüzden $\angle ZXR = \angle PCA = \alpha$ olur. İkinci koşul sağlanır. İspat biter.

Çözüm 2:

(DFX) ve (EGX) çevrel çemberlerinin kesişimine Q diyelim. Q noktası aslında diklik merkezi sisteminde olmayan A, B, C ve P noktaları için Poncelet noktasıdır. Q Poncelet noktasından ABC ve BPC üçgenlerinin dokuz nokta çemberleri de geçer. Dolayısıyla Q ya noktası BC kenarının orta noktasıdır ya da P 'den inilen dikmedir. Bu aşamadan sonra ilk çözüm takip edilebilir.

3 x, y, z pozitif gerçel saylar olmak üzere,

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \overbrace{\leq}^{Cauchy} \left(\sqrt{x+y}\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\sqrt{z}\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$$

olduğundan

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \leq \sqrt{x+y}\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\sqrt{z}\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)}+\sqrt{\frac{z}{x}}$$

elde edilir. Bunu problemde yerine koyalım

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)} + \sqrt{\frac{z}{x}} - \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)}$$
$$= \sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \sqrt{\frac{z}{x}}$$

Artık bu ifade üzerinde uğraşabiliriz. Yine Cauchy kullanaraktan

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \overbrace{\geq}^{Cauchy} \left(\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{z}}+\sqrt{y}\sqrt{\frac{1}{y}}+\sqrt{z}\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$$

olduğundan

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq \sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{z}}+\sqrt{y}\sqrt{\frac{1}{y}}+\sqrt{z}\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{z}}+1$$

elde ederiz. Bunu uğraştığımız ifade de yerine koyduğumuz anda

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \sqrt{\frac{z}{x}} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}+1 \overbrace{\geq}^{AGO} 2\sqrt{2}+1$$

ispatı bitiririz.

$\boxed{4}$ p bir asal sayı olmak üzere,

$$\frac{28^p-1}{2p^2+2p+1}$$

bir tam sayı ise, $2p^2+2p+1$ 'in pozitif tam bölen sayısın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm:

Öncelikle $2p^2+2p+1>1$ olduğunu görelim. Dolayısıyla $2p^2+2p+1$'in asal böleni vardır. Bir tane asal böleni alalım ve bu q olsun. O halde

$$28^p \equiv 1 \pmod q$$

olacaktır. q ve 28 aralarında asal olmalıdır çünkü aksi takdirde 1 kalanını bulamayız. 28'in q modundaki mertebesi d olsun. Dolayısıyla $d|p$ ve $d|q-1$ olacaktır. Yani $d=1$ veya $d=p$'dir. Eğer $d=1$ ise $q|27$ olacağından $q=3$ olmalıdır. Ancak

$$2p^2+2p+1 \equiv 0 \pmod 3 \implies (2p+1)^2 \equiv 2 \pmod 3$$

olur ki bu da imkansızdır. Dolayısıyla $d=p$ olmalıdır, yani $p|q-1$'dir. Buradan $q=pk+1$ formatında bulunur. Yukarıda $q=3$ olamayacağını gördüğümüzden dolayı $k\neq 1$'dir, ayrıca $k\leq 1$ olamaz. Dolayısıyla $k\geq 2$'dir. Ayrıca $q|2p^2+2p+1$ olduğundan $qm=(pk+1)m=2p^2+2p+1$ olacak şekilde bir $m\in\mathbb{Z}^+$ vardır. p modunda incelersek $m\equiv 1 \pmod p$ elde edilir. Dolayısıyla $m=pt+1$ olacak şekilde bir $t\geq 0$ tamsayısı vardır. Eğer $t\geq 1$ ise

$$qm=(pk+1)(pt+1)\geq(2p+1)(p+1)=2p^2+3p+1>2p^2+2p+1$$

olacaktır. Dolayısıyla $t=0$'dır. Buradan da $m=1$ ve $q=2p^2+2p+1$ elde edilir. Yani $2p^2+2p+1$ asal olmalıdır ve pozitif tam bölen sayısı sadece 2 olabilir. Buna örnek vermeliyiz. $p=7$ için $2p^2+2p+1=113$ ve

$$\frac{28^7-1}{2\cdot 7^2+2\cdot 7+1}=119406447$$

olur.

5 Her x gerçel sayısı için $\lfloor P(x) \rfloor = a_{\lfloor x^2 \rfloor}$ olacak şekilde bir $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin bulunmasını sağlayan tüm gerçel katsayılı P polinomlarını bulunuz.

Not: x bir gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x \rfloor$ ile x den büyük olmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.

6 Bir çember üzerindeki 2021 noktadan her biri $1, 2, \ldots, k$ renklerinden birine boyanmıştır. Her nokta ve her $1 \leq r \leq k$ rengi için bu noktayı içeren ve üzerindeki noktaların en az yarısının r renginde olduğu bir yay bulunuyor. Buna göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

29. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2021

1 Başlangıçta masadaki iki kutudan biri boş olup, diğerinde farklı renkli 29 bilye bulunmaktadır. Dolu kutuyla başlamak ve kutulara sırayla hamle yapmak üzere her hamlede sırası gelen kutudan bir veya birkaç bilye seçilip diğer kutuya aktarılıyor. Aynı bilye öbeği bir defadan fazla seçilmeden en çok kaç hamle yapılabilir?

2 Derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinomun en az d adet katsayısı 1'e eşit olup d adet gerçel kökü varsa d nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Not: Polinomun kökleri birbirinden farklı olmak zorunda değildir.)

Çözüm:

$d = 1, 2$ için bu şekilde bir polinom kolaylıkla bulabiliriz. Örneğin, $P(x) = x - 1$ ve $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

$d \geq 3$ için bu şartı sağlayan polinomları inceleyelim. Toplam $d+1$ tane katsayı olduğundan en fazla bir tane katsayı 1'den farklı olabilir.

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ve köklerine $x_1, x_2, \ldots, x_d$ diyelim.

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_d^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{d-1}x_d)$$

$$\implies \frac{a_{d-1}^2}{a_d^2} - \frac{2a_{d-2}}{a_d} \geq 0$$

olduğundan a_d, a_{d-1}, a_{d-2}'den biri 1'den farklı olmalıdır. Yani $a_{d-3}, a_{d-4}, \ldots, a_0$ katsayılarının hepsi 1 olmalıdır. $a_0 \neq 0$ olduğundan kökler 0'dan farklıdır. $i = 1, 2, \ldots, d$ için kökleri $\frac{1}{x_i}$ olan bir polinom yazalım.

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0\left(\frac{1}{x}\right)^d + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\left(\frac{1}{x}\right)^1 + a_d$$

olacağından $Q(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d$ polinomunun kökleri $\frac{1}{x_i}$'lerdir. Bu polinom da soruda verilen şartları sağladığından benzer şekilde a_0, a_1, a_2'den biri 1'den farklı, kalan terimler 1 olmalıdır. Eğer $d \geq 5$ olursa polinomda 1'den farklı en az 2 katsayı olması gerekir. Dolayısıyla $d \leq 4$'dür.

Sadece $d = 4$'e örnek vermek yeterlidir. Yukarıdaki çözümden sadece x^2'nin katsayısının farklı olması gerektiğini söyleyebiliriz.

$$P(x) = x^4 + x^3 + Ax^2 + x + 1$$

şeklindeki polinomlarda birkaç deneme yaparsak $A = -4$ için polinomun 4 tane kökü vardır. Dolayısıyla d'nin alabileceği en büyük değer 4'dür.

3 Γ çemberi ABC üçgeninin BC kenarına X noktasında, AC kenarına ise Y noktasında teğettir. AB kenarı üzerindeki bir P noktası için XP ve YP nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla K ve L, AK ve BL nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla R ve S olsun. XR ve YS nin AB üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

4 Dar açılı bir ABC üçgeninde $D \in [AC]$ ve $E \in [AB]$ olmak üzere $[BD]$ ve $[CE]$ açıortaylardır. D den BC ve BA ya indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q, E den CA ve CB ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. AP ile CQ nun kesişimi X, AS ile BR nin kesişimi Y, BX ile CY nin kesişimi Z olmak üzere $AZ \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Eğer $AP \cap CQ \in BD$ olursa BX yükseklik olur. Simetrik şekilde CY de yükseklik olur. Ve bu iki doğru diklik merkezinde kesişeceğinden $AZ \perp BC$ olur. İspat biter. İlk durumu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için seva teoreminin tersini kullanalım. $\frac{|AQ|}{|QB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|DC|}{|AD|} = 1$ ise ispat biter. $\triangle BQT \cong \triangle BPT$ olduğundan $|BQ| = |BP|$ ve $|QT| = |PT|$ dir. İlk eşitlikten dolayı seva ifademiz olan $\frac{|AQ|}{|QB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|DC|}{|AD|} = 1$, $\frac{|AQ|}{|PC|} \cdot \frac{|DC|}{|AD|} = 1$'e dönüşür. $\triangle AQT \sim \triangle ADB$ olduğundan $\frac{|AQ|}{|AD|} = \frac{|QT|}{|BD|}$ dir. $\triangle CPT \sim \triangle CDB$ olduğundan $\frac{|TP|}{|BD|} = \frac{|PC|}{|DC|}$dir. Demin dediğimiz gibi $|QT| = |PT|$ olduğundan $\frac{|AQ|}{|AD|} = \frac{|PC|}{|DC|}$ olur. ispat biter.

5 a, b, c, d pozitif tam sayıları için

$\{a \cdot b^n + c \cdot d^n \ : \ n = 1, 2, 3, ...\}$

kümesinin en az bir elemanını bölen asal sayılar sonlu çoklukta ise $b = d$ olduğunu gösteriniz.

6 2021 öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak k arkadaşı olup üçü de birbiriyle arkadaş olan üç öğrenci bulunmuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

30. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2022

1 Bir ABC üçgeninde BC kenarının orta noktası M, A ya ait iç açıortayın BC ile kesişimi K ve ABC nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi L olsun. $[BC]$ çaplı çember A köşesine ait dış açıortaya teğet ise KLM nin çevrel çemberine de teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

$AC < AB$ kabul edelim.

A köşesine ait dış açıortay ile BC doğrusu N de kesişsin.

BC çaplı çember, soruda verildiği gibi, AN ye T de teğet olsun. $MT = BM = MC$ ve $\angle MTN = 90^\circ$ olacaktır.

AL açıortay olduğu için $BL = LC$ ve $LM \perp BC$ olacaktır.

Bu durumda (KLM) çemberinin merkezi KL nin orta noktasıdır. Bu nokta O olsun.

$MKSL$ dikdörtgenini kuralım. S, (KLM) çemberi üzerinde ve M, O, S doğrusal olacaktır.

($MS = MC = BM$ olsaydı, OS doğru parçası (KLM) nin yarıçapı, MS de BC çaplı çemberin yarıçapı ve M, O, S doğrusal olduğu için bu iki çember S noktasında teğet olacaktı. Bizden istenen de bu. Yani $KL = MS = \dfrac{BC}{2}$ olduğunu göstermemiz gerekiyor.)

AK iç açıortayı ile AN dış açıortayı dik kesişeceği için $\angle KAN = 90^\circ$, dolayısıyla $AK \parallel TM$. Benzerliği yazarsak

$$\frac{AK}{TM} = \frac{KN}{MN} \Longrightarrow AK = \frac{TM \cdot KN}{MN} = \frac{\frac{BC}{2} \cdot KN}{MN} = \frac{BC \cdot KN}{2 \cdot MN} \tag{1}$$

İç ve dış açırtay teoremlerinden

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CN}{NB} = \frac{CN}{CN + KB + CK} \Longrightarrow \frac{CK}{BK - KC} = \frac{CN}{BK + CK}$$
$$\Longrightarrow CN = \frac{CK(BK + CK)}{BK - KC} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} KN = CN + CK &= \frac{CK(BK + CK)}{BK - KC} + CK \\ &= CK\left(\frac{BK + CK}{BK - CK} + 1\right) = \frac{2 \cdot BK \cdot CK}{BK - CK} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} MN = CN + CM &= \frac{CK(BK + CK)}{BK - KC} + \frac{BK + CK}{2} \\ = (BK + CK)\left(\frac{CK}{BK - KC} + \frac{1}{2}\right) &= (BK + CK)\left(\frac{BK + CK}{2(BK - KC)}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

(3) ve (4) ü oranlarsak

$$\frac{KN}{MN} = \frac{4 \cdot BK \cdot CK}{BC^2} \tag{5}$$

elde ederiz. Bu değeri (1) de yerine yazarsak

$$AK = \frac{2 \cdot BK \cdot CK}{BC} \Longrightarrow AK \cdot \frac{BC}{2} = BK \cdot CK \tag{6}$$

bulunur. K noktasının (ABC) çemberine göre kuvvetinden $AK \cdot KL = BK \cdot CK$ olduğu için $KL = \dfrac{BC}{2}$ elde edilir.

$KL = MS = \dfrac{BC}{2}$ olduğu için hem M merkezli çember, hem de O merkezli çember S den geçiyor demektir. M, O, S noktaları da doğrusal olduğu için bu iki çember birbirlerine S noktasında teğet olacaktır.

Çözüm 2:

Dış açıortayın $[BC]$ çaplı çembere teğet olduğu nokta T olmak üzere, iç ve dış açıortay arasındaki açı $90°$ olması ve merkezden-teğet dikliğinden $MT||AL$'dir. $MT \cap AC = R$ olmak üzere deminki paralellik ve basit açı taşımayla $\triangle BKL \sim \triangle RCM$ elde edilir. Eğer soruda bizden istediği durum doğru olsaydı, KLM dik üçgen olduğundan bu üçgenin çevrel çapı $|KL|$, $[BC]$ çaplı çemberin çevrel yarıçapı kadar olurdu ve $|MC| = |KL|$ elde edilirdi. Yani deminki benzerlikte benzerlik oranının 1 olduğunu ispatlarsak soru biter. $|KL| = x, |BK| = y, |KL| = z$ olsun. Benzerlik oranı k olmak üzere $|RC| = xk, |RM| = yk, |CM| = zk$ olur. T, BC çaplı çemberin üzerinde olduğundan $|TR| = zk - yk$ elde edilir. Benzer şekilde $|KM| = zk - y$'dir. $\triangle RCM \sim \triangle ACK$ benzerliğinden $\frac{xk}{|AR|} = \frac{zk}{zk-y}$ ve $|AR| = \frac{x(zk-y)}{z}$ elde edilir. $\triangle BLM \sim \triangle RAT$ benzerliğinden $\frac{|AR|}{x} = \frac{z-y}{z}$ elde edilir. Demin bulduğumuz değeri yerine koyup düzenlersek $zk - y = z - y$ ve $k = 1$ bulunur. İspat biter.

2 k, n pozitif tam sayılar olmak üzere $k \geq n!$ ise

$\phi(k) \geq (n-1)!$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$k = 1$ için sadece $n = 1$ durumunu incelememiz yeterlidir. $\phi(1) = 1 \geq 0!$ olduğundan iddia doğrudur. Genel olarak $n = 1$ için de iddia her zaman doğrudur.

$n, k \geq 2$ için $k = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ diyelim. $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m} \geq n!$ için

$$\phi(k) = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \cdots p_m^{a_m-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1) = \frac{k(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}{p_1 p_2 \cdots p_m} \geq \frac{n!(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}{p_1 p_2 \cdots p_m}$$

olacaktır. Genelliği bozmadan $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ olduğunu kabul edelim. $x > 0$ için $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ artan bir fonksiyondur. $p_i \geq i + 1$ olduğundan

$$\frac{p_i - 1}{p_i} \geq \frac{i}{i+1}$$

olacaktır. Buradan

$$\phi(k) \geq \frac{n!(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}{p_1 p_2 \cdots p_m} \geq \frac{n! \cdot 1 \cdot 2 \cdots m}{2 \cdot 3 \cdots (m+1)} = \frac{n!}{m+1}$$

olacaktır. Eğer $n - 1 \geq m$ olursa

$$\phi(k) \geq \frac{n!}{m+1} \geq \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

elde edilir.

Eğer $m \geq n$ ise $k \geq p_1 p_2 \cdots p_m$ ve $p_i \geq i + 1$ olduğundan

$$\phi(k) = \frac{k(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}{p_1 p_2 \cdots p_m} \geq (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1) \geq 1 \cdot 2 \cdots m \geq n! \geq (n-1)!$$

elde edilir.

Dolayısıyla $k \geq n!$ ise $\phi(k) \geq (n-1)!$ olacaktır.

3 $a_1, a_2, ..., a_{2022}$ negatif olmayan gerçel sayıları $a_1 + a_2 + ... + a_{2022} = 1$ eşitliğini sağlıyor. En çok kaç (i, j) sıralı ikilisi için

$a_i^2 + a_j \geq \frac{1}{2021}$

olur?

4 Hangi a gerçel sayıları için

$$\frac{x^3+a}{y+z} = \frac{y^3+a}{x+z} = \frac{z^3+a}{x+y} = -3$$

olmasını sağlayan farklı x, y, z gerçel sayıları bulunur?

Çözüm:

$x+y+z = A$ sayısını sabitleyelim, $t = x, y, z$ için

$$\frac{t^3+a}{A-t} = -3 \implies t^3 - 3t + 3A + a = 0$$

bulunur. Bu üçüncü dereceden denklemin en fazla 3 kökü vardır ve bu 3 kökü x, y, z olmalıdır. Yani

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - 3t + 3A + a$$

olmalıdır. Vieta'dan $x+y+z = A = 0$ olmak zorundadır. Aksi takdirde çelişki elde ederiz. Yani x, y, z sayıları, $P(t) = t^3 - 3t + a$ polinomunun farklı kökleridir.

$$P'(t) = 3t^2 - 3 \implies P'(t) = 0 \text{ denkleminin kökleri } \pm 1$$

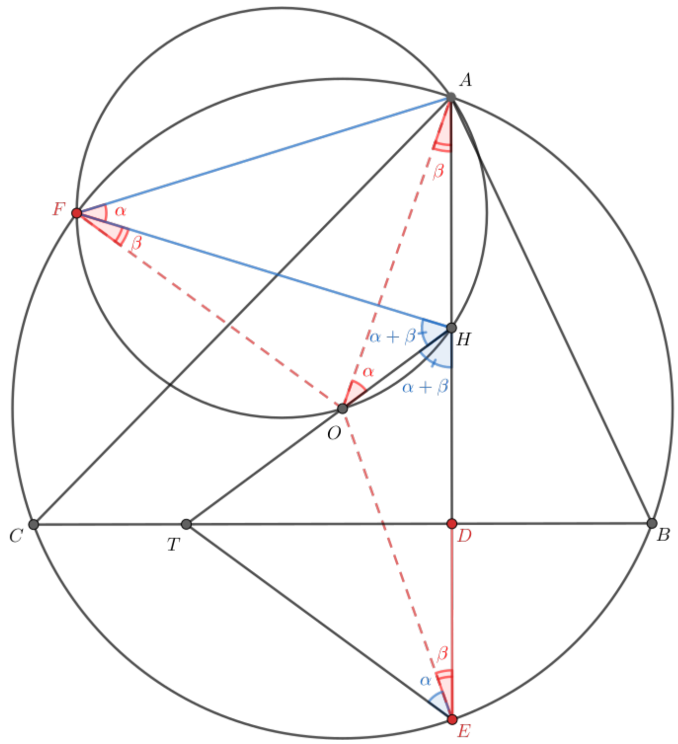
$P(1) = a-2$ ve $P(-1) = a+2$'dir. Polinomun 3 tane kökü olması için lokal maksimum/minimum noktalarında katlı kök olmamalı ve bu noktalardaki görüntüleri zıt işaretli olmalıdır. $P(1) < P(-1)$ olduğundan $a+2 > 0$ ve $a-2 < 0$ olmalıdır. Yani $a \in (-2, 2)$'dir. İfadelerin tanımlı olması için $x+y$, $y+z$, $x+z$ değerleri 0'dan farklı olmalıdır. $x+y+z = 0$ olduğundan x, y, z değerleri de 0'dan farklı olmalıdır. Dolayısıyla $a \neq 0$ olmalıdır. Buradan $a \in (-2, 2) - \{0\}$ elde edilir.

5 ABC üçgeninde $90 > \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ dir. Diklik merkezi H ve çevrel çember merkezi O olmak üzere HO ile BC doğrularının kesişimi T, AHO üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ise X olsun. H noktasının TX doğrusuna göre yansımasının ABC nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

AH; BC yi D de, (ABC) çemberini E de kessin.

(AHO) çemberi ile (ABC) çemberi F de kesişsin.



Bilinen bir özellik olan $HD = DE$ eşitliğini, $\angle CBE = \angle CAH = \angle HBC$ ile gösterebiliriz.

Bu durumda $TH = TE$ olacaktır.

$\angle AOH = \alpha$ ve $\angle OAH = \beta$ olsun.

$\angle AFH = \angle AOH = \alpha$ ve $\angle HFO = \angle OAH = \angle OEA = \beta$ olacaktır.

$OA = OF$ olduğu için $\angle OFA = \angle OAF = \alpha + \beta$.

$OFOH$ kirişler dörtgeninde $\angle FHO = \angle OAF = \angle OFA = \angle OHE = \alpha + \beta$ olacaktır.

OH iki üçgende de ortak olduğu için $\triangle FHO \cong \triangle EHO \quad (AA)$ elde edilir. Bu da $FH = HE$ demektir.

(KAK) eşliğinden $\triangle FHT \cong \triangle EHT$ olacaktır. Dolayısıyla $TF = TE = TH$ olur.

Son durumda $XFTH$ dörtgeni simetri ekseni TX olan bir deltoiddir. Yani H nin TX e göre yansıması F dir ve F noktası (ABC) çemberi üzerindedir.

$\boxed{6}$ 2022 öğrencinin bulunduğu bir okulda tatil boyunca her gün ya müze gezisi ya da doğa gezisi düzenleniyor. Hiçbir öğrenci aynı tür geziye ikinci kez katılmıyor ve tüm gezilere farklı sayıda öğrenci katılıyor. İki geziye beraber katılan iki öğrenci bulunmadığına göre, toplam gezi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2023

1 Sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı için

$$\frac{n^2+m^2}{m^4+n}=k$$

olacak şekilde m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm 1:

Sonsuz sayıda k olduğunu göstermek için bir tane format bulmamız yeterlidir. $p \equiv 3 \pmod 4$ olan herhangi bir asal için $k = p^2$'nin çözüm vermediğini gösterirsek soru biter. Çözüm olduğunu varsayalım.

$(m,n) = d$ olsun. $m = ud$ ve $n = vd$ olacak şekilde aralarında asal (u,v) pozitif tamsayı çifti vardır.

$$\frac{d(u^2+v^2)}{d^3u^4+v}=p^2$$

olacaktır. $p \mid d(u^2+v^2)$ olduğundan $p \mid d$ veya $p \mid u^2+v^2$ olmalıdır ancak u ve v aralarında asal olduğundan, en az bir tanesi de p ile de aralarında asaldır ve ikinci durumdan

$$u^2+v^2 \equiv 0 \pmod p \implies (uv^{-1})^2 \equiv -1 \pmod p$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir çünkü -1; p modunda karekalan değildir. Dolayısıyla $p \mid d$ olmalıdır. Hatta $p^2 \mid d$ olacaktır.

$(d,v) = c$ olsun. $d = cx$ ve $v = cy$ olacak şekilde aralarında asal (x,y) pozitif tamsayı çifti vardır.

$$\frac{x(u^2+c^2y^2)}{c^2x^3u^4+y}=p^2$$

$(c^2x^3u^4+y, x) = 1$ ve $p^2 \mid x$ olduğundan $x = p^2$'dir. Buradan

$$y(c^2y-1) = u^2(c^2p^6u^2-1)$$

elde edilir. $(y,u^2) = 1$ olması gerektiğinden $u^2 \mid c^2y-1$ olacaktır ve $y = \frac{u^2t+1}{c^2}$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı vardır ($t = 0$ durumunda $y = c = 1$ olacaktır ve yerine koyulursa çözüm gelmez).

$$u^2t^2+t+c^2 = c^4p^6u^2$$

elde edilir. $c^2p^3 \geq t+1$ olması gerektiğinden

$$u^2t^2+t+c^2 = c^4p^6u^2 \geq (t+1)^2u^2$$

$$\implies t+c^2 \geq (2t+1)u^2 \geq 2t+1 \implies c^2 \geq t+1$$

elde edilir. Görülebildiği üzere c^2 için elde edilen alt sınır büyümektedir.

$k \geq 0$ için $c^2 \geq p^k(t+1)$ gibi bir alt sınır için

$$u^2t^2+t+c^2 = c^4p^6u^2 \geq p^{6+2k}(t+1)^2u^2 \implies c^2 \geq \left[p^{6+2k}(t+1)^2-t^2\right]u^2-t \geq p^{6+2k}(t+1)^2-t^2-t$$

$$\geq p^{6+2k}(t+1)^2-(t+1)^2 > \left[p^{6+2k}-1\right](t+1)$$

$p^{6+2k}-1 > p^{k+1}$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla c^2 için $p^{k+1}(t+1)$ alt sınırını elde ederiz. Bunu sonsuza kadar götürebileceğimizden dolayı böyle bir c yoktur, çözüm gelmez.

Dolayısıyla $p \equiv 3 \pmod 4$ asalı için $k = p^2$ alınırsa hiçbir çözüm olmayacaktır.

Çözüm 2:

Bu soruya yukarıdaki çözümü yaptığımda $k = p^2$ seçmemin nedeni $p \nmid u^2 + v^2$ olmasını sağlamak ve ilerideki kısımlarda u^2'nin katsayılarını kıyaslayabilmekti. Başka formattaki k'lar için farklı çözümler geleceğini düşünmüştüm ama karşılaştığım her çözümde farklı sebeplerle $k = p^2$ seçilmiş. Örneğin, yüzde yüz emin olmamakla beraber 3^{2a} şeklindeki sayılar için de çözüm gelmeyeceğini düşünüyorum. $k = p^2$ durumuna getirilmiş farklı çözümlerden birisini daha ekleyelim.

Çözüm 2: $p \equiv 3 \pmod 4$ için $k = p^2$ için çözüm olmayacağını göstereceğiz.

$$m^2 + n^2 = p^2(m^4 + n) \implies p \mid m^2 + n^2$$

olacaktır. $p \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $p \mid m, n$ olmalıdır. $m = xp$ ve $n = yp$ yazarsak,

$$x^2 + y^2 = p^4x^4 + py \implies p \mid x^2 + y^2 \implies p \mid x, y$$

olur. $x = ap$, $y = bp$ yazarsak,

$$a^2 + b^2 = p^6a^4 + b \implies a^2 - b = (p^3a^2 - b)(p^3a^2 + b)$$

elde edilir. Eğer $a^2 = b$ ise

$$p^3a^2 - b > a^2 - b$$

olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $a^2 \neq b$ ve

$$|a^2 - b| = |p^3a^2 - b|(p^3a^2 + b) > |p^3a^2 - b|(a^2 + b) > |p^3a^2 - b| \cdot |a^2 - b|$$

$$\implies 1 > |p^3a^2 - b| \implies p^3a^2 - b = 0$$

elde edilir ancak eşitlikte yerine yazılırsa $a^2 - b = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $k = p^2$ için çözüm yoktur.

Kaynak: Tübitak Lise 2. Aşama Resmi Çözümler 2023

$\boxed{2}$ Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. BPC üçgeninin çevrel çemberine P noktasında içten teğet olan ω_A ve dıştan teğet olan Γ_A çemberleri, ABC üçgeninin çevrel çemberine de sırasıyla A_1 ve A_2 noktalarında içten teğettir. B_1, B_2 ve C_1, C_2 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. O noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezi olmak üzere, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ve OP doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

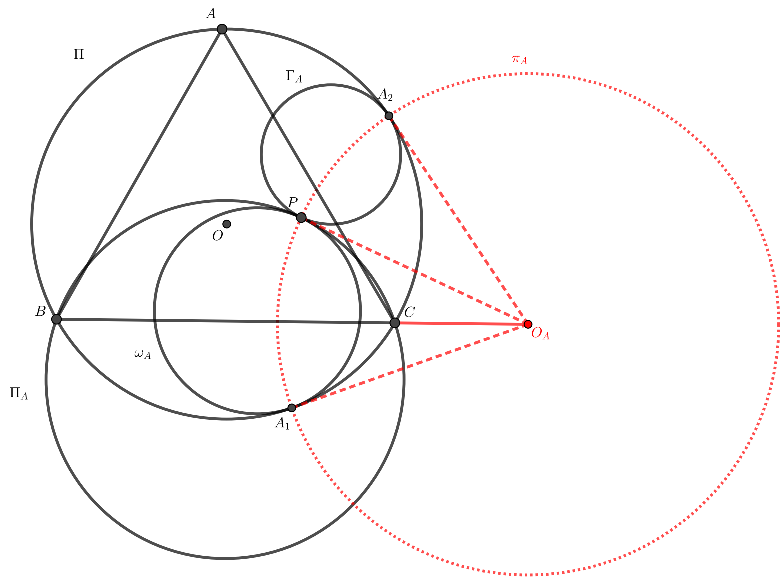
Çözüm:

$\Pi = (ABC)$, $\Pi_A = (BPC)$ ve Π nin yarıçapı R olsun.

Üç çemberin ikişerli ikişerli kuvvet eksenleri tek bir noktada kesişir.

Yani ω_A ile Γ_A kuvvet ekseni, ω_A ile Π nin kuvvet ekseni, Γ_A ile Π nin kuvvet ekseni tek bir noktada kesişir. Bu nokta O_A olsun.

$O_AP = O_AA_1 = O_AA_2$. $(O_A, |O_AP|) = \pi_A$ olsun.



Π_A nın O_AP teğeti ile Π nin O_AA_2 teğeti eşit olduğu için O_A bu iki çemberin kuvvet ekseni üzerindedir (Yani $O_A \in BC$).

Bu durumda

$$OO_A^2 - R^2 = O_AP^2 \tag{1}$$

olur.

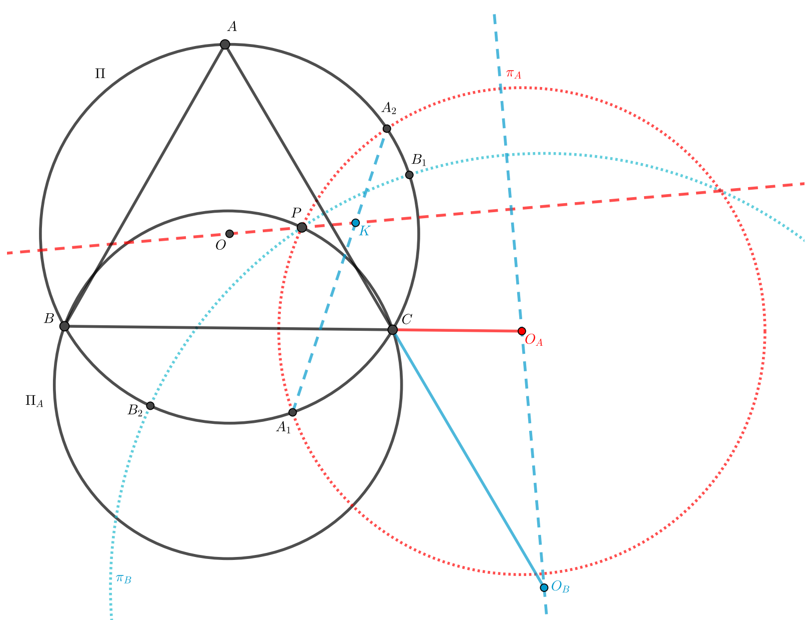
Şimdi de $\Pi_B = (APC)$ için benzer işlemleri yapıp O_B yi ve π_B yi tanımlayalım.

$$OO_B^2 - R^2 = O_BP^2 \tag{2}$$

π_A ile π_B nin kuvvet ekseni P den geçen ve O_AO_B ye dik doğrudur. $(1) - (2)$ den

$$OO_A^2 - OO_B^2 = O_AP^2 - O_BP^2 \tag{3}$$

olduğu için $OP \perp O_AO_B$ dir. Bu durumda π_A ile π_B nin kuvvet ekseni OP dir.



OP ile A_1A_2 nin kesişimi K olsun.

K noktası hem Π ile π_A nın kuvvet ekseni üzerinde, hem de π_A ile π_B nin kuvvet ekseni üzerinde olduğu için Π ile π_B nin kuvvet ekseni üzerinde olacaktır. Bu durumda $K \in B_1B_2$ olacaktır.

Benzer şekilde C_1C_2 de bu K noktasından geçecektir.

$\boxed{3}$ Rakamlarının biri 1, biri 2, ..., biri 9 olan 9 basamaklı tüm sayılara *dengeli* sayı diyelim. Tüm dengeli sayıların yan yana ve küçükten büyüğe doğru yazılarak oluşturduğu rakam dizisi S olsun. S dizisindeki k ardışık terimden oluşan herhangi iki alt dizinin birbirinden farklı olmasını sağlayan en küçük k değerini bulunuz.

$\boxed{4}$ Başlangıçta tahta üzerinde her birinin 31 koordinatı olan 31 adet

$$(1,0,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,0,\ldots,1)$$

31-lileri yazılmıştır. Her işlemde, tahtada bulunan $(a_1,a_2,\ldots,a_{31})$ ve $(b_1,b_2,\ldots,b_{31})$ 31-lileri seçiliyor ve $(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_{31}+b_{31})$ 31-lisi de tahtaya yazılıyor. En az kaç işlem sonucunda tahtada

$$(0,1,1,\ldots,1),(1,0,1,\ldots,1),\ldots,(1,1,1,\ldots,0)$$

31-lilerinin tümü yer alabilir?

$\boxed{5}$ 23 gerçel sayıdan oluşan bir kümenin, boş olmayan ve elemanlarının çarpımı rasyonel sayı olan alt kümelerinin sayısı tam olarak 2422 olabilir mi?

Çözüm 1:

Bu tarz sorularda genelde soruyu çözebilmek için cevabı tahmin etmek gerekir. Eğer yanlış tahmin üzerine çözüm elde edilmeye çalışılırsa, süre yetişmeyecek ve büyük olasılıkla o sorudan puan alınamayacaktır. 2422 sayısının özel bir anlamı olmamasından dolayı cevabın evet olacağını tahmin edebiliriz çünkü 2023 veya 2023^{2022} gibi sayılar verilseydi, çözümün sayıdan bağımsız olabileceği sonucuna varabilirdik. Ancak 2422 sayısı belli ki özel bir inşa yönteminin sonucunda çıktığı için sorulmuş. Böyle bir kümeyi varsayarak, nasıl inşa edebileceğimize bakalım.

Kümenin elemanlarını $i=0,1,\ldots,22$ için $2^{\frac{2^i}{n}}$ olarak seçersek elemanları çarpımının rasyonel olması için kullanılan terimlerin üslerinin toplamının tamsayı olması gerekir. Yani

$$n \mid 2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots 2^{a_k}$$

şeklinde olmalıdır. n sayısının herhangi bir katının 2'nin farklı kuvvetlerinin toplamı olarak tek şekilde yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla

$$n, 2n, 3n, \ldots, 2422n$$

sayılarını $1,2,2^2,\ldots,2^{22}$ sayılarını kullanarak elde edebilmeli ancak 2423'ü elde edememeliyiz. 2^m'ye kadar olan 2'nin kuvvetleri kullanılarak sadece 2^m-1'e kadar olan tüm sayıları elde edebiliriz. Dolayısıyla

$$2422n \le 2^{23}-1 < 2423n \implies \frac{2^{23}-1}{2423} < n \le \frac{2^{23}-1}{2422}$$

olacak şekilde bir n varsa, bu n için yukarıdaki formatta seçtiğimiz küme istenilen şartı sağlayacaktır. Bu aralıkta $n=3463$ sayısı olduğundan, böyle bir küme vardır.

Kaynak: Tübitak Lise 2. Aşama Resmi Çözümler 2023

Not 1: Son kısımdaki n'nin varlığının gösterilmesi yeterlidir. Dolayısıyla böyle bir n'yi elle hesaplamak yerine, ki sayılar bence bunu yapmak için çok da büyük değil, sınırlarının arasındaki farkın 1'den büyük olduğu gösterilebilir. Çünkü $b-a>1$ ise (a,b) aralığında kesin bir tamsayı vardır. Resmi çözümde de bu şekilde çözüm tamamlanmıştır.

Not 2: AoPS gibi forumlarda istenileni sağlayan farklı formattaki bazı kümeler de bulunmuş. O kümelerin neden o şekilde seçilmesi gerektiğine dair açıklamalarla birlikte burada farklı çözüm olarak paylaşabiliriz.

Çözüm 2:

Metin Can Aydemir'in bahsettiği AoPS forumundaki çözümlerden biri sınavın birincisi Barış Koyuncu'ya ait. Barış Koyuncu, derincesi Youtube kanalında kendisini çözüme götüren yöntemi detaylıca anlatıyor.

Barış Koyuncu, ilgili kümelerden birini $\{e, 2e, 3e, \dots, 12e, e^{-7}, 2e^{-7}, e^{-8}, e^{-10}, 2e^{-10}, \dots, 5e^{-10}, e^{-11}, e^{-12}, e^{-31}\}$ olarak örneklendiriyor.

O çözümünün biraz daha genelini (Barış Koyuncu'nun AoPS'taki çözümününden esinlenerek) Metin Can Aydemir ile birlikte şöyle yaptık:

Öncelikle kümede hiç rasyonel sayı olmaması gerektiğini gözlemleyelim. $a \in \mathbb{Q}$ sayısı bu kümenin içerisinde ise a'nın olmadığı, çarpımı rasyonel olan altkümelere, a eklendiğinde yine çarpımı rasyonel olacaktır. Eğer $a \neq 0$ ise kalan 22 reel sayıdan kaç tane altküme elde edebiliyorsak, a'yı ekleyerek bir o kadar alt küme daha elde edebilirdik. Bunların dışında a'nın tek başına olduğu kümeyi de düşünürsek, alt küme sayısı tek sayı olacaktır, 2422 olamaz. Eğer $a = 0$ ise a'yı içeren her altkümenin elemanları çarpımı rasyonel olacaktır. Bu da en az 2^{22} tane altküme demektir. Bu da istenileni sağlamaz.

Dolayısıyla hiçbir rasyonel sayı içermeyen bir küme oluşturmalıyız. Çarpımlarının rasyonel olmasından dolayı sayıları α transcental sayısı ve $a, k \in \mathbb{Z}$ için $a \cdot \alpha^k$ formatında seçmeyi düşünebiliriz. Burada α'yı rastgele bir irrasyonel seçmemizin sebebi α^k'nın irrasyonel kalmasını istememizdir. Örneğin $\alpha = \sqrt{2}$ seçersek α^2 rasyonel olacaktır. a'nın da elemanları farklı yapmak dışında bir kullanımı yoktur çünkü çarpıma herhangi ekstra bir şey katmayacak ancak elemanları birbirinden farklı seçebilmemizi sağlayacaktır. 23 irrasyonel için üslere $k_1, k_2, \dots, k_{23}$ diyelim. k_i'lerin farklı olması gerekmez ama 0'dan farklı olmalıdır.

Bu elemanların çarpımının rasyonel sayı olması demek, üslerinin toplamının 0 olması demektir. Dolayısıyla $(k_1, k_2, \dots, k_{23})$ tamsayı 23-lüsünün tam olarak 2422 tane alt dizisinin elemanları toplamının 0 olmasını istiyoruz. Bunun için de k_i'lerden pozitif olanlar ile negatif olanları birbirlerini nötrleyecek şekilde seçmeliyiz. İki işaret için de sayıları rastgele seçersek, 2422'yi hesaplamak karmaşıklaşacağından tüm pozitifleri $+1$ seçebiliriz. Böylelikle, $-K$'yı nötrlemek demek K tane $+1$'den seçmek demek olacak.

$k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ olmak üzere; N tane 1, x_0 tane $-k$, x_1 tane $-k-1$, …, x_{n-k} tane $-n$ sayısından oluşan sayı dizisini ele alalım.

Toplamları 0 olacak şekilde bu dizinin alt dizisini seçmek istersek; sadece 1 adet negatif sayı, bu negatif sayı neyse bir o kadar da 1 sayısı seçmemiz gerekir.

$x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-k} \leq 23 - n$ olmak üzere; bu şekilde dağılımların sayısı için $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k+i}\binom{x_i}{1} = 2422$ olmalı.

Örneğin, $n = 11$ için $\binom{11}{6} = 462$, $\binom{11}{7} = 330$, $\binom{11}{8} = 165$, $\binom{11}{9} = 55$, $\binom{11}{10} = 11$, $\binom{11}{11} = 1$ eşitliklerini kullanarak $462 \cdot 5 + 55 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2422$ elde ederiz.

Bu durumda 20 elemanlı $\{e, 2e, \dots, 11e, e^{-6}, 2e^{-6}, \dots, 5e^{-6}, e^{-9}, 2e^{-9}, e^{-11}, 2e^{-11}\}$ kümesinin tam olarak 2422 altkümesi için elemanlar çarpımında e nin üssü 0 a eşit olacaktır. (Geri kalan 3 elemanı $e^{-12}, e^{-13}, e^{-14}$ şeklinde seçebiliriz.)

Barış Koyuncu'nun örneğini bizim çözümümüzdeki yaklaşımla verirsek:

$n = 12$, $\binom{12}{7} \cdot 2 + \binom{12}{8} \cdot 1 + \binom{12}{10} \cdot 5 + \binom{12}{11} \cdot 1 + \binom{12}{12} \cdot 1 = 792 \cdot 2 + 495 \cdot 1 + 66 \cdot 5 + 12 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2422$, dolayısıyla aradığımız küme $\{e, 2e, \dots, 12e, e^{-7}, 2e^{-7}, e^{-8}, e^{-10}, 2e^{-10}, \dots, 5e^{-10}, e^{-11}, e^{-12}\}$ olacaktır. (Geri kalan 1 elemanı e^{-13} şeklinde seçebiliriz.)

Bilgisayar yardımıyla, bu yaklaşımdaki tüm çözümleri bulabiliriz.

$n = 10$ için:

$\binom{10}{5} = 252$	$\binom{10}{6} = 210$	$\binom{10}{7} = 120$	$\binom{10}{8} = 45$	$\binom{10}{9} = 10$	$\binom{10}{10} = 1$
6	2	4		1	
8		3	1		1

$n = 11$ için:

$\binom{11}{6} = 462$	$\binom{11}{7} = 330$	$\binom{11}{8} = 165$	$\binom{11}{9} = 55$	$\binom{11}{10} = 11$	$\binom{11}{11} = 1$
	6	2	2		2
	7		2		2
2	2	5		1	2
2	3	3		1	2
2	4		3	1	2
2	4	1		1	2
3	3			4	2
4		3	1	2	2
4	1	1	1	2	2
5			2		2

$n = 12$ için:

$\binom{12}{6} = 924$	$\binom{12}{7} = 792$	$\binom{12}{8} = 495$	$\binom{12}{9} = 220$	$\binom{12}{10} = 66$	$\binom{12}{11} = 12$	$\binom{12}{12} = 1$
		4	1	3	2	
		4	2			2
	1		7	1	2	
	1	2	2	3		2
	1	3		2	1	1
	2	1		5	1	1
1		2	1	4	2	
1		2	2	1		2
1		3			1	1
1	1		2	4		2
1	1	1		3	1	1
2			1	5	2	
2			2	2		2
2		1		1	1	1

Üsler toplamının sıfır yapıldığı bu yaklaşım, literatürde subset sum olarak geçiyor.

Geeks For Geeks sitesinde yer alan kod örneklerini,

var arr = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -6, -6, -6, -6, -6, -9, -9, -11, -11]

şeklinde çalıştırdığımızda, boş küme de sayıldığı için 2423 elde ediyoruz. Bir nevi çözümde bulduğumuz değerlerin doğrulaması yapılmış oldu.

Çözüm 3:

AoPS forumundaki çözümlerden biri resmi çözümdeki yaklaşıma ait bir örnek barındırıyor.

$A = \left\{2^{\frac{2^{10}}{n}}, 2^{\frac{2^9}{n}}, \ldots, 2^{\frac{2^0}{n}}\right\}$, $B = \left\{2 \cdot 2^{\frac{2^{10}}{n}}, 2 \cdot 2^{\frac{2^9}{n}}, \ldots, 2 \cdot 2^{\frac{2^0}{n}}\right\}$, $C = \left\{3 \cdot 2^{\frac{2^k}{n}}\right\}$ ve $S = A \cup B \cup C = \left\{2^{\frac{2^0}{n}}, 2^{\frac{2^1}{n}}, \ldots, 2^{\frac{2^{10}}{n}}, 2 \cdot 2^{\frac{2^0}{n}}, 2 \cdot 2^{\frac{2^1}{n}}, \ldots, 2 \cdot 2^{\frac{2^{10}}{n}}, 3 \cdot 2^{\frac{2^k}{n}}\right\}$ kümelerini ele alalım.

S kümesinin herhangi bir altkümesini ele aldığımızda, A kümesinin elemanlarından hangilerinin bu alt kümede var olup olmadığını büyükten küçüğe sıralı bir listede 1 ve 0 kullanarak ifade ettiğimizde 11 basamaklı

$$(00000000000)_2, (00000000001)_2, \ldots, (11111111111)_2$$

sayılarından birini elde edeceğiz. Bu sayıya a diyelim.

Benzer şekilde b ve c sayılarını tanımlayalım. $0 \leq a \leq 2047$, $0 \leq b \leq 2047$ ve $c = 0$ veya $c = 2^k$ olacaktır.

S nin herhangi bir altkümesini aldığımızda elemanların çarpımının rasyonel olması için $2^{\frac{a}{n}} \cdot 2^{\frac{b}{n}} \cdot 2^{\frac{c}{n}} = 2^{\frac{a+b+c}{n}}$ ifadesinin rasyonel olması gerekir.

$a+b+c = n$ denkleminin çözüm sayısı 2422 olacak şekilde n ve k sayıları bulabilirsek soruyu çözmüş olacağız.

$a+b=m$ denkleminin çözüm sayısı; $(2047, m-2047)$, $(2046, m-2046)$, …, $(m-2047, 2047)$ çiftlerinin sayısı $2047-(m-2047)+1 = 4095-m$ dir.

$c=0$ iken $m=n$ ve dolayısıyla $4095-n$ çözüm gelecektir.

$c=2^k$ iken $m=n-2^k$ ve dolayısıyla $4095-n+2^k$ çözüm gelir.

Bu durumda toplamda $8190-2n+2^k = 2422$ çözüm gelmesi gerekir. $k=1$ için $n=2885$ olacaktır.

O halde $S=\left\{2^{\frac{2^0}{2885}}, 2^{\frac{2^1}{2885}}, \dots, 2^{\frac{2^{10}}{2885}}, 2\cdot 2^{\frac{2^0}{2885}}, 2\cdot 2^{\frac{2^1}{2885}}, \dots, 2\cdot 2^{\frac{2^{10}}{2885}}, 3\cdot 2^{\frac{2^1}{2885}}\right\}$ kümesi aradığımız kümelerden biridir.

6 Bir ABC üçgeninin BC, AC, AB kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ve $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}$ olacak şekilde alınıyor. AEF üçgeninin çevrel çemberi, AD doğrusu ile ikinci kez R noktasında ve ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasından çizilen teğet ile ikinci kez S noktasında kesişiyor. EF doğrusu, BC ve SR doğruları ile sırasıyla L ve T noktalarında kesişiyor. SR doğrusunun $[AB]$ doğru parçasını ortalaması için gerek ve yeter koşulun BS doğrusunun $[TL]$ doğru parçasını ortalaması olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

SR ile AB doğrusu M de, BS ile TL doğrusu N de kesişsin.

Benzerlikten $AF = AB\cdot \dfrac{DC}{BD+DC}$ ve

$$AF\cdot AB = AB^2\cdot \frac{DC}{BD+DC} \tag{1}$$

Benzerlikten $AE = AC\cdot \dfrac{BD}{BD+DC}$ ve

$$AE\cdot AC = AC^2\cdot \frac{BD}{BD+DC} \tag{2}$$

(1) ile (2) yi oranlarsak

$$\frac{AF\cdot AB}{AE\cdot AC} = \frac{AB^2\cdot DC}{AC^2\cdot BD} = \frac{BD\cdot DC}{DC\cdot BD} = 1 \tag{3}$$

olacaktır. Bu durumda $BFEC$ kirişler dörtgenidir. $\angle BAS = \angle ACB = \angle AFE$ olduğu için $EF \parallel AS$ dir. $SFEA$ kirişler dörtgeni olduğu için ikizkenar yamuktur. Bu durumda $\triangle FSE \cong \triangle EAF \sim \triangle BAC$ ve $\angle FST = \angle FAR = \angle BAD$ olduğu için AD, BC yi hangi oranda bölüyorsa ST, FE yi o oranda bölecektir. Yani

$$\frac{FT}{FE} = \frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} \tag{4}$$

Paralellikten doğan benzerlikleri uyguladığımızda

$$\frac{LF}{LE+LF} = \frac{FD}{EC+FD} = \frac{FD}{EC+AE} = \frac{FD}{AD} = \frac{BF}{BA} \tag{5}$$

$$\frac{NF}{AS} = \frac{BF}{BA} \tag{6}$$

$$\frac{FT}{AS} = \frac{FM}{MA} \tag{7}$$

eşitliklerini elde edeceğiz.

$LN = x$, $TN = y$, $NF = z$, $TE = w$ olsun. $FT = y-z$, $FE = y-z+w$, $LF = x+z$, $LE = x+y+w$

Şimdi de önce $AM = BM \Longrightarrow LN = NT$ yi gösterelim. Sonra da $LN = NT \Longrightarrow AM = BM$ yi gösterelim.

$AM = BM$ ise (7) nolu eşitliği düzenlersek

$$\frac{FT}{AS} = \frac{FM}{MA} = \frac{\frac{BA}{2} - BF}{\frac{BA}{2}} = 1 - \frac{2 \cdot BF}{BA} = 1 - 2 \cdot \frac{NF}{AS} \Longrightarrow 2 \cdot NF + FT = AS$$

elde ederiz. Bu durumda $AS = 2z + y - z = y + z$ olacaktır.

(4), (5), (6) eşitliklerini yazarsak

$$\frac{y - z}{y - z + w} = \frac{x + z}{2x + y + z + w} = \frac{z}{y + z}$$

1. ve 3. oranları çapraz çarparsak

$$y^2 - z^2 = yz - z^2 + wz \Longrightarrow wz = y^2 - yz = y(y - z) \tag{8}$$

2. ve 3. oranları çapraz çarparsak

$$xy + xz + yz + z^2 = 2xz + yz + z^2 + wz \Longrightarrow wz = xy - xz = x(y - z) \tag{9}$$

elde ederiz.

$y = TN > FN = z$ olacağı için (8) ve (9) u birleştirdiğimizde $x = y$ yani $LN = TN$ elde ederiz. ■

Şimdi de $LN = NT$ kabul edelim.

$x = y$ olacaktır.

(4), (5), (6) eşitlikleri

$$\frac{y - z}{y - z + w} = \frac{y + z}{2y + y + z + w} = \frac{z}{AS}$$

şeklinde yazılabilir. Oran-Orantı özelliğinden 2. orandan 1. oranı çıkarırsak $\dfrac{2z}{2y + 2z} = \dfrac{z}{y + z}$ oranını elde ederiz. Bu da $AS = y + z$ olduğu anlamına gelir.

(6) ve (7) yi yeniden yazarsak $\dfrac{NF}{AS} = \dfrac{z}{y + z} = \dfrac{BF}{BA}$ ve $\dfrac{FT}{AS} = \dfrac{y - z}{y + z} = \dfrac{FM}{MA}$

1. eşitliğin 2 katı ile 2. eşitliği toplarsak $\dfrac{2z + y - z}{y + z} = 1 = \dfrac{2 \cdot BF}{BA} + \dfrac{FM}{MA}$ olur.

Şimdi de $BF = p$, $FM = q$ ve $MA = r$ olsun. $BA = p + q + r$ olacaktır. Yerine yazarsak

$$1 = \frac{2p}{p + q + r} + \frac{q}{r} = \frac{2pr + pq + q^2 + qr}{pr + qr + r^2}$$

elde ederiz. Biraz düzenlemeyle $pq + pr + q^2 - r^2 = p(q + r) + (q - r)(q + r) = (p + q - r)(q + r) = 0 \Longrightarrow p + q = r$ olur. Bu da $BM = MA$ demektir. ■

Not: Her iki koşulda da $AS = AE = SF$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Bu da biraz açı hesabıyla $\angle ABC = 2\angle ACB$ yı gerektirecektir. Kenarortaysıların (Simedyan) özelliğinden ($AB^2 : AC^2 = BD : DC$ oranından) AD nin ABC de bir kenarortaysı olduğu görülebilir. Yani bir çizim aracı ile $\angle B = 2\angle C$ olan üçgeni çizip, BC ye ait kenarortayın BC ye ait açıortaya göre simetriğini alarak D noktasını işaretleyebilirsiniz. Daha sonra sorudaki yönergeleri izlediğinizde çizimi tamamlamış olursunuz.

32. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2024

1 $n \geq 3$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, n köşeli bir tam çizgenin her kenarına birer gerçel sayı aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde yazılmıştır:

(i) Çizgedeki her üçgenin kenarlarına yazılan sayılardan ikisi birbirine eşit olup diğer sayı ise bu sayılardan büyüktür.

(ii) Her köşenini *ağırlığı*, o köşeden çıkan kenarlara yazılan sayıların toplamı olmak üzere, tüm köşelerin ağırlıkları birbirine eşittir.

Buna göre, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerinden indirilen yüksekliklerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberine D noktasında teğet olan bir çemberin EF doğrusu ile kesiştiği noktalar P ve Q olsun. PH ve QH doğruları ile BHC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktaları sırasıyla R ve S olsun. A noktasından geçen ve EF doğrusuna dik olan doğrunun BC doğrusu ile kesiştiği nokta T olsun. R, S, D, T noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

ABC nin ortik üçgeni DEF üçgeninde, H iç merkezdir. (İspatı: $\angle EFH = \angle EAH = DBH = \angle DFH$.)

EF nin AD ile kesişimi A' olsun.

DFA' üçgeninde FH iç açıortay, FA dış açıortaydır: $\dfrac{AA'}{AD} = \dfrac{HA'}{HD}$.

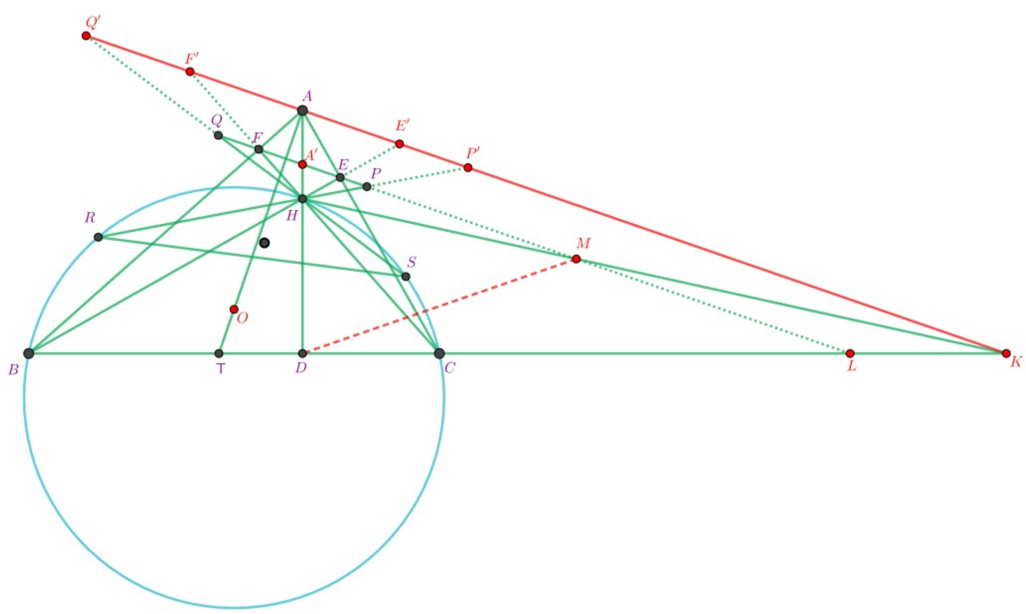
Aynı oranı yeniden yazarak; $\dfrac{HA - HA'}{AD} = \dfrac{HA'}{AD - HA}$

$HA \cdot AD - HA^2 - HA' \cdot AD + HA \cdot HA' = AD \cdot HA'$.

$2 \cdot AD \cdot HA' = HA(AD - HA + HA') = HA(DH + HA') = HA \cdot DA'$.

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DA'}{DA} \qquad (1)$$

elde ederiz.



EF ile BC, L de kesişsin. (DEF) çemberinin D deki teğeti, EF yi M de kessin.

$\angle A'DE = 90^\circ - \angle BAC$.

$\angle EDM = \angle DFE = 180^\circ - 2\angle BCA$.

$$\begin{aligned}
\angle MDL &= 90^\circ - (\angle A'DE + \angle EDM) \\
&= \angle BAC + 2\angle BCA - 180^\circ \\
&= \angle BCA - \angle ABC \\
&= \angle BCA - \angle AEF \\
&= \angle BCA - \angle LEC \\
&= \angle DLM
\end{aligned}.$$

Dolayısıyla,

$$ML = MD = A'M \tag{2}$$

A dan EF ye çizilen paralel ile CF, BE, BC doğruları sırasıyla F', E', K noktalarında kesişşin.

(1) den dolayı,

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DA'}{DA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A'L}{AK} = \frac{A'M}{AK}$$

olacağı için H, M, K noktaları doğrusaldır.

$AK \parallel EF$ ve $AT \perp EF$ olduğu için $AT \perp AK$. Öklid'den

$$KA^2 = KD \cdot KT \tag{3}$$

$\angle ABC = \angle AEF = \angle EAK$ olduğu için KA doğrusu (ABC) çevrel çemberine teğettir.

$$KA^2 = KC \cdot KB \tag{4}$$

$\angle HBC = \angle EFH = \angle E'F'H$ olduğu için

$$KE' \cdot KF' = KC \cdot KB = KA^2 \tag{5}$$

(DEF) çemberi ile (DPQ) çemberinin kuvvet ekseni DM olduğu için

$$ME \cdot MF = MP \cdot MQ = MD^2 = MA'^2 \tag{6}$$

HP ve HQ doğruları ile AK doğrusu sırasıyla P' ve Q' noktalarında kesişsin.

$\triangle HMF \sim \triangle HKF'$ olduğu için (6) daki eşitlik

$$KP' \cdot KQ' = KE' \cdot KF' = KA^2 \tag{7}$$

olacaktır.

(7) ile (4) ü birleştirirsek P', Q', B, C noktaları çembersel olur.

Şimdi de P, Q, R, S noktalarının çembersel olduğunu göstereceğiz.

PQ noktalarının EF doğru parçası üzerinde veya dışında olmasına göre ispat biraz farklı olacak. Şekildeki duruma göre ispatımıza devam edelim.

$\angle HRS = \angle HBS = \angle HBC - \angle SBC = \angle EFH - \angle SHC = \angle EFH - \angle FHQ = \angle PQH$. Bu da, P, Q, R, S noktalarının çembersel olduğu anlamına gelir.

$PQ \parallel P'Q'$ olduğu için P', Q', R, S noktaları da çemberseldir.

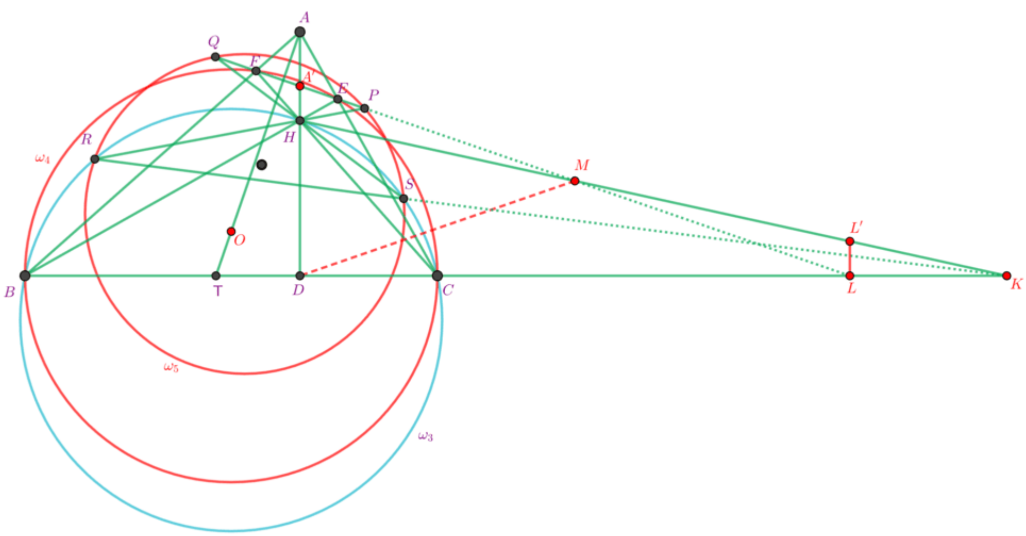
$(P'Q'RS)$, $(P'Q'BC)$, $(BRSC)$ çemberlerinin ikişerli kuvvet eksenleri, tek bir noktada (üç çemberin kuvvet merkezinde) kesişir. Bu nokta da $P'Q'$ ile BC nin kesişimi olan K noktasıdır. O halde, R, S, K noktaları doğrusaldır.

Bu durumda, $KS \cdot KR = KC \cdot KB = KA^2 = KD \cdot KT$ olduğu için R, S, D, T noktaları da çemberseldir.

Çözüm 2:

$\omega_1 = (DEF)$, $\omega_2 = (DPQ)$, $\omega_3 = (BHC)$ olsun.

$\angle BFC = \angle BEC$ olduğu için $(BCEF) = \omega_4$.



$\angle EFH = \angle EBC = \angle EBS + \angle SBC = \angle HRS + \angle SHC$

$\angle EFH = \angle FQH + \angle QHF = \angle FQH + \angle SHC = \angle HRS + \angle SHC$ olduğu için $\angle FQH = \angle HRS$, dolayısıyla $(PQRS) = \omega_5$.

$\angle FQH = \angle HRS = \angle SCH$ olduğu için S, C, Q, F çemberseldir. Bu durumda $QH \cdot HS = FH \cdot HC$.

$QH \cdot HS = PH \cdot HR$ ve $EH \cdot HB = FH \cdot HC$ olduğu için H noktasının ω_4 ve ω_5 çemberlerine göre kuvvetleri eşittir. O halde, H, bu iki çemberin kuvvet ekseni üzerindedir.

ω_3 ile ω_4 ün kuvvet ekseni BC dir. ω_3 ile ω_5 in kuvvet ekseni RS dir. BC ile RS nin kesişimi K olsun. ω_4 ile ω_5 in kuvvet ekseni HK olacaktır.

EF ile HK, M noktasında kesişsin. M noktası, ω_4 ile ω_5 çemberlerinin kuvvet ekseni üzerinde olduğu için bu noktanın bu iki çembere göre kuvveti eşittir. $ME \cdot MF = MP \cdot MQ$.

M noktasının ω_1 çemberine göre kuvveti $ME \cdot MF$, ω_2 çemberine göre kuvveti $MP \cdot MQ$ olduğu için; M noktası ω_1 ve ω_2 çemberlerinin kuvvet ekseni üzerinde olacaktır. Bu da, bu iki çembere D noktasında teğet olan doğrudur. Yani DM; ω_1 çemberine teğettir.

FM; BC ve AD ile sırasıyla L ve A' noktalarında kesişsin.

$\angle ADE = \angle FCA = 90° - \angle A$.

$\angle EFD = 180° - \angle AFE - \angle DFB = 180° - 2\angle C$.

Teğet-Kiriş açıdan $\angle EDM = \angle EFD = 180° - 2\angle C$.

$\angle MDL = 90° - \angle ADE - \angle EDM = 90° - (90° - \angle A) - (180° - 2\angle C) = \angle C - \angle B$.

$\angle MLD = \angle ACB - \angle LEC = \angle C - \angle AEF = \angle C - \angle B$. Bu durumda, $MD = ML = MA'$ olur.

$AA' = x$, $A'H = y$, $HD = z$, $DL = p$, $LK = q$ olsun.

L den AD ye çizilen paralel HK yı L' de kessin.

$LL' = A'H = y$ olacaktır.

$\dfrac{DL}{DK} = \dfrac{p}{p+q}$.

$\dfrac{DL}{DK} = \dfrac{HD - LL'}{HD} = \dfrac{z-y}{z}$.

$\triangle A'FD$ de, $\angle A'FH = \angle EAH = \angle DBH = \angle DFH$ olduğu için FH iç açıortaydır. $\angle AFH = 90^\circ$ olduğu için de FA dış açıortaydır. $\dfrac{AA'}{AD} = \dfrac{HA'}{HD} = \dfrac{x}{x+y+z} = \dfrac{y}{z}$.

Paydadan payı çıkartıp, paydaya oranlarsak; $\dfrac{z-y}{z} = \dfrac{x+y+z-x}{x+y+z} = \dfrac{y+z}{x+y+z} = \dfrac{DA'}{DA}$ elde edilir.

Bu durumda, $\dfrac{DL}{DK} = \dfrac{DA'}{DA}$ yani $A'L \parallel AK$ olur. Bu da, $TA \perp EF$ olduğu için $TA \perp KA$ demektir. $\triangle TAK$ üçgeninde Öklid'den $KA^2 = KD \cdot KT$ elde ederiz.

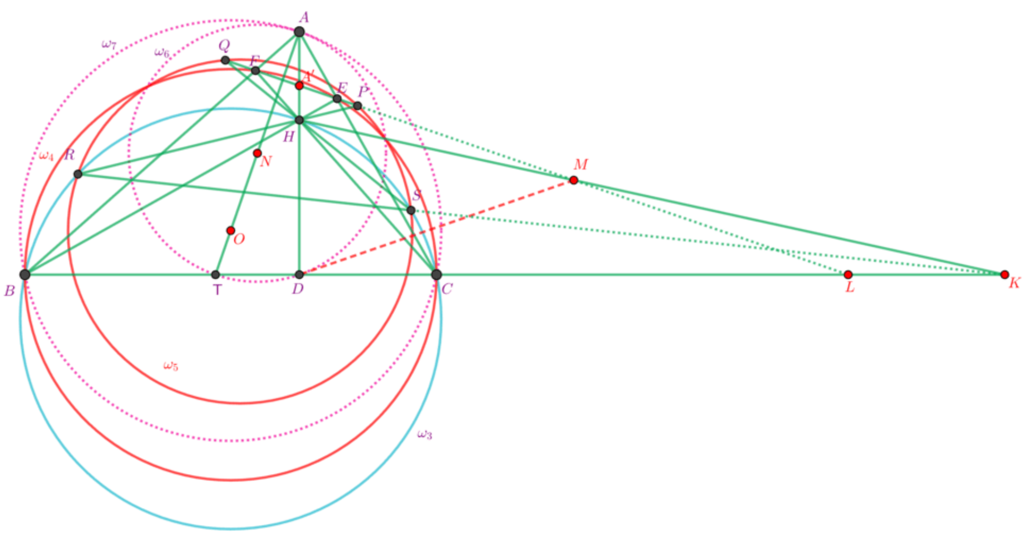
$\angle KAE = \angle AEF = \angle ABC$ olduğu için, KA doğrusu, (ABC) çevrel çemberine K da teğettir. O halde, $KA^2 = KC \cdot KB$.

K noktasının, ω_4 çemberine göre kuvveti $KC \cdot KB$, ω_5 çemberine göre kuvveti $KS \cdot KR$ eşit olacağı için $KS \cdot KR = KC \cdot KB = KA^2 = KD \cdot KT$, dolayısıyla R, S, D, T noktaları çemberseldir.

Çözüm 3:

$\omega_1 = (DEF)$, $\omega_2 = (DPQ)$, $\omega_3 = (BHC)$ olsun.

$\angle BFC = \angle BEC$ olduğu için $(BCEF) = \omega_4$.



$\angle EFH = \angle EBC = \angle EBS + \angle SBC = \angle HRS + \angle SHC$

$\angle EFH = \angle FQH + \angle QHF = \angle FQH + \angle SHC = \angle HRS + \angle SHC$ olduğu için $\angle FQH = \angle HRS$, dolayısıyla $(PQRS) = \omega_5$.

$(ADT) = \omega_6$ ve $(ABC) = \omega_7$ olsun. AT nin orta noktası N olsun. ω_7 nin merkezi O olsun. AT ile AD izogonal eşlenik olduğu için T, O, N, A doğrusaldır. ω_6 ile ω_7, A noktasında teğettir.

EF ile BC, L de; EF ile AD, A' de kesişsin. $A'L$ nin orta nokta noktası M olsun.

$\angle NDA = \angle NAD = 90^\circ - \angle DA'M = 90^\circ - \angle A'DM$ olduğu için $ND \perp DM$. Yani DM, ω_6 ya teğettir.

$\angle MDE = 90^\circ - \angle ADE - \angle MDL = 90^\circ - (90^\circ - \angle A) - (\angle C - \angle B) = \angle A + \angle B - \angle C = 180^\circ - 2\angle C = \angle EFD$ olduğu için DM, ω_1 e teğettir.

$\angle FQH = \angle HRS = \angle SCH$ olduğu için S, C, Q, F çemberseldir. Bu durumda $QH \cdot HS = FH \cdot HC$.

$QH \cdot HS = PH \cdot HR$ ve $EH \cdot HB = FH \cdot HC$ olduğu için H noktasının ω_4 ve ω_5 çemberlerine göre kuvvetleri eşittir. O halde, H, bu iki çemberin kuvvet ekseni üzerindedir.

M noktasının ω_1, ω_2, ω_6 ya göre kuvvetleri eşittir. $MD^2 = ME \cdot MF = MP \cdot MQ$.

O halde M noktasının w_4 ve w_5 e göre kuvvetleri de eşit olacaktır. Bu da M yi bu iki çemberin kuvvet ekseni üzerinde yapar. Yani bu iki çemberin kuvvet ekseni HM dir.

HM doğrusu, ω_2 nin seçiminden bağımsızdır. ω_6 çemberi de aslında ω_2 çember ailesine aittir. O halde, M noktasının ω_6 ya göre kuvveti ile ω_4 e göre kuvveti de eşittir.

$EH \cdot HB = FH \cdot HC = DH \cdot HA$ olduğu için H noktasının da ω_4 ve ω_6 ya göre kuvvetleri eşittir. O halde, ω_4, ω_5, ω_6 çemberlerinin kuvvet ekseni HM dir.

HM ile BC, K de kesişsin.

ω_4, ω_6, ω_7 çemberlerinin kuvvet merkezi K noktasıdır. O halde, $KA \perp NT$ dir.

Öklid'den $KD \cdot KT = KA^2 = KS \cdot KR$ elde edilir. Bu da R, S, D, T noktalarının çembersel olduğu anlamına gelir.

$\boxed{3}$ Her $n \geq 2$ tam sayısı için $f(n)$ ile n sayısının farklı asal bölenlerinin çarpımını gösterelim (örneğin, $f(5) = 5$, $f(8) = 2$ ve $f(12) = 6$ olur). $a_1, a_2, \ldots$ dizisi, $a_1 \geq 2$ bir tam sayı ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n)$$

olacak şekilde tanımlanıyor. Her p asal sayısı için, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinde p ile bölünen bir terim bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(a_n) \mid a_n$ sağlanır. $a_n = f(a_n)g(a_n)$ olsun.

İddia. $f(a_{n+1}) \geq f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

İspat. $a_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ olsun. (p_i ler asal ve $\alpha_i \geq 1$) Bu durumda

$$a_{n+1} = (p_1 p_2 \ldots p_k)\left(1 + \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}\right)$$

sağlanır. Buradan anlaşılır ki $\forall p \mid a_n$ asalı için $p \mid a_{n+1}$. Bu ise iddianın doğruluğunu göstermek için yeterlidir.

İddia. $g(a_{n+1}) - g(a_n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

İspat. Önceki iddiadan $\frac{f(a_n)}{f(a_{n+1})} \leq 1$ olduğu görülür. Buradan hareketle

$$g(a_n) + 1 \geq \frac{f(a_n)[g(a_n)+1]}{f(a_{n+1})} = \frac{a_n + f(a_n)}{f(a_{n+1})} = \frac{a_{n+1}}{f(a_{n+1})} = g(a_{n+1})$$

elde edilir, ki bu iddianın ispatı için yeterlidir.

Sonuç. g sınırsız ise $g(a_n)$ fonksiyonu $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq g(a_m)\}$ kümesinde örtendir, öyle ki $g(a_i) \geq g(a_m), \forall i \in \mathbb{N}$.

İddia. $g(a_m) = 1$.

İspat. $g(a_m)$ bir $t \leq q-1$ için $f(a_m)$'yi bölmeyen ve $g(a_{m+t})$'yi bölen bir q asalı olana kadar bir bir artacaktır. Önceki iddiadan

$$g(a_{m+t}) \leq \frac{g(a_m)+t}{q} \leq \frac{g(a_m)+q-1}{q} \Rightarrow q \cdot g(a_m) \leq q \cdot g(a_{m+t}) \leq g(a_m) + q - 1 \Rightarrow 0 < g(a_m) \leq 1$$

gelir, ki bu iddianın ispatı için yeterlidir.

İddia. $f(a_{n+1}) = f(a_n) \Rightarrow g(a_{n+1}) - g(a_n) = 1$.

İspat. $f(a_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ dizisi monoton artandır. Dolayısıyla ikinci iddiayı da göz önünde bulundurursak

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \Rightarrow 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(a_{n+1})g(a_{n+1})}{f(a_n)g(a_n)} \Rightarrow 0 < g(a_{n+1}) - g(a_n) \leq 1$$

elde edilir. Bu ise iddianın ispatı için yeterlidir.

İddia. $g(a_n)$ dizisi sınırsızdır.

İspat. İlk iddiadaki eşitsizliğin eşitlik durumunu alalım. Bunun sağlanması için

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} = 1 \Rightarrow \alpha_i = 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

olması lazım. Öyleyse eşitlik sağlanıyorsa a_n'in karebölensiz (squarefree) bir sayı olması gerekir. Bu ise $g(a_n) = 1$ ise sağlanır. Üçüncü iddiadan bunun en az bir kez sağlanacağını biliyoruz. Önceki iddiadan da bu eşitlik durumu her sağlandığında g'nin arttığını biliyoruz. Öyleyse g artarken daha önce a_n dizisinin hiçbir terimini bölmeyen bir asala eşit olduğunda 1 durumuna geri döner. Bu durum sürekli tekrarlanacağından g sürekli olarak artar, yani üst sınırı yoktur çünkü asal sayılar da sonsuz miktardadır.

Sonuç. $g(a_n)$, $\mathbb{Z}$ kümesini örter. Dolayısıyla soruda verilen ifade ispatlanmış olur. ■

4 n bir pozitif tam sayı ve n sayısının tüm pozitif bölenleri $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ olsun.

$$\begin{aligned} 2d_2 + d_4 + d_5 &= d_7 \\ d_3 d_6 d_7 &= n \\ (d_6 + d_7)^2 &= n + 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm:

Eğer n tekse $2d_2 + d_4 + d_5 = d_7$ çift olacağından çelişki elde edilir. Yani n çifttir ve $d_2 = 2$'dir. Ayrıca $n+1$ bir tamkare olduğundan $n \equiv 2 \pmod 4$ durumunda çelişki elde ederiz. Yani $4 \mid n$ olmalıdır. Eğer $d_3 \neq 4$ ise $d_3 = 3$ ve $d_4 = 4$ olmalıdır. Verilen eşitliklerden

$$n = 3d_6 d_7 = (d_6 + d_7)^2 - 1 \implies d_6^2 - d_6 d_7 + d_7^2 = 1$$

bulunur. Bu denklemin çözümü yoktur çünkü

$$1 = d_7^2 - d_6 d_7 + d_6^2 = d_7(d_7 - d_6) + d_6^2 > d_6^2$$

çelişkisi vardır. Sonuç olarak $d_3 = 4$ olmalıdır.

$$n = (d_6 + d_7)^2 - 1 = 4d_6 d_7 \implies d_7 = d_6 + 1$$

elde edilir. $d_6 = m$ dersek, $n = 4m(m+1)$ bulunur. $8 \mid n$ olduğundan $d_4 = 5, 7, 8$ olabilir.

$d_4 = 5$ ise $d_6 = d_7 - 1 = 8 + d_5 > 8$ olacağından $d_5 = 8$ olmalıdır. Buradan $d_7 = 17$ ve $d_6 = 16$ bulunur ancak $n = 4 \cdot 16 \cdot 17$ sayısı $d_4 = 5$ ile bölünmez.

$d_4 = 7$ ise $d_5 = 8$'dir. Buradan $d_7 = 19$ bulunur. Ancak $n = 4 \cdot 18 \cdot 19$ sayısı 7 ile bölünmez.

Son durum olarak $d_4 = 8$ olmalıdır. $d_7 = d_5 + 12$ ve $d_6 = d_5 + 11$'dir. $3 \nmid n$ olduğundan

$$d_5 \mid 4(d_5 + 11)(d_5 + 12) \implies d_5 \mid 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \implies d_5 \mid 2^4 \cdot 11$$

bulunur. $d_5 = 11$ veya $d_5 = 16$ olabilir. Denersek, $d_5 = 16$ için $d_7 = 28$ elde edilir ancak $7 \nmid n$ olacağından çözüm gelmez. Ancak $d_5 = 11$ için $n = 4 \cdot 22 \cdot 23 = 2024$ bulunur. İstenilen şartları da sağlar.

5 Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(z)}\right\} + \left\{\frac{f(z)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{z}\right\} + \left\{\frac{z}{x}\right\}$$

denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. Bir x gerçel sayısı için, $\lfloor x \rfloor$ sayısı x'in tam değeri olmak üzere, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ olarak tanımlanıyor: $\{2.7\} = 0.7$ ve $\{4\} = 0$.

Çözüm 1:

n bir pozitif tamsayı olmak üzere $z = nx$ alalım.

$$\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(nx)}\right\} + \left\{\frac{f(nx)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{nx}\right\}$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $n > \frac{y}{\varepsilon x}$ seçerek $\frac{y}{nx} < \varepsilon$ yapabiliriz. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \geq 1$ vardır ki

$$n \geq N \implies \left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(nx)}\right\} + \left\{\frac{f(nx)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{nx}\right\} < \left\{\frac{x}{y}\right\} + \varepsilon$$
$$\implies \left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} - \left\{\frac{x}{y}\right\} < \varepsilon.$$

Bu eşitsizlik her ε için doğru olduğundan $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} - \left\{\frac{x}{y}\right\} \leq 0$ olmalıdır. Benzer şekilde (y, z) ve (x, z) için de aynı eşitsizlikleri elde edebiliriz. Ana eşitlik bu eşitsizliklerin toplamının eşitlik halidir. Yani $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\}$ olmalıdır. $\frac{f(x)}{f(1)} = g(x)$ olarak tanımlarsak ve bulduğumuz eşitlikte $y = 1$ koyarsak, $\{g(x)\} = \{x\}$, yani $g(x) - x \in \mathbb{Z}$ elde edilir. y'yi tamsayı seçelim. $m, k \in \mathbb{Z}$ için $g(x) = x + k$ ve $g(y) = y + m$ dersek,

$$\left\{\frac{g(x)}{g(y)}\right\} = \left\{\frac{x+k}{y+m}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} \implies \frac{x+k}{y+m} - \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$$

bulunur.

$$\frac{x+k}{y+m} - \frac{x}{y} = \frac{y(x+k) - x(y+m)}{y(y+m)} = \frac{ky - xm}{y(y+m)} \in \mathbb{Z} \implies xm \in \mathbb{Z} \implies m = 0$$

elde edilir. Bu durumda da

$$\frac{x+k}{y} - \frac{x}{y} = \frac{k}{y} \in \mathbb{Z} \implies k = 0$$

bulunur. Yani her x için $g(x) = x$'dir. Yerine koyarsak $f(x) = f(1)x = cx$ bulunur. Her $c > 0$ için de verilen eşitlik sağlanır.

Çözüm 2:

Koşulun sağlanması için $\{\frac{f(x)}{f(y)}\} = \{\frac{x}{y}\}$ olması gerektiği yukarıdaki şekilde ispatlansın. Şimdi a bir tamsayı olmak üzere $x = ay$ alırsak $\frac{f(ay)}{f(y)}$ ifadesinin tamsayı olduğunu, $y = ay$ ve $x = y$ alırsak $\{\frac{f(y)}{f(ay)}\} = \frac{1}{a}$ olduğunu anlarız. Bu durumda her a tamsayısı için $f(ay) = af(y)$ olur. Şimdi ilk denklemde x'i tamsayı alırsak $\{\frac{x}{y}\} = \{\frac{f(1)x}{f(y)}\}$ bulunur. $\frac{f(y)}{f(1)} = k$ olmak üzere $\{\frac{x}{k}\} = \{\frac{x}{y}\}$ olur. x keyfî bir tamsayı olduğundan hem k hem y sayısından büyük veya ufak seçilebilir. Bu durumda $y = k$ olur ve $f(y) = f(1)y$ bulunur. Sonuç olarak c bir pozitif reel sayı olmak üzere $f(x) = cx$ olmalıdır.

$\boxed{6}$ $m, n \geq 2$ tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtasının bazı birim karelerine birer kale, her kale tek sayıda kale tarafından tehdit edilecek şekilde yerleştirilmiştir. Buna göre, satranç tahtasının üzerindeki kale sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.