TÜBİTAK

Ulusal Matematik Olimpiyatı

2. Aşama Sınavı

Soruları

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

ÖNSÖZ

Lise düzeyinde olimpiyatlara hazırlanan hemen her öğrencinin sorduğu bir soru vardır:

Gireceğimiz ikinci aşama sınavının eski yıllarının soru ve çözümlerine neden ulaşamıyoruz?

Gerçekten de, İkinci Aşama'ya hazırlanan bir öğrencinin eski yıllardaki soruları çözmesi, hem genel olimpiyat tekniklerine hâkim olması, hem de sınavın kendine has tarzına alışması açısından önemlidir.

İşte elinizdeki bu doküman, bu konudaki eksikliği gidermek adına çok sayıda tecrübeli olimpiyatçı ve hocanın sarf ettiği iki yıllık titiz emek ve gayretlerinin bir sonucudur. Bu çalışma için kolları sıvadığımızda, eski yılların orijinal sorularına ulaşmakta bile çok zorluk çektik; yıllar var olan kaynakları eskitmiş, 90lı yılların soruları olimpiyat arşivlerinin derinliklerinde kalmıştı. Soruları elde ettikçe, bir yandan geomania.org forumunda ilk yılların soru ve çözümlerini toplarken, diğer taraftan matematikolimpiyati.com üzerinden 2000'li yıllarda yapılmış İkinci Aşamaların soru ve çözümlerini yüklemeye yönelik bir sistemle son yılların çözümlerini derledik.

Son olarak, elimizdeki soru ve çözümleri geomania.org da açtığımız "Yarışma Soruları" bölümüne aktardık. Doküman bu halini almadan önce, elimizdeki çözümleri tecrübeli olimpiyatçı arkadaşlarımızın yardımıyla titizce tashih ettik. Bu bağlamda başta Mehmet Efe Akengin ve geomania.org forumundan Lokman Gökçe olmak üzere, bu çalışmada emeği geçen tüm olimpiyatçı ve hocalarımıza gayretlerinden ötürü teşekkürü bir borç biliyoruz.

Bu emek ve gayretler sonucunda, Türkiye matematik olimpiyatları camiası, yıllardır hasretini çektiği bu dokümana kavuştu. Fakat ikinci aşama seferberliğimiz henüz nihayete ermedi. Göreceğiniz üzere, hala çok sayıda sorunun çözümü eksik veya geomania.org forumunda tashih edilmeyi bekliyor. Sorulara yapmış olduğunuz farklı çözümleri, çözümler hakkında düşünce, önerileri ve düzeltmelerinizi, lütfen geomania.org Yarışma Forumu üzerinden paylaşmanızı rica ediyoruz.

Bir başka çalışmada görüşmek dileğiyle,

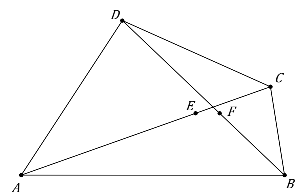
geomania.org
Yarışma Soruları Ekibi

İçindekiler

30. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1988

1 Ardışık üç pozitif tamsayının çarpımının hiçbir zaman bir tamsayının birden büyük bir kuvvetine eşit olamayacağını gösteriniz.

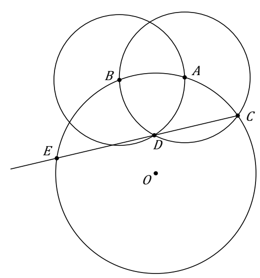
2 $ABCD$ kirişler dörtgeni ve $|AE| = |AD|$, $|BC| = |BF|$ dir. Buna göre, $EF \parallel AB$ olduğunu gösteriniz.



3 $0 < q < 200$ ve $\dfrac{59}{80} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{45}{61}$ koşullarını sağlayan bir (p, q) tamsayı çifti bulunuz ve böyle tek bir (p, q) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz.

4 7 arkadaşı olan bir kimse, bir hafta boyunca her akşam 3 arkadaşını yemeğe çağırır. Farklı iki akşam yemeğe çağrılan gruplar birbirlerinden farklı olup; 7 arkadaştan her biri en az bir akşam yemeğe çağrılmaktadır. Bu koşulları sağlayan kaç değişik çağrı programı yapılabileceğini bulunuz.

5 O merkezli çemberin yarıçapı R'dir. A merkezli $|AB|$ yarıçaplı çember ile B merkezli $|BA|$ yarıçaplı çemberin D kesim noktası alınıyor. CD doğrusu, O merkezli çemberi E noktasında kestiğine göre $|ED|$ uzunluğunu R cinsinden hesaplayınız.



6

$$\sqrt{x - \frac{1987}{14}} + \sqrt{x - \frac{1988}{13}} + \sqrt{x - \frac{1989}{12}} = \sqrt{x - \frac{14}{1987}} + \sqrt{x - \frac{13}{1988}} + \sqrt{x - \frac{12}{1989}}$$

denkleminin tüm reel çözümlerini bulunuz.

7 İki kişinin bir keki paylaşmasının her iki tarafı da hoşnut eden ve adil bir yöntemi şudur: Biri keki iki parçaya ayırır, diğeri parçalardan birini kendine seçer. Diğer bir deyişle keki $[0, 1]$ aralığı gibi düşünürsek, birinci kişi $x_1 \in [0, 1]$ seçer; ikinci kişi ise x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından birini seçer. (Burada her iki tarafın da "keksever" olduğu varsayıldığından, ikinci kişinin x_1 ve $1 - x_1$ sayılarından daha büyük olanını seçeceği ve dolayısıyla birincinin de $x_1 = \dfrac{1}{2}$ seçimini yapacağı kolaylıkla görülür.) Üç keksever kişi için benzer bir paylaşma yöntemi bulabilir misiniz?

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1991

1 Beş ardışık tamsayının karelerinin toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

2 Her terimi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin bir alt kümesine eşit olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $B_1, \ldots, B_K$ dizisi oluşturuyoruz.

(1) $i \neq j \Rightarrow B_i \neq B_j$

(2) Her $i, j \in \{1, \ldots, K\}$ için $B_i \cap B_j \neq \emptyset$.

K nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

3 x, y, z reel sayıları,

$$x + y = z - 1$$
$$xy = z^2 - 7z + 14$$

denklemlerini sağlıyorsa

$x^2 + y^2 \leq 8$ olduğunu gösteriniz.

4 a_i, b_i sayıları pozitif ve

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n}$$

ise;

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

eşitsizliklerini kanıtlayınız.

5 A, B ve C yarıçapı R olan bir çember üzerinde bulunan üç noktadır. ABC üçgeninin A açısına ait iç açıortay uzunluğu ile dış açıortay uzunluğu aynı ise

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 4R^2$$

olacağını gösteriniz.

6 ABC üçgeni A tepe açısı 80° olan bir ikizkenar üçgendir. $[BC]$ tabanı üzerinde bir D noktası ve $[AC]$ yan kenarı üzerinde bir E noktası o şekilde alınıyor ki $m(\widehat{ADB}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{AEB}) = 70^\circ$ oluyor. $m(\widehat{BED})$ açısı kaç derece olur?

34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı Hazırlık Ekibi Seçme Sınavı - 1992

1 Beş çiftin katıldığı bir partide, katılanların bir bölümü birbirleriyle el sıkışırlar. Hiç kimse doğal olarak ne kendi kendisiyle ne de eşiyle el sıkışır. Partiye katılanlardan biri, kendi dışındaki (eşi de dahil olmak üzere) dokuz kişiye kaç kişiyle el sıkışmış olduklarını sorar. Aldığı yanıtlara bakınca, bu dokuz kişi içinde eşit sayıda kişiyle el sıkışmış herhangi iki kişinin bulunmadığını görür. Diğerlerine kaç kişiyle sıkıştıklarını soran kişinin eşinin kaç kişiyle el sıkışmış olduğunu bulunuz.

2 a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

3

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 361 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

denklemlerinin tüm (x, y, z) reel çözümlerini bulunuz.

4 Bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayına CE dikmesi, C açısının içaçıortayına da BD dikmesi indiriliyor. DE doğrusu, $[AB]$ kenarını P noktasında ve $[AC]$ kenarını Q noktasında kestiğine göre

$$|AP| = |AQ|$$

olduğunu ispatlayınız.

5 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarına paralel olan d doğrusu, AB ve AC doğrularını sıra ile D ve E noktalarında kesiyor. BE doğrusu ile CD doğrusunun kesim noktası P olduğuna göre, P noktasının geometrik yerini bulunuz.

6 Hiçbir n pozitif tam sayısı için

$$n^4 + 3n^2 + 1$$

sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1993

1 On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.

2 Bir ABC $(m(\widehat{B}) = 90°)$ üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC], [CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D, E ve F noktalarında değiyor. $[CI \cap [EF] = L$ ve $[DL \cap [AB] = N$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.

3 n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \ldots, n\}$ olsun. $f : A \to A$ ve $\sigma : A \to A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \ldots, (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \ldots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f, σ 'ya göre "tek tepeli"dir diyeceğiz. S_σ ile σ'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesini gösterelim.

$n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösterelim.

4 Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan herhangi x, y reel sayıları için

$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$

olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

5 Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.

6 Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \ldots n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.

(i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$

(ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i}$.

(iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$

Bu durumda $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ denkliğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1994

1 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

toplamını hesaplayınız.

2 Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m(\widehat{BAD}) < 90°$, $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$ dır. $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ köşegenini F noktasında kestiğine göre,

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$

olduğunu gösteriniz.

3 Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara "mavi nokta" dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya "kırmızı nokta"; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da "mor nokta" diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

4 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.

(a) $x \leq g(xy)$ ise $x \leq 2f(2y)$

(b) $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$

5 $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere

$$t^2 + 1 = s(s+1)$$

eşitliğini sağlayan tüm (s, t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

6 Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerinde $|CK| = |BD|$, $[CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi I, $[BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre

(a) $IQ \parallel AK$,

(b) $Alan(AIG) = Alan(QPG)$

olduğunu ispatlayınız.

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1995

1 $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $2 \le m_1$ ve $2m_i \le m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & a_1 & (\mathrm{mod}\ m_1) \\ x & \equiv & a_2 & (\mathrm{mod}\ m_2) \\ & \vdots & & \\ x & \equiv & a_k & (\mathrm{mod}\ m_k) \end{array}$$

bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2 Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırasıyla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K, $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve $[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, $Alan(A\overset{\triangle}{B}C) = u$, $Alan(D\overset{\triangle}{B}C) = x$, $Alan(E\overset{\triangle}{C}A) = y$ ve $Alan(F\overset{\triangle}{A}B) = z$ ise,

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

olduğunu ispatlayınız.

3 $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \le A$$

koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi verliyor.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \le A$$

eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \le Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

4 Bir ABC $(|AB| \ne |AC|)$ üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K, L, M ise, $|KL| = |KM|$ olduğunu ispatlayınız.

5 A, boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A'ya ait elemanları toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\phi) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k, X'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \phi$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

6 $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m|n \iff f(m)|f(n)$$

koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1996

1 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif tam sayı dizisi olsun. Eğer her x pozitif tam sayısı için

$$x = \sum_{n=1}^{N} x_n A_n, \quad 0 \le x_n \le a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \text{ ve } x_N \ne 0$$

olacak şekilde tek bir N pozitif tam sayısı ve tek bir $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ tam sayı sıralı N lisi varsa, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağladığını gösteriniz:

(i) Bir n_0 için, $A_{n_0} = 1$ dir.

(ii) $k \ne j$ ise, $A_k \ne A_j$ dir.

(iii) $A_k \le A_j$ ise, A_k, A_j yi böler.

2 Kenar uzunluğu 2 olan $ABCD$ karesinin, AB ve CD kenarları üzerinde sırasıyla M ve N noktaları alınıyor. CM ve BN doğruları P noktasında, AN ve MD doğruları Q noktasında kesişiyor. $|PQ| \ge 1$ olduğunu gösteriniz.

3 Gerçel eksen üzerinde n tane tam sayıyı boyuyoruz. k nin hangi pozitif tamsayı değerleri için aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{K}$ kapalı aralıklar kümesinin bulunduğunu belirleyiniz:

(i) $\mathcal{K}$ ya ait kapalı aralıkların birleşimi tüm boyalı tam sayıları içerir.

(ii) $\mathcal{K}$ ya ait farklı iki kapalı aralığın kesişimi boştur.

(iii) Her $I \in \mathcal{K}$ için a_I ile I ya ait tüm tam sayıların sayısını, b_I ile de boyalı olanları gösterirsek, $\dfrac{b_I}{a_I} = \dfrac{1}{k}$ olur.

4 Bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$, $[DC]$ ve $[CB]$ kenarlarına teğet olan çemberin değme noktaları sırasıyla K, L, M ile gösteriliyor. L noktasından geçen ve AD doğrusuna paralel olan doğrunun; $[KM]$ nı kestiği nokta N ve $[LN]$ ile $[KC]$ nın kesiştiği nokta P ise,

$$|PL| = |PN|$$

olduğunu ispatlayınız.

5 Her n pozitif tam sayısı için

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

sayısının $n!$ ile bölündüğünü gösteriniz.

6 $\mathbb{R}$ ile gerçel sayılar kümesini gösterelim. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x+y) > f(x)\,(1 + yf(x))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1997

1 $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 383$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) tam sayı çiftlerini bulunuz.

2 Bir dışbükey $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesindeki herhangi bir F noktasının AB, BC, CD, DE ve EA doğrularına uzaklığı sırasıyla a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 ile gösteriliyor. Bu beşgenin A, B, C, D ve E açılarının içaçıortayları üzerinde, $|AF_1| = |AF|$, $|BF_2| = |BF|$, $|CF_3| = |CF|$, $|DF_4| = |DF|$ ve $|EF_5| = |EF|$ eşitlikleri sağlanacak F_1, F_2, F_3, F_4 ve F_5 noktaları alınıyor. F_1 in EA, F_2 nin AB, F_3 ün BC, F_4 ün CD ve F_5 in DE doğrusuna uzaklığı sırasıyla b_1, b_2, b_3, b_4 ve b_5 ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

olduğunu ispatlayınız.

3 $n > 1$ tek, k de pozitif bir tam sayı olsun. n seçmen, k adaydan oluşan A kümesine ait bir üyeyi seçerken aşağıda tanımlanan "çoğunlukçu uzlaşı" sistemini kullanmaktadır. Buna göre, her seçmen, adayları kendi tercihine göre bir sütun halinde yukarıdan aşağıya doğru sıralar. Bu "oy sütunları" (herhangi bir sırayla) yan yana yazılarak $k \times n$ bir "oy matrisi" elde edilir.

$a \in A$ adayının oy matrisinin i. sırasında kaç kez geçtiğini a_i sayısı ile gösterelim; l_a tam sayısı da $\sum_{i=1}^{l} a_i > \frac{n}{2}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük l sayısı olsun. $\bar{l} = \min_{a \in A} l_a$ olmak üzere; $\{a \in A | l_a = \bar{l}\}$ kümesinin tek elemanlı olmasına yol açan oy matrislerine geçerli oy matrisleri diyeceğiz ve böyle her matris için, çoğunlukçu uzlaşıya göre yukarıdaki kümeye ait tek aday seçilmiş olacaktır.

Öte yandan, $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots \geq \omega_k \geq 0$ koşulunu sağlayan $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ gerçel sayılarına bir ağırlık sistemi; her geçerli oy matrisi için de, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i a_i$ sayısına a adayının toplam ağırlıklı puanı diyelim. Bir $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ ağırlık sistemi, tüm geçerli oy matrisleri için, çoğunlukçu uzlaşıya göre seçilen adayın toplam ağırlıklı puanının diğer bütün adaylarınkinden büyük olmasına yol açıyorsa, bu ağırlık sistemi çoğunlukçu uzlaşıyı temsil ediyor diyeceğiz.

(a) $k = 3$ için, çoğunlukçu uzlaşıyı temsil eden bir ağırlık sisteminin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

(b) $k > 3$ ise, böyle bir ağırlık sisteminin bulunmadığını gösteriniz.

4 Tüm a, b, c, d ve pozitif e gerçel sayıları için

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \leq e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + f(e)(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$$

eşitsizliğini doğru kılan en küçük $f(e)$ değerini e cinsinden bulunuz.

5 Bir ABC üçgeninin A açısının iç ve dış açıortaylarının BC doğrusunu kestiği noktalar D ve E ile gösterilmek üzere, $[DE]$ çaplı F merkezli çember ile ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberi ve bu iki çembere dıştam teğet olan bir d doğrusu çiziliyor. d doğrusunun çembere değdiği noktalardan FO doğrusuna indirilen dikmelerin ayakları P, Q ve bu iki çemberin ortak kirişinin uzunluğu m ise, $|PQ| = m$ olduğunu ispatlayınız.

6 Üç boyutlu uzayda, her biri, kenarları x, y ve z eksenlerine paralel bir dikdörtgenler prizması biçiminde olan $D_1, D_2, \ldots, D_n$ bölgeleri verilmiş olsun. Her D_i bölgesinin x eksenine, y eksenine ve z eksenine paralel olan kenarlarının uzunluklarını sırasıyla x_i, y_i ve z_i ile gösterelim. Tüm D_i ve D_j bölgeleri için, $x_i < x_j$ veya $y_i < y_j$ veya $z_i < z_j$ ise, $x_i \leq x_j$ ve $y_i \leq y_j$ ve $z_i \leq z_j$ dir. $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ bölgesinin hacmi 1997 ise, $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_m}\}$ altkümesinin bulunduğunu gösteriniz.

(i) $k \neq l \Rightarrow D_{i_k} \cap D_{i_l} \neq \emptyset$

(ii) Hacim $\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_{i_k}\right) \geq 73$.

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1998

1 İkizkenar ABC üçgeninin ($|AB| = |AC|$) $[BC]$ tabanı üzerinde $|BD| : |DC| = 2 : 1$ olacak biçimde bir D noktası, $[AD]$ üzerinde ise $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPD})$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{BAC})/2$ olduğunu gösteriniz.

2 Tüm $0 \leq a \leq b \leq c$ gerçel sayıları için

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc$$

olduğunu gösteriniz.

3 Bir çemberin üstündeki noktalar üç renge boyanıyorlar. Köşelerini çember üstünde aynı renge boyanmış noktaların oluşturduğu sonsuz sayıda ikizkenar üçgenin bulunduğunu gösteriniz.

4 $x^3 + 3367 = 2^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

5 XOY açısının $[OX$ ve $[OY$ ışınları üzerinde sırasıyla M ve N değişken noktaları alındığında $|OM| + |ON|$ sabit ise, $[MN]$ nın orta noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

6 $n \times n$ bir satranç tahtasındaki karelerin köşelerinden bazıları, bu satranç tahtasının karelerinden oluşan her $k \times k$ ($1 \leq k \leq n$) karenin en az bir kenarının üstünde boyanmış bir nokta olacak biçimde boyanıyor. Eğer bu koşulu sağlamak için boyanması gereken en az nokta sayısını $\ell(n)$ ile gösterirsek,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ell(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

olduğunu kanıtlayınız.

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 1999

1 $0 \le x, y, z, w \le 36$ olmak üzere,
$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$
denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

2 O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,
$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$
olduğunu ispatlayınız.

3 n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $|f(i) - f(j)| \le p$ şartını sağlayan
$$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{-p, -p+1, \dots, p-1, p\}$$
fonksiyonlarının sayısının $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

4 Her $n > 1$ için $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$, $\dfrac{1}{2} < a_1 < 1$ ve $\sum\limits_{n=1}^{2000} a_n = 1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

5 Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 veY_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1, A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,
$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}} \right)^2 \le \frac{3}{2} R$$
olduğunu ispatlayınız.

6 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2000

1. Merkezi O ile gösterilen bir çember ve bu çemberin iç bölgesinde bir A noktası alınıyor. B noktası çemberin üzerinde ve OA doğrusunun dışında olmak üzere, AOB açısının iç açıortayı ile $[AB]$ nın kesişiminin geometrik yerini bulunuz.

2. Her n pozitif tamsayısı için
$$P_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$$
şeklinde tanımlanıyor. Her a pozitif tamsayısı için,
$$P_n(x) = (1 + ax + x^2 R(x))Q(x)$$
olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı ile, katsayıları tam sayılar olan $R(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının bulunduğunu gösteriniz.

3. Tüm $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ için tanımlanmış ve en çok n sıralı (x, y) ikilisinde farklı değerler alan her $f(x, y)$, $g(x, y)$ fonksiyon çifti için $x \notin X$ ve $y \notin Y$ iken $f(x, y) = g(x, y)$ olmasını sağlayacak biçimde, her biri 1000 elemanlı $X, Y \subset \{1, 2, \ldots, 2000\}$ kümeleri bulunabiliyorsa, n tamsayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

4. p asal bir sayı olsun. Derecesi p'den küçük olan, katsayıları $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ kümesinde yer alan ve tüm m, n tam sayıları için
$$T(n) \equiv T(m) \pmod{p} \Rightarrow n \equiv m \pmod{p}$$
koşulunu sağlayan bir $T(x)$ polinomunun derecesinin en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

5. Bir a pozitif gerçel sayısı ve tepesi A noktasında bulunan bir açı verilmiş olsun. A dan geçen ve bu açının kenarlarını $|AB| + |AC| = a$ koşulunu sağlayan B ve C noktalarında kesen tüm çemberlerin A nın dışında bir ortak noktasının daha bulunduğunu gösteriniz.

6. Her $x \in [0, 1]$ için $f^n(x) = x$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayının bulunmasını olanaklı kılan tüm $f : [0, 1] \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

   ($x \in [0, 1]$ olmak üzere, $f^n(x)$; $f^1(x) = f(x)$ ve her k pozitif tam sayısı için $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$ bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor.)

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2001

$\boxed{1}$ Konveks bir $ABCD$ dörtgeninin $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarının orta dikmeleri bu dörtgenin iç bölgesindeki bir P noktasında; $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri de dörtgenin iç bölgesindeki bir Q noktasında kesişiyor. $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ ise, $\widehat{AQB} = \widehat{CQD}$ olduğunu gösteriniz.

$\boxed{2}$ Bir $(x_n)_{-\infty<n<\infty}$ gerçel sayı dizisi, her n tam sayısı için,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 10}{7}$$

bağıntısını sağlıyor. Bütün n tam sayıları için $x_n < M$ olmasını sağlayan bir M gerçel sayısı varsa, x_0 teriminin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

$\boxed{3}$ Aynı büyüklükteki n parçadan oluşan bir keki, her parçayı en çok bir kez keserek, k kişi arasında eşit olarak paylaştırmak istiyoruz. n nin pozitif bölenlerinin sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; k nin böyle bir paylaşımı olanaklı kılan değerlerinin sayısının $n + d(n)$ olduğunu gösteriniz.

$\boxed{4}$ $3^x + 11^y = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) sıralı pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

$\boxed{5}$ A noktasından geçen ve biribirine dik olmayan iki doğru ile bu doğrulardan birinin üstünde A dan farklı bir F noktası verilmiş olsun. A ve F noktalarından geçen ve ikinci doğruyu A dan farklı bir G noktasında daha kesen çemberin F ve G deki teğetlerinin kesişim noktası P_G ise, P_G nin geometrik yerini bulunuz.

$\boxed{6}$ $n \times n$ bir santranç tahtasının birim karelerini, her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için i inci satır ve i inci sütundaki toplam $2n - 1$ kare farklı renklerde olacak biçimde, k renk kullanarak boyamak istiyoruz.

(a) $n = 2001$ ise, $k = 4001$ için böyle bir boyama işleminin yapılamayacağını gösteriniz.

(b) $n = 2^m - 1$ ise, $k = 2^{m+1} - 1$ için bu işlemin gerçekleştirilebileceğini kanıtlayınız.

10. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2002

1 $n \geq 2$ bir tam sayı ve $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının bir permütasyonu olmak üzere, gerçel eksen üstünde $1, 2, ..., n$ noktalarına sırasıyla $a_1, a_2, ..., a_n$ elma yerleştiriliyor. A, B, C isimli çocuklara sırasıyla $x_A, x_B, x_C \in \{1, 2, \ldots, n\}$ noktaları veriliyor. Her $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için, kendilerine verilen noktalar k ye en yakın olan çocuklar a_k elmayı paylaşıyor. (Elmalar istenildiği kadar küçük parçalara ayrılabiliyor.) Çocuklardan hiçbiri, diğer ikisinin noktaları aynı kalmak üzere, topladığı elma miktarı eskisine göre kesin artacak biçimde kendisine $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinde yeni bir nokta seçemiyorsa, (x_A, x_B, x_C) ye bir denge konumu diyoruz. n nin hangi değerleri için, bir denge konumunun var olmasını sağlayan uygun bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dağılımının bulunduğunu belirleyiniz.

2 Bir A noktasında dıştan teğet olan iki çember, bir Γ çemberine B ve C noktalarında içten teğettir. Γ çemberinin küçük çemberlere A noktasında teğet olan kirişinin orta noktası D dir. Çemberlerin merkezleri doğrudaş değilse, BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezinin A olduğunu gösteriniz.

3 Çizge Hava Yolları (ÇHY), Çizge Cumhuriyeti'nin bazı kentleri arasında uçak seferleri düzenlemektedir. Her kentten en az üç farklı kente sefer vardır ve yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak, Çizge Cumhuriyeti'nin herhangi bir kentinden başka bir kentine ulaşmak mümkündür. Bunu, yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak herhangi bir kentten bir diğerine ulaşmanın hala mümkün kalacağı, ancak kentlerin en az $\dfrac{2}{9}$ undan sadece bir seferin olacağı bir şekilde yapmanın olanaklı olduğunu kanıtlayınız.

4 $0 \leq x, y < p$ ve $y^2 \equiv x^3 - x \pmod p$ koşullarını sağlayan (x, y) sıralı tam sayı ikililerinin sayısının p olmasına yol açan tüm p asal sayılarını bulunuz.

5 Kenar uzunlukları $|BC| < |AC| < |AB|$ koşulunu sağlayan dar açlı bir ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde sırasıyla $|BD| = |BC| = |CE|$ olacak biçimde D ve E noktaları alınıyor. ADE üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklığa eşit olduğunu gösteriniz.

6 n pozitif bir tam sayı olsun ve $\mathbf{R}^n$ ile sıralı gerçel sayı n lilerinin kümesini gösterelim. $1, 2, \ldots, n$ sayılarının, her $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için, $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)} \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir σ permütasyonunun bulunduğu $\mathbf{R}^n$ ye ait $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemanlarının kümesini de T ile gösterelim. Aşağıdaki koşulu sağlayan bir d gerçel sayısının bulunduğunu kanıtlayınız:

Her $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ için,

$$a_i = \frac{1}{2}(b_i + c_i), \quad |a_i - b_i| \leq d, \quad |a_i - c_i| \leq d \quad (1 \leq i \leq n)$$

koşullarını yerine getiren $(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n) \in T$ vardır.

11. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2003

1 $n \geq 2$ arabanın katıldığı bir yarışta, 1 den n ye kadar numaralanmış arabalar, başlangıç noktasından numara sırasına göre belli aralıklarla ayrılıyor. Yarış boyunca bir araba bir başkasını en çok bir kez geçiyor ve her araba toplam olarak aynı sayıda araba tarafından geçiliyor. Ayrıca herhangi farklı iki arabanın yarış boyunca geçtikleri arabaların sayıları birbirinden farklı olup, arabalar bitiş noktasına farklı zamanlarda varıyor. n nin bu durumu olanaklı kılan tüm değerlerini bulunuz.

2 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarları üstünde sırasıyla K, L, M ve N noktaları alınıyor. $Alan(AKN) = s_1$, $Alan(BKL) = s_2$, $Alan(CLM) = s_3$, $Alan(DMN) = s_4$ ve $Alan(ABCD) = s$ olmak üzere,

$$\sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} + \sqrt[3]{s_3} + \sqrt[3]{s_4} \leq 2\sqrt[3]{s}$$

olduğunu gösteriniz.

3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, her $t \in (0,1)$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$,

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2003} \text{ ve } a_{2004} = a_1$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k$$

olduğunu gösteriniz.

4 $2^{2n+1} + 2^n + 1$ sayınsın tam kuvvet olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

5 Bir ABC üçgeninin AB ve BC kenarlarına teğet olan bir S çemberi, ABC üçgeninin çevrel çemberine de bir T noktasında teğettir. I, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi ise, $\widehat{ATI} = \widehat{CTI}$ olduğunu gösteriniz.

6 $m \times n$ bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ya da 1 yazılarak elde edilen bir yazılıma, 0 ve 1 lerin sayısı eşitse, *eşit* bir yazılım diyoruz. a gerçel bir sayı olmak üzere, m satır ve n sütunun her biri için, o satır ya da sütun içindeki 1 lerin yüzdesi a dan küçük ya da $100 - a$ dan büyük olmayacak şekilde bir eşit yazılımı olanaklı kılan m ve n sayıları bulunuyorsa, a ya *güzel* sayı diyoruz. En büyük güzel sayıyı bulunuz.

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2004

1 $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde, A köşesine ait yükseklik, açıortay ve kenarortayın ayakları, sırasıyla, H, L ve D noktalarıdır. $m(\widehat{HAL}) = m(\widehat{DAL})$ olması için gerek ve yeter koşulun, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olması olduğunu gösteriniz.

2 Bir ülkedeki 80 kentten bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Her kentten en az 7 başka kente doğrudan uçak seferi bulunmakta olup, herhangi bir kentten bir diğerine doğrudan ya da sonlu sayıda aktarma yaparak uçakla ulaşmak mümkündür. Karşılıklı uçak seferleri hangi kentler arasında düzenlenmiş olursa olsun, herhangi bir kentten bir diğerine en çok k aktarmayla ulaşılmasını olanaklı kılan en küçük k sayısını bulunuz.

3 (a) $n^2 - 1$, $n^2 - 2$ ve $n^2 - 3$ sayılarından her biri için, bu sayının pozitif bölenlerinin sayısını 10 yapan bir n tam sayısı bulunuz.

(b) $n^2 - 4$ ün pozitif bölenlerinin sayısının, n tam sayısının hiçbir değeri için 10 olamayacağını gösteriniz.

4 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini göstermek üzere, tüm $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $f(n) - f(n + f(m)) = m$ koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5 Bir ABC üçgenin, $[BC]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, BC, CA ve AB doğrularına değme noktaları, sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1; $[CA]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_2, B_2 ve C_2; $[AB]$ kenarına ait dışteğet çemberinin, aynı doğrulara değme noktaları, yine sırasıyla, A_3, B_3 ve C_3 olsun. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ve $A_3B_3C_3$ üçgenlerinin çevrelerinin toplamının, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapına oranının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

6 $n, m \geq 0$ tam sayıları için, $K(n, 0) = \phi$ ve

$$K(n, m + 1) = \{k \mid 1 \leq k \leq n \text{ ve } K(k, m) \cap K(n - k, m) = \phi\}$$

ise, $K(2004, 2004)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2005

1 Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4} \geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

olduğunu gösteriniz.

2 $|CB| > |AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde, $[AC]$ nın orta dikmesi $[BC]$ yi K; $[BC]$ nin orta dikmesi de AC yi L de kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; CKL ve OAB üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri de sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere, OCO_1O_2 dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

3 $n+1$ kentin bulunduğu bir ülkede, bu kentlerden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. A ve B kentleri arasında yapılan bir karşılıklı sefer, aynı gün içinde hem A dan B ye, hem de B den A ya yapılan bir uçuş ikilisi anlamına gelip, bir kentten diğerine karşılıklı olmayan tek yönlü bir sefer mevut değildir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilmektedir. A kenti için, bir günde A dan kalkan uçak sayısını d_A ile gösteriyoruz. Başkent dışındaki tüm A kentleri için $d_A \leq n$ ve yine başkent dışındaki ve aralarında karşılıklı uçak seferi bulunmayan farklı herhangi iki A, B kenti için, $d_A + d_B \leq n$ koşulları sağlanmaktadır. $n+1$ kent arasında yer alan başkentten bir gün içinde yapılan uçak seferlerinin sayısı konusunda ise, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Bu ülkede bir günde en çok kaç karşılıklı uçak seferi yapılabileceğini ve bu en çok karşılıklı sefer sayısını olanaklı kılan tüm uçuş çizelgelerini belirleyiniz.

4 $5^m + 7^n = k^3$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlülerini bulunuz.

5 Kenar uzunlukları a, b, c ve iç teğet çemberinin yarıçapı r olan bir üçgende,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$$

olduğunu gösteriniz.

6 Terimleri tam sayılar olan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde, her $n \geq N$ için,

$$a_n = |\{i \mid i \leq i < n \text{ ve } a_i + i \geq n\}|$$

olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı varsa, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin en çok kaç değeri sonsuz kere alabileceğini belirleyiniz?

14. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2006

1 Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

(Selim Bahadır)

2 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklı bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

3

$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

polinomunun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Okan Tekman)

4 $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$t = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

ise,

$$\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$$

olduğunu gösteriniz.

(Refail Alizade)

5 Dar açılı bir ABC üçgeninin yükseklikleri $[AA_1]$, $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ olsun. AB_1C_1, BC_1A_1 ve CA_1B_1 üçgenlerinin iç merkezleri, sırasıyla, O_A, O_B ve O_C olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına, sırasıyla, T_A, T_B ve T_C noktalarında teğet ise, $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

(Mehmet Tagiyev)

6 Kenarları, alanı ve iç açılarının derece cinsinden ölçüleri rasyonel sayılar olan bir üçgenin bulunmadığını ispat ediniz.

(Selim Bahadır)

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2007

1 Dar açılı bir ABC üçgeninin AC kenarını çap kabul eden çember, AB ve BC yi, A ve C dışında, sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberi, CK doğrusunu C dışında F noktasında; AL doğrusunu ise, A dışında D noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir E noktası alıp, BE ile AC nin kesiştiği noktaya N diyelim. Eğer

$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$

ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

2 2007×2007 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın i. satır ve j. sütunundaki birim kareyi (i, j) ile $x \le i$ ve $y \le j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı (x, y) birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her (i, j) birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

(Özgür Kişisel)

3 $a + b + c = 3$ eşitliğini sağlayan tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \ge 4$$

olduğunu gösteriniz.

(Refail Alizade)

4 $k > 1$ bir sayı, $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1} - 1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

5 $m(\widehat{B}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC kenarına D noktasında değiyor. ABD ve ACD üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla X ve Z olmak üzere, XZ ve AD doğruları K noktasında kesişiyor. XZ nin ABC nin çevrel çemberini kestiği noktalar U ve V; UV doğru parçasının orta noktası M; AD nin ABC nin çevrel çemberini A dışında kestiği nokta Y olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

(Cafer Tayyar Yıldırım)

6 n kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, herhangi bir kentin tüm yolları kapansa bile, her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabiliyor. Farklı A ve B kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok k yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir l yolu için, A dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, l yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere B ye ulaşabiliyorsak, *A kenti B kentine k-yönlü bağlanabilir* diyoruz. Her A kenti başka her B kentine k-yönlü bağlanabiliyorsa, k en az kaç olur?

(Azer Kerimov)

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2008

1 Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC, AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1$, $[HB_1$ ve $[HC_1$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O, H ve H_0 noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

(Ömer Faruk Tekin, Semih Yavuz)

2 (a) $\dfrac{7^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

(b) $\dfrac{11^{p-1}-1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

(Şahin Emrah)

3 $a+b+c=1$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2-ca+a^2)} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Semih Yavuz)

4 $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayıların ve $\mathbb{Z}$ de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

(i) $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$,

(ii) her $k \notin \{0,1\}$ için, $f(0,k)=0$ ve

(iii) her $n \geq 1$ ve k için, $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$

koşullarını sağlıyorsa

$$\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$$

toplamının değerini bulunuz.

(Serhat Doğan)

5 Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. $PQ\cap RS=\{A\}$ ve $PS\cap QR=\{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P,Q,R,S noktalarının bulunmasını sağlayan ve ℓ doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A,B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

(Serhat Doğan)

6 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t=0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t=1$ anında da, ağ yönetici, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t=2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t=2k+1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m\geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2\leq i\leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

(Azer Kerimov)

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2009

1 $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

(Okan Tekman)

2 Γ, ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A', $\widehat{BAC}$ nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kestiğini gösteriniz.

(Serhat Doğan)

3 Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerinin belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

4 Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1, B_1, C_1 dir. K, $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A, K, P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

(Hasan Hüseyin Eruslu)

5 Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4 - b^2c^2)}{ab + 2bc + ca} + \frac{(c+a)(b^4 - c^2a^2)}{bc + 2ca + ab} + \frac{(a+b)(c^4 - a^2b^2)}{ca + 2ab + bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

6 $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i | N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

(Okan Tekman)

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2010

1 Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hala mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük k sayısını belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

2 P, ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

3 Her n pozitif tam sayısı ve $a_1a_2\dots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif gerçel sayıları için,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

4 A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, $[BC]$ yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgenin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $|EQ|$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

5 $0 \leq a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim. $\mathcal{S}$ ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \leq n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve $\mathcal{S}$ ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

(Okan Tekman)

6 K, düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A, K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

(Umut Varolgüneş)

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2011

1 $n \geq 2$ ve $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_k$; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A'_i \cap A_j$, $A_i \cap A'_j$ ve $A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[A, E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

(Selim Bahadır)

2 D, ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E, $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

3 $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

4 $a_1 = 5$ ve $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı $a_{2011} + 1$ sayısını bölüyorsa, $p = 3$ olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

5 M ve N düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalardan biri M ye, diğeri de N ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi $K(M, N)$ ile gösterelim. $K(M, N)$ nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm (M, N) ikililerini belirleyiniz.

(Selman Erol)

6 A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2012

1 Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

2 ABC, $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D, A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90°$ ve $m(\widehat{PBD})+m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor.

$CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

3 Tüm x, y gerçel sayıları için,

(i) $f\left(f(x^2) + y + f(y)\right) = x^2 + 2f(y)$ ve

(ii) $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

4 Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \ge 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

5 $x_i \in 1, 2, \ldots, 20, (1 \le i \le 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.

Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \le x_i (1 \le i \le 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*

$$x_i \le y_i (1 \le i \le 2012) \Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.

A ve B boş olmayan sırasıyla bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B| / (|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

6 Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I, $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.

(a) P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(b) Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

(Ufuk Kanat)

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2013

1 $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor.

D noktasının BE doğrusuna göre simetriğinin, L, F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

(Şahin Emrah)

2 m pozitif bir tam sayı olsun.

(a) $1 + km^3$ sayısının bir tam küp olmasını ve $1 + kn^3$ sayılarının hiçbir $n < m$ pozitif tam sayısı için bir tam küp olmamasını sağlayan sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $p \equiv 2 \pmod 3$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı ve bir r pozitif tam sayısı için, $m = p^r$ ise, (a) kısmındaki koşulu sağlayan tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Şahin Emrah)

3 n hava yolu şirketinin ve 100 kentin bulunduğu bir ülkedeki kentlerden bazıları arasında karşılıklı olarak toplam 2013 uçak seferi yapılıyor. Bu seferleri kullanarak bu kentlerden herhangi birinden bir diğerine gitmek olanaklı olup, birinden diğerine doğrudan veya tek aktarma ile gidilemeyen en az iki kent bulumaktadır. Bu ülkedeki herhangi iki kent arasında tek bir şirketin uçuşlarını kullanarak gitmek mümkünse, n nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

4 $2^n + n = m!$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

5 Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc)$$

olmasını sağlayan en büyük M gerçel sayısını belirleyiniz.

(Fehmi Emre Kadan)

6 Düzlemde yer alan ve aralarındaki uzaklıklar pozitif tam sayılar olan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarından her biri için, diğer noktaların bu noktaya olan uzaklıkları azalmayacak biçimde sıralandığında oluşan dizi hep aynı ise, n nin alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2014

1 Bir torbada üstlerine 1 den 2014 e kadar tam sayılar yazılmış 1007 siyah ve 1007 beyaz top bulunuyor. Her adımda torbadan 1 top çekerek masanın üstüne koyuyoruz ve istersek, o an masanın üstünde bulunan toplardan farklı renklerdeki herhangi ikisini seçip diğer bir torbaya koyabiliyoruz. Bunu yaparsak, bu iki topun üstlerinde yazılı olan sayıların farkının mutlak değeri kadar puan kazanıyoruz. 2014 adım sonunda en fazla kaç puan toplamayı garantileyebileceğimizi belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

2 $x^3 = 3^y 7^z + 8$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz.

(Şahin Emrah)

3 D, E, F noktaları bir ABC üçgeninin sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ kenarları üstünde olmak üzere AD, BE, CF doğruları P noktasında kesişiyor ve A köşesinden geçen bir ℓ doğrusu ile $[DE$ ve $[DF$ ışınları sırasıyla, Q ve R noktalarında kesişiyor. $[DB$ ışını üstündeki bir M noktası ile $[DC$ ışını üstündeki bir N noktası için,

$$\frac{|QN|^2}{|DN|} + \frac{|RM|^2}{|DM|} = \frac{(|DQ| + |DR|)^2 - 2|RQ|^2 + 2|DM| \cdot |DN|}{|MN|}$$

eşitliği sağlanıyorsa, AD ve BC doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

4 Bir çemberin birbirine paralel olmayan iki kirişinin orta noktaları P ile Q ve bu kirişlerin uç noktalarından çembere çizilen teğet doğruların kesişim noktaları sırasıyla, A ve B dir. ABP üçgeninin diklik merkezinin AB doğrusuna göre simetriği olan R noktasından AP, BP, AQ, BQ doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, R_1, R_2, R_3, R_4 noktaları ise,

$$\frac{|AR_1|}{|PR_1|} \cdot \frac{|PR_2|}{|BR_2|} = \frac{|AR_3|}{|QR_3|} \cdot \frac{|QR_4|}{|BR_4|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(Fehmi Emre Kadan)

5 Hangi n pozitif tamsayıları için,

$$\{a_i + \frac{(-1)^i}{a_i} : 1 \le i \le n\} = \{a_i : 1 \le i \le n\}$$

koşulunu sağlayan birbirinden ve sıfırdan farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

(Selim Bahadır)

6 Otuz altı hava alanından herhangi ikisi arasındaki karşılıklı uçuşlardan her biri beş havayolu şirketinden biri tarafından yapılacaktır. Ulaştırma Bakanlığı her hava alanına, o hava alanında aralarında aktarma yapılabilen aynı şirkete ait her uçuş ikilisi için 1 milyon lira destek vermeye karar veriyor. Bakanlığın bu uygulama için harcayacağı paranın en az ne kadar olabileceğini belirleyiniz.

(Azer Kerimov)

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2015

1 m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

sayısı bir tam sayı ise, k nın bir tamkare olduğunu gösteriniz.

(Şahin Emrah)

2 x, y ve z herhangi ikisinin toplamı 1 den farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2} + \frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2} + \frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2} \geq 2(x+y+z) - \frac{3}{4}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik durumunu sağlayan tüm (x, y, z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz.

(Fehmi Emre Kadan)

3 $n \geq 4$ olmak üzere düzlemde n nokta veriliyor. Tüm nokta ikilileri doğru parçalarıyla birleştirildikten sonra hiçbir doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarının sayısı en çok kaç olabilir?

(Melih Üçer)

4 2015 tablonun gösterildiği bir sergide her katılımcı bir tablo ikilisi seçip tahtaya yazıyor. Sonra Sahte Sanatçı (S.S.) tahtada yazılı ikililerden bazılarını seçip, bu ikililerin her birinde tablolardan herhangi birini daha güzel olarak işaretliyor. Daha sonra sanatçının yardımcısı (S.Y.) her adımında tahtadaki henüz kıyaslanmamış bir (A, C) tablo ikilisini, bir B tablosu için tahtada A, B den daha güzel ve B, C den daha güzel olarak belirtilmişse, A, C den daha güzel olarak işaretliyor. S.S., tahtaya hangi ikililer yazılmış olursa olsun en fazla k ikiliyi kıyaslayarak S.Y. nin sonlu adım sonucunda tahtadaki tüm ikilileri kıyaslanmasını sağlayabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Not: S.Y, henüz kıyaslanmamış bir (A_1, A_n) tablo ikilisini, $A_2, A_3 \cdots, A_{n-1}$ tabloları için A_1, A_2 den daha güzel; A_2, A_3 ten daha güzel; ... ; A_{n-1}, A_n den daha güzel olarak belirtilmişse, A_1, A_n den daha güzel olarak işaretleyebiliyor.

(Azer Kerimov)

5 En büyük iç açısı D olan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BC ve AD doğruları E, AB ve CD doğruları ise F noktasında kesişiyorlar. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde $\angle EPD = \angle FPD = \angle BAD$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $ABCD$ nin çevrel çemberinin merkezi O olmak üzere, FO doğrusu AD, EP, BC doğrularını sırasıyla X, Q, Y noktalarında kesiyor. $\angle DQX = \angle CQY$ ise $\angle AEB = 90°$ olduğunu gösteriniz.

(Fehmi Emre Kadan)

6 n ile aralarında asal olan her a pozitif tam sayısı için $2n^2 \mid a^n - 1$ olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

(Melih Üçer)

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2017

1 25 çeşit yemeğiyle ünlü bir A köyünde yapılacak bir düğün için 2017 kişinin yaşadığı komşu B köyünden düğüne bazı kişiler davet edilecektir. B köyündeki her bir kişi bu 25 çeşit yemekten en az birini sevmektedir ve her yemek için B köyünde o yemeği seven en az bir kişi bulunmaktadır. B köyünden düğüne davet edilen kişilerin kümesine, her bir yemek davet edilen en az bir kişi tarafından seviliyorsa, *uygun davetli listesi* diyelim. Her uygun davetli listesinden en az bir eleman içeren bir kümeye ise *kamber grubu* diyelim. Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamber grubu olmayan herhangi bir kamber grubundaki herkesin sevdiği bir yemek bulunduğunu gösteriniz.

(Selim Bahadır)

2 Karşılıklı kenarları paralel olmayan bir $ABCD$ dörtgeninde AB ile CD doğruları X de kesişiyor. A merkezli r_1 yarıçaplı çember ile D merkezli r_2 yarıçaplı çember P ve Q da, B merkezli r_1 yarıçaplı çember ile C merkezli r_2 yarıçaplı çember R ve S de kesişiyor.

$$|XA| \cdot |XB| + {r_1}^2 = |XC| \cdot |XD| + {r_2}^2$$

ise, P, Q, R, S noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

(Melih Üçer)

3 n pozitif bir tam sayı olmak üzere $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ pozitif gerçel sayıları her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ koşulunu sağlıyor. $c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

(Serhat Doğan)

4 $d(a)$ ile a pozitif tam sayısının farklı asal bölenlerinin sayısını gösterelim. Her n pozitif tam sayısı için $k - m = n$ ve $d(k) - d(m) = 1$ şartlarını sağlayan k, m pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

(Şahin Emrah)

5 Azalmayan bir $x_0, x_1, \cdots, x_{2017}$ pozitif tam sayı dizisinde $x_0 = 1$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ altdizisi tam olarak 25 farklı pozitif tam sayı içeriyor.

$$\sum_{i=2}^{2017} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq 623$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliği sağlayan dizilerin sayısını bulunuz.

(Serhat Doğan)

6 Her biri 2017 br uzunluğunda olan sonlu sayıda çubuk bir levhanın üzerinde dikey olarak çakılı halde bulunuyor. Bu çubukların her birinin üzerinde serbestçe kaydırılabilen bir boncuk bulunuyor. Bazı boncuk ikilileri lastik parçalarıyla birbirlerine birleştirilmiştir. Bu düzenekte ayrıca, tüm lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Genç Karınca ve sadece uçlarındaki boncukların yükseklikleri arasında 1 br fark bulunan lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Yaşlı Karınca bulunuyor. Genç Karınca lastikleri kullanarak her boncuktan her boncuğa ulaşabiliyor.

Her boncuğun yerden yüksekliğinin tam sayı olduğu ve her lastik parçasının uçlarındaki boncukların farklı yüksekliklerde bulunduğu durumlara *geçerli durum* diyelim. Bu düzenekte en az bir geçerli durum varsa Yaşlı Karıncanın her boncuktan her boncuğa ulaşabildiği en az bir geçerli durum olduğunu gösteriniz.

(Azer Kerimov)

26. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2018

1 $x^2 + y^2 + x + y = xy(x + y) - \dfrac{10}{27}$

$|xy| \leq \dfrac{25}{9}$

koşullarını sağlayan tüm (x, y) gerçel sayı ikililerini bulunuz.

2 Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB kenarlarını sırasıyla D, E, F noktalarında kesiyor. $[BE$ ışını üzerinde bir Q noktası $E \in [BQ]$ ve $m(\widehat{EDQ}) = m(\widehat{BDF})$ olacak şekilde alınıyor. $BE \perp AD$ ve $|DQ| = 2|BD|$ ise $m(\widehat{FDE}) = 60^\circ$ olduğunu gösteriniz.

3 $a_1, a_2, \dots$ dizisi her n pozitif tam sayısı için $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} = n^{10}$ şartını sağlıyor. c herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n > 1$ pozitif tam sayısı için

$\dfrac{c^{a_n} - c^{a_{n-1}}}{n}$ oranının tam sayı olduğunu gösteriniz.

4 Bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay BC kenarına teğet olan dış teğet çemberi $D \in [AE]$ olacak şekilde D ve E noktalarında kesiyor. $\dfrac{|AD|}{|AE|} \leq \dfrac{|BC|^2}{|DE|^2}$ olduğunu gösteriniz.

5 a_1, a_2, a_3, a_4 pozitif tam sayıları bir çember etrafına yan yana olanlar aralarında asal olacak şekilde dizilemiyor. $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ olmak üzere en çok kaç (i, j, k) sıralı üçlüsü $(\text{ebob}(a_i, a_j))^2 \mid a_k$ şartını sağlar?

6 Başlangıçta masanın üzerinde birbirinden farklı 2018 kutu bulunuyor. İlk aşamada Yazan ve Bozan, ilk hamleyi Yazan yapmak üzere, sırayla 2016 şar hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen tahtada yazılı olmayan bir kutu ikilisi seçip tahtaya yazıyor. İkinci aşamada Bozan tahtadaki ikilileri 1 den 4032 ye kadar istediği gibi numaralandırıyor ve k numaralı ikilideki kutulara k şer top koyuyor. Bozan, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir mi?

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2019

1 a, b, c pozitif gerçel sayıları

$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{bc}-1)(\sqrt{ca}-1)=1$$

şartını sağlıyor.

$$a-\frac{b}{c},\ a-\frac{c}{b},\ b-\frac{c}{a},\ b-\frac{a}{c},\ c-\frac{a}{b},\ c-\frac{b}{a}$$

sayılarının en çok kaçı 1 den büyük olabilir?

2 Her n pozitif tam sayısı için $d(n)$ ile n nin pozitif bölenlerinin sayısını gösterelim. k verilmiş bir tek sayı olmak üzere,

$$\text{obeb}(k, d(a_1)d(a_2)\cdots d(a_{2019}))=1$$

olmasını sağlayan bir $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$ artan aritmetik pozitif tam sayı dizisi bulunduğunu gösteriniz.

3 2019 öğrencinin bulunduğu bir okuldaki öğrenci kulüplerine sadece öğrenciler üye olabilmektedir. Her öğrenci kulübünün, kendi üyeleri arasından seçilmiş 12 kişilik bir yönetim kurulu vardır. Bir kulüp toplantısı ancak katılımcıların hepsi kulübün üyeleriyse ve kulübün yönetim kurulunun hepsi katılımcılar arasındaysa gerçekleşebilir. Bu okulda, eleman sayısı en az 12 olan her öğrenci kümesinin, tam olarak bir öğrenci kulübünün toplantılarını gerçekleştirebildiği biliniyor. Buna göre, tam olarak 27 üyesi olan öğrenci kulüplerinin sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

4 $|AB|=|AC|$ şartını sağlayan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde uç noktalardan farklı bir M noktası alınıyor. BM nin AC yi kestiği nokta E, BMC açısının iç açıortayının BC yi kestiği nokta F olmak üzere $m(\widehat{AFB})=m(\widehat{CFE})$ eşitliği sağlanıyor. ABC nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

5 $f : \{1, 2, \ldots, 2019\} \to \{-1, 1\}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ için öyle bir $\ell \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ vardır ki,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}:\ (\ell-i)(i-k)\geq 0} f(i) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}:\ 1\leq i\leq 2019} f(i)$$

toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

6 Bir $n>2$ tam sayısı ve bir a tam sayısı verildiğinde $n \mid a^d-1$ ve $n \nmid a^{d-1}+\cdots+a+1$ şartlarını sağlayan bir d pozitif tam sayısı bulunuyorsa, *a tam sayısı n-ayırandır* diyelim. Bir $n>2$ tam sayısı verildiğinde, $0<a<n$ ve $\text{obeb}(a,n)=1$ olup n-ayıran olmayan a tam sayılarının sayısına *n nin kusuru* diyelim. Kusuru en küçük mümkün değere eşit olan tüm $n>2$ tam sayılarını bulunuz.

28. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2020

$\boxed{1}$ $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere, $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ kümesinin k elemanlı her alt kümesinde $x^2 \mid y$ olacak şekilde x ve y elemanları bulunuyorsa, k nin alabilecegi en küçük değeri bulunuz.

$\boxed{2}$ Dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde diklik merkezinden farklı bir P noktası alınıyor. A dan BP ve CP ye indirilen dikme ayakları sırasıyla D ve E, P den AB ve AC ye indirilen dikme ayakları sırasıyla F ve G dir. $[AP]$ doğru parçasının orta noktası X olmak üzere, DFX ve EGX üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası BC üzerinde yer alıyorsa, $AP \perp BC$ veya $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ olduğunu gösteriniz.

$\boxed{3}$ x, y, z pozitif gerçel saylar olmak üzere,

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

$\boxed{4}$ p bir asal sayı olmak üzere,

$$\frac{28^p - 1}{2p^2 + 2p + 1}$$

bir tam sayı ise, $2p^2 + 2p + 1$ 'in pozitif tam bölen sayısın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

$\boxed{5}$ Her x gerçel sayısı için $\lfloor P(x) \rfloor = a_{\lfloor x^2 \rfloor}$ olacak şekilde bir $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin bulunmasını sağlayan tüm gerçel katsayılı P polinomlarını bulunuz.

Not: x bir gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x \rfloor$ ile x den büyük olmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.

$\boxed{6}$ Bir çember üzerindeki 2021 noktadan her biri $1, 2, \ldots, k$ renklerinden birine boyanmıştır. Her nokta ve her $1 \le r \le k$ rengi için bu noktayı içeren ve üzerindeki noktaların en az yarısının r renginde olduğu bir yay bulunuyor. Buna göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

29. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2021

1 Başlangıçta masadaki iki kutudan biri boş olup, diğerinde farklı renkli 29 bilye bulunmaktadır. Dolu kutuyla başlamak ve kutulara sırayla hamle yapmak üzere her hamlede sırası gelen kutudan bir veya birkaç bilye seçilip diğer kutuya aktarılıyor. Aynı bilye öbeği bir defadan fazla seçilmeden en çok kaç hamle yapılabilir?

2 Derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinomun en az d adet katsayısı 1'e eşit olup d adet gerçel kökü varsa d nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Not: Polinomun kökleri birbirinden farklı olmak zorunda değildir.)

3 Γ çemberi ABC üçgeninin BC kenarına X noktasında, AC kenarına ise Y noktasında teğettir. AB kenarı üzerindeki bir P noktası için XP ve YP nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla K ve L, AK ve BL nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla R ve S olsun. XR ve YS nin AB üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

4 Dar açılı bir ABC üçgeninde $D \in [AC]$ ve $E \in [AB]$ olmak üzere $[BD]$ ve $[CE]$ açıortaylardır. D den BC ve BA ya indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q, E den CA ve CB ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. AP ile CQ nun kesişimi X, AS ile BR nin kesişimi Y, BX ile CY nin kesişimi Z olmak üzere $AZ \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

5 a, b, c, d pozitif tam sayıları için

$$\{a \cdot b^n + c \cdot d^n \ : \ n = 1, 2, 3, ...\}$$

kümesinin en az bir elemanını bölen asal sayılar sonlu çoklukta ise $b = d$ olduğunu gösteriniz.

6 2021 öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak k arkadaşı olup üçü de birbiriyle arkadaş olan üç öğrenci bulunmuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

30. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2022

1 Bir ABC üçgeninde BC kenarının orta noktası M, A ya ait iç açıortayın BC ile kesişimi K ve ABC nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi L olsun. $[BC]$ çaplı çember A köşesine ait dış açıortaya teğet ise KLM nin çevrel çemberine de teğet olduğunu gösteriniz.

2 k, n pozitif tam sayılar olmak üzere $k \geq n!$ ise

$$\phi(k) \geq (n-1)!$$

olduğunu gösteriniz.

3 $a_1, a_2, ..., a_{2022}$ negatif olmayan gerçel sayıları $a_1 + a_2 + ... + a_{2022} = 1$ eşitliğini sağlıyor. En çok kaç (i, j) sıralı ikilisi için

$$a_i^2 + a_j \geq \frac{1}{2021}$$

olur?

4 Hangi a gerçel sayıları için

$$\frac{x^3+a}{y+z} = \frac{y^3+a}{x+z} = \frac{z^3+a}{x+y} = -3$$

olmasını sağlayan farklı x, y, z gerçel sayıları bulunur?

5 ABC üçgeninde $90 > \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ dir. Diklik merkezi H ve çevrel çember merkezi O olmak üzere HO ile BC doğrularının kesişimi T, AHO üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ise X olsun. H noktasının TX doğrusuna göre yansımasının ABC nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

6 2022 öğrencinin bulunduğu bir okulda tatil boyunca her gün ya müze gezisi ya da doğa gezisi düzenleniyor. Hiçbir öğrenci aynı tür geziye ikinci kez katılmıyor ve tüm gezilere farklı sayıda öğrenci katılıyor. İki geziye beraber katılan iki öğrenci bulunmadığına göre, toplam gezi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2023

1 Sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı için

$$\frac{n^2+m^2}{m^4+n} = k$$

olacak şekilde m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını gösteriniz.

2 Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. BPC üçgeninin çevrel çemberine P noktasında içten teğet olan ω_A ve dıştan teğet olan Γ_A çemberleri, ABC üçgeninin çevrel çemberine de sırasıyla A_1 ve A_2 noktalarında içten teğettir. B_1, B_2 ve C_1, C_2 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. O noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezi olmak üzere, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ve OP doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

3 Rakamlarının biri 1, biri 2, $\ldots$, biri 9 olan 9 basamaklı tüm sayılara *dengeli* sayı diyelim. Tüm dengeli sayıların yan yana ve küçükten büyüğe doğru yazılarak oluşturduğu rakam dizisi S olsun. S dizisindeki k ardışık terimden oluşan herhangi iki alt dizinin birbirinden farklı olmasını sağlayan en küçük k değerini bulunuz.

4 Başlangıçta tahta üzerinde her birinin 31 koordinatı olan 31 adet

$$(1,0,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,0,\ldots,1)$$

31-lileri yazılmıştır. Her işlemde, tahtada bulunan $(a_1,a_2,\ldots,a_{31})$ ve $(b_1,b_2,\ldots,b_{31})$ 31-lileri seçiliyor ve $(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_{31}+b_{31})$ 31-lisi de tahtaya yazılıyor. En az kaç işlem sonucunda tahtada

$$(0,1,1,\ldots,1),(1,0,1,\ldots,1),\ldots,(1,1,1,\ldots,0)$$

31-lilerinin tümü yer alabilir?

5 23 gerçel sayıdan oluşan bir kümenin, boş olmayan ve elemanlarının çarpımı rasyonel sayı olan alt kümelerinin sayısı tam olarak 2422 olabilir mi?

6 Bir ABC üçgeninin BC, AC, AB kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ve $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}$ olacak şekilde alınıyor. AEF üçgeninin çevrel çemberi, AD doğrusu ile ikinci kez R noktasında ve ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasından çizilen teğet ile ikinci kez S noktasında kesişiyor. EF doğrusu, BC ve SR doğruları ile sırasıyla L ve T noktalarında kesişiyor. SR doğrusunun $[AB]$ doğru parçasını ortalaması için gerek ve yeter koşulun BS doğrusunun $[TL]$ doğru parçasını ortalaması olduğunu gösteriniz.

32. Ulusal Matematik Olimpiyatı İkinci Aşama Sınavı - 2024

1 $n \geq 3$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, n köşeli bir tam çizgenin her kenarına birer gerçel sayı aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde yazılmıştır:

(i) Çizgedeki her üçgenin kenarlarına yazılan sayılardan ikisi birbirine eşit olup diğer sayı ise bu sayılardan büyüktür.

(ii) Her köşenini *ağırlığı*, o köşeden çıkan kenarlara yazılan sayıların toplamı olmak üzere, tüm köşelerin ağırlıkları birbirine eşittir.

Buna göre, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2 Dar açılı bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerinden indirilen yüksekliklerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberine D noktasında teğet olan bir çemberin EF doğrusu ile kesiştiği noktalar P ve Q olsun. PH ve QH doğruları ile BHC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktaları sırasıyla R ve S olsun. A noktasından geçen ve EF doğrusuna dik olan doğrunun BC doğrusu ile kesiştiği nokta T olsun. R, S, D, T noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3 Her $n \geq 2$ tam sayısı için $f(n)$ ile n sayısının farklı asal bölenlerinin çarpımını gösterelim (örneğin, $f(5) = 5$, $f(8) = 2$ ve $f(12) = 6$ olur). $a_1, a_2, \ldots$ dizisi, $a_1 \geq 2$ bir tam sayı ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n)$$

olacak şekilde tanımlanıyor. Her p asal sayısı için, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinde p ile bölünen bir terim bulunduğunu gösteriniz.

4 n bir pozitif tam sayı ve n sayısının tüm pozitif bölenleri $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ olsun.

$$\begin{aligned} 2d_2 + d_4 + d_5 &= d_7 \\ d_3 d_6 d_7 &= n \\ (d_6 + d_7)^2 &= n + 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

5 Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(z)}\right\} + \left\{\frac{f(z)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{z}\right\} + \left\{\frac{z}{x}\right\}$$

denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. Bir x gerçel sayısı için, $\lfloor x \rfloor$ sayısı x'in tam değeri olmak üzere, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ olarak tanımlanıyor: $\{2.7\} = 0.7$ ve $\{4\} = 0$.

6 $m, n \geq 2$ tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtasının bazı birim karelerine birer kale, her kale tek sayıda kale tarafından tehdit edilecek şekilde yerleştirilmiştir. Buna göre, satranç tahtasının üzerindeki kale sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.