TÜBİTAK

Ulusal Matematik Olimpiyatı

1. Aşama Sınavı

Soruları ve Çözümleri

geomania.org

Son Güncelleme: 25 Ocak 2025

İçindekiler

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1993

1 Köşegenleri dik kesişen bir dörtgende köşegenlerin uzunlukları toplamı 12 ise bu dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?

a) 18 **b)** 32 **c)** 16 **d)** 24 **e)** 36

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Köşegenlerin uzunluklarına x ve y dersek dörtgenin alanı $A = \dfrac{xy}{2}$ dir. $x+y=12$ verildiği göz önüne alınırsa, arimetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = 36$ olup $A \leq 18$ elde edilir. $x=y=6$ için $A_{\max} = 18$ değerine ulaşır.

2 Bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarı üstünde alınan (A ve B den farklı) n değişik nokta ile C yi, $[BC]$ kenarı üstünde alınan (B ve C den farklı) k değişik nokta ile A yı birleştiren doğru parçaları ABC üçgenini toplam kaç bölgeye ayırır?

a) nk **b)** $n+1+kn$ **c)** $(n+1)(k+1)$ **d)** $(n+1)k$ **e)** $(k+1)n$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$[AB]$ üzerindeki n tane noktayı C ile birleştirdiğimizde $n+1$ bölge oluşur. $[BC]$ üzerindeki k tane noktayı A ile birleştirdiğimizde $(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)$, yani

$k+1$ tane $(n+1)$ bölge oluşur. Dolayısıyla $(k+1)(n+1)$ tane bölge elde edilir.

3 n tamsayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $2^{10}+2^{13}+2^n$ bir tam kareye eşit olur?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$2^{10} = (2^5)^2$ ve $2^{13} = 2\cdot(2^5)\cdot 2^7$ olduğundan $n=14$ için $2^{10}+2\cdot(2^5)\cdot 2^7+2^{14} = (2^5+2^7)^2$ olur.

4 $13!+1 < p \leq 13!+13$ koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 5 **b)** 0 **c)** 3 **d)** 1 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Verilen aralıkta asal sayı mevcut değildir. Çünkü $13!+2, 13!+3, ..., 13!+13$ sayıları bileşik sayıdır. $13!$ sayısı çift olduğundan bu sayılardan ikinci bileşeni çift olanlar en azından çifttir. İkinci bileşeni tek olanların ise bu tek bileşenleri bu tek sayılar 13'ten küçük olduğundan $13!$ sayısı içinde çarpan olarak mevcuttur.

5 Eğer nüfus $t=0$ dan $t=1$ e kadar $\%i$, $t=1$ den $t=2$ ye kadar $\%j$ oranında artmışsa $t=0$ dan $t=2$ ye kadarki nüfus artış oranı kaçtır?

a) $i+j$ **b)** ij **c)** $i+j+\dfrac{ij}{100}$ **d)** $i+ij$ **e)** $i+j+\dfrac{i+j}{100}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$t=0$ anında nüfusun N olduğunu kabul edelim. $t=1$ de nüfus $\%i$ artışla $N\cdot\dfrac{i+100}{100}$ olur. $t=2$ de nüfus $\%j$ oranında yeni bir artışla $\left(N\cdot\dfrac{i+100}{100}\right)\cdot\dfrac{j+100}{100}=N\cdot\dfrac{100+i+j+(ij)/100}{100}$ olur. Dolayısıyla ilk durumdan son duruma kadar nüfus artış oranı yüzde $i+j+\dfrac{ij}{100}$ olur.

6 Aşağıdaki ispatta hangi adım hatalıdır?

TEOREM: $\dfrac{1}{2}$ sayısının karekökü yoktur.

İSPAT: $x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{array}{lll} & 2x^2=1 & i \\ \Longrightarrow & 2x^2+1=4-4x^2 & ii \\ \Longrightarrow & x^4+2x^2+1=x^4+4-4x^2 & iii \\ \Longrightarrow & (x^2+1)^2=(x^2-2)^2 & iv \\ \Longrightarrow & x^2+1=x^2-2 & v \\ \Longrightarrow & 1=-2 \text{ (çelişki)} & vi \end{array}$$

a) $i \implies ii$ **b)** $ii \implies iii$ **c)** $iii \implies iv$ **d)** $iv \implies v$ **e)** $v \implies vi$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

(iv) adımındaki $(x^2+1)^2=(x^2-2)^2$ ifadesinde her iki tarafın karekökü alınırken $x^2+1=|x^2-2|$ yazılmalıdır. $x^2=\dfrac{1}{2}$ olduğundan $x^2-2<0$ dır. Dolayısıyla $|x^2-2|=2-x^2$ dir. Fakat (v) adımında $|x^2-2|=x^2-2$ alınarak hata yapılmıştır.

7 $1,2,3,4$ rakamlarının permütasyonuyla elde edilen 4 rakamlı sayıların tümünün toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 66660 **b)** 66000 **c)** 66600 **d)** 60000 **e)** 66666

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Bu rakamlar kullanılarak yazılan $4!=24$ adet sayının her basamağında bu rakamların her biri $24/4=6$ kere tekrar eder. Bu durumda yazılabilecek sayıların toplamı $6(4+40+400+4000+3+30+300+3000+2+20+200+2000+1+10+100+1000)=66660$ olur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

Daha karmaşık tipteki soruları da çözmeye yarayacak güçlü bir yöntemi açıklayalım:

Her bir rakam her bir basamakta eşit sayıda (6 kez) görülecektir. $a = \dfrac{1+2+3+4}{4} = \dfrac{5}{2}$ olmak üzere bu simetriden dolayı $4! = 24$ sayının her birini $aaaa$ dört basamaklı sayısı gibi düşünebiliriz. Bunların toplamı $24 \cdot aaaa = 24 \cdot a \cdot 1111 = 66660$ bulunur.

8

$$\begin{aligned} xz - yt &= 1 \\ xt + 4yz &= 3 \end{aligned}$$

denklem çiftinin x, y, z, t negatif olmayan tam sayılar olmak üzere kaç tane (x, y, z, t) çözüm takımı vardır?

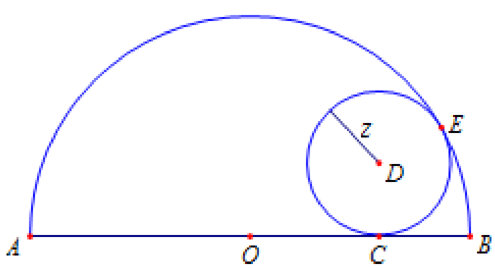
a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

x ve y değişkenlerine göre denklem sistemi çözülürse $x = \dfrac{4z+3t}{4z^2+t^2}$ ve $y = \dfrac{3z-t}{4z^2+t^2}$ bulunur. Negatif olmayan tam sayılarda çalıştığımızdan aşikar olarak $3z - t < 4z^2 + t^2$ olduğundan y nin tam sayı olması için $3z - t = 0$ yani $y = 0$ olmalıdır. Bu durumda $x = \dfrac{1}{z}$ olacağından $x = z = 1$ olmalıdır. Buna karşılık $t = 3$ olması gerektiğinden denklem sistemini sağlayan tek çözüm takımı $(1, 0, 1, 3)$ olur.

9



Şekilde D merkezli, z yarıçaplı çember AB doğrusuna ve O merkezli $[AB]$ çaplı çembere teğettir. $|AC| = x$, $|CB| = y$ ise, x, y, z arasında hangi bağıntı vardır?

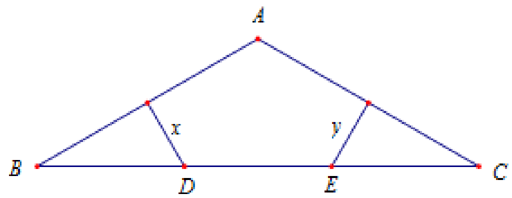
a) $2z^2 = xy$ **b)** $zx + zy = xy$ **c)** $2z^2 = x^2 + y^2$ **d)** $zx + xy = zy$ **e)** $x^2 = y^2 + z^2$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$[AB]$ çaplı çemberin yarıçapı $\dfrac{x+y}{2}$ olacağından $|OD| = \dfrac{x+y}{2} - z$ ve $|OC| = \dfrac{x-y}{2}$ olur. OCD üçgeninde Pisagor teoremi yazılırsa $\left(\dfrac{x+y}{2} - z\right)^2 = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + z^2$ eşitliğinden $zx + zy = xy$ bulunur.

$\boxed{10}$



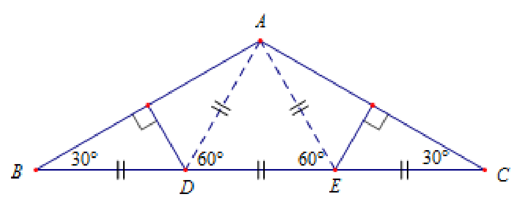
Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{A}) = 120°$ dir. x, y doğruları sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ nin orta dikmeleri, $x \cap [BC] = \{D\}$, $y \cap [BC] = \{E\}$ ve $|BC| = 24$ olduğuna göre, $|DE|$ kaçtır?

a) 14 **b)** 6 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$[AD]$ ve $[AE]$ çizilirse ABD, AEC üçgenleri ikizkenar, ADE üçgeni de eşkenar olur. Böylece $|BD| = |DE| = |EC| = \dfrac{24}{3} = 8$ dir.



$\boxed{11}$ $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$ denkleminin x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

a) Sonsuz **b)** 12 **c)** 2 **d)** 0 **e)** 3

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Verilen denklemi $y^2 = 3x^2 + 6x + 5$ biçiminde yazalım. Bu ifadeyi $\mod 3$ 'te incelersek $y^2 \equiv 2 \pmod 3$ bulunur. Halbuki bir y tamsayısı için $y \equiv 0, 1, -1 \pmod 3$ olup bu değerlerin karesini alırsak $y^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ elde edilir. Yani $y^2 \not\equiv 2 \pmod 3$ dir. Dolayısıyla $y^2 = 3x^2 + 6x + 5$ denkleminin tamsayılarda çözümü yoktur.

Çözüm 2:

x, $x+1$, $x+2$ sayıları $\mod 3$ te, $0, 1, 2$ sayılarının bir permütasyonuna denktir. Bu durumda, $y^2 \equiv 0+1+4 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$ denkliğinin çözümü olmadığı kolayca görülebilir.

$\boxed{12}$ 7 yolcu 3 vagondan oluşan boş bir trene rastgele birer vagon seçerek binerler. Birinci vagonda tam olarak iki yolcu bulunması olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{224}{729}$ **b)** $\dfrac{448}{729}$ **c)** $\dfrac{560}{2187}$ **d)** $\dfrac{452}{2187}$ **e)** $\dfrac{512}{2187}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Tüm durumların sayısı $3^7 = 2187$ ve istenen durumların sayısı $\binom{7}{2} \cdot 2^5 = 21 \cdot 32$ olup olasılık $\dfrac{21 \cdot 32}{2187} = \dfrac{224}{729}$ elde edilir.

13 $k > 1$ bir tamsayı ve $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise, $2k-1$ ve $9k+4$ tamsayılarının en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

a) 7 **b)** 17 **c)** $2k-1$ **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Çözüm için Öklid algoritması kullanalım. Buna göre $Obeb(a, b) = Obeb(a, a + bk)$ olgusunu kullanacağız. $Obeb(2k-1, 9k+4) = Obeb(2k-1, k+8) = Obeb(-17, k+8)$ olur. Verilenlerden $k + 8 \not\equiv 0 \pmod{17}$ olduğundan yanıt 17 olamayacağından, 1 olmalıdır.

14
$$\begin{aligned} xy + x + y &= 5 \\ x^2y + xy^2 &= 6 \end{aligned}$$
denklemleri veriliyor. $y > 1$ ise $x^2 + 2y^2$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 3 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 8 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

İlk denklemi sırasıyla x ve y ile çarpıp çıkan denklemleri toplarsak $x^2y+xy^2+(x+y)^2 = 5(x+y)$ ve $x+y = t$ dersek $t^2 - 5t + 6 = 0$ denklemini elde ederiz. Denklemin kökleri $x + y = 3$ ve $x + y = 2$ dir. Şimdi $x + y = 3$ alarak verilen denklemleri toplarsak $xy(x + y + 1) + x + y = 11$ denklemine yani $xy = 2$ değerine ulaşırız. $x + y = 3$ ve $xy = 2$ denklemlerinin ortak çözümünden $x = 2$ ve $x = 1$ elde olunur. $x = 1$ için $y = \dfrac{2}{x} = 2 > 1$ olur. $x + y = 2$ olması durumda reel kökler oluşmaz. Öyleyse $x^2 + 2y^2 = 1 + 8 = 9$ bulunur.

15 Bir ABC üçgeninde A ve B köşelerinden çizilen kenarortaylar dik olarak kesişmektedir. $|BC| = 7$, $|AC| = 9$ olduğuna göre, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\sqrt{28}$ **b)** $\sqrt{24}$ **c)** $\sqrt{27}$ **d)** $\sqrt{25}$ **e)** $\sqrt{26}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$|AB| = 2x$ olsun. O zaman C köşesinden geçen kenarortayın uzunluğu $V_c = 3x$ olur. ABC üçgeninde C köşesine göre kenarortay teoremi yazarsak $81 + 49 = 2x^2 + 18x^2$ den $|AB| = 2x = \sqrt{26}$ bulunur.

16 Verilen altı değişik rengi kullanarak bir kübün her yüzünü farklı bir renge boyuyoruz. Kübün istenildiği kadar ve istenilen istikametlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyamayı aynı kabul edersek, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

a) 6 **b)** 12 **c)** 30 **d)** 90 **e)** 180

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Belirli bir rengin daima tabanda olduğunu varsayabiliriz. Örneğin mavi rengimiz varsa, küpü döndürerek mavi renkli yüzeyi daima tabanda tutabiliriz. Şimdi mavi renkli yüzeye paralel olan yüzeyi (üst yüzeyi) boyamak için kalan 5 renkten birisi seçmeliyiz. Bu seçim 5 farklı yolla yapılabilir. Diyelim ki kırmızı renkle üst yüzeyi boyadık. Artık küpün alt-üst yüzeyleri arasında değişim yapılmayacaktır. Yani alt yüzey mavi ile ve üst yüzey kırmızı ile sabitlenmiş oldu. Kalan 4 renk ile yan yüzeyleri boyayacağız. Döndürmeler aynı kabul edildiği için, dairesel permütasyon uygularız. $(4-1)! = 6$ yolla yan yüzeyler boyanmış olur. Çarpma prensibiyle, $5 \cdot 6 = 30$ farklı boyama yapılabilir.

Çözüm 2:

Küpün dönme simetrilerinin grubu 24 elemanlıdır. Bir platonik katı cisim için

$$\text{Dönme simetrilerinin sayısı} = (\text{Köşe sayısı}) \cdot (\text{Bir köşenin derecesi})$$

eşitliği vardır. Küpün 8 köşesi vardır ve bir köşenin derecesi (yani köşeye birleşen ayrıt sayısı) 3 olduğundan küpün dönme simetrilerinin sayısı $8 \cdot 3 = 24$ tür. Şimdi 6 yüzeyin her birini farklı renklerle 6! yolla boyayabiliriz. Döndürmeler özdeş kabul edildiğinden,

$$\frac{6!}{24} = 30$$

yolla boyama yapılabilir.

Not: Kullanılan formülle ilgili açıklamayı buradan takip edebilirsiniz.

17 $T_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ ve $P_n = \dfrac{4T_2}{2(T_2 - T_1)} \cdot \dfrac{4T_3}{3(T_3 - T_2)} \cdots \dfrac{4T_n}{n(T_n - T_{n-1})}$ olmak üzere, P_{25} aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 317 **b)** 169 **c)** 1993 **d)** 3991 **e)** 7

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Öncelikle $T_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ eşitliğini yazarsak,

$$\frac{4T_n}{n(T_n - T_{n-1})} = \frac{n^2(n+1)^2}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow P_n = \prod_{k=2}^{n} (\frac{k+1}{k})^2 = (\frac{n+1}{2})^2$$

Dolayısıyla $P_{25} = 13^2 = 169$'dur.

18 İçlerinde a, b ve c nin bulunduğu 10 değişik harfin permütasyonlarının kaç tanesinde a, b ve c harflerinden ikisi yan yana gelmez?

a) $89 \cdot 8!$ **b)** $4 \cdot 9!$ **c)** $8 \cdot 9!$ **d)** $42 \cdot 8!$ **e)** $84 \cdot 8!$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Harfler $a, b, c, x_1, x_2, \cdots x_7$ olsun. Burada içerme-dışarma prensibini kullanacağız.

10 harfin farklı sıralama sayısı: 10!

a, b, c'den ikisinin yan yana olduğu durum: $\binom{3}{2} \cdot 2! \cdot 9!$

a, b, c'den üçünün de yan yana olduğu durum: $3! \cdot 8!$

Tüm durum: $10! - 6 \cdot 9! + 6 \cdot 8! = 42 \cdot 8!$ bulunur.

19 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{2x-1} \geq 1$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesi ayrık aralıkların birleşimi olarak yazıldığında, bu aralıkların uzunlukları toplamı ne olur?

a) Sonsuz **b)** $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ **d)** $\dfrac{9}{2}$ **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Eşitsizlik düzenlenirse $\dfrac{-2x^2+5x-1}{x(2x-1)} \geq 0$ elde olunur. Pay ve paydanın kökleri sırasıyla $\left\{\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$ kümesinin elemanlarıdır. Eşitsizlik tablosu kolayca yapılarak çözüm kümesinin ayrık aralıkları $Ç_1 = \left(0, \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right]$, $Ç_2 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right]$ olup bu aralıkların boyları toplamı 2 olarak bulunur.

20
$$\begin{aligned} x+y &= t \\ x^2+y^2 &= 2t \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm reel değerli (x, y, t) çözümleri içinde t nin alabileceği en büyük değer ne olur?

a) 2 **b)** 4 **c)** $1+\sqrt{2}$ **d)** $4+\sqrt{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim. Ya Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden, ya da cebirsel özdeşliklerden bu eşitsizliğin doğru olduğu görülebilir. Elemanter çözüm olsun diyerek

$$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \iff 2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2 \iff x^2-2xy+y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0$$

yazabiliriz. Son eşitsizlik doğru olduğundan $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ eşitsizliği de doğrudur. $t \geq 0$ değerlerini burada yazarsak $t^2 \leq 2 \cdot 2t$ olup $0 \leq t \leq 4$ elde edilir. $t = 4$ durumuna örnek çözüm $(x, y, t) = (2, 2, 4)$ vardır. $t_{\max} = 4$ tür.

21 m ve n tamsayı olmak üzere $m^2 + n^2 < 10001$ ise, $3m + 4n$ nin alabileceği en büyük değer ne olur?

a) 403 **b)** 480 **c)** 490 **d)** 500 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

m, n birer tamsayı olduğundan $m^2 + n^2 \leq 10000$ yazabiliriz. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(m^2 + n^2)$$

olup

$$(3x + 4y)^2 \leq 25 \cdot 10000$$

elde edilir. Buradan $3x + 4y \leq 500$ bulunur. Ayrıca $(3x + 4y)_{\max} = 500$ eşitlik durumuna örnek olarak $m = 60, n = 80$ değerleri vardır.

Çözüm 2:

Karesel Ortalama $\geq$ Aritmetik Ortalama kullanarak çözelim.

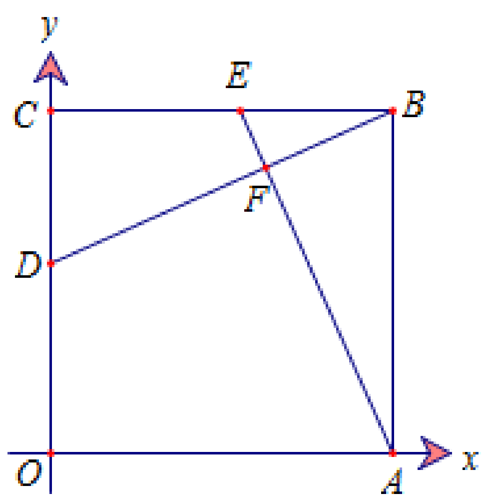
$$\left(\frac{\underbrace{\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m}{3}\right)^2}_{9 \text{ tane}} + \underbrace{\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{4}\right)^2}_{16 \text{ tane}}}{25}\right)^{1/2} \geq \frac{\underbrace{\frac{m}{3} + \cdots + \frac{m}{3}}_{9 \text{ tane}} + \underbrace{\frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{4}}_{16 \text{ tane}}}{25}$$

$$\left(\frac{10000}{25}\right)^{1/2} \geq \left(\frac{m^2 + n^2}{25}\right)^{1/2} \geq \frac{3m + 4n}{25} \Longrightarrow 500 \geq 3m + 4n$$

Eşitlik durumu için, $\dfrac{m}{3} = \dfrac{n}{4} = k$ ve $3m + 4n = 500$ olması gerekir.

$3 \cdot 3k + 4 \cdot 4k = 500 \Longrightarrow k = 20,\ m = 60,\ n = 80$ olması gerekir.

22

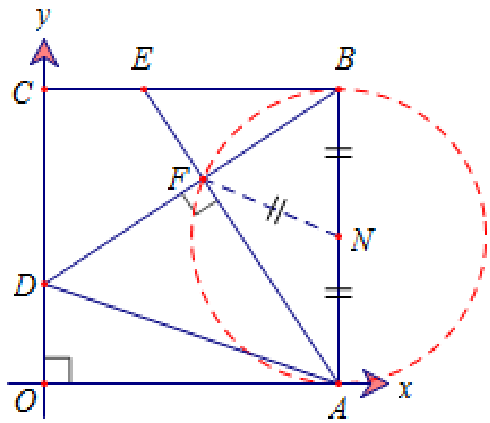


Şekilde, $OABC$ kenar uzunluğu $2a$ olan bir kare, $D \in [OC]$, $E \in [BC]$, $|OD| = |EC|$, $[AE] \cup [BD] = \{F\}$ dir. Buna göre F noktasının x, y koordinatları arasında hangi bağıntı vardır?

a) $(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ **b)** $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2$ **c)** $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$
d) $x^2 + y^2 = 2a^2$ **e)** $x^2 + (y - a)^2 = 4a^2$

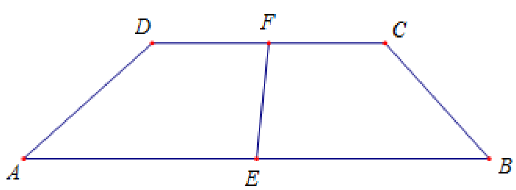
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



$ABE \cong BCD$ kenar-açı-kenar eşliğinden dolayı $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{DBC})$ olup $AE \perp BD$ elde edilir. F noktası, sabit $|AB| = 2a$ uzunluklu doğru parçasını sabit $m(\widehat{AFB}) = 90°$ açı altında gördüğünden F noktaları $|AB| = 2a$ çaplı çember üzerinde bulunurlar. Merkez noktası $N(2a, a)$ olduğundan bu çemberin denklemi $(x-2a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ dir.

23

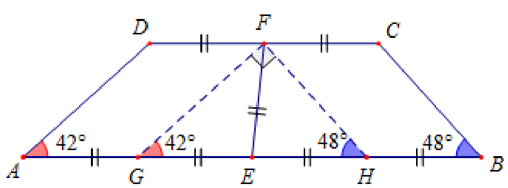


Şekilde $ABCD$ ($AB \parallel CD$) bir yamuk, $m(\widehat{B}) = 48°$, $m(\widehat{D}) = 138°$. $|AB| = 2|DC| = 4a$, $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC|$ olduğuna göre $|EF|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $2a$ **b)** $\frac{3a}{2}$ **c)** $\frac{2a}{3}$ **d)** $\frac{a}{2}$ **e)** a

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$



$[AE]$ ve $[EB]$ nin orta noktaları sırasıyla G, H olsun. $AGFD$ ve $BHFC$ birer paralelkenar olup $|GE| = |EH| = a$ olur. Ayrıca $m(\widehat{FGE}) = m(\widehat{AGE}) = 42°$, $m(\widehat{FHE}) = m(\widehat{CBE}) = 48°$ olduğundan $(m(\widehat{GFH}) = 90°$ dir. GHF dik üçgeninde $|FE| = a$ bulunur.

24 $101, 10101, 1010101, \ldots, \underbrace{10101\ldots01}_{\text{100 tane 1}}$ dizisinde kaç tane asal sayı vardır?

a) 0 **b)** 49 **c)** 1 **d)** 12 **e)** 33

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Öncelikle $2n+1$ basamaklı

$$101010101\ldots01$$

sayısını göz önüne alalım. Bu sayıyı

$$101010101\ldots01 = 10^0 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2n} = 100^0 + 100^1 + \cdots + 100^n$$

şeklinde yazabiliriz.

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^r = \frac{a^{r+1}-1}{a-1}$$

olduğunu kullanarak sayımızı

$$\frac{100^{n+1}-1}{99} = \frac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{99} = \frac{(10^n+\cdots+1)(10^{n+1}+1)}{11} = A$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi durumları inceleyelim. Eğer n sayısı çift ise $n+1$ sayısı tek olacaktır ve $10^{n+1}+1$ sayısı 11 e bölünecektir ve A sayısı hem tam sayı olacak, hem de asal sayı olamayacaktır. n sayısı tek ise $10^n + \cdots + 1 = 111111\ldots1$ sayısı 11 e bölünecektir ve asal olamayacaktır. O halde dizide $n=1$ için 101 den başka asal sayı yoktur.

25 Çarpanların sırasını da hesaba katarsak 1000000 sayısı üç pozitif tamsayının çarpımı olarak kaç değişik biçimde gösterilebilir?

a) 1024 **b)** 784 **c)** 756 **d)** 354 **e)** 134

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$a \cdot b \cdot c = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ olmalıdır. $a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$ ve $c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$ olsun. Bulmamız gereken sayı,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6$$

denklemlerinin çözüm sayısıdır. İki denklemin de çözüm sayısı aynı olacağından birininkini bulup karesini almak yeterlidir. x'liler için nesne dağılım problemlerinden biliyoruz ki çözüm sayısı $\binom{6+3-1}{3-1} = 28$ olur.

Toplam gösterim sayısı $28^2 = 784$'dür.

26

$$\begin{aligned} x+3y &= tx \\ x-y &= ty \\ x^2+y^2 &= t^2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin kaç tane reel değerli (x, y, t) çözüm takımı vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Eğer $t = 0$ ise $x^2 + y^2 = 0$'dan $(x, y, t) = (0, 0, 0)$ çözümü gelir. Eğer $x = 0$ veya $y = 0$ ise yine aynı çözüm gelir. $t \neq 0$ durumunu inceleyelim. İlk iki denklemi birbirine bölersek,

$$\frac{x+3y}{x-y} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-3y) = 0$$

$i)$ $x = -y$ ise $x + 3y = x - 3x = -2x = tx$, buradan $t = -2$ bulunur.

$$x^2 + y^2 = 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Buradan $(x, y, t) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$ çözümleri gelir.

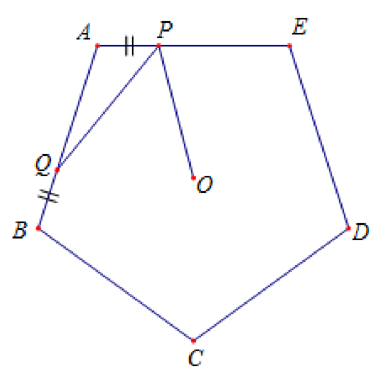
$ii)$ $x = 3y$ ise $x + 3y = 2x = tx$, buradan $t = 2$ bulunur.

$$9y^2 + y^2 = 10x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Buradan $(x, y, t) = (\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{3\sqrt{10}}, 2), (-\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{3\sqrt{10}}, 2)$ çözümleri gelir.

Toplam 5 çözüm vardır.

27

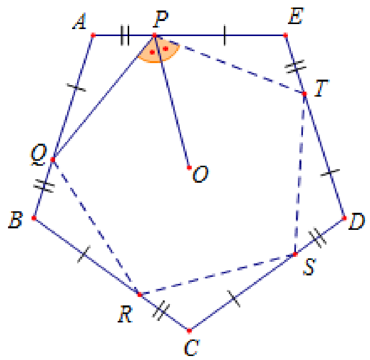


Şekilde $ABCDE$ düzgün beşgen, O noktası bu beşgenin merkezi ve $|PA| = |QB| = \frac{1}{3}|AE|$ dir. Buna göre $\widehat{OPQ}$ açısı kaç derecedir?

a) 54 **b)** 36 **c)** 72 **d)** 50 **e)** 60

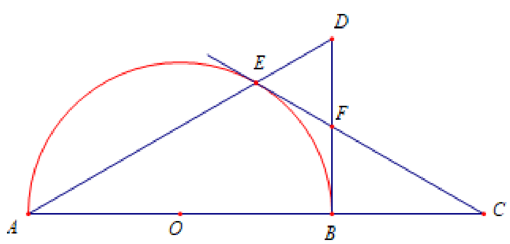
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



$|PA| = |QB| = |RC| = |SD| = |TE|$ olacak biçimde $R \in [BC]$, $S \in [CD]$, $T \in [DE]$ alalım. $PAQ \cong QBR \cong RCS \cong SDT \cong TEP$ kenar-açı-kenar eşlikleri vardır. Bu eşliklere göre $PQRST$ beşgeninin düzgün olduğunu görmek kolaydır. $|OP| = |OQ| = |OR| = |OS| = |OT|$ olduğundan (nedenini düşününüz) O noktası aynı zamanda $PQRST$ düzgün beşgeninin de merkezidir. $m(\widehat{OPQ}) = \dfrac{m(\widehat{TPQ})}{2} = 54^\circ$ bulunur.

$\boxed{28}$



Şekilde, BD ve CE doğruları, O merkezli $[AB]$ çaplı çemberin teğetleri, $C \in AB$ ve $|AO| = |BC|$ dir. $|AB| = 12$ olduğuna göre EDF üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 12 **b)** 8 **c)** $4\sqrt{3}$ **d)** 6 **e)** $3\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$OE \perp CE$ ve $|OE| = |OA| = |OB| = |BC| = 6$ olduğundan $m(\widehat{COE}) = 60^\circ$ dir. $OEFB$ bir deltoid olup $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{FOB}) = 30^\circ$ dir. Böylece $|OE| = \sqrt{3}|EF|$ olup $|EF| = 2\sqrt{3}$ bulunur. EDF üçgeninin eşkenar olduğunu görmek kolaydır. $Alan(EDF) = \dfrac{|EF|^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ olur.

$\boxed{29}$ p, q pozitif tamsayılar ve $p = q + 2$ ise, $p^2 + q^2 \equiv x \pmod{72}$ denkliğini sağlayan en küçük pozitif x tamsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2 **b)** 34 **c)** 70 **d)** 1 **e)** 4

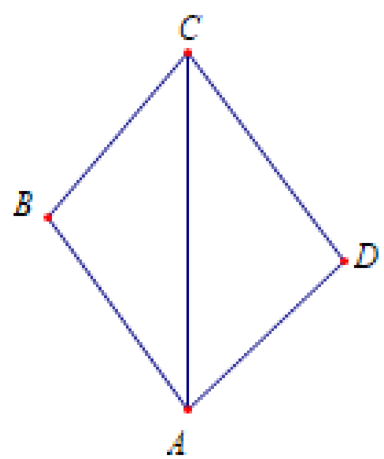
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$p^2+q^2 = p^2+(p-2)^2 = 2p^2-4p+4$ olur. $2p^2-4p+4 \equiv x \pmod{72}$ denkliğinde $x=1$ olamayacağı açıktır. Çünkü denkliğin tanımından, $2p^2-4p+2-x = 72n$ olacak biçimde bir n tamsayısı vardır. Böylece x in çift sayı olması gerektiğini anlarız.

$x > 1$ olduğundan, $x = 2$ için denkliğin çözümü var mıdır? Araştıralım: $2p^2 - 4p + 4 \equiv 2 \pmod{72}$ denkliğinden $72n = 2p^2 - 4p + 4 - 2$ yazılır. $36n = p^2 - 2p + 1$ olur. $(p-1)^2 \equiv 0 \pmod{36}$ denkliğini sağlayan p pozitif tamsayıları vardır. Bir örnek $p = 37$ dir. $q = 39$ olur. Böylece en küçük pozitif değer $x = 2$ olduğu anlaşılır.

30



Şekilde çizgilerin üzerinden gitmek koşuluyla, A dan başlayıp beş noktadan geçtikten sonra C ye varan (örneğin $ABCBADC$ gibi) kaç farklı yol vardır?

a) 24 **b)** 32 **c)** 33 **d)** 81 **e)** 90

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

(Lokman GÖKÇE)

Elbette, adım sayısı kısmen az olduğu için alt durumlara ayırıp sayarak sonuca gitmek mümkündür. Halen alt durum hesaplamasının bir parça zorluğu vardır. Fakat, adım sayısı daha fazla oldukça alt durum inceleme hesaplamaları da daha fazla artacaktır. Çözümün kafa karıştırıcılığı da artacaktır. Bu sebeple, probleme genel bir çözüm yolu bulmayı deneyelim. Bu yolda, ısrarla bir $a(n)$ dizisi için doğrusal indirgeme bağıntısı elde etmeye odaklandığım için **inatçı yol** olarak isimlendireceğim.

X noktasından harekete başlayıp n hamle sonunda C noktasına ulaşılan yolların sayısı $x(n)$ olsun. $X \in \{A,B,C,D\}$ için sırasıyla $x \in \{a,b,c,d\}$ gösterimlerini kullanalım. $a(1) = 1, a(2) = 2$, $b(1) = d(1) = 1$, $b(2) = d(2) = 1$, $c(1) = 0, c(2) = 3$ hesaplamalarını yapmak kolaydır. Ayrıca simetriden dolayı $b(n) = d(n)$ dir.

A dan harekete başladığımızda ilk hamlemizde ya B ye, ya C ye ya da D ye gidebiliriz. $b(n-1) = d(n-1)$ olduğundan

$$a(n) = 2b(n-1) + c(n-1) \tag{1}$$

B dan harekete başladığımızda ilk hamlemizde ya A ya ya da C ye gidebiliriz.

$$b(n) = a(n-1) + c(n-1) \tag{2}$$

C dan harekete başladığımızda ilk hamlemizde ya B ye, ya A ya ya da D ye gidebiliriz. $b(n-1) = d(n-1)$ olduğundan

$$c(n) = 2b(n-1) + a(n-1) \tag{3}$$

bağıntıları yazılır.

(1) ve (3) ün farkından, $a(n) - c(n) = (c-1) - a(n-1)$ olup

$$a(n) + a(n-1) = c(n) + c(n-1) = m(n) \tag{4}$$

elde edilir. (2) de n yerine $n+1$ koyup (2) eşitliği ile yeniden toplarsak

$$b(n) + b(n+1) = a(n) + a(n-1) + c(n) + c(n-1) = 2m(n) \tag{5}$$

elde edilir. (1) ve (3) ün toplamından, $a(n) + c(n) = a(n-1) + c(n-1) + 4b(n-1)$ olur. Bu bağıntıda n yerine $n+1$ yazıp bu bağıntı ile yeniden toplarsak

$$m(n+1) = m(n) + 4m(n-1) \tag{6}$$

eşitliği elde edilir. (4) deki $m(n) = a(n) + a(n-1)$ bağıntısını (6) da kullanırsak

$$a(n+1) = 5a(n-1) + 4a(n-2) \tag{7}$$

$n \geq 3$ tam sayıları için kullanabileceğimiz doğrusal indirgeme bağıntısına ulaşırız. (1) yardımıyla $a(3) = 2b(2) + c(2) = 2 + 3 = 5$ bulunur.

$a(4) = 5a(2) + 4a(1) = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$, $a(6) = 5a(4) + 4a(3) = 5 \cdot 14 + 4 \cdot 5 = 90$ bulunur.

Daha İnatçılar İçin Not: $a(n+1) = 5a(n-1) + 4a(n-2)$ bağıntısının karakteristik denklemi $r^3 - 5r - 4 = 0$ dır. $r_1 = -1$ bir kök olduğundan $(r+1)(r^2 - r - 4) = 0$ biçiminde yazılır. Diğer kökler ise $r_{2,3} = \dfrac{1 \mp \sqrt{17}}{2}$ olur. A_1, A_2, A_3 gerçel sabitler olmak üzere (a_n) dizisinin genel terimi

$$a(n) = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + A_3 r_3^n \tag{8}$$

formundadır. $a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 5$ değerlerini kullanarak A_1, A_2, A_3 katsayılarını çözebiliriz. Bu noktada Wolframalpha'dan yardım alarak veya kaba kuvvet işlemlere girişerek

$$a(n) = \frac{1}{34(5+\sqrt{17})} \left(-17(5+\sqrt{17})(-1)^n + (34 + 6\sqrt{17}) \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}) \right)^n + (51 + 11\sqrt{17}) \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{17}) \right)^n \right)$$

sonucuna ulaşabiliriz.

Çözüm 2:

Genel terim bulma inadımızdan vazgeçerek, soruyla kavga etmeden basitçe çözelim. Buna da **sakin yol** ismini vereyim.

(Lokman GÖKÇE)

Önceki çözümde gördüğümüz gibi $(1), (2), (3)$ bağıntılarını kullanarak $a(3) = 2b(2) + c(2) = 5$ bulmuştuk. $a(6)$ fazla uzakta değil, biraz daha toplama ve çarpma yapmaya devam edebiliriz. Aşağıdaki gibi tabloyu dolduralım.

n	$a(n)$	$b(n)$	$c(n)$
1	1	1	0
2	2	1	3
3	5	5	4
4	14	9	15
5	33	29	32
6	90	62	91

$a(6) = 90$ bulunur.

31 ABC ($m(\widehat{B}) = 90°$) üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D dir. ABD ve BDC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları sırasıyla x, y ve ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ise $\dfrac{x}{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{a}{b}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ **c)** $\dfrac{c}{b}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{c}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$|AD| = |DC|$ olduğundan $A(ABD) = A(BDC)$ olur. $\dfrac{abc}{4R} = S$ formulunu uygulayalım.

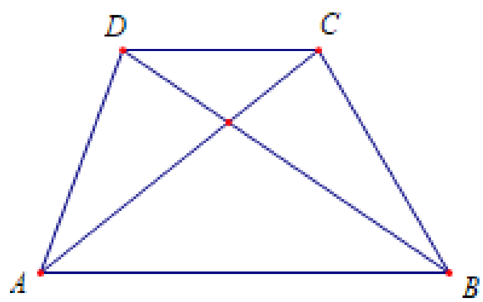
$$A(ABD) = \frac{|AD| \cdot |BD| \cdot |AB|}{4x} = \frac{|DC| \cdot |BD| \cdot |BC|}{4y} = A(BDC)$$

Düzenlersek

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$$

bulunur.

32



Şekilde, $ABCD$ ($AB \parallel CD$) bir yamuk, köşegenlerin kesiştiği nokta E dir. $Alan(ABCD) = 25$, $Alan(AEB) - Alan(DEC) = 5$ olduğuna göre $Alan(BEC)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 7 **b)** 5 **c)** 8 **d)** 6 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$Alan(BEC) = Alan(AED) = x$ diyelim. $Alan(DEC) = y$ dersek $Alan(AEB) = y+5$ olur. Yamukta alanlar çarpımı özelliğinden

$$x^2 = y(y+5) \tag{1}$$

ve toplam alandan

$$2x + 2y + 5 = 25 \tag{2}$$

yazılır. $y = 10 - x$ değerini (1) de yazarsak $x^2 = (10-x)(15-x)$ olup bu denklemden $x = 6$ elde edilir.

33 $x^2 + ax + 2a = 0$ denkleminin bütün kökleri tamsayı olacak şekilde seçilebilecek a reel sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 4 **b)** 6 **c)** 0 **d)** 3 **e)** Sonsuz

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Denklemin tamsayı kökleri m, n olsun. Vieta formüllerinden $m + n = -a$, $mn = 2a$ olur. İki tamsayının toplamı da bir tamsayı olduğundan a bir tamsayıdır. Bu denklemlerden

$$\begin{aligned} mn &= -2(m+n) \\ m(n+2) &= -2n \\ m &= \frac{-2n}{n+2} = -2 + \frac{4}{n+2} \end{aligned}$$

olup $(n + 2) \mid 4$ tür. Buradan $n \in \{-6, -4, -3, -1, 0, 2\}$ olur. Bu n değerlerine karşılık m nin değerleri sırasıyla $m \in \{-3, -4, -6, 2, 0, -1\}$ olur. Böylece $a = -(m + n) \in \{9, 8, -1, 0\}$ biçiminde dört değer elde edilir.

34 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin her a elemanı için $(f \circ f)(a) = a$ koşulunu sağlayan kaç tane $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?

a) 24 **b)** 1 **c)** 9 **d)** 6 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Çözüm 1: $(f \circ f)(a) = a$ olması için $f(a) = b$ iken $f(b) = a$ olmalıdır. Bunun için iki alt durum vardır: $a = b$ durumları veya $a \neq b$ durumları.

$a = b$ olan hiçbir $(a, b) \in f$ ikilisi yoksa: $f(1) = b$ için $b\ in\{2, 3, 4\}$ seçimleri vardır. Geri kalan elemanlar da tek yolla birbirine gidecektir. Örneğin $f(1) = 2$ ise $f(2) = 1$ olduğundan $f(3) = 4$ ve $f(4) = 3$ zorunlu olarak gelir.

$a = b$ olan ikili sayısı çift sayıda olmak zorundadır. (Neden?) $f(a) = a$ olan iki farklı a değeri olan f fonksiyonlarına bakalım. Örneğin $f(1) = 1, f(2) = 2$ ise geri kalan iki eleman tek yolla birbirine gidecektir. Çünkü $f(3) = 4$ ve $f(4) = 3$ zorunlu olarak gelir. Dolayısıyla kendi kendiyle eşleşen elemanların seçimi $\binom{4}{2} = 6$ yolla yapılır.

$a = b$ olan ikili sayısı dört tane ise $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4$ olur. Bu durumda 1 tane f fonksiyonu yazmış oluyoruz. $f = I_A$ birim fonksiyonu olur.

Toplam $3 + 6 + 1 = 10$ tane istenen özellikte fonksiyon vardır.

Çözüm 2: $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi verildiğinde her $a \in A$ için $(f \circ f)(a) = a$ koşulunu sağlayan $f : A \to A$ fonksiyonlarının sayısı a_n olsun. $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ dir. a_n dizisini oluşturan f fonksiyonlarını iki grupta inceleyebiliriz:

$f(n) = n$ olanlar: Bunun için $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonlarının sayısı a_{n-1} dir.

$f(n) \neq n$ olanlar: Bunun için $f(n)$ değerinin seçimi $n - 1$ yolla yapılır. Diyelim ki $f(n) = b \neq n$ olsun. Bu halde $f(b) = n$ dir. A kümesinden b ve n atıldığı zaman geriye kalan elemanlarla oluşturulabilecek f fonksiyonlarının sayısı a_{n-2} dir.

Dolayısıyla $a_n = a_{n-1} + (n - 1)a_{n-2}$ dir. Buna göre

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 2 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3a_2 = 4 + 6 = 10$$

bulunur.

Notlar:

1. Bu problemin $n = 7$, $n = 8$ durumlarını forumda ilk kez 8 Mart 2012 tarihinde Tersi kendisine eşit permütasyon fonksiyonlarının sayısı başlığı ile burada sormuştum. Yaklaşık 40 gün sonra da 2012 Tübitak Lise Matematik Olimpiyatı 1. Aşama Sınavı'nda $n = 7$ durumu sorulmuştu. Yani sınav sorusu yakalamış olduk :)

2.Çözüm 2'de verdiğimiz indirgemeli dizi yöntemini, üyelerimizden Ferhat Gölbol forumda açıklamıştı.

35 Verilen bir (a_n) dizisinden her n için $b_n = a_{n+1} - a_n$ şeklinde bir (b_n) dizisi tanımlanıyor. $a_8 = a_{40} = 0$ ve her n için $b_{n+1} - b_n = 2$ ise a_1 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 273 **b)** 301 **c)** 186 **d)** 403 **e)** 281

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

a_n üzerinden bir indirgemeli dizi oluşturalım.

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

olur, fakat karakteristik denklemi çıkarabilmemiz için 2'yi yok etmeliyiz. Bunun için n yerine $n + 1$ yazıp taraf tarafa çıkaracağız.

$$\Rightarrow a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$$

Bu indirgemeli dizinin karakteristik denklemi

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3 = 0$$

olur. Kökler çakışık olduğundan dizinin formülü

$$a_n = An^2 + Bn + C$$

şeklinde olmalıdır. (İndirgemeli diziler ve karakteristik denklemler ile ilgili ayrıntılı bilgi için Lokman Gökçe hocamın forumdaki pdf dosyasını inceleyebilirsiniz.)

$a_8 = a_{40} = 0$ olduğundan $a_n = A(n-8)(n-40)$ formatında olur, şimdi A'yı bulmak için $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n = 2$ eşitliğinde yerine koyalım. Buradaki n'li terimler birbirini götürecek ve $A = 1$ kalacaktır.

Dolayısıyla her n için $a_n = (n - 8)(n - 40)$'dır. n yerine 1 yazarsak $a_1 = 273$ bulunur.

36 Negatif olmayan x, y tamsayıları için tanımlanan $F(x, y)$ fonksiyonunda

$i)$ Her x, y için $F(x + 1, y) + F(x, y + 1) = F(x, y) + F(x + 1, y + 1)$

$ii)$ Her x için $F(x, 0) = x$

$iii)$ Her $y > 0$ için $F(0, y) = 1$

ise $F(1000, 993)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 1993 **b)** 1001 **c)** 999 **d)** 994 **e)** 7

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{B}$

İlk şartta y yerine 0'dan $y-1$'ye kadar yazıp taraf tarafa toplarsak,

$$F(x+1,0) + F(x,1) = F(x,0) + F(x+1,1)$$
$$F(x+1,1) + F(x,2) = F(x,1) + F(x+1,2)$$
$$\vdots$$
$$F(x+1,y-1) + F(x,y) = F(x,y-1) + F(x+1,y)$$
$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$F(x+1,0) + F(x,y) = F(x,0) + F(x+1,y)$$

Burada ikinci şartı kullanırsak

$$F(x+1,y) - F(x,y) = 1$$

bulunur. Son bulduğumuz eşitlikte x yerine 0'dan $x-1$'e kadar yazıp toplarsak

$$F(1,y) - F(0,y) = 1$$
$$F(2,y) - F(1,y) = 1$$
$$\vdots$$
$$F(x,y) - F(x-1,y) = 1$$
$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$F(x,y) = x+1$$

bulunur. Yani $y > 0$ için $F(x,y) = x+1$ bulunur. $F(1000,993) = 1001$ bulunur.

Çözüm 2:

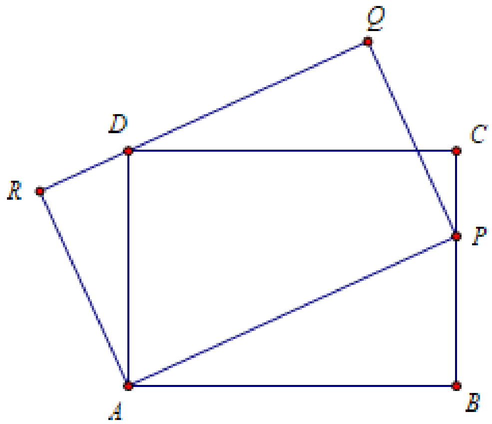
Test tekniği ile $F(x,y) = x+1$ fonksiyonunu tahmin etmek zor değil.

(i) de verilen fonksiyonel eşitlikte x ler F nin ilk parametresinde, y ler F nin ikinci parametresinde kalmış. $F(x,y) = G(x) + H(y)$ şeklinde bir fonksiyon (i) i sağlar.

(ii) ve (iii) ten $G(x) = x$ ve $H(y) = 1$ in sağladığı görülür.

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1994

1

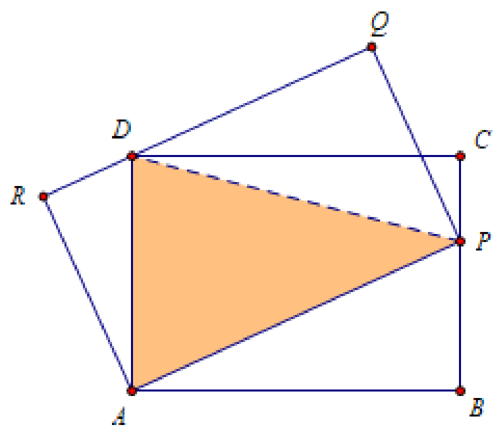


Şekilde $ABCD$ ve $APQR$ dikdörtgenlerinin alanları sırasıyla a ve b dir. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $a < b$ **b)** $4a = 3b$ **c)** $a = b$ **d)** $3a = 2b$ **e)** $a > b$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$



DAP üçgeninin alanı hem $RAPQ$ hem de $ABCD$ dikdörtgeninin alanının yarısıdır, dolayısıyla bu iki dikdörtgenin alanı eşittir.

2 Bir torbada her birinin üzerinde 1 den 20 ye kadar olan tam sayılardan biri yazılı 20 top bulunmaktadır. Üstünde aynı sayı yazılı olan herhangi iki top yoktur. Bu torbadan bir top çekilir ve üstündeki sayı kaydedildikten sonra top torbaya geri konur. Bu işlem 10 defa tekrar edilirse, çıkan 10 sayının hepsinin birbirinden farklı olma olasılığı kaçtır?

a) $\dfrac{\binom{20}{10}}{20^{10}}$ **b)** $\dfrac{\binom{20}{10}10!}{20^{10}}$ **c)** $\dfrac{10^{20}}{20^{10}}$ **d)** $\dfrac{10^{10}}{20^{10}}$ **e)** $\dfrac{\binom{29}{10}}{20^{10}}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

İlk çekilen topun daha önce çıkmamış olma olasılığı $\dfrac{20}{20}$,

İkinci çekilen topun daha önce çıkmamış olma olasılığı $\dfrac{19}{20}$,

.

.

.

10. çekilen topun daha önce çıkmamış olma olasılığı $\dfrac{10}{20}$.

10 sayısının farklı olma olasılığı $\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{19}{20} \cdots \dfrac{10}{20} = \dfrac{\frac{20!}{10!}}{20^{10}} = \dfrac{\binom{20}{10} \cdot 10!}{20^{10}}$ bulunur.

$\boxed{3}$ Aşağıdakilerden hangisi $1994 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 2000$ sayısından daha büyüktür?

a) $1993^2 \cdot 2001^2$ **b)** $1993 \cdot 1997^2 \cdot 1999$ **c)** $1993 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 2001$ **d)** $1993 \cdot 1997^2 \cdot 2001$ **e)** $1995^2 \cdot 1999^2$

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{E}$

$x = 1997$ diyelim. Ana ifade $A = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$ olur.

a) $1993^2 \cdot 2001^2 = (x-4)^2(x+4)^2 = (x^2-16)^2$ olur. $(x^2-9) > (x^2-16)$ ve $(x^2-1) > (x^2-16)$ olduğundan

$$A = (x^2-1)(x^2-9) > (x^2-16)^2$$

olur.

b) $1993 \cdot 1997^2 \cdot 1999 = x^2(x-4)(x+2)$ olur. $(x-3)(x-1) > x(x-4)$ ve $(x+3)(x+1) > x(x+2)$ olduğundan

$$A > x^2(x-4)(x+2)$$

bulunur.

c) $1993 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 2001 = x(x-4)(x-2)(x+4)$ olur. $(x-3)(x+3) > (x+4)(x-4)$ ve $(x-1)(x+1) > x(x-2)$ olduğundan

$$A > x(x-4)(x-2)(x+4)$$

bulunur.

d) $1993 \cdot 1997^2 \cdot 2001 = x^2(x-4)(x+4)$ olur. $(x-3)(x-1) > x(x-4)$ ve $(x+3)(x+1) > x(x+4)$ olduğundan

$$A > x^2(x-4)(x+4)$$

bulunur.

e) $1995^2 \cdot 1999^2 = (x-2)^2(x+2)^2$ olur. $(x-3)(x-1) < (x-2)^2$ ve $(x+3)(x+1) < (x+2)^2$ olduğundan

$$A < (x-2)^2(x+2)^2$$

bulunur.

Yani E daha büyüktür.

Çözüm 2:

$1994 \cdot 1996 = 1995^2 - 1$ ve $1998 \cdot 2000 = 1999^2 - 1$ olduğu için açık şekilde $1995^2 \cdot 1999^2$ sayısı $1994 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 2000$ sayısından büyüktür.

$\boxed{4}$ $x + y + z = 1$ olmak üzere x, y, z pozitif reel sayıları için

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

çarpımının alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{64}{27}$ **b)** 8 **c)** 27 **d)** 64 **e)** 84

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

İfadeyi açalım,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1 + x + y + z}{xyz} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2}{xyz}$$

A.G.O.'dan

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq 27$$

A.H.O.'dan

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$$

Bu iki eşitsizlikten

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$$

olur. Eşitlik durumu $x = y = z = \frac{1}{3}$'tür.

$\boxed{5}$ 13 kişilik bir topluluk, her birinde en az bir kişi bulunan iki alt topluluğa farklı biçimde ayrılabilir?

a) 63 **b)** 168 **c)** 169 **d)** 4095 **e)** 8191

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Bu 13 kişiden birisi A olsun. A kişisini ilk gruba koyalım ve böylece gruplarda simetrik (özdeş) durumlar oluşmasını engelleyelim. Geri kalan 12 kişinin her birini ya birinci gruba ya da ikinci gruba gönderebiliriz. Bunların dağıtım sayısı $2^{12} = 4096$ dır. Ancak herkesin ilk grupta olduğu, ikinci grubun ise boş olduğu 1 durum vardır. Bu istenmeyen durumu çıkarırsak, istenen durumların sayısı $4096 - 1 = 4095$ tir.

$\boxed{6}$ $ABCD$ dışbükey (konveks) dörtgeninde $|AB| = 12$, $|BC| = 4$, $|CD| = 3$, $|DA| = 13$ ve $m(\widehat{BCD}) = 90°$ olduğuna göre, bu dörtgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 24 **b)** 32 **c)** 36 **d)** 48 **e)** 84

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Pisagordan $|BD| = 5$ bulunur. Buradan ABD üçgeni $5-12-13$ üçgeni, BCD ise $3-4-5$ üçgeni olur.

$$A(ABCD) = A(BCD) + A(ABD) = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} = 36$$

bulunur.

7 $\lfloor x^2+8x \rfloor \leq A$ denkleminin, tam sayılar kümesi içinde tam olarak 13 tane çözümü olması için A nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 8 **b)** 9 **c)** 19 **d)** 20 **e)** 30

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Tam sayılar kümesinde incelediğimiz için $x^2 + 8x$ ifadesi de tam sayıdır. Dolayısıyla $\lfloor x^2 + 8x \rfloor = x^2 + 8x$ olur.

$$f(x) = x^2 + 8x - A \leq 0$$

f fonksiyonunun negatif veya sıfır olması için x değeri iki kökün arasında veya eşit olması lazım. 13 tamsayı değeri olması için köklerin farkı en az 12 olması gerekir.

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{64 + 4A} \geq 12 \Rightarrow A \geq 20$$

Şimdi $A = 20$ için sağlayıp sağlamadığına bakalım. $A = 20$ için

$$x^2 + 8x - 20 = (x + 10)(x - 2) \leq 0$$

x değerleri, $x = -10, -9, ..., 1, 2$ olur ve 13 değer vardır.

8 Her x reel sayısı için $\dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8$ eşitsizliği sağlanıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $a^2 > 8$ **b)** $0 \leq a \leq 75$ **c)** $|a| < 10$ **d)** $a = 0$ **e)** $a < 74$

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{E}$

Öncelikle $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 \geq 0$ olacağından karşı tarafa atarsak eşitsizlik yönü değişmez.

$$x^2 + ax + 1 < 8(x^2 + 4x + 8)$$

olur. Bu eşitsizliği düzenleyelim.

$$0 < 7x^2 + (32 - a)x + 63$$

olur. Eğer bu ikinci dereceden denklemin kökü varsa 0'a eşit olabileceğinden şartı bozar. Denklemin kökü yoksa kolları yukarı bakan bir parabol olduğundan her x için pozitif olur.

$$\Delta = (32 - a)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 63 < 0 \Rightarrow (a + 10)(a - 74) < 0$$

olur. Yani a sayısı $(-10, 74)$ aralığındadır. Bu şartı sağlayan her a için sadece $a < 74$ ifadesi doğru olduğundan cevap E olacaktır.

Fakat bazı kaynaklarda $a < 74$ ifadesi $(-\infty, 74)$ olarak algılanacağı belirtilerek sorunun cevabının yanlış olduğunu belirtmişler, o zamanda bu sorunun TÜBİTAK tarafından iptal edilip edilmediğini bilmediğimden yukarıdaki çözümü bırakıyorum.

Çözüm 2:

Lokman Gökçe'nin yorumu:

$(-10, 74)$ aralığını kapsayan herhangi bir küme doğru cevap olarak sunulabilir. Örneğin $a < 75$ veya $|a| < 100$ seçenekleri de birer doğru cevaptır. Soruda a nın alabileceği tüm değerlerin kümesi (a için en geniş aralık) sorulmadığı için illa seçeneklere $-10 < a < 74$ yazılmasına gerek yoktur. Özetle, soruyu iptal ettirecek bir gerekçe yoktu ve iptal edilmemiştir.

9 Her $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için $a_n = 2^n$ olsun.
(b_n) ile $(a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n, a_n, \dots)$ dizisinin genel terimini gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$k \leq \frac{b_n}{C^n} \leq K$$

olacak şekilde, n ye bağlı olmayan pozitif k, K, C sayıları varsa, C ne olmalıdır?

a) $2^{\frac{1}{3}}$ **b)** $3^{\frac{1}{3}}$ **c)** $2^{\frac{1}{2}}$ **d)** $3^{\frac{1}{2}}$ **e)** $2^{\frac{n}{3n-1}}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Öncelikle en kolay görülen $b_3 = a_1$, $b_6 = a_2$, ... , $b_{3m} = a_m = 2^m$ gözlemini yapalım. Her n pozitif tamsayısı için sağlanan $k \leq \frac{b_n}{C^n} \leq K$ eşitsizliğinde $n = 3m$ (m bir pozitif tamsayı) yazarsak $k \leq \frac{b_{3m}}{C^{3m}} \leq K$ olup

$$\frac{2^m}{C^{3m}}$$

üstel ifadesinin sınırlı olması gerekiyor. Bunun için bu oranın ya sabit ya da azalan olması gerekir. Eğer bu oran azalan bir ifade ise, en büyük alt sınır $k = 0$ olacağından, $k > 0$ bilgisi ile çelişir. O halde bu oran sabittir. Yani

$$C = 2^{\frac{1}{3}}$$

seçmeliyiz. Bu durumda $K \geq 1$ ve $k \leq 1$ olacak biçimde K, k sayıları seçmek yeterli oluyor.

Elbette C nin bu değerini $n = 3m - 1$ ve $n = 3m - 2$ hallerinde de kontrol etmek gerekir.

$n = 3m - 2$ olsun. $b_1 = a_1$, $b_4 = a_2$, ... , $b_{3m-2} = a_m$ gözlemini yapmak kolaydır. Her n pozitif tamsayısı için sağlanan $k \leq \frac{b_n}{C^n} \leq K$ eşitsizliğinde $n = 3m - 2$ yazarsak her n pozitif tamsayısı için sağlanan $k \leq \frac{b_n}{C^n} \leq K$ eşitsizliğinde $n = 3m$ (m bir pozitif tamsayı) yazarsak $k \leq \frac{b_{3m-2}}{C^{3m-2}} \leq K$ olup $\frac{2^m}{C^{3m-2}}$ ifadesinin sınırlı olması gerekiyor. Bunun için $C = 2^{\frac{1}{3}}$ alınmalıdır. Tabii bu durumda $k \leq 2^{-\frac{2}{3}}$ ve $K \geq 2^{-\frac{2}{3}}$ olacak biçimde K, k sayıları seçmek yeterli oluyor.

Son olarak $n = 3m - 1$ durumunda da benzer işlemler ile $C = 2^{\frac{1}{3}}$, $k \leq 2^{-\frac{1}{3}}$ ve $K \geq 2^{-\frac{1}{3}}$ olacak biçimde K, k sayıları seçmek yeterli oluyor.

Sonuç olarak tüm durumları beraber düşünürsek $C = 2^{\frac{1}{3}}$, $0 < k \leq 2^{-\frac{2}{3}}$ ve $K \geq 1$ seçilmelidir.

10 n pozitif bir tamsayı olmak üzere, S_n ile $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesini gösterelim. S_n kümesinin içerdikleri elemanların toplamları birbirine eşit olan iki ayrık alt kümeye ayrılabildiğini kabul edelim. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) n, $4k + 1$ biçiminde olmak zorundadır.

b) n, $4k + 2$ biçiminde olabilir.

c) n, $4k$ biçiminde olmak zorundadır.

d) n, ya $4k$ ya da $4k + 3$ biçiminde olmak zorundadır.

e) İstenen koşulları sağlayan bir n sayısı yoktur.

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

S_n kümesindeki elemanların toplamı $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$'dir, küme, toplamları birbirine eşit iki ayrık kümeye ayrılabiliyor ise, $T(n)$'in çift olması gerekir, açıktır ki $n = 4k$ ya da $n+1 = 4k$ olması gerekir. Örneğin $n = 3$ için, 1, 2, 3 olarak ayrılabilir.

11 Rasyonel sayılardan rasyonel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu tüm a, b rasyonel sayıları için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ denklemini sağlasın ve $f(2) = 3$ olsun. $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{5}{2}$ **b)** 3 **c)** $\dfrac{15}{4}$ **d)** $\dfrac{11}{2}$ **e)** $\dfrac{15}{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$a = b = 1$ için $f(2) = f(1) + f(1) = 3$ olup $f(1) = \dfrac{3}{2}$ dir.

$a = b = \dfrac{1}{2}$ için $f(1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$ olup $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$ olur.

$a = 2$, $b = \dfrac{1}{2}$ için $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = f(2) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{15}{4}$ elde edilir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

İlk çözüm oldukça sadedir. Ayrıca, biraz fonksiyonel denklem teorisi kullanarak da soruya yanıt verebiliriz. Rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(a+b) = f(a) + f(b)$ Cauchy fonksiyonel denkleminin genel çözümü $f(x) = cx$ tir. $f(2) = 3$ koşuluna uygun özel çözüm ise $f(x) = \dfrac{3}{2}x$ tir. Böylece $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4}$ olur.

12 Pozitif tam sayı çiftlerinin kümesinden pozitif tam sayılar kümesine giden bir f fonksiyonu, tüm x, y pozitif tam sayıları için $f(x,x) = x$, $f(x,y) = f(y,x)$, $f(x,y) = f(x, x+y)$ koşullarını sağlıyorsa $f(91, 143)$ nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$f(91,143) = f(91,52) = f(52,91) = f(52,39) = f(39,52) = f(39,13) = f(13,39) = f(13,26) = f(13,13) =$ 13 bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

Test mantığı ile şöyle çözebiliriz: Soruda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon EBOB(x,y) fonksiyonudur. EBOB$(91,143) = 13$ olarak bulunur.

13 Belli bir birime göre tüm kenar uzunlukları tamsayılar ve bir kenarının uzunluğu da 6 olan kaç tane dik üçgen vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 6 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Hipotenüs uzunluğu 6 iken dik kenarların tamsayı olamayacağı açıktır. O halde dik kenarlardan biri 6 dır. Hipotenüs uzunluğu x ve diğer dik kenarın uzunluğu da y olsun.

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 36$$

yazılır. Burada çarpanları incelersek yalnızca

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 18 \end{aligned}$$

durumundan çözüm gelir ve $(x, y) = (10, 8)$ elde edilir.

14 $20^{15} - 1$ sayısı aşağıdakilerden hangisi ile bölünmez?

a) 11 **b)** 19 **c)** 31 **d)** 41 **e)** 61

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Seçenekleri inceleyelim.

a) için Fermat teoremine göre $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan $20^{15} \equiv 9^{15} \equiv 3^{30} \equiv (3^{10})^3 \equiv 1 \pmod{11}$ elde edilir. $11|(20^{15}-1)$ dir.

b) için $20 \equiv 1 \pmod{19}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{19}$ olduğundan $19|(20^{15}-1)$ dir.

c) için Fermat teoremine göre $12^{30} \equiv 1 \pmod{31}$ olduğundan $20^{15} \equiv 51^{15} \equiv 82^{15} \equiv 113^{15} \equiv 144^{15} \equiv 12^{30} \equiv 1 \pmod{31}$ olup $31|(20^{15}-1)$ dir.

e) için Fermat teoremine göre $3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ olduğundan $20^{15} \equiv 81^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{31}$ olup $61|(20^{15}-1)$ dir.

Fakat,

d) için $20^{15} \equiv 9 \pmod{41}$ olduğu gösterilebilir. Böylece $41 \nmid (20^{15}-1)$ olur.

15 Bir torbada 10 kırmızı, 4 beyaz top vardır. Toplar, çekilen toplar torbaya geri konmaksızın, birer birer torbadan çekilmektedir. Sekizinci top da çekildikten sonra, beyaz topların tümünün çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

a) $\dfrac{10}{143}$ **b)** $\dfrac{8}{51}$ **c)** $\dfrac{2}{7}$ **d)** $\dfrac{15}{64}$ **e)** $\dfrac{2}{5}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

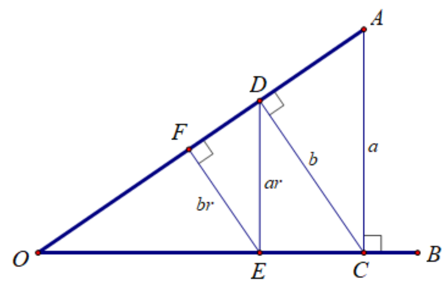
Aranan olasılık $\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}} = \dfrac{10}{143}$ olur.

16 Çakışık olmayan OA ve OB doğruları veriliyor. OA üzerinden seçilen bir noktadan OB ye bir dik iniliyor ve dikmenin OB üzerindeki ayağından OA ya ikinci bir dik iniliyor. Son dikmenin OA üzerindeki ayağından tekrar, OB ye bir dikme iniliyor ve bu işlem sonsuz devam ediyor. İlk iki dikmenin uzunlukları sırası ile a ve b olsun. $a > b$ ise, çizilen sonsuz sayıdaki dikmenin uzunlukları toplamı nedir?

a) $\dfrac{a^2}{(a-b)}$ **b)** $\dfrac{(a-b)}{a^2}$ **c)** $\dfrac{a^2-b^2}{a}$ **d)** $\dfrac{(a^2-b^2)}{b}$ **e)** $\dfrac{a}{(a^2-b^2)}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



Şekilde $|AC| = a$, $|CD| = b$ dir. $ACD \sim DEF$ olup benzerlik oranı r olsun. Yani, $r = \dfrac{b^2}{a^2}$ olmak üzere $|DE| = ar$, $|EF| = br$ dir. Çizimlere devam edilirse, her adımda oluşan dik üçgenin kenarları kendinden önceki benzer olduğu dik üçgenin kenarlarının r katı olur. Böylece, sonsuz geometrik toplam formülü kullanılarak

$$T_1 = a + ar + ar^2 + \cdots = a\frac{1}{1-r}$$

$$T_2 = b + br + br^2 + \cdots = b\frac{1}{1-r}$$

yazılır.

$T_1 + T_2 = (a+b)\dfrac{1}{1-r} = (a+b)\dfrac{1}{1-(b^2/a^2)} = (a+b)\dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2}{a-b}$ elde edilir.

17 Doğal sayılardan tam karelerin atılmasıyla elde edilen $2, 3, 6, 7, 8, 20, 11, \ldots$ dizisinin 1994 üncü terimi nedir?

a) 2036 **b)** 2037 **c)** 2038 **d)** 2039 **e)** 2040

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Öncelikle $1936 = 44^2 < 1994 < 45^2 = 2025$ olduğunu gözlemleyelim. Böylece ilk 1994 pozitif tam sayı içinde 44 tane tam kare atılmıştır. Böylece dizinin 1994. teriminin $1994 + 44 = 2038$ olacağını düşünebiliriz. Fakat bu arada $2025 = 45^2$ terimi de vardır ve listeden atılacaktır. Dolayısıyla dizinin 1994. terimi $2038+1 = 2039$ olur.

18 Rastgele seçilen altı basamaklı bir doğal sayının tam olarak iki basamağında 1 bulunması olasılığı nedir?

a) $\dfrac{63}{755}$ **b)** $\dfrac{81}{800}$ **c)** $\dfrac{7}{45}$ **d)** $\dfrac{1}{3}$ **e)** $\dfrac{51}{101}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Tüm altı basamaklı doğal sayıların sayısı $9 \cdot 10^5$ tir. Şimdi tam olarak iki basamağında 1 bulunanları hesaplayalım. Bunun için iki alt durumda inceleyebiliriz:

1 rakamı ile başlayanları bulalım. Diğer 1 in gelebileceği $\binom{5}{1} = 5$ yer vardır. Kalan 4 basamağı 9^4 yolla doldurabiliriz. Buradan $5 \cdot 9^4$ durum elde edilir.

1 rakamı ile başlamayanları bulalım. 1 lerin gelebileceği $\binom{5}{2} = 10$ yer vardır. En soldaki basamağa 0 yazılamayacağı için, burayı 8 yolla doldurabiliriz. Kalan 3 basamağı 9^3 yolla doldurabiliriz. Buradan $10 \cdot 8 \cdot 9^3$ durum elde edilir. Böylece istenen olasılık

$$\frac{5 \cdot 9^4 + 10 \cdot 8 \cdot 9^3}{9 \cdot 10^5} = \frac{5 \cdot 9^3 \cdot (9 + 16)}{9 \cdot 10^5} = \frac{81}{800}$$

bulunur.

19 Rakamlarının sayı değerleri çarpımı 90 olan kaç tane beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?

a) 105 **b)** 135 **c)** 155 **d)** 180 **e)** 215

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğu için

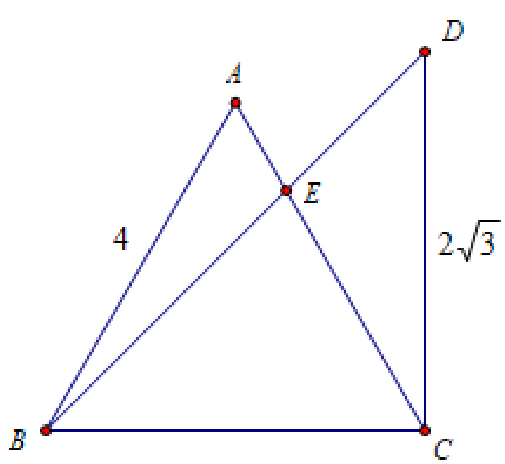
$abcde = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ olabilir. Tekrarlı permütasyondan $\frac{5!}{2!} = 60$ farklı dağılım olabilir.

$abcde = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9$ olabilir. $\frac{5!}{2!} = 60$ dağılım.

$abcde = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$ olabilir. $\frac{5!}{2!} = 60$ dağılım.

Toplamda 180 farklı beş basamaklı sayı vardır.

20

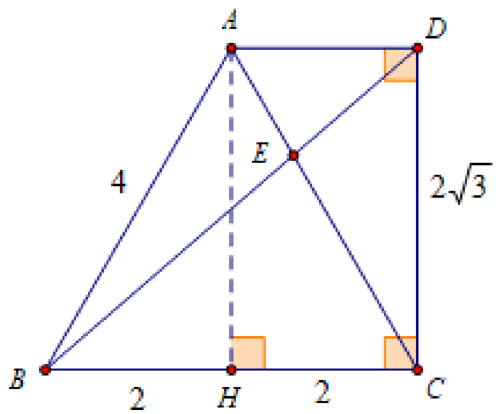


ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{BCD}) = 90°$, $|AB| = 4$ ve $|CD| = 2\sqrt{3}$ ise $|AE|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{8}{3}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 3 **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$



Eşkenar üçgenin bir yüksekliği $|AH| = 2\sqrt{3}$ olduğundan $AHCD$ bir dikdörtgendir. Böylece $BCE \sim DAE$ (açı-açı-açı benzerliği) olup $\dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{|AD|}{|BC|} = \dfrac{1}{2}$ dir. Buradan $|AE| = \dfrac{4}{3}$ elde edilir.

21 Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir. Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 adet artarak bir tam kareden bir fazla hale gelir. Mayıs ayında, tavşan sayısı, yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare olur. Tavşanların Mart ayındaki sayısı ne olur?

a) 47^2 **b)** 48^2 **c)** 49^2 **d)** 50^2 **e)** 51^2

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Mart ayındaki tavşan sayısı x^2, Nisan ayındaki tavşan sayısı y^2+1 ve Mayıs ayında z^2 olsun. Verilenlerden

$$y^2 - x^2 = 99$$

$$z^2 - y^2 = 101$$

bulunur. $z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = 101$ asal olduğundan $z - y = 1$ ve $z + y = 101$ olmalıdır. Buradan $y = 50$ bulunur.

$$50^2 - x^2 = 99 \implies x^2 = 50^2 - 2\cdot 50 + 1 = 49^2 \implies \boxed{x = 49}$$

Yani Mart ayında $x^2 = 49^2$ tavşan vardır.

22 Bir tür loto oyunu, biletin üstündeki $1, 2, \ldots, 49$ sayıları arasından 6 tanesini seçip işaretlemek suretiyle oynanır. Yapılan çekilişte, bu 49 sayıdan 6 tanesi belirlenir. Lotoyu oynayan kişi, oynadığı biletin üstünde işaretlediği 6 sayı ile çekilişte çıkan 6 sayı aynıysa, büyük ikramiyeyi kazanır. Çekilişte 6 sayıdan hiçbirini tutturamayanlara teselli mükafatı verilirse, teselli mükafatı kazanmayı garantilemek için, en az kaç bilet oynamak gerekir?

a) 7 **b)** 12 **c)** 43 **d)** $\binom{49}{6} - \binom{43}{6}$ **e)** $\binom{49}{6} - 6\binom{48}{5} + 15\binom{47}{4} - 20\binom{46}{3} + 15\binom{45}{2} - 6\binom{44}{1} + 1$

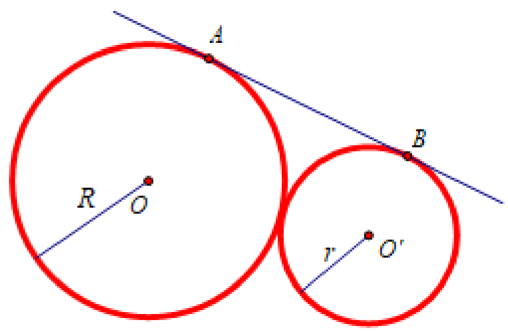
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

7 bilet oynanarak teselli mükafatı garantilenebilir. Şöyle ki: biletleri $\{1,2,\dots,6\}$, $\{7,8,\dots,12\}$, $\{13,14,\dots,18\}$, $\{19,20,\dots,24\}$, $\{25,26,\dots,30\}$, $\{31,32,\dots,36\}$, $\{37,38,\dots,42\}$ biçiminde oynayalım. Çekilişte çıkan 6 sayının bu 7 kümede olup olmadığı kontrol edilirse, bu kümelerden en az birine çekilişten gelen sayılardan hiçbiri isabet etmemiş olacaktır.

6 bilet ile bu garantilemenin yapılamayacağı açıktır. Çünkü çekilişten gelen her bir sayı, 6 biletten yalnızca birinde görülmesi olasıdır.

23

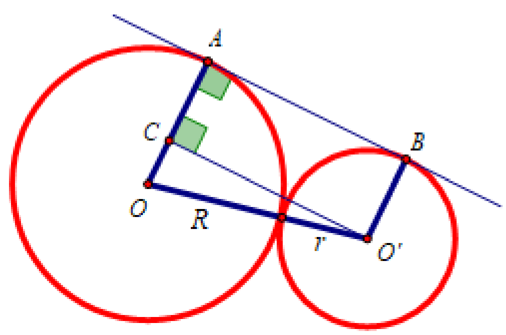


Şekildeki O ve O' merkezli birbirine teğet çemberlerin yarıçapları sırası ile R ve r dir. Ortak teğet uzunluğu $|AB| = 2\sqrt{3}$ ve dairesel bölgelerin alanları toplamı 10π ise $R + r$ kaçtır?

a) $1+\sqrt{3}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** 3 **d)** $2+\sqrt{6}$ **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$



O' noktasından AO ya inen dikme ayağı C olsun. $|CO'| = 2\sqrt{3}$, $|OO'| = R + r$, $|OC| = R - r$ dir. COO' dik üçgeninde $(R+r)^2 = (R-r)^2 + (2\sqrt{3})^2$ olup

$$Rr = 3 \qquad (1)$$

elde edilir.

Ayrıca dairelerin alanlar toplamından $\pi(R^2 + r^2) = 10\pi$ olup

$$R^2 + r^2 = 10 \qquad (2)$$

bulunur.

(1) ve (2) denklemlerinden $(R+r)^2 = R^2 + r^2 + 2Rr = 10 + 6 = 16$ olup $R + r = 4$ bulunur.

$\boxed{24}$ Taban yarıçapları 2 ve 6 olan dik kesik koninin içine yerleştirilen küre, yanal yüzeye ve tabanlara teğet olduğuna göre, bu kesik koninin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{148\sqrt{3}}{3}\pi$ **b)** $\dfrac{164\sqrt{3}}{3}\pi$ **c)** $\dfrac{208\sqrt{3}}{3}\pi$ **d)** $\dfrac{248\sqrt{3}}{3}\pi$ **e)** $\dfrac{324\sqrt{3}}{3}\pi$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Kürenin yarıçapı r olsun.

Kesik koninin yüksekliği $2r$ olacaktır.

Kesik konini tamamlayalım. Eksik kısmın yüksekliği h olsun. Benzerlikten $\dfrac{h}{h+2r} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow h = r$ dir.

Bu durumda kesik koninin hacmi $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 3r - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot r = \dfrac{104 \cdot r}{3} \cdot \pi$ olacaktır.

Kürenin koniye teğetliğini, $AB = 12$, $CD = 4$, $BC = AD$ olmak üzere, teğetler dörtgeni olan $ABCD$ ikizkenar yamuğu ile ifade edebiliriz.

Teğetler dörtgeninin özelliğinden $BC = AD = 6 + 2 = 8$.

C den AB ye indirilen yükseklik için Pisagor uygularsak $4r^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$ elde edilir.

Bu durumda $V = \dfrac{104 \cdot r}{3} \cdot \pi = \dfrac{208\sqrt{3}}{3}\pi$ olacaktır.

$\boxed{25}$ $2|x-1| - |x+2| = 6$ denkleminin çözümü olan reel sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 **b)** 2 **c)** 8 **d)** 10 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$i)$ $x \geq 1$ olsun. Bu durumda $|x-1| = x-1$ ve $|x+2| = x+2$ olur dolayısıyla $2(x-1)-(x+2) = 6 \implies \boxed{x = 10}$ buluruz.

$ii)$ $1 \geq x \geq -2$ olsun. Bu durumda $|x-1| = 1-x$ ve $|x+2| = x+2$ olur buradan da $2(1-x) - (x+2) = 6 \implies \boxed{x = -2}$ buluruz.

$iii)$ $-2 \geq x$ olsun. Bu durumda ise $|x-1| = 1-x$ ve $|x+2| = -x-2$ olur buradan da $2(1-x)-(-x-2) = 6 \implies \boxed{x = -2}$ buluruz.

Böylece verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesini $\{-2, 10\}$ olarak elde ederiz. Sorumuzun cevabı $10 + (-2) = 8$'dir.

$\boxed{26}$ Boy ortalaması $1,68$ m olan bir toplulukta kadınların boy ortalaması $1,66$ m, erkeklerin boy ortalaması $1,74$ m'dir. Bu toplulukta erkek sayısının kadın sayısına oranı nedir?

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{2}{5}$ **c)** $\dfrac{3}{5}$ **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Kadınların sayısı x, erkeklerin sayısı y olsun.

$(x+y) \cdot 1,68 = x \cdot 1,66 + y \cdot 1,74 \Rightarrow x \cdot 0,02 = y \cdot 0,06 \Rightarrow x = 3y \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3}$.

27 İç teğet çemberinin merkezi I, ağırlık merkezi G olan ABC üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla 15, 21 ve 9 olduğuna göre $|GI|$ kaçtır?

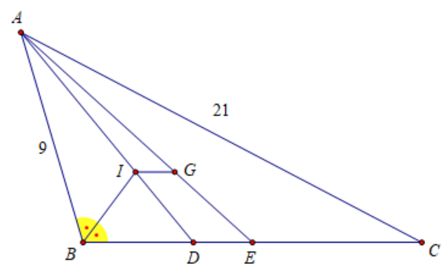
a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** 2 **e)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Lemma: Herhangi bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere $IG \parallel BC$ olması için gerek ve yeter şart $a = \dfrac{b+c}{2}$ olmasıdır.

İyi bilinen bu lemmanın ispatını vermeyeceğiz ancak ilk kez karşılaşan okuyucuların kendi çabasıyla lemmayı ispatlamalarını önemle tavsiye ederiz.



$|AB| = c = 9$, $|AC| = b = 21$, $|BC| = a = 15$ olsun. $15 = \dfrac{21+9}{2}$ olduğundan lemmaya göre, $IG \parallel BC$ dir. $[AD]$ iç açıortay ve $[AE]$ kenarortay olmak üzere paralellikten $AIG \sim ADE$ olup

$$\frac{|IG|}{|DE|} = \frac{|AG|}{|AE|} = \frac{2}{3} \tag{1}$$

yazılır.

O halde $|DE|$ uzunluğunu hesaplayalım. İç açıortay teoreminden $\dfrac{|BD|}{9} = \dfrac{|CD|}{21}$ dir. $|BD| = 3x$, $|CD| = 7x$ dersek $|BC| = 10x = 15$ olup $x = \dfrac{3}{2}$, $|BD| = \dfrac{9}{2}$ dir. $|BE| = |CE| = \dfrac{15}{2}$ olduğundan $|DE| = \dfrac{15-9}{2} = 3$ tür. (1) denkleminden $|IG| = 2$ bulunur.

28 ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, $D \in [BC]$, $m(\widehat{CDA}) = 2\alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \alpha$, $|CD| = x$, $|DB| = 2$, $|CA| = y$ ise x ile y arasında hangi bağıntı vardır?

a) $y^2 - 2x = 4$ **b)** $y - x = 2$ **c)** $x^2 = 2y + 2$ **d)** $x^2 + y^2 = 4$ **e)** $y^2 - 4x^2 = 1$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$|AB| = |AC| = y$ ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ dır. Böylece ADB üçgeni de ikizkenar olup $|DA| = 2$ dir. Şimdi $ADB \sim BAC$ açı-açı-açı benzerliği olduğundan $\dfrac{y}{x+2} = \dfrac{2}{y}$ yazılır. Buradan $y^2 = 2x + 4$ elde edilir.

29 Bir dolapta bulunan 10 değişik çift ayakkabı arasından karanlıkta 8 tane tek ayakkabı rastgele alınır. Bu sekiz ayakkabı içinde on çiftten hiçbirinin hem sağ, hem sol tekinin bulunmama olasılığı kaçtır?

a) $\dfrac{\binom{10}{8}2!2^8}{\binom{20}{8}}$ **b)** $\dfrac{2^8}{\binom{20}{8}}$ **c)** $\dfrac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}}$ **d)** $\dfrac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}}$ **e)** $\dfrac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Tüm durumlar 20 ayakkabı içinden 8 ayakkabı seçilmesidir. Bunların sayısı $\binom{20}{8}$ olur. Şimdi istenen durumların sayısını hesaplayalım: Önce 10 ayakkabı çiftinden 8 çiftin seçim sayısını belirleyelim: $\binom{10}{8}$ olur. Şimdi bu 8 çiftten her birinden ya sağ ayakkabıyı ya da sol ayakkabıyı seçmeliyiz. Bu seçimlerin sayısı da 2^8 olur. Böylece istenen durumların olasılığı

$$\frac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}}$$

elde edilir.

30 $2, a, b, c, n$ pozitif tam sayılarından oluşan artan bir sonlu dizidir. a, b, c sayı üçlüsünün tam 33 farklı seçimi, bu dizinin ilk üç terimini geometrik, son üç teriminin de aritmetik bir dizi oluşturmasını sağlamaktadır. n sayısının alacağı en küçük değer kaçtır?

a) 3 **b)** 1024 **c)** 1089 **d)** 2180 **e)** 2314

Çözüm:

$2, a, b$ geometrik dizi ise $a^2 = 2b$ olacağı için a çift sayıdır. $a = 2m$ olsun.

Dizi $2, 2m, 2m^2, c, n$ haline dönüşecektir.

$2m^2, c, n$ aritmetik dizi ise $c = \dfrac{n + 2m^2}{2} = m^2 + \dfrac{n}{2}$ olmalı. Bu durumda $n = 2k$ gibi bir çift sayı olmalı.

Diziyi yeniden yazarsak $2, 2m, 2m^2, m^2 + k, 2k$ elde ederiz.

Dizinin artan olması için $2m < 2m^2 < m^2 + k$, yani $m \geq 2$ ve $k > m^2$ olması gerekir.

Soruyu yeniden yazarsak:

$(2m, 2m^2, m^2 + k)$ üçlüsünün tam 33 farklı seçimi bu dizinin ilk üç terimini geometrik, son üç terimini de aritmetik dizi yapıyorsa $2k$ en az kaçtır?

a ve b de m ye bağlı olduğu için, $m \geq 2$ ve $k > m^2$ tam sayılar olmak üzere; soru şöyle düşünülebilir:

Hangi k değeri için $m \geq 2$ ve $k > m^2$ şartını sağlayan tam olarak 33 (m, k) ikilisi vardır?

$k = 34^2 + 1 = 1157$ sayısı için $(2, 1157), (3, 1157), \ldots, (34, 1157)$ ikileri söz konusu dizi şartlarını sağlar.

$n = 2k = 2314$ olarak elde edilir.

31 b, bir pozitif tam sayı ve $(\ )_b$ sayıların b tabanına göre gösterimi olmak üzere $(12)_b \cdot (15)_b \cdot (16)_b = (3146)_b$ ise, $(12)_b + (15)_b + (16)_b$ sayısının 10 tabanındaki karşılığı nedir?

a) 37 **b)** 40 **c)** 43 **d)** 48 **e)** 54

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Sayıları 10 luk sisteme göre yazarsak $(b+2)(b+5)(b+6) = 3b^3 + b^2 + 4b + 6$ denklemini elde ederiz.

$b^3 + 13b^2 + 52b + 60 = 3b^3 + b^2 + 4b + 6 \Longrightarrow b^3 - 6b^2 - 24b - 27 = 0$

$b > 6$ olmalı ve $9 \mid 27$ olduğu için $b = 9$ köklerden biri olabilir.

$9^3 - 6 \cdot 9^2 - 24 \cdot 9 - 27 = 27(27 - 18 - 8 - 1) = 0$ olduğu için $b = 9$ dur.

$(b+2) + (b+5) + (b+6) = 3b + 13 = 3 \cdot 9 + 13 = 40$.

Çözüm 2:

Eşitliğin iki yanını mod$b$ de inceleyelim.

$2 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{b} \Longrightarrow 54 \equiv 0 \pmod{b}$ elde edilir.

$b = 6, 9, 27, 54$ olabilir. (6 olamaz. İlk deneyeceğimiz sayı 9 olur.)

$T = (b+2) + (b+5) + (b+6) = 3b + 13$ olduğu için şıklardan kontrol edersek sadece $b = 9$ ve $T = 40$ sağlar.

32 Aşağıdaki sayılardan hangisi, $4n^2 + 1$ sayısını n nin sonsuz sayıda tam sayı değeri için böler?

a) 3 **b)** 7 **c)** 11 **d)** 13 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Çözüm 1:

$4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ denkliğinde $n \in \{0, \pm 1\}$ değerleri denenirse bunlardan hiçbirinin çözüm olmadığı görülür.

$4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ denkliğinde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ değerleri denenirse bunlardan hiçbirinin çözüm olmadığı görülür.

$4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğinde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ değerleri denenirse bunlardan hiçbirinin çözüm olmadığı görülür.

$4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğinde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$ değerleri denenirse bunlardan $n = 4$ ve $n = -4$ için denklik sağlanır. O halde $n \equiv \pm 4 \pmod{13}$ biçimindeki her n tam sayısı için bu denklik sağlanır.

Çözüm 2:

Çözüm 2: Kare kalanlar ile ilgili şu lemmayı kullanalım.

Lemma: m bir tam sayı olmak üzere $x^2 \equiv \pmod{p}$ denkliğinin

- $p = 4m + 1$ biçimindeki asal sayılar için çözümü vardır.
- $p = 4m + 3$ biçimindeki asal sayılar için çözümü yoktur.

Buna göre verilen ifadenin p asal sayısına bölünebildiğini düşünerek

$$(2n)^2 \equiv -1 \pmod{p} \qquad (1)$$

biçiminde yazalım. $p \in \{3, 7, 11\}$ asal sayıları $4m + 3$ formunda olduğundan(1) denkliğinin çözümü yoktur. $p = 13$ asal sayısı $4m + 1$ formunda olduğundan (1) denkliğinin çözümü vardır. Denenerek bu çözümün $n \equiv \pm 4 \pmod{13}$ olduğu görülebilir.

33 m, n pozitif tam sayılar ve $p > 2$ bir asal sayı olsun. $m \not\equiv 0 \pmod p$ olmak üzere $m^n + n^m \equiv 0 \pmod p$ denkliğini sağlayan (m, n) sıralı ikililerinin oluşturduğu kümede kaç eleman vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** p **d)** Sonsuz sayıda **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$m = 1$ ise $1 + n \equiv 0 \pmod p \Rightarrow n \equiv p - 1 \pmod p$ olacak. k pozitif bir tam sayı olmak üzere; $1^{kp-1} + (kp - 1)^1 \equiv 0 \pmod p$ olacağı için $n = kp - 1$ sayıları denkliği sağlar.

O halde bu denkliğin sonsuz sayıda çözümü vardır.

34 Bir küpün bir köşesinde bulunan bir örümcek sadece küpün kenarları boyunca hareket edebilmektedir. Her noktadan en fazla bir defa geçmek koşuluyla, bu örümcek bulunduğu köşeden en uzaktaki köşeye kaç farklı yoldan gidebilir?

a) 6 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 18 **e)** 671

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Küpün tabanı $ABCD$, tavanı da $EFGH$ olsun. (A ile E, B ile F komşu olmak üzere)

A dan G ye gitmek istiyoruz.

A dan B, D, E ye simetrik 3 yol var.

Bu yollardan birini, (B) yi ele alalım. C veya F ye gidilebilir. 2 simetrik yol var.

C ye gittiğimizi varsayalım. $C - G$, $C - D - H - G$ ve $C - D - H - E - F - G$ şeklinde 3 yol ile devam edilebilir.

O halde $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ farklı yolla A dan G ye ulaşılabilir.

35

$$\sum_{n=1}^{100} \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$$

toplamı kaçtır?

a) 300 **b)** 3267 **c)** 3300 **d)** 3330 **e)** 3333

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

k negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere;

$n = 3k$ ise $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \cdot 3k}{3} \right\rfloor = 2k$

$n = 3k + 1$ ise $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \cdot (3k+1)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2k + \frac{2}{3} \right\rfloor = 2k$

$n = 3k + 2$ ise $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \cdot (3k+2)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2k + 1 + \frac{1}{3} \right\rfloor = 2k + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{100}\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor &= \sum_{k=1}^{33} 2k + \sum_{k=0}^{33} 2k + \sum_{k=0}^{32}(2k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{33} k + \sum_{k=1}^{66} k \\
&= 2\cdot\frac{33\cdot 34}{2} + \frac{66\cdot 67}{2} \\
&= 33\cdot 34 + 33\cdot 67 \\
&= 33\cdot 101 \\
&= 3333
\end{aligned}$$

36 $\lfloor x^2+4x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 4\lfloor x \rfloor$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesinde $x=0$ sayısını içine alan en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-1 \le x \le 1$ **b)** $0 \le x < \sqrt{5}-2$ **c)** $-\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{5}-2$ **d)** $x=0$ **e)** $0 \le x \le \sqrt{5}-2$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$-1 < x < 0$ olsun.

$\lfloor x \rfloor = -1$ ve $\lfloor x^2 \rfloor = 0$ dır. Dolayısıyla $\lfloor x^2 \rfloor + 4\lfloor x \rfloor = -4$ tür.

$f(x) = x^2+4x$ fonksiyonu bu aralıkta artandır. $-3 = f(-1) < f(x) < f(0) = 0$ olduğu için $\lfloor x^2+4x \rfloor \in \{-1,-2,-3\}$.

Dolayısıyla $x=0$ çözümünü içeren aralığı negatif sayılara doğru genişletemeyiz.

Şimdi de bu aralığı pozitif sayılarda ne kadar genişletebiliriz, ona bakalım:

$0 < x < 1$ olsun.

$\lfloor x \rfloor = 0$ ve $\lfloor x^2 \rfloor = 0$ dır. Dolayısıyla $\lfloor x^2 \rfloor + 4\lfloor x \rfloor = 0$ dır.

$\lfloor x^2+4x \rfloor = 0$ olması için $x^2+4x < 1$ olması gerekir.

$x^2+4x-1 < 0$ eşitsizliğini çözersek $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

O halde $0 < x < \sqrt{5}-2 < 1$ aralığındaki sayılar için $\lfloor x^2+4x \rfloor = 0$ dır.

$\sqrt{5}-2 \le x < 1$ olduğunda $1 \le \lfloor x^2+4x \rfloor < 5$ olacağı için bu aralıktaki hiçbir sayı denklemi sağlamaz.

Toplarsak $x=0$ içeren en büyük aralık: $0 \le x < \sqrt{5}-2$ dir.

37 $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ farklı asal sayılar ve $P_1+P_2+\cdots+P_{12} \equiv x \pmod{12}$ olsun. Bu durumda x aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 0 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 11

Çözüm:

Seçeneklerdeki sayıların her biri x için uygun bir değer olabilir. Doğru yanıt seçeneklerde yoktur.

k bir tam sayı olmak üzere $12k \mp 1$ ve $12k \mp 5$ formatlarının her birinde sonsuz çoklukta asal sayı vardır. Buna göre

$P_i = 12k_i + 1$ biçiminde seçilirse $P_1+P_2+\cdots+P_{12} \equiv 0 \pmod{12}$ elde edilir. $x=0$ olabilir.

$P_1 = 2$, $P_2 = 3$ ve $i \ge 3$ için $P_i = 12k_i+1$ biçiminde seçilirse $P_1+P_2+\cdots+P_{12} \equiv 3 \pmod{12}$ olur. $x=3$ olabilir.

$P_1 = 2$, $P_2 = 7$ ve $i \ge 3$ için $P_i = 12k_i+1$ biçiminde seçilirse $P_1+P_2+\cdots+P_{12} \equiv 7 \pmod{12}$ olur. $x=7$ olabilir.

$P_1 = 3$, $P_2 = 7$ ve $i \geq 3$ için $P_i = 12k_i + 1$ biçiminde seçilirse $P_1 + P_2 + \cdots + P_{12} \equiv 8 \pmod{12}$ olur. $x = 8$ olabilir.

$P_1 = 2$, $P_2 = 11$ ve $i \geq 3$ için $P_i = 12k_i + 1$ biçiminde seçilirse $P_1 + P_2 + \cdots + P_{12} \equiv 11 \pmod{12}$ olur. $x = 11$ olabilir.

38 ABC üçgeninde $[AH_1]$, $[BH_2]$ yükseklikleri H noktasında kesişiyor. H_1, H, H_2 noktalarından geçen çemberin H_1 deki teğeti $[AB]$ yi D de kesiyor. $|AC| = 17$, $|CH_1| = 15$, $|H_1B| = 4$ olduğuna göre $|DH_1|$ kaçtır?

a) $4\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** 4 **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle HH_1C = \angle HH_2C = 90°$ olduğu için HH_1CH_2 kirişler dörtgenidir. Yani (HH_1H_2) çemberi C den geçer.

Basit açı hesabıyla ve teğet-kiriş açı özelliği ile $\angle BAH_1 = \angle HCH_1 = \angle HH_1B$ ve dolayısıyla $AD = DH_1$ elde edilir.

ABH_1 dik üçgen olduğu için $DH_1 = \dfrac{AB}{2}$.

AH_1C dik üçgeninde Pisagor'dan $AH_1 = 8$. AH_1B dik üçgeninde Pisagor'dan $AB = 4\sqrt{5}$.

Bu durumda $DH_1 = 2\sqrt{5}$ olur.

39 Dışbükey (konveks) $ABCD$ dörtgeninde $|DA| = |AB| = 2$, $m(\widehat{A}) = 108°$, $m(\widehat{C}) = 126°$ ise $|AC|$ kaçtır?

a) 2 **b)** 3 **c)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

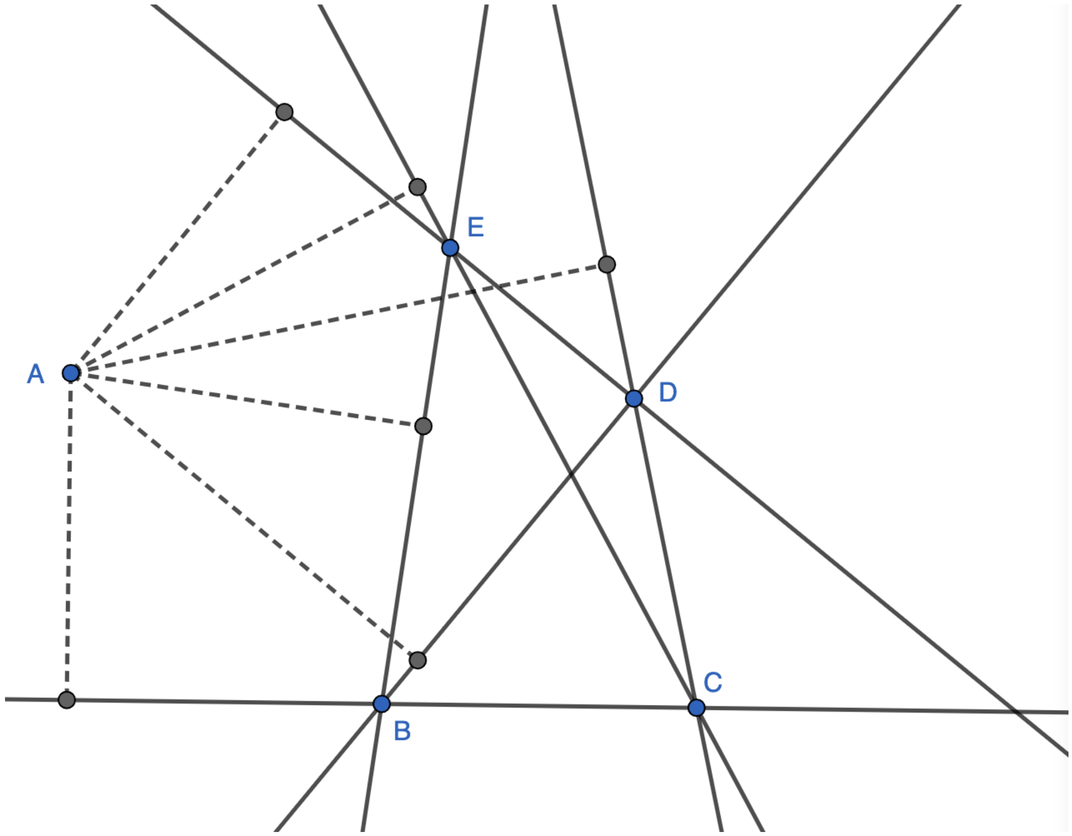
A merkezli ve $|AD| = |AB| = 2$ yarıçaplı çemberi çizelim. Çevre açı-merkez açı ilişkisi olan $m(\widehat{DAB}) + 2 \cdot m(\widehat{DCB}) = 108° + 2 \cdot 126° = 360°$ bağıntısı sağlandığından C noktası da bu çemberi üstündedir. Yani $|AC| = 2$ bir başka yarıçaptır.

40 A, B, C, D ve E düzlem üstünde beş değişik nokta olsun. Bu noktaları birleştiren doğrulardan hiçbiri bir başkasına dik ya da paralel olmasın. Bu beş noktanın her birinden geri kalan dört noktayı birleştiren doğrulara dikler çizelim. Bu dikler birbirleriyle A, B, C, D, E noktaları dışında toplam olarak en fazla kaç değişik noktada kesişebilirler?

a) 300 **b)** 310 **c)** 320 **d)** 330 **e)** 360

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$



Noktalar A, B, C, D, E olsun.

(A, B) ikilisi için; A dan inilen dikmelerle $(d(A))$ B den inilen dikmelerin $(d(B))$ kaç noktada kesiştiğine bakalım.

B den inilen dikmeleri A dan geçen doğrularla (AE, AD, AC) ile A dan geçmeyenler (ED, DC, EC) doğrulara indirilen dikmeler diye iki gruba alalım. ($d_1(B)$ ile $d_2(B)$)

$d(A)$ ile $d_1(B)$ deki her doğru 6 noktada, toplam $6 \times 3 = 18$ noktada kesişir. Bu iki kümenin elemanları paralel değildir.

$d(A)$ ile $d_2(B)$ deki her doğru 6 noktada kesişmez. Örneğin $d(B, ED) \parallel d(A, ED)$ olduğu için 5 noktada kesişir. $5 \times 3 = 15$.

$d(A)$ ile $d(B)$; $15 + 18 = 33$ noktada kesişir.

$C(5, 2) = 10$ nokta çifti olduğu için 330 kesişim noktası çıkar.

Çözümde eksik olan bir şeyler daha var: üçgenlerin diklik merkezleri.

A, B, C, D, E noktaları $C(5, 3) = 10$ üçgen belirtir. 330'u bulurken 3 dikme 3 noktada kesişir varsaymıştık. Halbuki diklik merkezinden dolayı 3 değil 1 noktada kesişirler. Yani her üçgen için 2 nokta fazla sayılmış. $2 \times 10 = 20$.

$\boxed{330 - 20 = 310}$.

Not 1: Bu soru IMO 1964/5 sorusu ile aynı.

IMO sorusunda A, B, C, D, E noktalarının sayılıp sayılmayacağı hakkında bir şey denmediği için orada cevap 315 olarak bulunmuştu. Burada cevap 310 olacaktır.

Aslında soru burada bitmiyor. A, B, C, D, E nin seçilişine göre başka dikmeler de noktadaş olabilir.

Öyle 5 nokta seçilebilir mi ki, söz konusu dikmeler 310 değişik noktada kesişsin.

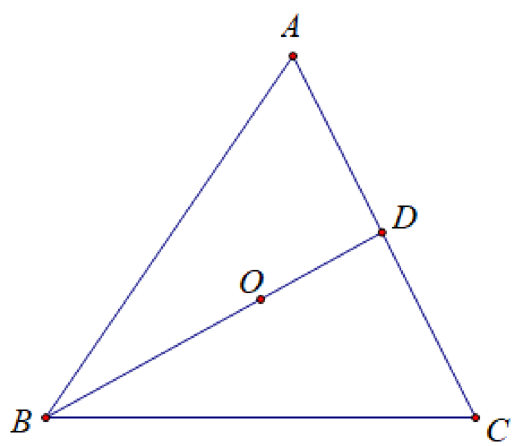
John Scholes, kalva.demon.co.uk, yarışmacıların sözlü olarak bunu yapmalarına gerek olmadığı şeklinde bilgilendirildiğini düşünüyor.

The Imo Compendium kitabına göre jüri örnek 5 nokta beklememiş. Yine bu kitabın ifadesine göre $A(1,1)$, $B(e,\pi)$, $C(e^2,\pi^2)$, $D(e^3,\pi^3)$, $E(e^4,\pi^4)$ noktalarının yukarıda tespit ettiklerimiz dışında noktadaş dikmeler oluşturmayacağı kolaylıkla görülebilir. Ben ise kolayca göremiyorum. Bu konuda çözümünüz varsa burada paylaşabilirsiniz.

Not 2: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (E) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1995

1

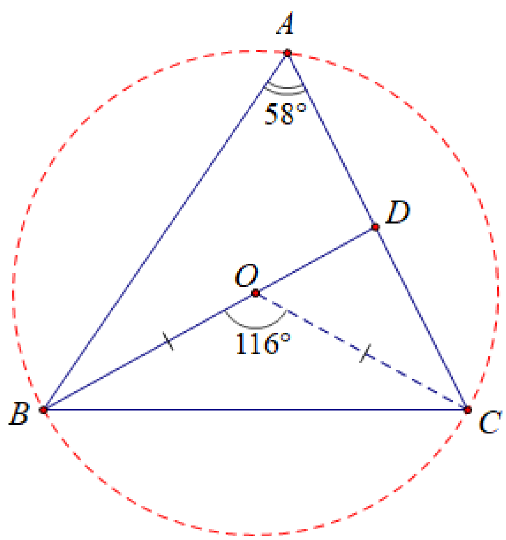


Şekilde $m(\widehat{A}) = 58°$ ve O noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. $m(\widehat{DBC})$ kaç derecedir?

a) 32° **b)** 30° **c)** 29° **d)** 28° **e)** 25°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



Aynı yayı gören çevre açı-merkez açı ilişkisinden $m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC}) = 2 \cdot 58° = 116°$ olur. BOC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = \dfrac{180° - 116°}{2} = 32°$ olur.

2 Bir bakkalda $16, 18, 19, 20$ ve 31 litrelik 5 tenekeden dördünde çiçek yağı, birinde zeytinyağı vardır. Bakkal, bir müşteriye litrenin belli bir tam katı kadar çiçek yağı satar. Başka bir müşteriye de ilkine sattığının iki katı kadar çiçek yağı sattıktan sonra, elinde hiç çiçek yağı kalmadığını görür. Zeytinyağı kaç litrelik tenekededir?

a) 16 **b)** 18 **c)** 19 **d)** 20 **e)** 31

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Satılan çiçek yağı, litre cinsinden 3 ile tam bölünebilen bir sayıdır. O halde $16, 18, 19, 20, 31$ sayılarının modülo 3 deki değerleri sırasıyla $1, 0, 1, 2, 1$ incelenirse, bunlardan 4 tanesinin toplamı, 3 ile bölümden 0 kalanı vermelidir. Bu durum $1, 0, 1, 1$ kalanları için mümkündür. O halde modülo 3 te 2 kalanı veren tenekeyi ayırırız. Yani 20 litrelik tenekede zeytinyağı vardır.

3 $(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$ ise , $x+y$ nedir?

a) $-2\sqrt{2}$ **b)** $-\sqrt{2}$ **c)** -1 **d)** 0 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Test mantığı ile $x=y=0$ için denklemin sağlandığı gözlemlenirse $x+y=0$ bulunur. Bu denklemi sağlayan başka sayılar da olabilir. Şimdi de sorunun tam çözümünü yapalım.

Verilen denklemden $y+\sqrt{y^2+1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}-x$ ve $\sqrt{y^2+1}-y = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = x+\sqrt{x^2+1}$ olur. Taraf tarafa çıkarma yapılırsa $(y+\sqrt{y^2+1}) - (\sqrt{y^2+1}-y) = (\sqrt{x^2+1}-x) - (\sqrt{x^2+1}+x)$ olup $2y=-2x$ ve $x+y=0$ elde edilir.

Not: Denklemi sağlayan tüm (x,y) gerçel sayı ikililerini bulmak istersek, $y=-x$ değerini ana denklemde yazabiliriz. $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$ denkleminden $(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1}) = 1$ bulunur. İki kare farkı özdeşliğinden dolayı bu eşitlik daima doğrudur. O halde verilen denklemin tüm gerçel çözüm ikilileri $(x,-x)$ biçimindedir.

4 Bir salona giren üç kişi eldivenlerini vestiyere bırakıyor. Eldivenleri geri alırken, her birine rastgele iki eldiven veriliyor. Her birinin kendisine ait olan eldiven çiftini almış olma olasılığı nedir?

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{1}{6}$ **c)** $\dfrac{1}{15}$ **d)** $\dfrac{1}{18}$ **e)** $\dfrac{1}{90}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$.

Toplam durum sayısı $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 15\cdot 6\cdot 1 = 90$. İstenen durum sayısı 1.

O halde aranan cevap $\dfrac{1}{90}$ olur.

5 7 sayısı $2, 22, 222, 2222, \ldots$ dizisinin kaç terimini böler?

a) 0 **b)** 1 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$222222 = 2\cdot 111111 = 2\cdot 111\cdot 1001$ ve $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ olduğundan $7 \mid 222222$ dir. Dolayısıyla, tüm rakamları 2 den oluşan ve basamak sayısı 6 nın katı olan tüm pozitif tam sayılar 7 ile tam bölünebilir. $7 \mid 222222222222$ gibi. Bu şekilde sonsuz çoklukta sayı vardır.

Çözüm 2:

2 ile 7 aralarında asal olduğu için bu soru; $1, 11, 111, \ldots$ dizisinin kaç terimi 7 ile bölünür sorusu ile aynıdır.

9 ile 7 aralarında asal olduğu için yeni soru da; $9, 99, 999, \ldots$ dizisinin kaç terimi 7 ile bölünür sorusu ile aynıdır. Bu dizi eşdeğer olarak $10^1 - 1, 10^2 - 1, \ldots, 10^6 - 1, \ldots$ şeklinde yazılabilir.

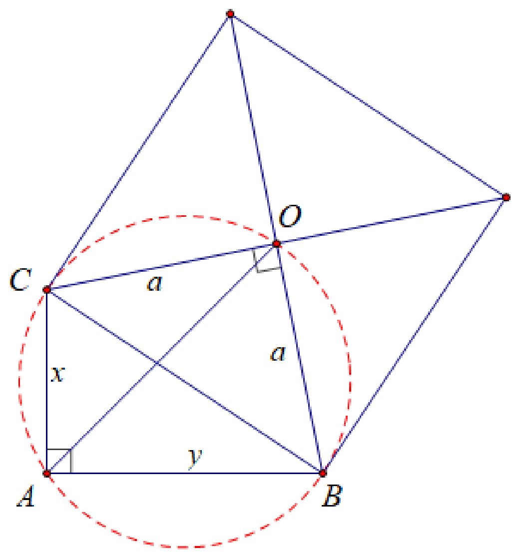
Fermat'ın Küçük Teoreminden $10^6 \equiv 1 \pmod 7$ olacağı için $k \in \mathbf{Z}^+$ olmak üzere $n = 6k$ sıradaki terimler 7 ile bölünür.

6 Bir dik üçgenin dik kenarları x ve y birim uzunluktadır. Bu dik üçgenin hipotenüsü üzerine dışa doğru bir kare çiziliyor. Üçgenin dik köşesi ile karenin merkezi arasındaki uzaklık nedir?

a) $\dfrac{x+y}{2}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{x+y}}{2}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x \cdot y}}{2}$ **e)** $\dfrac{x \cdot y}{\sqrt{2}}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

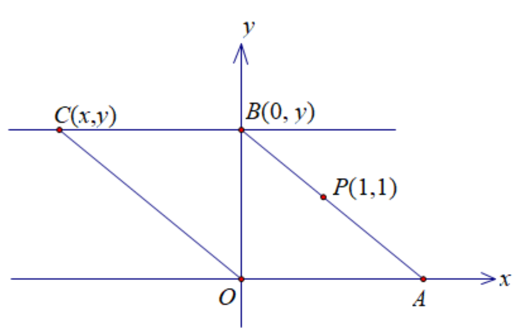


Şekildeki gibi ABC dik üçgenini çizelim. Karenin merkezi O noktası olsun. $|OB| = |OC| = a$ dersek $|BC| = a\sqrt{2}$ olur. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BOC}) = 90°$ olduğundan $ABOC$ bir kirişler dörtgenidir. Ptolemy teoreminden

$$|OA| \cdot a\sqrt{2} = x \cdot a + y \cdot a$$

olup $|OA| = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ elde edilir.

7



Şekilde AB, $P(1,1)$ noktasından geçen bir doğru ve

$OABC$ bir paralelkenardır. $C(x,y)$ noktasının x ve y koordinatları arasında hangi bağıntı vardır?

a) $y + yx = x$ **b)** $2y + yx = x$ **c)** $y + 2yx = x$ **d)** $y = \dfrac{x+y}{x-y}$ **e)** $y = \dfrac{x-y}{x+y}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$OC \parallel PB$ olduğundan bu doğruların eğimleri eşittir. Böylece, $\dfrac{y-1}{0-1} = \dfrac{y-0}{x-0}$ olup düzenlenirse $y + xy = x$ eşitliğine ulaşırız.

$\boxed{8}$ $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir?

a) $1 + \dfrac{99}{100!}$ **b)** $\dfrac{101}{100}$ **c)** $1 - \dfrac{99}{100}$ **d)** 1 **e)** $1 - \dfrac{1}{100!}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + ... + \dfrac{99}{100!} = \sum\limits_{n=1}^{99} \dfrac{n}{(n+1)!}$ yazabiliriz. Aşağıdaki teleskopik toplamı oluşturarak,

$$S = \sum_{n=1}^{99} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{100!} \text{ elde ederiz.}$$

$\boxed{9}$ Bir sayı dizisinin birinci terimi 20 dir. Bundan sonraki her terim kendisinden önceki terimin karesinin rakamları toplamına 1 eklenerek elde ediliyor. Bu dizinin yüzüncü terimi nedir?

a) 5 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 11 **e)** 14

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

(a_n) dizisinin ilk birkaç terimini hesaplayalım: $(a_n) = (20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, \dots)$ olmaktadır. Bu durumda ilk terimden sonra dizinin periyodunun 3 olduğunu anlıyoruz. $a_{100} = a_4 = 11$ bulunur.

$\boxed{10}$ Aşağıdaki kümelerin hangisi

$$\{a \in \mathbb{Z} \mid a^7 \equiv a \pmod{63}\}$$

kümesinin alt kümesi değildir?

a) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{21}\}$ **b)** $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{9}\}$ **c)** $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 2 \pmod{3}\}$
d) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \pmod{3}\}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$63 = 7 \cdot 9$ dur. Fermat teoreminden dolayı her a tam sayısı için $a^7 \equiv a \pmod{7}$ denkliği sağlanır. Euler teoreminden dolayı $(a, 9) = 1$ iken $a^6 \equiv 1 \pmod{9}$ olup $a^7 \equiv a \pmod{9}$ sağlanır. Yine $9 \mid a$ iken $a^7 \equiv a \pmod{9}$ sağlanır. Sadece $(a, 9) = 3$ iken $a^7 \not\equiv a \pmod{9}$ olur. O halde denkliğin çözüm kümesi $S = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \not\equiv 3, 6 \pmod{9}\}$ olur. $(b), (c), (d)$ seçeneklerinde verilen kümeler S nin birer alt kümesidir.

Öte yandan $21 \in \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{21}\}$ olup $21 \notin S$ dir. (a) seçeneğinde verilen küme S nin bir alt kümesi değildir.

11 a, b, c gerçel sayıları $(0,1)$ aralığında ise, $\dfrac{\log_a b}{a-b+1} + \dfrac{\log_b c}{b-c+2} + \dfrac{\log_c a}{c-a+3}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri kaçtır?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** 1 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** 3 **e)** 9

Çözüm:

Yanıt: Hiçbiri

Bu soru bu bağlantıda tartışıldı. Lokman Gökçe'nin çözümü aşağıda:

$S = \dfrac{\log_a b}{a-b+1} + \dfrac{\log_b c}{b-c+2} + \dfrac{\log_c a}{c-a+3}$ dersek $S > \dfrac{3}{2}$ olduğunu gösterebiliriz. Şimdi bu $\dfrac{3}{2}$ değerine nasıl ulaştığımızı açıklayalım:

S toplamını oluşturan üç terim de pozitif olduğundan aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini uygulayabiliriz ve $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ olduğundan

$$S \geq 3\left(\frac{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a}{(a-b+1)(b-c+2)(c-a+3)}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(\frac{1}{(a-b+1)(b-c+2)(c-a+3)}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$((a-b+1)(b-c+2)(c-a+3))^{\frac{1}{3}} \leq \frac{(a-b+1)+(b-c+2)+(c-a+3)}{3} = 2 \tag{2}$$

olup (1) ve (2) eşitsizliklerinden $S \geq \dfrac{3}{2}$ elde edilir. Eşitlik durumunun sağlanması için $(a-b+1) = (b-c+2) = (c-a+3)$ olması gereklidir. (Gereklidir ama bu bile yeterli değildir, çünkü logaritmalı kesirlere de ortalama eşitsizliği uygulanmıştı.) Ancak bu durum $a = 1, b = c = 0$ iken gerçekleşir. Bu ise a, b, c sayılarının $(0,1)$ açık aralığında olması ile çelişir. Yani eşitlik durumu mümkün değildir ve $S > \dfrac{3}{2}$ bulunur. Dolayısıyla $(a), (b), (c)$ seçenekleri elenir.

Diğer taraftan $a = b = c$ iken $S = \dfrac{11}{6}$ olup $(d), (e)$ seçenekleri elenir.

Not: Yanıt olarak $c)$ $\dfrac{3}{2}$ verilmiş. Sınav eski tarihli olduğu için orijinal soru kağıdı elimize ya da resmi sitede yoktur. Soruyu kitaba aktarma aşamasında bir yazım hatası yapılmış olması da mümkündür.

12 Ondalık yazılımında 4 ve 7 rakamları bulunup, 0 ve 8 rakamları bulunmayan kaç tane 10 basamaklı sayı vardır?

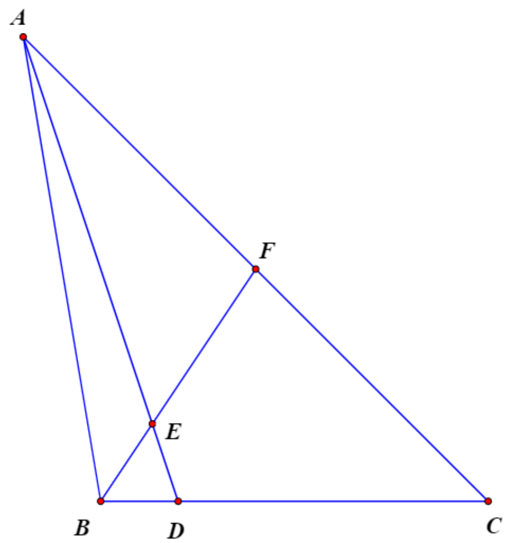
a) $8^{10} - 2 \cdot 7^{10} + 6^{10}$ **b)** $8! - 2 \cdot 7! + 6!$ **c)** $10^8 - 2 \cdot 10^7 + 6^6$ **d)** $2\binom{10}{2}8^8$ **e)** $2\binom{10}{2}8^8 - 6\binom{10}{2}8^7$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$0, 8$ rakamlarını içermeyen tüm 10 basamaklı sayıların sayısı 8^{10} dur. Bunların içinde 4 rakamı içermeyenlerin sayısı 7^{10} dur. 7 rakamı içermeyenlerin sayısı da 7^{10} dur. $4, 7$ rakamlarının ikisini de içermeyenlerin sayısı ise 6^{10} olur. İçerme dışarma prensibinden, istenen durumların sayısı $8^{10} - 2 \cdot 7^{10} + 6^{10}$ şeklinde elde edilir.

13



Şekilde F, $[AC]$ nin orta noktası, $D \in [BC]$ ve $\{E\} = [BF] \cap [AD]$ dir.

$|DC| = 4|BD|$, $Alan(DCFE) = 42$ ise, $Alan(ABE)$ ne olur?

a) 21 **b)** 20 **c)** 18 **d)** 15 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Menelaüs teoreminden $\dfrac{|AF|}{|AC|} \cdot \dfrac{|CD|}{|DB|} \cdot \dfrac{|BE|}{|EF|} = 1$ olup $|EF| = 2|BE|$ bulunur. Yine $\dfrac{|BD|}{|BC|} \cdot \dfrac{|CF|}{|FA|} \cdot \dfrac{|AE|}{|ED|} = 1$ olup $|AE| = 5|ED|$ bulunur. Böylece, $Alan(BDE) = S$ denirse, $Alan(DEF) = 2S$, $Alan(ABE) = 5S$ olur. Ayrıca $Alan(CDF) = 4 \cdot Alan(BDF)$ olduğundan $Alan(CDF) = 12S$ olur. Dolayısıyla $Alan(CDEF) = 14S = 42$ olup $S = 3$ elde edilir. Sonuç olarak, $Alan(ABE) = 5S = 15$ bulunur.

14 $n^n + 1 = (n+1)(2n+1)$ eşitliğinin tam sayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$n \leq -2$ iken n^n+1 ifadesi tam sayı değildir. Bu durumda çözüm gelmez. $-1 \leq n \leq 3$ için denenirse, $n = -1$ ve $n = 3$ için eşitliğin sağlandığı görülebilir. $n = 4$ için $n^n+1 = 4^4+1 = 257$, $(n+1)(2n+1) = 5 \cdot 9 = 45$ tir. $n \geq 4$ için n^n+1 ifadesi $(n+1)(2n+1)$ ifadesinden çok daha hızlı büyümektedir. Bu durumda $n^n+1 > (n+1)(2n+1)$ olup çözüm yoktur. Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi $\{-1, 3\}$ olur.

15 Herhangi bir $r > 0$ sayısı için; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve

$$\begin{array}{lcl} |x-2| < r^2 & \Longrightarrow & |f(x) - 3| < r \\ |x-2| < \dfrac{r}{10} & \Longrightarrow & |g(x) - 4| < r \end{array}$$

şartlarını sağlayan (f, g) fonksiyon çiftleri düşünülüyor.

Aşağıdaki x değerlerinden hangileri $|f(x) + g(x) - 7| < \dfrac{1}{2}$ eşitsizliğini bu tür (f, g) çiftlerinin tümü için sağlar?

$(I)\quad x = 1,99 \qquad (II)\quad x = 2,024 \qquad (III)\quad x = 1,95 \qquad (IV)\quad x = 1,9$

a) Hiçbiri için

b) Sadece (I) için

c) Sadece (I) ve (II) için

d) Sadece $(I),(II),(III)$ için

e) Hepsi için

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$|f(x) - 3| < r$$
$$|g(x) - 4| < r$$

eşitliklerinden mutlak değer eşitsizliğini uygularsak

$$\rightarrow |f(x) + g(x) - 7| \leq |f(x) - 3| + |g(x) - 4| < 2r$$

Ayrıca soruda $|f(x) + g(x) - 7| < \dfrac{1}{2}$ verildiğinden

$$r > \frac{1}{4}$$

Dolayısıyla

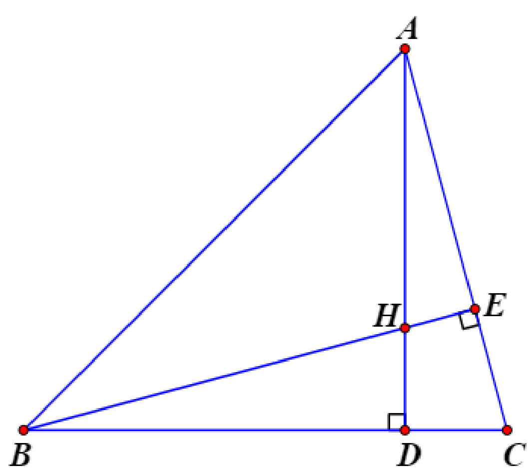
$$|x - 2| < \frac{1}{40} < \frac{1}{16}$$

elde edilir ve $x \in (1,975, 2,025)$ elde edilir. Bu aralıkta olan yönergeler ise I, II dir.

$\boxed{16}$ Şekildeki ABC üçgeninde,

$m(\widehat{ABC}) = 45°,\ m(\widehat{ACB}) = 75°$ ve $|BC| = 6$ dır.

Yüksekliklerin kesim noktası H ise $|AH|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?



a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{6}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

C den $[AB]$ ye inilen dikme ayağı F olsun. BCF ikizkenar dik üçgeninde $|BF| = |CF| = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ dir. $m(\widehat{BHF}) = 60^\circ$ olduğundan BFH dik üçgeninde $|HF| = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ bulunur. AFH ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AH| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ olur.

17 2 mavi, 2 kırmızı ve 2 beyaz top bir çember etrafına rastgele dizildiğinde aynı renkli topların hep yan yana gelme olasılığı nedir?

a) $\dfrac{1}{20}$ **b)** $\dfrac{1}{12}$ **c)** $\dfrac{1}{9}$ **d)** $\dfrac{1}{6}$ **e)** $\dfrac{1}{4}$

Çözüm:

Yanıt: Seçeneklerde yoktur.

Olasılıkta özdeş nesne yoktur! Dairesel permütasyondan, örnek uzayın eleman sayısı $(6-1)! = 5! = 120$ dir. İstenen durumların eleman sayısı ise $(3-1)! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dır. Böylece istenen durumların olasılığı

$$p = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

Not: Bu problem, ülkemizde matematik öğretmenleri tarafından çeşitli platformlarda tartışıldı. Farklı yanıtlar üretilebildiği için, uzman görüşü almak amacıyla yabancı bir site olan math.stackexchange.com sitesinde başlık açmıştım. Konuyla ilgilenenler sayfayı ziyaret edebilir.

18 Aşağıdaki sayılardan hangisi $b > 1$ doğal sayısı ne olursa olsun asal değildir?

a) $(11)_b$ **b)** $(111)_b$ **c)** $(1111)_b$ **d)** $(11111)_b$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$(1111)_b = b^3+b^2+b+1 = b^2(b+1)+(b+1) = (b^2+1)(b+1)$ sayısında iki çarpan da 1 den büyük oldğundan her halükarda bileşik sayıdır.

19 a ,b, c gerçel sayıları için,

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2 \\ a^2+b^2+c^2 &= 2 \end{aligned}$$

ise, c'nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** 1 **c)** $\dfrac{5}{4}$ **d)** $\dfrac{4}{3}$ **e)** $\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$a+b = 2-c \Rightarrow a^2+b^2+2ab = c^2-4c+4$

$c^2-4c+4 = a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+a^2+b^2 = 2(a^2+b^2) = 2(2-c^2)$

$c^2-4c+4 \leq 4-2c^2 \Rightarrow 3c^2-4c \leq 0 \Rightarrow 0 \leq c \leq \frac{4}{3}$

20 Bir sırada 9 koltuk bulunmaktadır. 6 kişi bu sırada rastgele oturduktan sonra yan yana iki boş koltuk kalması olasılığı nedir?

a) $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{2}{12}$ **c)** $\frac{4}{12}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{7}{12}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

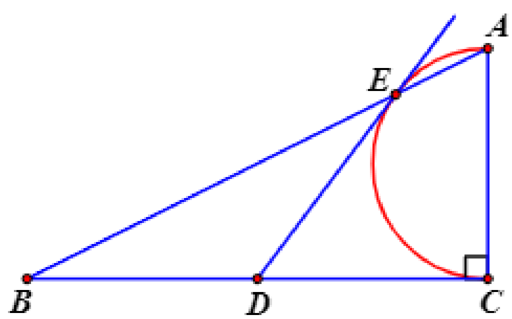
İstenmeyen durum, boş koltukların ayrık durumlarda olmasıdır. Altı kişiyi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ile gösterelim. $-1-2-3-4-5-6-$ gibi bir sıralamada $-$ işaretiyle gösterilen yerlerden üç tanesine boş koltuk getireceğiz. Bu şekilde $\binom{7}{3} = 35$ tane durum vardır. Tüm durumlar ise, boş koltukların seçim sayısı $\binom{9}{3} = 84$ olur. Böylece istenen olasılık

$$1 - \frac{35}{84} = \frac{7}{12}$$

elde edilir.

Not: Eğer insanların yer değiştirmelerini de hesaba katmalıydık denirse, istenmeyen durumların sayısı $\binom{7}{3} \cdot 6!$ ve tüm durumların sayısı $\binom{9}{3} \cdot 6!$ olacağından, istenen olasılık yine $\frac{7}{12}$ gelirdi.

21



Şekilde $|BC| = 2$, $|AC| = 1$ ve $m(\widehat{ACD}) = 90°$ dir. $[AC]$ çaplı çemberin $[AB]$ kenarını kestiği E noktasından çembere çizilen teğet BC'yi D'de kestiğine göre, $\tan(\widehat{EDC})$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) -2 **b)** $-\frac{4}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$[AC]$ çap olduğundan Thales teoremi gereğince $m(\widehat{AEC}) = 90°$ dir. Ayrıca, eşit uzunluklu teğet parçalarından $|DE| = |DC|$ dir. BCE dik üçgeninde Thales teoreminden dolayı, $|DE| = |DC| = |DB|$ dir. Böylece BDE ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{EDC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC})$ olur. $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ dersek $\tan\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ dir.

$$\tan(\widehat{EDC}) = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

22 Aşağıdaki sayılardan hangisi $(a^3-1)\cdot a^3\cdot(a^3+1)$ sayısını a'nın en az bir tam sayı değeri için bölmez?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

• a çift sayı iken $8 \mid a$ dır. a tek sayı iken $8 \mid (a^2-1)$ dir. O halde her a tam sayısı için $8 \mid (a^3-1)a^3(a^3+1)$ olur.

• $3 \mid a$ iken $9 \mid a^2$ dir. $3 \nmid a$ iken $\phi(9)=6$ olduğundan $9 \mid (a^6-1)$ dir. O halde her a tam sayısı için $9 \mid (a^3-1)a^3(a^3+1)$ olur.

• Fermat teoreminden $a^7 \equiv a \pmod 7$ olduğundan $7 \mid a(a^6-1)$ dir. O halde her a tam sayısı için $7 \mid (a^3-1)a^3(a^3+1)$ olur.

• Yukarıdaki sonuçlara göre her a tam sayısı için $6 \mid (a^3-1)a^3(a^3+1)$ olur.

23 n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\{a \in \mathbb{N} : |\sqrt{a}-n| < \frac{1}{2}\}$$

kümesinde kaç eleman vardır?

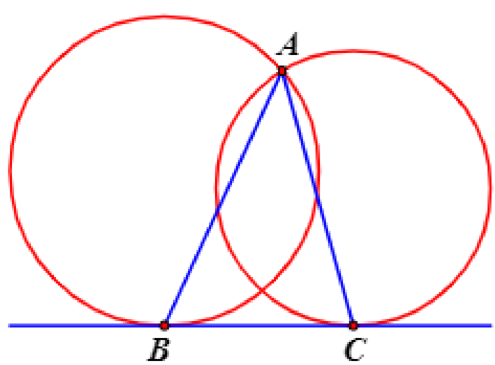
a) $n-1$ **b)** $n+1$ **c)** $2n-1$ **d)** $2n$ **e)** $n(n+1)$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$|\sqrt{a}-n| \le \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \le \sqrt{a}-n \le \frac{1}{2} \iff n-\frac{1}{2} \le \sqrt{a} \le \frac{1}{2}+n \iff n^2-n+\frac{1}{4} \le a \le n^2+n+\frac{1}{4}$ olduğundan bu aralıkta $a \in \{n^2-n+1, n^2-n+2, \ldots, n^2+n\}$ değerlerinin her birini alabilir. Böylece a nın alabileceği $(n^2+n)-(n^2-n+1)+1 = 2n$ doğal sayı değeri vardır.

24



Şekilde A noktasından geçen iki çemberden d doğrusuna B'de teğet olanın yarıçapı 9, C'de teğet olanın yarıçapı 4'tür. ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\frac{5}{2}$ **b)** 5 **c)** 6 **d)** $\sqrt{6}$ **e)** $\sqrt{13}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

B de teğet olan çemberin merkezi O_1, C de teğet olanın merkezi O_2, (ABC) çemberinin merkezi de O olsun.

$\angle AOC = 2\angle ABC = \angle AO_1B$

$\angle AOB = 2\angle ACB = \angle AO_2C$

Bu durumda $\triangle AOC \sim \triangle AO_1B$ ve $\triangle AOB \sim \triangle AO_2C$. Benzerlik oranlarını yazıp

$$\frac{OC}{O_1B} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{OB}{O_2C} = \frac{AB}{AC}$$

taraf tarafa çarparsak $OB^2 = O_1B \cdot O_2C = 9 \cdot 4 = 36 \Longrightarrow OB = 6$ elde edilir.

25 Bir çember etrafına, her sayı bitişiğindeki iki sayının çarpımına eşit olacak şekilde en fazla kaç farklı sayı yazılabilir?

a) 3 **b)** 6 **c)** 15 **d)** 243 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Sayılardan biri 0 olursa, bu durumda çember etrafındaki diğer tüm sayılar 0 olacaktır. Yalnız bir farklı sayı yazmış oluruz. Bu yüzden çember etrafındaki sayıların 0 dan farklı olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, çember etrafındaki sayılar sırasıyla $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olsun. $x_1 \cdot x_3 = x_2$ ve $x_2 \cdot x_4 = x_3$ olur. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak $x_1 \cdot x_4 = 1$ olup $x_4 = \dfrac{1}{x_1}$ elde edilir. Benzer şekilde $x_5 = \dfrac{1}{x_2}$, $x_6 = \dfrac{1}{x_3}$, $x_7 = \dfrac{1}{x_4} = x_1$, $x_8 = x_2$ olup en fazla 6 farklı sayı yazabileceğimizi anlıyoruz. Bunun için bir örnek verelim: Çember etrafına sırasıyla $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ yazabiliriz.

26 $(ABC)_7 = (CBA)_9$ ise C aşağıdakilerden hangisidir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

A, B, C sayıları 7 tabanının rakamları olduğu için $0 \le A, B, C \le 6$ dır. Ayrıca, verilen sayıların üç basamaklı olabilmesi için $A > 0$, $C > 0$ dır. Çözümleme yaparsak, $49A + 7B + C = 81C + 9B + A$ olup $B = 8(3A - 5C)$ elde edilir. $8 \mid B$ olduğundan sadece $B = 0$ değerini alabilir. Bu halde $3A = 5C$ olup, yalnızca $A = 5$, $C = 3$ durumu mümkündür.

27 a bir tam sayı olmak üzere, $x^3 + x + a = 0$ denkleminin kökleri ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) Yalnızca sonlu sayıda a için sadece bir kökü tam sayı olur.
b) Yalnızca bir kökü tam sayı olacak şekilde sonsuz sayıda a vardır.
c) Yalnızca sonlu sayıda a için bütün kökleri tam sayı olur.
d) Sonsuz tane a için bütün kökleri tam sayı olur.
e) Hiçbir a için tam sayı kökü olamaz.

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Denklemin köklerinden biri r olsun.

$P(x) = x^3 + x + a = (x - r)(x^2 + rx + r^2 + 1) + a + r + r^3$ ve $a = -r - r^3$ tür.

Buna göre her r tam sayısı için a bir tam sayı olacaktır.

$Q(x) = x^2 + rx + r^2 + 1 = 0$ denkleminde $\Delta = r^2 - 4(r^2 + 1) = -3r^2 - 4 < 0$ olduğu için $Q(x)$ in gerçel kökü yoktur.

O halde $P(x)$ in tek gerçel kökü r dir.

$S = \{r \in \mathbb{Z} \mid a = -r^3 - r\}$ kümesine ait her a sayısı için denklemin tek bir tam sayı kökü vardır.

28 $ABCD$ karesinin $[AD]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde sırasıyla K ve L noktaları $m(\widehat{DAL}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{DCK}) = 15^\circ$ olacak şekilde seçiliyor.

$[CK] \cap [AL] = \{P\}$ olmak üzere $m(\widehat{APB})$ kaç derecedir?

a) 15 **b)** 30 **c)** 45 **d)** 60 **e)** 75

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\angle APC = 90^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 135^\circ$

$2\angle APC + \angle ABC = 360^\circ$ ve $AB = AC$ olduğu için (APC) çemberinin merkezi B dir. Yani $BA = BP$.

$\angle BAP = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ olduğu için $\triangle APB$ eşkenardır.

Çözüm 2:

A dan CK ya inilen dikmenin ayağı H olsun.

$\angle HCA = 30^\circ$, $\angle PAC = 15\circ$, $\angle HAP = \angle HPA = 45^\circ$.

$AH = 1$ dersek $\triangle AHP$ ikizkenar dik üçgen olduğu için $AP = \sqrt{2}$.

$\triangle CAH$ bir $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğu için $AC = 2$ ve karenin kenarı $AB = \sqrt{2}$ olacaktır.

$AP = AB = \sqrt{2}$ ve $\angle PAB = 60^\circ$ olduğu için $\triangle APB$ eşkenar üçgen ve $\angle APB = 60^\circ$ dir.

Çözüm 3:

$\angle APB = \alpha$ diyelim.

$\angle ABP = 120^\circ - \alpha$, $\angle PBC = \alpha - 30^\circ$, $\angle CPB = 135^\circ - \alpha$ olacaktır.

$\triangle ABP$ de ve $\triangle PBC$ de Sinüs oranlarını yazalım:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}, \quad \frac{BP}{BC} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin(135^\circ - \alpha)}$$

Taraf tarafa çarpıp düzenlersek

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(135^\circ - \alpha)} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin(135^\circ - 60^\circ)}$$

$\alpha = 60^\circ$ olduğu kolayca görülebilir.

29 $x > 0$ için $f(x+1) = x \cdot f(x)$ ve $f(1) = 1$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $f(x)$'in en küçük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.

b) $f(x)$'in en küçük değerini aldığı nokta $(0, 1)$ aralığındadır.

c) $f(x)$ en büyük değerini $x = 1$ noktasında alır.

d) $f(x)$'in en büyük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.

e) $f(x)$'in en büyük değerini aldığı nokta $(2, \infty)$ aralığındadır.

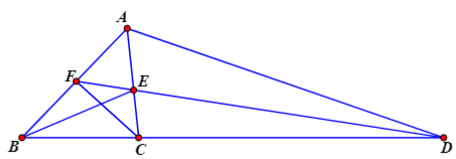
Çözüm:

Yukarıdaki açıklamalarımı matematik kafası sitesinde de paylaşmıştım. Emrah Sercan Yılmaz bey'in cevabı sorunun hatalı olduğunu gösteriyor.

Yanıt: Soru Hatalı olduğundan yanıt yoktur.

Çözüm [Emrah Sercan Yılmaz]: $(0, 1)$ aralığı üzerinde $f(x) = \cot(-\pi x)$ ve $x = 1$ için $f(1) = 1$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyon bütün şıkları eler. Çünkü her $x > 0$ için $f(x+1) = x \cdot f(x)$ bağıntısı yardımıyla tüm $x > 1$ değerleri için görüntüler üretilebilir. Ayrıca $\lim_{x\to 0^+} \cot(-\pi x) = -\infty$ ve $\lim_{x\to 1^-} \cot(-\pi x) = \infty$ olup fonksiyonun maksimum veya mimimum değeri yoktur.

30



Şekilde $[BE]$, ABC üçgeninin bir iç açıortayı, $[AD]$ ise bir dış açıortayıdır. DE doğrusu AB doğrusunu F noktasında kesmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 46°$, $m(\widehat{ACB}) = 84°$ ise $m(\widehat{BFC})$ kaç derecedir?

a) 94 **b)** 92 **c)** 90 **d)** 88 **e)** 84

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\triangle ABC$ de, D, E, F noktaları için Menelaus uygulayalım.

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

İç açıortay teoreminden

$$\frac{EA}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

Dış açıortay teoreminden

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

elde edilir. Üç eşitliği taraf tarafa çarparsak

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

elde ederiz. Bu da CF nin $\angle ACB$ nin açıortayı olduğu anlamına gelir.

$\angle BFC = 180° - \angle FBC - \angle FCB = 180° - 46° - 42° = 92°$.

31 Bir n doğal sayısı 48 e bölündüğünde kalan 47 oluyor. Aynı sayı 49 a bölündüğünde kalan yine 47 dir. Bu n sayısı 42 ye bölününce kalan ne olur?

a) 5 **b)** 7 **c)** 13 **d)** 24 **e)** 41

Çözüm:

Cevap: $\boxed{5}$

Pratik çözüm:

$n = 47$ verilen iki şartı sağlamaktadır, 42 ile bölümünden kalan ise $\boxed{5}$ tir.

Gerçek çözüm:

Verilen bilgiler ışığında n sayısının ekok$\{48, 49\}$ ile bölümünden kalanın 47 olacağı açıktır. O halde $n = k \cdot \text{ekok}\{48, 49\} + 47$ yazabiliriz.

ekok$\{48, 49\}$ sayısı 42 ile tam bölündüğünden,

$$n = k \cdot \text{ekok}\{48, 49\} + 47$$
$$= \underbrace{k \cdot \text{ekok}\{48, 49\} + 42}_{\text{42 ile tam bölünür}} + 5$$

sayısının 42 ile bölümünden kalanın $\boxed{5}$ olduğu açıktır.

32 $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinin, elemanları arasında iki ardışık sayı bulunmayan 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 26 **b)** 29 **c)** 42 **d)** 78 **e)** 126

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Elemanları küçükten büyüğe sıralayıp sayalım:

$\{1, 4, 6, x\}$ şeklinde 4 tane, $\{1, 4, 8, x\}$ şeklinde 2 tane, $\{1, 4, 9, 11\}$ şeklinde 1 tane,

$\{1, 5, 8, x\}$ şeklinde 2 tane, $\{1, 5, 9, 11\}$ şeklinde 1 tane,

$\{1, 6, 8, x\}$ şeklinde 2 tane, $\{1, 6, 9, 11\}$ şeklinde 1 tane,

yani $\{1, x, y, z\}$ şeklinde toplamda 13 altküme vardır.

$\{2, x, y, z\}$ şeklinde de 13 altküme vardır.

$\{4, 6, 8, x\}$ şeklinde 2 tane, $\{4, 6, 9, 11\}$ şeklinde 1 tane altküme vardır.

O halde, iki ardışık sayı içermeyen 4 elemanlı altkümelerin sayısı $13 + 13 + 3 = 29$ dur.

33 a, b pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$a^{\ln b}.b^{\ln a} + a^{\ln b} + b^{\ln a} = 8$ ise, $(\ln a).(\ln b)$ çarpımı kaçtır?

a) $\frac{1}{2}\ln 2$ **b)** $\ln 2$ **c)** $\frac{3}{2}\ln 2$ **d)** $3\ln 2$ **e)** $(\ln 2)^2$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$a = e^x$ ve $b = e^y$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $\ln a = x$ ve $\ln b = y$ elde edilir. Verilen eşitlikten

$$e^{2xy} + 2e^{xy} = 8$$

elde edilir. $e^{xy} = t$ dersek,

$$t^2 + 2t = 8 \implies (t+1)^2 = 9 \implies t = -1 \pm 3 = -4, 2$$

çözümleri elde edilir. $t > 0$ olduğundan $t = e^{xy} = 2$ bulunur. Buradan $xy = (\ln a) \cdot (\ln b) = \ln 2$ elde edilir.

34 1 den 56 ya kadar doğal sayılar, bir çember etrafına, herhangi ardışık dizili 5 sayının toplamı en az K olacak şekilde dağıtılmıştır. K en çok kaç olabilir?

a) 15 **b)** 56 **c)** 142 **d)** 143 **e)** 270

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{\text{Hiçbiri}}$

Öncelikle cevabın 140'dan büyük olamayacağını gösterelim. 56 dışındaki 55 sayıyı ardışık beşli sayılar olarak gruplarsak 11 tane 5'li grup vardır. Her birindeki sayıların toplamı en az K olduğundan toplam en az $11K$ olacaktır. Dolayısıyla

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 55 = \frac{55 \cdot 56}{2} \geq 11K \implies 140 \geq K$$

elde edilir. Ancak K sayısı 113'den de büyük veya eşit olmalıdır. Çünkü $1, 56, 2, 54, 4, 52, 6, 50, 8, 48, 10, 46,$ $12,\ 44,\ 14,\ 42,\ 16,\ 40,\ 18, 38, 20, 36, 22, 34,\ 24, 36, 26, 34, 28,\ 32, 30, 31, 29, 33, 27,\ 35, 25, 33, 23, 35, 21,\ 37,\ 19,$ $39,\ 17,\ 41,\ 15,\ 43,\ 13, 45, 11, 47,\ 9, 49, 7, 51, 5, 53, 3, 55$ şeklindeki bir dizilimde ardışık 5 sayının toplamı en az 113'tür. Dolayısıyla istenilen şartı sağlayan en büyük K tamsayısı 113 ile 140 arasında olmalıdır. Şıklardan hiçbiri bunu sağlamaz.

Çözüm 2:

Yanıt: Şıklardan hiçbiri.

$$\begin{array}{lcccc} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 & = & k_1 & \geq & K \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 & = & k_2 & \geq & K \\ \vdots & & & & \\ a_{56} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = & k_{56} & \geq & K \end{array}$$

Taraf tarafa toplarsak $5 \cdot \sum_{i=1}^{56} a_i = \sum_{i=1}^{56} k_i \geq 56 \cdot K$ elde ederiz.

$\sum_{i=1}^{56} a_i = \sum_{i=1}^{56} i = \frac{56 \cdot 57}{2}$ eşitliğini yerine yazarsak $\frac{5 \cdot 56 \cdot 57}{2} \geq 56 \cdot K$ eşitliğini elde ederiz. Eşitsizliği sağlayan en büyük tam sayı $K = 142$ dir.

Bu aşamada cevabın 142 olduğunu düşünebiliriz. Büyük ihtimalle soruyu hazırlayan da böyle düşündü.

Cevabın 142 olduğunu varsayalım.

$\bmod 56$ da düşünürek $k_i \neq k_{i+1}$ olmalı. ($k_{i+1} - k_i = a_{i+5} - a_i$ ve tüm a_i ler birbirinden farklı olmak zorunda)

Örneğin, $k_1 = 142$ olsun, $k_2 \geq 143$ olmak zorunda.

Bu durumda tüm k_i lerin toplamı en az $28 \cdot 142 + 28 \cdot 143 = 28 \cdot 285 = \dfrac{5 \cdot 56 \cdot 57}{2}$ olacaktır. Zaten $\sum\limits_{i=1}^{56} k_i = \dfrac{5 \cdot 56 \cdot 57}{2}$ olduğu için $k_i \leq 143$ olmalı.

Bu da ardışık k_i lerin farkının tam olarak 1 olduğu anlamına gelir.

$|k_2 - k_1| = |a_6 - a_1| = 1$ omalı.

a_i lerden den biri 1 olmak zorunda, $a_1 = 1$ olsun. $a_6 = 2$ olmak zorunda. Yani $k_1 = 142$ ve $k_2 = 143$ (Tekler 142, çiftler 143). $k_6 = 143$, $k_7 = 142$. $k_7 - k_6 = a_{11} - a_6 \Rightarrow a_{11} = 1 = a_1$ olmak zorunda. Çelişki.

O halde cevap 142 den küçük olmalı.

56 olabilir mi?

$[1, 2, 3, 4, 47, 5, 6, 7, 8, 31, 9, 10, 11, 12, 15, 13, 14, 16, \dots, 56]$ şeklinde bir dizilim de $K = 57$ oluyor.

Bu durumda $57 \leq K < 142$ olduğunu söyleyebiliriz.

35 $n \leq 15$ olmak üzere, $t_1, t_2, ..., t_n$ tek sayıları,

$t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 = 1963$ eşitliğini sağlamaktadır.

n kaç olmalıdır?

a) 9 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 15

Çözüm:

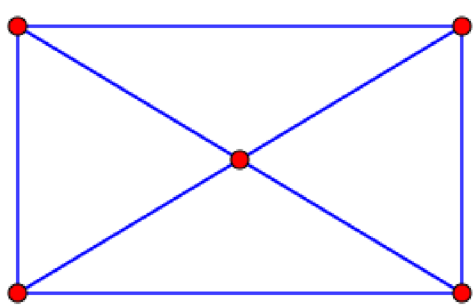
Cevap: $\boxed{B}$

t tek tamsayısı için $16 \mid t^4 - 1$ olduğunu gösterelim. $t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1)$ olduğundan ve t tek olduğundan $t - 1$ ve $t + 1$ sayılarından biri 2'ye diğeri 4'e bölünecektir. Ayrıca $t^2 + 1$ de çift olduğundan $t^4 - 1$ sayısında en az 4 tane 2 çarpanı olacak ve 16'ya tam bölünecektir. Bu durumda

$$t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 \equiv n \pmod{16} \implies n \equiv 1963 \equiv 11 \pmod{16} \implies n = 11$$

elde edilir. Örnek durum olarak da $t_1 = t_2 = t_3 = 5$, $t_4 = 3$, $t_5 = t_6 = \cdots = t_{11} = 1$ sağlar.

36



Şekilde yer alan 8 doğru parçasından her biri tek bir renkle ve ortak bir noktası bulunan doğru parçaları farklı renklerde olmak koşulu ile mevcut 5 farklı renk kullanılarak boyanacaktır. Bu 5 rengin tümünü kullanmak gerekmiyorsa, söz konusu boyama işlemi kaç farklı şekilde yapılabilir?

a) 480 **b)** 720 **c)** 1200 **d)** 1680 **e)** 2160

Çözüm:

Yanıt: Şıklardan hiçbiri

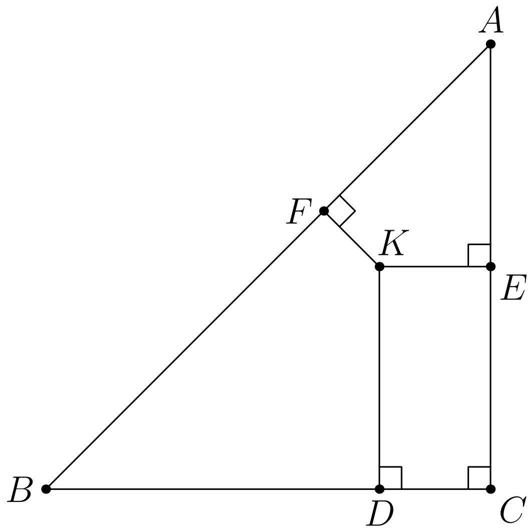
Renkler A, B, C, D, E olsun. Önce 5 renkten 4'ünü (diyelim A, B, C, D'yi) $\binom{5}{4}$ yolla seçip, köşegenleri oluşturan 4 doğru parçasını 4! yolla boyayalım (ortak noktalan bulunduğu için bunlar değişik renklerle boyanacak).

O halde 5. rengi (E'yi) en fazla 2 kez kullanabiliriz ve 2 kez sadece 2 karşı kenarda kullanabiliriz. Bu durumda 2 karşı kenarı 2 yolla seçebiliriz. Diğer 2 karşı kenar 2'şer yolla boyanabilir. Bu durumda $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ seçenek bulunur. E rengini tam 1 kez kullanırsak, kullanacağımız kenarı $\binom{4}{1}$ yolla seçebiliriz. Örneğin üstteki kenar E rengine boyansın. O halde sağ kenar A rengine boyanırsa alt kenar B, sol kenar C rengine boyanmak zorunda. Sağ kenar D rengine boyanırsa, ya alt kenar A, sol kenar B veya C, ya da alt kenar B, sol kenar da C rengine boyanacak. Dolayısıyla bu durumda $\binom{4}{1} \cdot (1 + 2 + 1) = 16$ seçenek bulunur. E rengini hiç kullanmazsak, üst kenan D veya C ile boyamak zorundayız. D ile boyarsak, sağ kenarı A, alt kenarı B ve sol kenarı C ile boyamak zorundayız. Üst kenarı C ile boyarsak, sol kenarı B, alt kenarı A, sağ kenarı da D ile boyamak zorundayız. Dolayısıyla bu durumda sadece 2 seçenek bulunur. Böylece boyama işlemi $5 \cdot 4! \cdot (8 + 16 + 2) = 3120$ yolla yapılabilir.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 2.59, Sayfa 139.

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1996

1



Şekildeki ABC dik üçgeninin kenarlarına K noktasından indirilen dikmelerin ayakları D, E, F dir.

$$|BC| = a, \quad |CA| = b, \quad |AB| = c,$$

$$|CD| = x, \quad |AE| = y, \quad |BF| = z$$

ise $ax + by + cz$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $2ab$ **b)** ab **c)** a^2 **d)** b^2 **e)** c^2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $c^2 = a^2 + b^2$ dir. Öte yandan, Carnot teoreminden $(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olup parantezler açılırsa,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ax + by + cz)$$

olur. Böylece, $2c^2 = 2(ax + by + cz)$ eşitliğinden $ax + by + cz = c^2$ sonucuna ulaşırız.

2 x ve y tam sayı olmak üzere, $x^2 - y^2 = 1996$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) sıralı ikilisi vardır?

a) 12 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 0 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x^2 - y^2 = 1996 = 2^2 \cdot 499$ şeklinde asal çarpanlara ayıralım. 1996 çift sayı olduğundan x ve y beraber çift sayı veya beraber tek sayı olabilir. Her iki durumda da $x + y$ ve $x - y$ çift sayı olmalıdır. İki kare farkından $(x-y)(x+y) = 2^2 \cdot 499$ yazılabilir.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=998 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=998 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-998 \\ x-y=-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-2 \\ x-y=-998 \end{array}\right\}$$

denklem sistemleri çözülürse 4 tane (x, y) sıralı ikilisi elde ederiz.

$\boxed{3}$ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ denkleminin iki kökü $u \neq 0$ olmak üzere, $x=u$ ve $x=-u$ ise, katsayılar arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi her zaman doğrudur?

a) $c^2-abc+a^2d=0$ **b)** $a+b+c+d=0$ **c)** $a^2+b^2=c^2+d^2$ **d)** $ab>cd$ **e)** $ad=bc$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Verilen denklemde $x=u$ ve $x=-u$ köklerini yazarsak

$$\left.\begin{array}{r} u^4+au^3+bu^2+cu+d=0 \\ u^4-au^3+bu^2-cu+d=0 \end{array}\right\}$$

olur. Bu denklemleri taraf tarafa toplayarak ve çıkararak:

$$\left.\begin{array}{r} u^4+bu^2+d=0 \\ au^2+c=0 \end{array}\right\}$$

elde ederiz. İkinci denklemden $u^2=-\dfrac{c}{a}$ olup birinci denklemde yazarsak $c^2-abc+a^2d=0$ sonucuna ulaşırız.

Not: Burada $u \neq 0$ verildiğinden $u^2=-\dfrac{c}{a} \neq 0$ olup $c \neq 0$ dır. Ayrıca u^2 nin tanımlı olması için $a \neq 0$ olması gerektiğini de anlarız.

$\boxed{4}$ $\{1,2,3,...,99,100\}$ kümesinden herhangi ikisinin farkı 7 olmayacak şekilde en çok kaç eleman seçilebilir?

a) 53 **b)** 52 **c)** 51 **d)** 50 **e)** 49

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$S_1=1,8,15,\dots,92,99$

$S_2=2,9,16,\dots,93,100$

$S_3=3,10,17,\dots,94$

$\vdots$

$S_7=7,14,21,\dots,98$

olsun. Herhangi bir S_i dizisinden ardışık eleman almamamız gerekiyor.

S_1 ve S_2 den en fazla 8, diğerlerinden en fazla 7 sayı olmak üzere 51 sayı alınabilir.

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,15,16,\dots,21,\dots,85,86,\dots,91,99,100\}$

$\boxed{5}$ n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $\sum\limits_{i=1}^{4} i^n$ sayısı 5 ile bölünmez?

a) 241 **b)** 240 **c)** 239 **d)** 238 **e)** 237

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

i sayıları 5 ile aralarında asal olduğu için Fermat'ın Küçük Teoremi gereği $i^4 \equiv 1 \pmod 5$.

$i^{240} \equiv (i^4)^{60} \equiv 1 \pmod 5$.

$\sum_{i=1}^{4} i^{240} \equiv 4 \pmod 5$.

$\boxed{6}$ Bir $ABCD$ paralelkenarının $[AB]$ kenarı üzerinde $3|AE| = |EB|$ ve $[AD]$ kenarı üzerinde, $2|AF| = |FD|$ olacak biçimde E e F noktaları alınıyor.

$[EF] \cap [AC] = \{K\}$ ise $\dfrac{|AC|}{|AK|}$ kaçtır?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

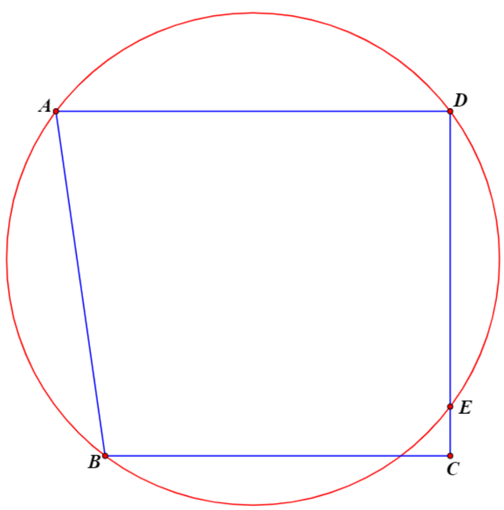
Yanıt: $\boxed{A}$

$AD = 3k$, $AB = 4m$ olsun.

$[AEF] = S$ dersek, Sinüs Alan Formülünden $[DCF] = 8S$, $[BCE] = 9S$, $[ABCD] = 24S$ olacaktır. Bu durumda $[CEF] = 6S$ olur.

$\dfrac{AC}{AK} = \dfrac{[AECF]}{[AEF]} = 7$

$\boxed{7}$



Şekildeki $ABCD$ yamuğunda $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$ dir. D, A, B noktalarından geçen ve yarıçapı 5 olan çemberin $[DC]$ kenarını D dışında kestiği ikinci nokta E olmak üzere,

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BE})$ ve $|CE| = 3\sqrt{2}$ ise $|AD|$ kaçtır?

a) $5\sqrt{3}$ **b)** $4\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{5}$ **d)** $7\sqrt{2}$ **e)** $6\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BE})$ olduğu için $AB = BE$.

$\angle ADE = 90^\circ$ olduğu için AE çaptır.

$\triangle ABE$ ikizkenar dik üçgen ve $AB = BE = 5\sqrt{2}$ dir.

$ADCF$ dikdörtgenini kuralım.

$\angle ABF = \angle BAD = \angle BEC$ olduğu için $\triangle AFB \cong \triangle BCE$.

$AD = FC = FB + BC = EC + BC = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\boxed{8}$ $x^2 - 10x - 14 = 2\sqrt{x^2 - 10x + 1}$ eşitliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 20 **b)** 10 **c)** -9 **d)** -20 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$t = x^2 - 10x - 14$ olsun.

Denklem $t = 2\sqrt{t + 15}$ denklemine dönüşür.

$t^2 = 4t + 60 \Longrightarrow (t + 6)(t - 10) = 0$.

t negatif olamayacağı için $t = 10$ dur.

$x^2 - 10x - 14 = 10 \Longrightarrow x^2 - 10x - 24 = (x - 12)(x + 2) = 0$ denkleminin kökler toplamı 10 dur.

$\boxed{9}$ 3 kırmızı, 3 mavi, 3 yeşil top rasgele sıralandığında, en az iki kırmızı topun yan yana gelme olasılığı nedir?

a) $\frac{8}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{6}{12}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{4}{12}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

9 top 9! yolla sıralanabilir. Kırmızı topların ayrık konumda olduğu durumları hesaplayalım. Mavi ve yeşil toplar 6! yolla sıralanabilir. Bunların en sağına, en soluna veya aralarına kırmızı topları $7 \cdot 6 \cdot 5$ yolla yerleştirebiliriz. Böylece kırmızı topların ayrık konumda olma olasılığı $p = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6!}{9!} = \dfrac{5}{12}$ dir. İstenen olasılık ise $1 - p = \dfrac{7}{12}$ bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

Verilen 9 top $\dfrac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$ yolla sıralanır. 3 kırmızı top özdeş olduğundan, iki tanesini blok yapıp en az iki yan yana kırmızı top olmasını sağlayabiliriz.

Mavi ve yeşil toplar $\dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ yolla, yapılan bir blok ve diğer kırmızı top ise kalan boşluklara 7^2 yolla yerleştirilebilir. Dolayısıyla en az iki kırmızı top yan yana $7^2 \cdot 20$ farklı yolla gelebilir. İstenen olasılık ise $\dfrac{7^2 \cdot 20 \cdot (3!)^3}{9!} = \dfrac{7}{12}$ dir.

10 p ve q farklı asal sayılar, a ve b farklı pozitif tam sayılar ve $n = p^a.q^b$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 81 ise n^3 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı kaçtır?

a) 169 **b)** 160 **c)** 117 **d)** 84 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

n sayısının pozitif bölen sayısını veren fonksiyon $\tau(n)$ olsun. $\tau(n^2) = (2a+1)(2b+1) = 81$ olup $2a+1 = 3$ ve $2b+1 = 27$ dir. Buradan $a = 1$, $b = 13$ elde edilir. $\tau(n^3) = (3a+1)(3b+1) = 4 \cdot 40 = 160$ elde edilir.

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\frac{293}{52}$ **b)** $\frac{189}{110}$ **c)** $\frac{179}{120}$ **d)** $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{5}{12}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Verilen toplamı

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{9} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{9} \frac{3}{(n+1)(n+2)} + \sum_{n=1}^{9} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \\ &= 3\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\end{aligned}$$

biçiminde teleskopik toplam olarak yazarsak, sadeleşmeler sonucunda

$$3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{110}\right) = \frac{189}{110}$$

elde ederiz.

12 $\sin x = \frac{x}{22}$ denkleminin gerçel çözümlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 17 **b)** 15 **c)** 14 **d)** 9 **e)** 7

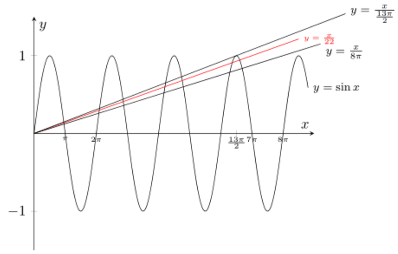
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$f(x) = g(x)$ denkleminin çözümlerini bulmak (ya da saymak) için kullanılabilecek yöntemlerden biri $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ grafiklerini çizip kesişim yerlerini bulmak.

$x = 0$; $y = \sin x$ ve $y = \frac{x}{22}$ fonksiyonları için ortak bir çözümdür. İki fonksiyon da orijine göre simetrik olduğu için $x > 0$ için n çözüm varsa, $x < 0$ için de n çözüm olacaktır. Bu durumda toplamda $2n+1$ çözüm olacaktır.

$x > 0$ için $y = \sin x$ ve $y = \frac{x}{22}$ fonksiyonlarının kaç noktada kesiştiğini saymaya çalışalım.



$y = \sin x$ ile $y = \frac{1}{8\pi}x$ fonksiyonu 7 noktada kesişir.

Eğimi $\dfrac{1}{\frac{13\pi}{2}} > m > \frac{1}{8\pi}$ olan $y = mx$ doğrusu ile $y = \sin x$ fonksiyonu 7 noktada kesişir.

O halde aradığımız yanıt $2 \cdot 7 + 1 = 15$ tir.

13 $1 \leq a \leq 100$ olmak üzere, $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$
bağıntısını sağlayan kaç tane a tam sayısı vardır?

a) 79 **b)** 78 **c)** 77 **d)** 76 **e)** 75

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Euler'e göre $(a, 77) = 1$ olmak üzere her a tam sayısı için $a^{\phi(77)} \equiv a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$.

$[1, 100]$ aralığında 77 ile aralarında asal olan sayıların sayısı $100 - \left\lfloor \dfrac{100}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{100}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{100}{77} \right\rfloor = 78$.

14 $m(\widehat{A}) < 90^\circ$ olan bir $ABCD$ paralelkenarının $[BC]$ kenarına C noktasından çıkılan dikmenin AB doğrusunu kestiği nokta E olmak üzere,
$|AB| = |CE| = 2|BC| = 2\sqrt{2}$ ise $|AC|^2 + |DE|^2$ kaçtır?

a) $8\sqrt{5} + 26$ **b)** $4\sqrt{10} + 26$ **c)** $4\sqrt{5} + 16$ **d)** $2\sqrt{10} + 16$ **e)** $2\sqrt{2} + 26$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$.

AD ile EC, F de keşissin.

$BC \parallel AF$ olduğu için $\angle AFE = \angle BCE = 90^\circ$

Pisagordan elde ettiğimiz $AC^2 = FA^2 + FC^2$, ve $DE^2 = FD^2 + FE^2$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak $AC^2 + DE^2 = FA^2 + FE^2 + FD^2 + FC^2 = AE^2 + CD^2$ elde ederiz.

$\triangle BCE$ de Pisagor'dan $BE = \sqrt{10}$.

$AE = AB + BE = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ ve $CD = 2\sqrt{2}$ eşitliklerini yerine yazarsak $AC^2 + DE^2 = (2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 26 + 8\sqrt{5}$

15 Ahmet yalnızca $2, 3, 4$ rakamlarından oluşan 13 basamaklı bir sayı tutuyor. Betül n sayıdan oluşan bir liste hazırlıyor. Bu sayılardan birinin en az 5 basamağı Ahmet'in tuttuğu sayının karşılık gelen basamakları ile çakışıyorsa Betül oyunu kazanıyor. Ahmet'in tuttuğu sayı ne olursa olsun Betül'ün oyunu kazanması için n en az kaç olmalıdır?

a) 13 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Ahmet'in tuttuğu sayıda en çok tekrarlanan sayı en az $\left\lceil \dfrac{13}{3} \right\rceil = 5$ kez geçecektir.

Betül'ün tahminleri 2222222222222, 3333333333333, 4444444444444 olursa Betül oyunu kazanacaktır.

Betül 3 tahminde oyunu kazanmayı garantileyebiliyor. Peki 2 tahminde de kazanabilir mi?

Betül'ün tahminleri $a_1a_2\dots a_{13}$ ve $b_1b_2\dots b_{13}$ olsun. Ahmet $c_i \in \{2,3,4\} - \{a_i, b_i\}$ şeklinde $c_1c_2\dots c_{13}$ sayısını tutmuş olsaydı, Betül hiçbir sayının yerini bilemeyecekti. O halde Betül iki tahminde oyunu kazanmayı garantileyemez.

16 $1^{1!} + 2^{2!} + \cdots + 13^{13!}$ sayısı 13 ile bölündüğünde kalan aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$4! = 12$ olduğu için $n > 3$ olmak üzere $12 \mid n!$ dir.

Fermat'ın küçük teoremine göre $(a, 13) = 1$ olmak üzere $a^{12} = 1 \pmod{13}$.

$1^{1!} + 2^{2!} + 3^{3!} + 4^{4!} + \cdots + 12^{12!} + 13^{13!} \equiv 1 + 2^2 + 3^6 + 9 \cdot 1 + 0 \equiv 1 + 4 + (3^3)^2 + 9 \equiv 2 \pmod{13}$

17 Aşağıdaki p asal sayılarından hangisi için,

$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin en az bir tam sayı çözümü vardır?

a) 653 **b)** 647 **c)** 641 **d)** 617 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Sorudaki denkliğin iki tarafını da $x - 1$ ile çarparsak $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Şıklardaki asal sayılar $3k + 2$ formundadır.

Fermat'ın Küçük Teoremi gereği $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ve $x^{p-1} \equiv x^{3k+1} \equiv (x^3)^k x \equiv 1 \pmod{p}$ elde edilir. Denkliğin tek çözümü $x \equiv 1 \pmod{p}$ olabilir. Sorudaki denklikte yerine yazarsak $x^2 + x + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{p}$ elde ederiz. Bu da ancak $p = 3$ iken mümkün olabilir. Çelişki.

18 Üçer kişilik üç aileden oluşan dokuz kişi, üç odaya, her birine üç kişi olmak üzere, rasgele girerler. Tam olarak bir ailenin bireylerinin aynı odaya girmiş olması ve diğer iki odadan hiçbirinde tam bir ailenin bulunmaması olasılığı nedir?

a) $\dfrac{27}{140}$ **b)** $\dfrac{3}{28}$ **c)** $\dfrac{27}{280}$ **d)** $\dfrac{9}{140}$ **e)** $\dfrac{3}{7}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

9 kişi 3 odaya $\dbinom{9}{3}\dbinom{6}{3}\dbinom{3}{3} = \dfrac{9!}{3!3!3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ şekilde yerleştirilir.

Ailelerin adları A, B, C olsun.

A ailesi 1. odaya girsin. Diğer 6 kişi, diğer 2 odaya $\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ şekilde girer.

B ailesi 2. odaya girdiyse, C ailesi 3. odaya girmiş demektir. Tersi C ailesi 2. odaya girmişse B ailesi 3. odaya girmiş demektir.

$\binom{6}{3}\binom{3}{3} - 2 = 18$ şekilde A ailesi 1. odaya girmiş, 2. ve 3. odalardan hiçbirisinde tüm bireyler aynı aileye mensup değildir.

Benzer işlemleri B ailesi 1. odaya girdiğinde veya C ailesi 1. odaya girdiğinde tekrarlayabiliriz. Bu durumda $3 \cdot 18 = 54$ şekilde sorudaki gibi bir dağılım yapılabilir.

O halde $P = \dfrac{54}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \dfrac{9}{8 \cdot 7 \cdot 5} = \dfrac{9}{280}$.

19 Bir $[AX$ ışını üzerinde $|AO| = |OB| = |BC|$ olacak biçimde sırayla O, B, C noktaları alınarak O merkezli, $[AB]$ çaplı çember ve çember üzerinde $m(\widehat{BAD}) = 78^\circ$ koşulunu sağlayan D noktasından bu çembere bir teğet çiziliyor. C noktasından bu teğete indirilen dikmenin ayağı E ise EBC açısı kaç derecedir?

a) 146 **b)** 144 **c)** 142 **d)** 140 **e)** 138

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle ODE = \angle CED = 90^\circ$ olduğu için $ODEC$ bir dik yamuktur.

DE nin orta noktası M olsun. BM bu yamukta orta tabandır, dolayısıyla $BM \perp DE$ dir.

$\triangle BDE$ de BM hem yükseklik hem kenarortay olduğu için $BD = BE$ olacaktır.

$\angle MBE = \angle DBM = \angle ODB = \angle OBD = 90^\circ - \angle BAD = 12^\circ$ ve $\angle EBC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 3\angle OBD = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ dir.

20 x, y gerçel sayıları için

$x^2 + y^2 = 6$ ve $x^3 + y^3 = 14$ ise

$x^4 + y^4$ toplamının alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{17\}$ **b)** $\{3,\ 4\}$ **c)** $\{17,\ 10\sqrt{15} - 22\}$ **d)** $\{34,\ 20\sqrt{15} - 44\}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$xy = a$ diyelim. $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 \geq a$ dır.

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 6 + 2a \Rightarrow x + y = \sqrt{6 + 2a}$.

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 36 - 2a^2 \geq 18$.

Bu durumda cevap ya (D) ya da (E) olur. Cevap (D) ise $a^2 = 1$ bir çözüm olarak gelecektir. Bu da derecesi 2 den büyük bir polinom ile karşılaşırsak polinom bölmesi ile yolumuza devam edebileceğimiz anlamına gelir.

$x^3 + y^3 = (x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) = \sqrt{6 + 2a}(6 + 2a - 3a) = \sqrt{6 + 2a}(6 - a) = 14$.

Her iki tarafın karesini alırsak $2(a + 3)(6 - a)^2 = 14^2 = 2 \cdot 98 \Rightarrow (a^2 - 12a + 36)(a + 3) = 98$.

$a^3 - 12a^2 + 36a + 3a^2 - 36a^+108 - 98 = a^3 - 9a^2 + 10 = 0$ denkleminin bir çözümü $a = -1$ dir. Buradan $a^2 = 1$ gelir.

Polinom bölmesiyle $a^3 - 9a^2 + 10 = (a + 1)(a^2 - 10a + 10) = 0$ elde edilir. Diğer kökler $a_{2,3} = \dfrac{10 \pm \sqrt{60}}{2} = 5 \pm \sqrt{15}$ olur.

$3 \geq a$ olması gerektiğinden $a_2 = 5 + \sqrt{15}$ sağlamaz. $a_3 = 5 - \sqrt{15} \Rightarrow a^2 = 25 + 15 - 10\sqrt{15} = 40 - 10\sqrt{15}$

$a^2 = 1$ için $x^4 + y^4 = 36 - 2a^2 = 34$.

$a^2 = 40 - 10\sqrt{15}$ için $x^4 + y^4 = 36 - 2a^2 = 36 - 2(40 - 10\sqrt{15}) = 20\sqrt{15} - 44$ olur.

$\boxed{21}$ a_n ile $\sqrt{n}$ ye en yakın olan tam sayıyı gösterelim.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2070}}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 93 **b)** 92 **c)** 91 **d)** 90 **e)** 89

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$a_{k^2} = k$ ve $a_{(k+1)^2} = k + 1$ olacaktır.

Bu durumda $a_1 = 1$, $a_4 = 2$, $a_9 = 3$, ..., $a_{2025} = 45$, $a_{2116} = 46$ olur.

$m, \ell \geq 0$ tam sayılar olmak üzere;

$a_{k^2+m} = k$ için $\sqrt{k^2 + m} < k + \dfrac{1}{2} \Rightarrow m < \dfrac{1}{4} + k \Rightarrow m < k + 1$

$a_{k^2-\ell} = k$ için $\sqrt{k^2 - \ell} \geq k - \dfrac{1}{2} \Rightarrow \ell \leq k - \dfrac{1}{4} \Rightarrow \ell < k$

$k^2 - (k-1)$, $k^2 - (k-2)$, ..., $k^2 - 1$, k^2, $k^2 + 1$, ..., $k^2 + k$ sayıları için $a_n = k$ olacaktır. O halde $k + (k-1) + 1 = 2k$ tane sayı için $a_n = k$ dır.

Dizinin ilk elemanlarına bakarsak bu durumu görebiliriz: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 2$, ...

$a_n = 45$ denkleminin en büyük çözümü $45^2 + 45 = 2070$ dir.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2070}} = \sum_{k=1}^{45} \frac{2k}{k} = \sum_{k=1}^{45} 2 = 90.$$

$\boxed{22}$ $1, 4, 7, \ldots, 100$ aritmetik dizisine ait terimlerden 19 tanesini, bunlardan herhangi farklı ikisinin toplamı n'ye eşit olmayacak biçimde seçmemizi aşağıdaki n sayılarından hangisi mümkün kılar?

a) 110 **b)** 107 **c)** 104 **d)** 101 **e)** 98

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\{3n+1\}$ dizisinin ilk 19 terimi $1, 4, 7, \ldots, 52, 55$ tir. Bu 19 sayıdan herhangi ikisinin toplamı en fazla $52+55 = 107$ olabilir. Dolasıyla 110 olamaz. O halde yanıt (A) dır. Test için çözüm burada biter.

Diğer sayılar için bu şekilde 19 sayı seçilemeyeceğini de gösterelim.

Herhangi iki elemanının toplamları n ye eşit olmayan sayıların kümesi S_n olsun.

Toplamları 107 olan sayı çiftleri $(7, 100), (10, 97), \ldots, (52, 55)$ olmak üzere 16 tanedir. Bu sayı çiftlerinin her birinden sadece bir sayı S_{107} nin elemanı olabilir. 1 ve 4 de S_{107} nin elemanı olabilir. O halde $|S_{107}| = 18 < 19$ olabilir.

Toplamları 104 olan çiftler $(4, 100)$, $(7, 97)$, ..., $(49, 55)$ olmak üzere 16 tanedir. 1 ve 52 ile S_{104} kümesi en fazla 18 elemanlı olabilir.

Toplamları 101 olan 17 çift vardır. $|S_{101}| = 17 < 19$ dur.

Toplamları 98 olan çiftler $(1, 97)$, $(4, 94)$, ..., $(44, 55)$ olmak üzere 16 tanedir. 52 ve 100 ile birlikte S_{98} en fazla 18 elemanlı olabilir.

Toplamları 110 olan çiftler $(10, 100)$, $(13, 97)$, $\ldots$, $(52, 58)$ olmak üzere 15 tanedir. Bu çiftlerin sadece bir elemanı ile $\{1, 4, 7, 55\}$ kümesini birleştirdiğimizde toplam $15+4 = 19$ elemanlı S_{110} kümesini bulmuş oluruz.

23 $[AB]$ ve $[DC]$ kenarları paralel olan bir $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin uzunlukları $|AC| = 3$, $|BD| = 5$ tir. $[AB]$ ve $[DC]$ kenarlarının orta noktaları arasındaki uzaklık 2 ise bu yamuğun alanı kaçtır?

a) 8 **b)** $\frac{15}{2}$ **c)** 7 **d)** 6 **e)** $\frac{11}{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

AB nin orta noktası M, DC nin orta noktası N olsun.

$ABDE$ ve $AMNK$ paralelkenarlarını kuralım.

$EC = ED + DC = AB + DC$, $KC = KN + NC = AM + NC = \dfrac{AB + DC}{2}$.

Bu durumda K, EC nin orta noktasıdır.

Ayrıca paralelkenar ve yamukta alan eşitliklerinden $[AED] = [ABD] = [ABC]$ olduğu için $[ACE] = [ABCD]$ elde edilir.

$AE = BD$, $AK = MN = 2$ olduğu için $\triangle ACE$ kenarları 3 ve 5, diğer kenara ait kenarortayı 2 olan bir üçgendir.

$AE = BD = 3$ kabul edelim. $\triangle ACE$ üçgeninin alanını araştırıyoruz.

Bu noktadan sonra birkaç şekilde ilerleyebiliriz.

K dan AE çizilen paralel AC yi L de kessin. $KL = \dfrac{3}{2}$, $AL = \dfrac{5}{2}$ ve $AK = 2 = \dfrac{4}{2}$ olduğu için $\angle AKL = 90^\circ$. $\angle KAE = 90^\circ$, $[KAE] = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ ve $[ABCD] = [CAE] = 6$ olur.■

$EACF$ paralelkenarını kurarak da çözüme gidebiliriz.

$AF = 4$, $FC = 3$ ve $AC = 5$ olduğu için $[CAE] = [ACF] = 6$. ■

Bir diğer çözüme de sinüs alan formülünden gidebiliriz. $\triangle CAE$ nin alanı için $\sin\angle CAE$ ye ihtiyacımız var. Kenarortay teoreminden EC yi bulabiliriz. Kosinüs teoreminden $\cos\angle CAE$ yi bulabiliriz.

Kenarortay teoreminden $\dfrac{AE^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{EC^2}{4} = AK^2$ ve biraz dört işlemle $EC^2 = 52$ elde ederiz.

Kosinüs teoreminden $AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cdot \cos\angle CAE = EC^2$. Buradan da $\cos\angle CAE = -\dfrac{3}{5}$ ve $\sin\angle CAE = \dfrac{4}{5}$, dolayısıyla $[CAE] = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 6$. ■

Çözüm 2:

AB nin orta noktası M, DC nin orta noktası N olsun. Köşegenler P noktasında keşissin. $BD = 3$, $AC = 5$ kabul edelim.

Öncelikle MN nin P den geçtiğini göstereceğiz. $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ olduğu için bu iki üçgenin PM ve PN kenarortaylarının kenarlar ile yaptığı açılar da eşit olacaktır. $\angle BPM = \angle DPN$. Bu da M, P, N noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir.

$[ABCD] = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle DPC$ olduğu için $\sin\angle DPC$ değerine ihtiyacımız var.

$\triangle ABP \sim \triangle CDP$ den benzerlik oranlarını yazarsak $\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{PN}{PM} \Longrightarrow \dfrac{PD}{PD + PB} = \dfrac{PC}{PC + PA} = \dfrac{PN}{PN + PM}$.

Dolayısıyla $PD : PC : PN = 3 : 5 : 2$ elde ederiz.

Bu aşamadan sonra ilk çözümdeki yolları takip edebiliriz. Bunlardan, paralelkenar oluşturduğumuz yöntemi kullanarak çözüme devam edelim.

$DPCQ$ paralelkenarını oluşturalım. $DP : PQ : QD = 3 : 4 : 5$ olduğu için $\sin\angle PDQ = 4/5$.

Bu durumda $[ABCD] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle DPC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin\angle PDQ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = 6$

Çözüm 3:

Test mantığıyla $ABCD$ yi paralelkenar kabul edelim.

AB nin orta noktası M, DC nin orta noktası N olsun. Köşegenler P noktasında keşissin.

$AD = MN = 2$ ve $\triangle APD$ nin kenarları $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$ olduğu için $[APD] = \frac{3}{2}$ ve $[ABCD] = 6$ elde edilir.

24 Elimizde 50'si beyaz, 50'si siyah olmak üzere toplam 100 top var. Bunların tamamını her torbada en az bir top bulunacak şekilde iki torbaya dağıtıyoruz. Bu torbalardan birini rasgele seçerek, içinden yine rasgele bir top çekiyoruz. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x, siyah top sayısını da y ile gösterelim. Tüm dağılımlar arasında, çekilen topun beyaz olması olasılığını en büyük yapan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(50, 0)$ **b)** $(49, 48)$ **c)** $(25, 25)$ **d)** $(1, 2)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap, $(1, 0)$ ya da $(49, 50)$ dir.

Topun beyaz gelme olasılığı: $P(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x+y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{50-x}{100-x-y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{50-x}{100-x-y}\right)$.

$x + y = t$ olsun. Topun beyaz gelme olasılığını $P(x, y) = \frac{1}{2} \cdot Q(x, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} + \frac{50-x}{100-t}\right)$ şeklinde de tanımlayabiliriz. $Q(x, t)$ en büyük değerini aldığında $P(x, y)$ de en büyük değerini alacaktır.

$Q(x, t) = Q(50 - x, 100 - t)$ olduğu kolayca görülebilir.

$t > 50$ olduğunda $Q(x, t)$ aradığımız en büyük değer olsun. $100 - t < 50$ olacaktır.

$Q(x, t) = Q(50 - x, 100 - t)$ olduğu için $Q(50 - x, 100 - t)$ de en büyük değer olacaktır.

Diyelim ki $Q(20, 60)$ en büyük değer, bu durumda $Q(30, 40)$ da en büyük değer olacaktır. Dolayısıyla en büyük değeri $t \le 50$ iken aramakta bir sakınca yok.

Şimdi biraz düzenlemeyle $Q(x, t) = \frac{x}{t} + \frac{50}{100-t} - \frac{x}{100-t} = x\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{100-t}\right) + \frac{50}{100-t}$ elde ederiz.

$1 \le t \le 50$ olsun. t yi sabit tuttuğumuzda $Q(x, t)$ fonksiyonu x artarken artmakta. O halde $Q(x, t)$ en büyük değerini $x = t$ olduğunda alır.

$Q(x, x) = \frac{x}{x} + \frac{50-x}{100-x} = 1 + \frac{100-x-50}{100-x} = 2 - \frac{50}{100-x} = 2 - \frac{50}{100-x}$ olacağı için $\max Q(x, x) = Q(1, 1) = 2 - \frac{50}{99} = \frac{148}{99}$ dur.

Aradığımız yanıt: $P(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot Q(1, 1) = \frac{1}{2} \cdot Q(50 - 1, 100 - 1) = \frac{1}{2} \cdot Q(49, 99) = P(49, 50) = \frac{74}{99}$.

25 Bir XOY açısının OX kenarı üzerinden $|OA| = 3$, $|OD| = 5$ olacak biçimde alınan A ve D noktaları, OY kenarı üzerinde de $|OC| = 4$ ve $|OB| > 4$ olacak biçimde alınan C ve B noktaları için $[AB] \cap [DC] = \{E\}$ ve $|AE|.|OB| = 3|EB|$ ise $|OB|$ kaçtır?

a) $\dfrac{60}{7}$ **b)** $\dfrac{55}{6}$ **c)** $\dfrac{19}{4}$ **d)** 8 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\triangle OAB$ de D, E, C noktaları için Menelaus uygularsak

$$\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CO} = 1$$

elde ederiz.

$OB = x$ dersek ve $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{3}{OB} = \dfrac{3}{x}$ eşitliğini Menelaus denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{x-4}{4} = 1 \Longrightarrow 15x - 60 = 8x \Longrightarrow x = \frac{60}{7}$$

olarak bulunur.

26 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$n + (n+1) + \cdots + (n+m) = 1000$

eşitliğini sağlayan kaç (m, n) sıralı ikilisi vardır?

a) 10 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Biraz düzenlemeyle $(m+1)n + \dfrac{m(m+1)}{2} = \dfrac{(m+1)(2n+m)}{2} = 1000 \Rightarrow (m+1)(2n+m) = 2000 = 2^4 5^3$ elde edilir.

m, n pozitif tam sayılar olduğu için $1 < m+1 < 2n+m$ olacaktır.

m tek ise $m+1$ çift sayı, $2n+m$ tek sayı olacaktır. $m+1 = 2^4 = 16 \Rightarrow m = 15$ olabilir; ama $2^4 \cdot 5 > 5^2$ olduğu için buradan başka çözüm gelmez. $(m, n) = (15, 55)$ bir çözümdür.

m çift ise $m+1$ tek sayı, $2n+m$ çift sayı olacaktır. $m+1 = 5 \Rightarrow m = 4$ ve $m+1 = 5^2 \Rightarrow m = 24$ birer çözümdür. $m+1 = 1$, $m > 0$ olduğu için sağlamaz; $m+1 = 5^3 > 2^4$ olduğu için başka çözüm gelmez. $(m, n) = (4, 198)$ ve $(m, n) = (24, 28)$ diğer iki çözümdür.

O halde toplamda 3 çözüm vardır.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (E) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

27 $|AB| = 12$ olmak üzere, $[AB]$ çaplı çemberin $|AC| = 8$ koşulunu sağlayan $[AC]$ kirişi çiziliyor. Bu çemberin C noktasından geçen teğetine, B noktasından indirilen dikmenin ayağı D ise BDC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\dfrac{80\sqrt{5}}{9}$ **b)** $\dfrac{48\sqrt{5}}{5}$ **c)** $\dfrac{60\sqrt{3}}{7}$ **d)** $\dfrac{56\sqrt{3}}{5}$ **e)** $\dfrac{75\sqrt{2}}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$.

Teğet kiriş açıdan $\angle BAC = \angle BCD = \alpha$.

$BC = AB\sin\alpha$, $CD = BC\cos\alpha$, $BD = BC\sin\alpha$.

$[BDC] = \frac{1}{2}\cdot AB^2 \cdot \sin^3\alpha\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ve $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ eşitliklerini yerine yazarsak $[BDC] = \frac{1}{2}\cdot 12^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{80\sqrt{5}}{9}$.

28 a ve b den oluşan 9 harfli dizilerden kaç tanesi *baba* kelimesini içerir?

a) 192 **b)** 186 **c)** 158 **d)** 156 **e)** 154

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

1.	b	a	b	a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$: 32$
2.	$-$	b	a	b	a	$-$	$-$	$-$	$-$	$: 32$
3.	$-$	$-$	b	a	b	a	$-$	$-$	$-$	$: 32-8$
4.	$-$	$-$	$-$	b	a	b	a	$-$	$-$	$: 32-8$
5.	$-$	$-$	$-$	$-$	b	a	b	a	$-$	$: 32-8$
6.	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	b	a	b	a	$: 32-8-2$

(1) İlk dört harf *baba* olduktan sonra geriye kalan beş harf $2^5 = 32$ farklı şekilde seçilebilir.

(2) $-baba----$ için boştaki beş harf $2^5 = 32$ farklı şekilde seçilir. (2) ile (1) dağılımlarının ortak permütasyonları yoktur.

(3) $--baba---$ için 32 dağılım yapalım. (3) ile (2) nin ortak dağılımı yoktur; ama (3) ile (1) in ortak dağılımı vardır. (3) teki $bababa---$ ile başlayanlar ($2^3 = 8$ tane) (1) dağılımında sayıldığı için $32-8$ farklı dağılım yapılabilir.

(4) $---baba--$ için 32 dağılım yapalım. (4) ün (1) veya (3) ile ortak dağılımı yoktur; ama (2) ile ortak dağılımı vardır. (2) teki $-bababa--$ ile başlayanlar ($2^3 = 8$ tane) (2) dağılımında sayıldığı için $32-8$ farklı dağılım yapılabilir.

(5) $----baba-$ için yapılabilecek 32 dağılımdan bazıları (1) veya (3) te yer almıştır. (1), (3), (5) in ortak dağılımları $--bababa-$ şeklindedir. Bunların sayısı da $2^3 = 8$ dir. (5) in (2) veya (4) ile ortak dağılımı yoktur.

(6) $-----baba$ için 32 dağılım yapalım. (6) nın (3) veya (5) ile ortak bir dağılımı yoktur; ama (4) veya (2) veya (1) ile ortak dağılımları vardır. (2) veya (4) ile ortak dağılımlar $---bababa$ şeklinde olup $2^3 = 8$ tanedir. (1) ile ortak dağılımlar $baba-baba$ şeklinde olup $2^1 = 2$ tanedir. O halde (6) için daha önceki dağılımlarda sayılmayan $32-8-2$ tane yeni dağılım mevcuttur.

Toplamda $6\cdot 32 - 4\cdot 8 - 2 = 5\cdot 32 - 2 = 158$ dağılım mevcuttur.

29 Farklı boylarda 17 kişi yan yana dizilmiş olsun. Bunlardan n tanesi artan ya da azalan bir boy sırasında kalacak şekilde geri kalanlar sıradan uzaklaştırılıyor. Bu diziliş ne olursa olsun, böyle bir işlemi olanaklı kılan en büyük n sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 5 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

i. kişinin boyu a_i olsun.

x_i ile a_i ye kadar olan en büyük artan alt dizinin eleman sayısını, y_i ile de a_i ye kadar olan en büyük azalan alt dizinin eleman sayısını gösterelim.

$f(i) = (x_i, y_i)$ sıralı ikilileri için $i \neq j$ iken $f(i) \neq f(j)$ dir. (Çünkü dizide a_i den sonra gelen sayı a_i den büyük olduğunda $x_{i+1} = x_i + 1$, küçük olduğunda $y_{i+1} = y_i + 1$ olacaktır.)

Bu durumda $f(1), f(2), \ldots, f(17)$ sıralı ikilileri birbirinden farklıdır. $1 \leq x_i \leq 4$ ve $1 \leq y_i \leq 4$ olduğunda en fazla 16 sıralı ikili tanımlanabileceği için en az bir i değeri için $x_i > 4$ veya $y_i > 4$ olmalı. Yani herhangi bir $\{a_i\}$ dizisi için $\max(f(17)) = \max(x_{17}, y_{17}) > 4$ olmalı.

$1, 2, 3, \ldots, 17$ dizisini düşünelim. $x_{17} = 17$ olabiliyor.

$17, 16, \ldots, 1$ dizisini düşünelim. $y_{17} = 17$ olabiliyor.

$4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13, 17$ dizisini düşünelim. $x_{17} = 5$ olabiliyor, daha fazla olamıyor.

O halde doğru yanıt d) 5.

Daha ayrıntılı bilgi için Erdös-Szekeres Theorem.

30 $x \in \mathbb{R}$ için $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geq 1$ için $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ bağıntılarıyla $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fonksiyonları tanımlanıyor.

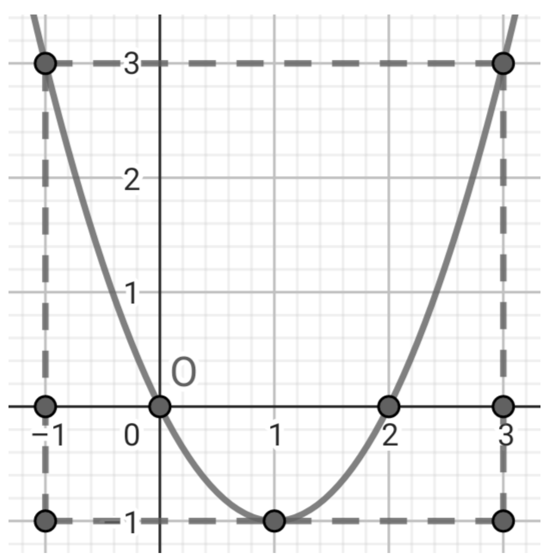
f_{1996} fonksiyonunun $[0, 2]$ kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 ve 3 **b)** 0 ve 2 **c)** -1 ve 24 **d)** -1 ve 3 **e)** -1 ve 0

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f_1(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



$[0, 2]$ aralığında $-1 \leq f_1(x) \leq 0$.

$-1 \leq f_1(x) \leq 0$ aralığında $0 \leq f_2(x) \leq 3$.

$0 \leq f_2(x) \leq 3$ aralığında $-1 \leq f_3(x) \leq 3$.

$-1 \le f_3(x) \le 3$ aralığında $-1 \le f_4(x) \le 3$.

$n \ge 4$ için $-1 \le f_n(x) \le 3$ olacaktır.

$f_{1996}(1) = 3$ olacaktır. En büyük değer bulunmuş oldu.

$f_{1996}(x_0) = -1$ olacak şekilde $0 \le x_0 \le 2$ sayısı var mıdır?

$f_{1995}(x_0) = 1$ olmalı.

Yeterince küçük $0 < x$ sayıları için $0 < f_1(x) < f_3(x) < \cdots < f_{1993}(x) = a < 1$ ve $0 > f_2(x) > f_4(x) > \cdots > f_{1994} = (a-1)^2 - 1 > -1$ şartları sağlanabilir.

$f_{1994}(x_0) = 1 - \sqrt{2}$ olacak şekilde x_0 seçersek $-1 \le f_{1996}$ en küçük değerine ulaşabilir.

O halde yanıt (D) şıkkıdır.

Aslında $f_{1996}(x) = -1$ denkleminin birçok çözümü vardır.

Aşağıdaki adımlar izlenip bunlardan biri bulunabilir:

$x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ olduğu için $f_{1994}(x_0) = 1 + \sqrt{2}$ olabilir.

$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ özdeşliğini kullanırsak hesaplamalarımızı daha kolay yapabiliriz.

$f(x) = (x-1)^2 - 1 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$ olduğu için $f_{1993}(x_0) = 1 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$$f_2(x_0) = 1 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{1993 \text{ tane } 2}$$

$$f(x_0) = 1 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{1994 \text{ tane } 2}$$

$$x_0 = 1 \pm \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{1994 \text{ tane } 2}}$$

Çözüm 2:

Cevap: $\boxed{D}$

Verilen fonksiyonu $f_1(x) = (x-1)^2 - 1$ olarak yazalım. Bu durumda $f_{n+1}(x) = (f_n(x) - 1)^2 - 1$ olacaktır. Bu fonksiyonların hepsi polinom olduğundan sürekli ve türevlenebilirdir. $f_{n+1}(x)$'in minimum ve maksimum değerleri ya $x = 0$ ve $x = 2$ sınır değerlerinde ya da $f'_{n+1}(x) = 0$ lokal ekstremumlarda alınır. $x = 0$ ve $x = 2$ için $f_{n+1}(x) = 0$ olur.

$$f'_{n+1}(x) = 2f'_n(x)(f_n(x) - 1)$$

olacağından lokal ekstremumlar $f_n(x) = 1$ veya $f'_n(x) = 0$ olduğu x değerlerinde alınır. $f'_n(x) = 0$'i de açarsak, $f_{n-1}(x) = 1$ veya $f'_{n-1}(x) = 0$'a ulaşırız. Bu şekilde ilerlersek, $f_{1996}(x)$'in lokal ekstremumunun $2 \le k \le 1995$ için $f_k(x) = 1$ olduğu noktalarda ve $x = 1$'de olduğunu görürüz. $x = 1$ için $f_1(1) = -1$, $f_2(1) = 3$, $f_3(x) = 3$ ve bu şekilde ilerlenince $f_{1996}(1) = 3$ bulunur.

$f_k(x) = 1$ ise $f_{k+1}(x) = -1$, $f_{k+2}(x) = 3$ olur ve $k+2$'den sonra hep 3 olarak ilerler. Dolayısıyla $k = 1995$ haricinde bu değerlerden de hep $f_{1996}(x) = 3$ gelir. $k = 1995$ için $f_{1996}(x) = -1$'dir. Dolayısıyla eğer $f_{1996}(x) = -1$ veya $f_{1995}(x) = 1$ olacak şekilde bir x olduğunu gösterirsek minimum ve maksimum değerlerin $-1, 3$ olduğunu göstermiş oluruz. Bu da barizdir çünkü $f_{1995}(0) = 0$ ve $f_{1995}(1) = 3$'dür. Yani $(0, 1)$ aralığında bir x için $f_{1995}(x) = 1$ olmalıdır.

Sonuç olarak en küçük değer -1, en büyük değer 3'tür.

31 Aşağıdaki a sayılarından hangisi için;

$n^a \equiv n \pmod{a}$ bağıntısını sağlamayan en az bir n tam sayısı vardır?

a) 667 **b)** 561 **c)** 547 **d)** 503 **e)** 491

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Her $n \equiv 0 \pmod{a}$ sayısı için denkliğin sağlandığı açıktır. Bunun için $n \not\equiv 0 \pmod{a}$ kabul edelim.

Fermat'ın Küçük Teoremi gereği a asal sayıları için $n^a \equiv n \pmod{a}$ daima sağlanır.

Şıklardan $a = 561$ in 3 ile bölündüğü, yani asal olmadığı hemen görülebilir.

Bu noktada şıklardaki diğer sayıların asal olup olmadığı hakkında bir test yapmadık. Ayrıca bileşik a sayıları için de denklik sağlanıyor olabilir. (Nitekim böyle sayılar vardır ve bu sayılara Carmichael Sayıları denir. 561 de ilk Carmichael Sayısıdır.)

O halde cevabın 561 olduğunu iddia etmek yanlış bir çözüm olacaktır. (Muhtemelen 1996 yılında bu sınava girenler arasından en yüksek puan elde eden 100 kişi içinde hatırı sayılır sayıda ögrenci bu soruda B şıkkını işaretlemiştir.)

$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ dir.

$p \in \{3, 11, 17\}$ olsun.

$n \not\equiv 0 \pmod{p}$ olmak üzere;

$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ve $p-1 \mid 560$ olduğu için $n^{560} \equiv 1 \pmod{p}$ ve $n^{561} \equiv n \pmod{p}$ olacaktır. Diğer taraftan $n \equiv 0 \pmod{p}$ için zaten $n^p \equiv n \pmod{p}$ sağlanacaktır. Bu durumda her n sayısı için $p \mid n^{561} - n$ dir.

$n^{561} - n$ sayısı hem 3 e, hem 11 e, hem de 17 ye tam bölünür. Bu durumda her n sayısı için $n^{561} \equiv n \pmod{561}$ dir.

O halde yanıt, 561 olamaz.

Bu durumda şıklardaki diğer sayıların asallıklarını da test etmemiz gerekecek.

$667 = 23 \cdot 29$.

$n^{667} \equiv \left(n^{22}\right)^{30} n^7 \equiv n^7 \equiv n \pmod{23}$

$2^7 \equiv 13 \not\equiv 2 \pmod{23}$

$a = 667$, $n = 2$ için verilen denklik sağlanmaz. Bu durumda cevap A şıkkıdır.

$a = 667$ için denkliği sağlamayan $n = 2$ sayısını nasıl bulduk?

23 asal sayı olduğu için en az bir g sayısı için $\text{ord}_{23}(g) = 22$ dir. (Her p asal sayısı için en az bir ilkel kök vardır.) Yani g ilkel kökü için $g^6 \not\equiv 1 \pmod{23}$ ve $g^7 \not\equiv g \pmod{23}$. Yani $a = 667$ için en az bir $n = g$ sayısı için denkliğin sağlanmadığını biliyoruz. İşin ilginç tarafı 2, mod23 te bir ilkel kök değildir; ama denkliği sağlamadığı yukarıda yaptığımız gibi kolayca gösterilebilir.

667 in sağlamadığını gördükten sonra diğer sayıların test edilmesine gerek kalmıyor.

(Gerçekten de $491, 503, 547$ sayıları birer asal sayıdır.)

Çözüm 2:

geo hocamın da dediği gibi bu eşitliği her n için sağlayan bileşik a pozitif tamsayıları Carmichael sayıları olarak adlandırılır. Gerçi kullanılan tanımı şu şekildedir;

Carmichael Sayıları: Bir bileşik a pozitif tamsayısı $(a, n) = 1$ olan herhangi bir n tamsayısı için $n^{a-1} \equiv 1 \pmod{a}$ denkliğini sağlıyorsa a'ya Carmichael sayısı denir.

Ancak bu iki tanım denktir ve ikisi de kullanılabilir. Bununla birlikte Carmichael sayılarıyla ilgili en bilinen teorem şu şekildedir.

Teorem: Bir n bileşik sayısı Carmichael sayısıdır ancak ve ancak n sayısı karebölensiz ve $p \mid n$ olan her p asal sayısı için $p - 1 \mid n - 1$'dir.

Bunun ispatını yapalım. n sayısının Carmichael olduğunu kabul edelim. İki tanımı da kullanabiliriz ama ben sorudaki tanımı kullanacağım. $q \mid n$ olan bir asal için $\alpha \geq 1$ için $q^{\alpha} \mid n$ olsun. Bu durumda

$$q^{n-1} \equiv q \pmod{n} \implies n \mid q^{n-1} - q \implies q^{\alpha} \mid q^{n-1} - q$$

olur. $n-1 > 2$ olduğundan $q^{n-1} - q$ ifadesi en fazla q'nin birinci kuvvetine bölünür. Dolayısıyla $\alpha = 1$ olmak zorundadır. Demek ki n'yi bölen herhangi bir asalın karesi n'yi bölmüyor. Bu da n karebölensizdir demektir. Şimdi ise rastgele bir $p \mid n$ asalı alalım. p modunda ilkel kök olan bir m tamsayısını seçersek $m^d \equiv 1 \pmod{p}$ olmasını sağlayan her d için $p-1 \mid d$ olacaktır. Mertebe konusu ile ilgili Lokman hocanın yayınladığı dersler bulunuyor, inceleyebilirsiniz.

$$m^n \equiv m \pmod{n} \implies m^n \equiv m \pmod{p} \implies m^{n-1} \equiv 1 \pmod{p} \implies p-1 \mid n-1$$

bulunur.

Şimdi ise n'nin karebölensiz ve $p \mid n$ olan her asal sayı için $p-1 \mid n-1$ olduğunu varsayalım. $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ diyelim. Herhangi bir a tamsayısı için $(a, n) \mid n = p_1 p_2 \cdots p_k$ olduğunu kenara yazalım. Çin kalan teoreminden

$$a^n \equiv a \pmod{n} \iff (\text{Her } p_i \mid n \text{ asalı için } a^n \equiv a \pmod{p_i})$$

olur. p_i asallarını (a, n)'yi ve dolayısıyla a'yı bölenler ve bölmeyenler olarak ayıralım.

Eğer $p_i \mid a$ ise $a^n \equiv a \equiv 0 \pmod{p_i}$ olacağından ispatlanacak bir şey yoktur.

Eğer $p_i \not| a$ ise $(a, p_i) = 1$'dir ve

$$a^n \equiv a \pmod{p_i} \iff a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$$

olur ki bu da doğrudur çünkü $p_i - 1 \mid n-1$ olduğundan

$$a^{n-1} \equiv \left(a^{\frac{n-1}{p_i-1}}\right)^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$$

olur. İspat böylece biter.

Dolayısıyla ana soruya dönülecek olursa, verilen a sayılarını asal çarpanlarına ayırıp, karebölensizliğine ve $p-1 \mid n-1$ şartını sağlayıp sağlamadığına bakabiliriz.

$667 = 23 \cdot 29$ için $22 \not| 666$ olduğundan istenilen sağlanmaz ve 667 bir Carmichael sayısı değildir.

$561 = 3 \mid 11 \mid 17$ için $2, 10, 16 \mid 560$ olduğundan 561 bir Carmichael saysıdır.

$547, 503, 491$ sayıları asal olduğundan Carmichael değildir ama Küçük Fermat teoreminden istenilen eşitliği sağlar.

32 $x^2 - x + 1$ polinomunun $x^n - x + 1$ polinomunu tam olarak bölmesini mümkün kılan n pozitif tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{2\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \equiv 2 \pmod{3}\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \equiv 2 \pmod{6}\}$

d) $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \equiv 2 \pmod{12}\}$

e) Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$x^2 - x + 1$ polinomunun $x^n - x + 1$'i bölmesi için $x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ olan herhangi bir $x_0 \in \mathbb{C}$ için $x_0^n - x_0 + 1 = 0$ olmalıdır. $x^2 - x + 1$'in katlı kökü olmadığından bu aynı zamanda gerek ve yeterli şarttır. $x_0 \neq -1$ olduğunu not alalım.

$$x_0^2 - x_0 + 1 = 0 \implies (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 + 1) = x_0^3 + 1 = 0 \implies x_0^3 = -1 \implies x_0^6 = 1$$

$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere $n \equiv a \pmod 6$ için

$$x_0^n - x_0 + 1 = (x_0^6)^{\frac{n-a}{6}} \cdot x_0^a - x_0 + 1 = x_0^a - x_0 + 1$$

olacaktır. $x_0^2 = x_0 - 1$ olduğundan, buradan

$$x_0^a - x_0 + 1 = x_0^a - x_0^2 = x_0^2(x_0^{a-2} - 1)$$

elde edilir. $x_0 \neq 0$ olduğundan $x_0^{a-2} = 1$ olmalıdır. $x_0^3 = -1$ ve $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğu göz önünde bulundurulursa, $a = 2$ elde edilir. Yani $n \equiv 2 \pmod 6$'dır. Yapılan işlemler geri döndürülebilir olduğundan bu formattaki tüm n'ler istenileni sağlar.

Not: Polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinden tanımlansa bile $\mathbb{R}$'i kapsayan en küçük cebirsel olarak kapalı cisim karmaşık sayılar olduğundan yukarıda kullanılan teorem sağlanmalıdır.

33 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,

1) $f(x+1, y+1) + f(x, y) = f(x, y+1) + f(x+1, y)$

2) $f(x, 0) = x^2$

3) $f(0, y) = -y^2$

koşullarını sağlıyor. $f(1000, 996)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 7984 **b)** 1996 **c)** 16 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Test tekniği ile $f(x, y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunu tahmin etmek zor değil.

(1) de verilen fonksiyonel eşitlikte x ler f nin ilk parametresinde, y ler f nin ikinci parametresinde kalmış. $f(x, y) = g(x) + h(y)$ şeklinde bir fonksiyon (1) i sağlar.

(2) ve (3) ten $g(x) = x^2$ ve $h(y) = -y^2$ nin sağladığı görülür.

$f(1000, 996) = 1000^2 - 996^2 = (1000 - 996)(1000 + 996) = 4(2000 - 4) = 8000 - 16 = 7984$

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

$f(x+1, y+1) - f(x+1, y) = f(x, y+1) - f(x, y)$ teleskopik bağıntısını göz önüne alalım.

$y = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ tam sayı değerini verirsek $f(x+1, n) - f(x+1, 0) = f(x, n) - f(x, 0)$ olup

$$f(x+1, n) - f(x, n) = (x+1)^2 - x^2$$

elde edilir. Şimdi de bu teleskopik ifadede $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ tam sayı değerlerini verirsek $f(m, n) - f(0, n) = m^2 - 0^2$ olup

$$f(m, n) = m^2 - n^2$$

çözümüne ulaşılır. Ayrıca bu çözümün, verilen ana denklemi sağladığı kontrol edilebilir. Böylece $f(1000, 996) = 1000^2 - 996^2 = (1000 - 996)(1000 + 996) = 7984$ bulunur.

34 Bir üçgen, oluşacak üçgenlerin tüm köşelerinde aynı sayıda kenar kesişecek şekilde n üçgene ayrılabiliyorsa n en çok kaç olabilir?

a) 19 **b)** 15 **c)** 7 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

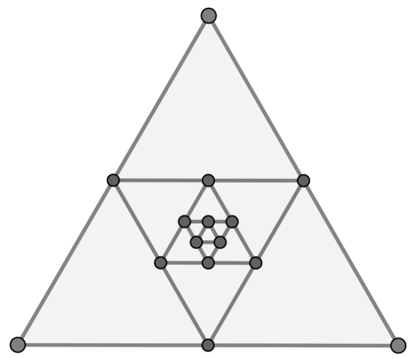
Yanıt: $\boxed{E}$

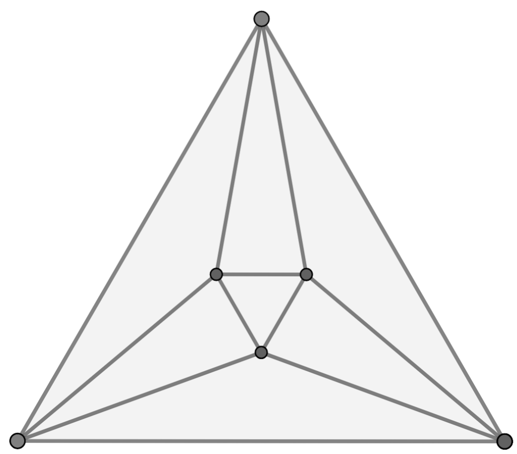
n için üst limit yoktur.

Bir üçgenin kenarorta noktalarını birleştiren üçgeni çizelim. Bu prosedürü sürekli uyguladığımızda ilk üçgenin köşeleri hariç diğer tüm köşelerde 4 kenar kesişir. (bkz. ilk şekil)

Üçgeni ikinci şekildeki gibi 7 üçgene ayırdığımızda her köşeden 4 kenar çıkar. En içteki üçgen yukarıda anlatıldığı gibi kenarorta noktaları üzerinden sınırsız sayıda üçgene ayrılabilir.

Ortaya çıkan şekilde tüm köşelerden 4 kenar çıkmış oldu.





35 Elemanlarından herhangi ikisi aralarında asal olan ve herhangi ikisinin farkı üçüncüsü ile bölünen, üç elemanlı tüm $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$ kümelerini dikkate aldığımızda, aşağıdakilerden hangisi doğru değildir?

a) a, b, c sayılarından en az biri negatif olmalıdır.

b) Sıfırdan farklı hangi c tam sayısı verilirse verilsin, $\{a, b, c\}$ istenen koşulu sağlayacak biçimde a ve b tam sayıları bulunur.

c) a, b, c sayılarından en az birinin mutlak değeri 1 ya da 2 dir.

d) a, b, c ardışık tam sayılar olamaz

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

0 ile bölünebilme tanımsız olduğu için a, b, c den hiçbiri 0 olamaz.

Sayılardan en az ikisi birbirine eşit olsun: a, a, c gibi

$c \mid 0$ ve $a \mid c - a$ olmalı. İlki sıfırdan farklı her sayı için doğru, ikinci ise $a \mid c$ iken doğru. $(a, c) = 1$ olduğu için $a \in \{-1, 1\}$ olmalı.

Her $c \neq 0$ sayısı için $(1, 1, c)$ üçlüsü sorudaki şartı sağlar. ($c \mid 0$ ve $1 \mid c - 1$)

Bu durumda (A) önermesi doğru değil ve (B) önermesi doğrudur. (Her c sayısı için $a = b = 1$ alınabilir.)

Cevabın (A) olduğu bu aşamada belirlenmiş oldu. Sorunun sıhhati açısından yine de devam edelim.

Sayıların ardışık olduğunu varsayalım.

$(a, a + 1, a + 2)$ için $a \mid 1$ ve $a + 2 \mid 1$ olmalı. $a \in \{-1, 1\}$ ve $a + 2 \in \{-1, 1\} \Rightarrow a \in \{-3, -1\}$ in ortak çözümü $a = -1$ dir.

$(-1, 0, 1)$ sayıları sorudaki şartı sağlamayacağı için a, b, c sayıları ardışık tam sayılar olamaz. (D) doğrudur.

Sayılardan en az ikisi birbirine eşitken bu eşit sayıların -1 veya 1 olduğunu görmüştük. Bu şart altında (C) şıkkı doğru oluyor. Diğer şartlar için (D) nin doğruluğunu araştıralım:

Sayılardan hiçbiri diğerine eşit olmasın:

Sayılar $a < b < c$ şeklinde sıralansın.

$a \mid c - b$, $b \mid c - a$ ve $c \mid b - a$ olacaktır.

$a \leq c - b$, $b \leq c - a$ ve $c \leq b - a$ olmalı.

$a + b \leq c \leq b - a \Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow a < 0$ olmalı.

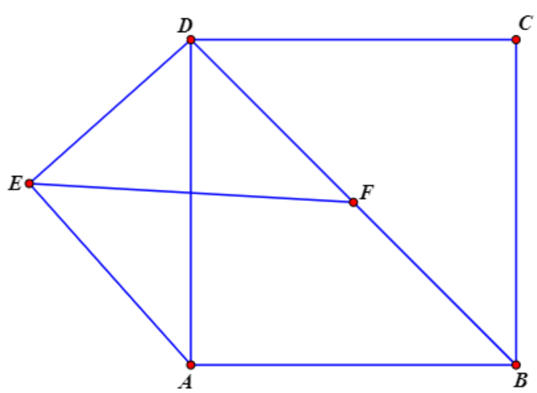
Bu bilgiyi kullanarak $a \leq b \leq c$ ifadesini $-a \leq c - b$ şeklinde yazabiliriz.

$b - a \leq c \leq b - a$ olduğu için $c = b - a$.

$b \mid c - a$ ifadesi $b \mid b - 2a$ ya dönüşür. Bu da $b \mid 2a$ olduğu anlamına gelir. $(a, b) = 1$ olduğu için $b \mid 2$ olmalı. Bu durumda $b \in \{-2, -1, 1, 2\}$ olacağı için (C) de doğrudur.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (E) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

36



Şekilde $ABCD$ kare,

$m(\widehat{AED}) = 90^\circ$ ve $[BD]$ nin orta noktası F dir.

$|EA| = a,\ |EF| = b,\ |ED| = c$ ise

ABD üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $a^2 + b^2 + ab$ **b)** $b^2 + 4ac$ **c)** $\dfrac{b^2 + ac}{3}$ **d)** $b^2 - \dfrac{ac}{2}$ **e)** $b^2 - ac$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$AF \perp BD$ olduğu için $AEDF$ bir kirişler dörtgenidir.

Ptolemy uygularsak $AF \cdot ED + AE \cdot DF = EF \cdot AD$, yani $AF \cdot (a+c) = b \cdot AF \cdot \sqrt{2} \Longrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2 - 2ac$.

$[ABD] = \dfrac{AD^2}{2} = \dfrac{a^2+c^2}{2} = b^2 - ac$

Çözüm 2:

ED uzantısı üzerinde $\triangle CGD \cong \triangle EDA$ olacak şekilde G noktası, benzer şekilde EA uzantısı üzerinde I noktası alalım. IB ile GC, H de kesişsin. $\triangle EDA \cong \triangle GCD \cong \triangle IAB \cong \triangle HBC$ ve $EGHI$ kare olacaktır.

Simetriden $EF = GF = HF = IF$ yani F noktası hem $ABCD$ karesinin hem de $EGHI$ karesinin merkezi olacaktır.

$[ABCD] = [EGHI] - 4 \cdot [EDA] = 2 \cdot EF^2 - 2 \cdot EA \cdot ED = 2b^2 - 2ac$ olacaktır.

Bu durumda $[ABD] = \dfrac{[ABCD]}{2} = b^2 - ac$ olur.

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1997

1 Kenar uzunluğu 24 olan bir ABCD karesinin $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ kenarlan üzerinde sırasıyla, E, F, G ve H noktaları alınıyor. $|DG| = |DH| = 9$ ve $EFGH$ dörtgeni, tabanlarından biri $[HG]$ olan bir yamuk ise, bu yamuğun alanı en çok kaç olur?

a) 441 **b)** 306 **c)** 288 **d)** 270 **e)** 225

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$AC \parallel GH \parallel EF$ olduğu için $BE = BF = x$ tir. $BD \perp AC$ dolayısıyla $BD \perp EF$ ve $BD \perp GH$.

Daha genelini çözmek adına $DH = DG = 9 = y$ ve $AB = 24 = a$ diyelim.

$GH + EF = (y + x)\sqrt{2}$

BD, EF ve GH yi sırasıyla I ve J de kessin.

Yamuğun yüksekliği $IJ = BD - BI - DJ = a\sqrt{2} - \dfrac{(y+x)\sqrt{2}}{2} = \dfrac{(2a-x-y)\sqrt{2}}{2}$

Yamuğun alanı

$$A = \frac{(GH + EF)IJ}{2} = \frac{(y + x)(2a - x - y)}{2} \tag{1}$$

Toplamları $2a = 48$ olan iki sayının çarpımı en fazla $a \times a = 24^2$ olabilir. Bu durumda $\max A = \dfrac{a^2}{2} = 288$ dir. ■

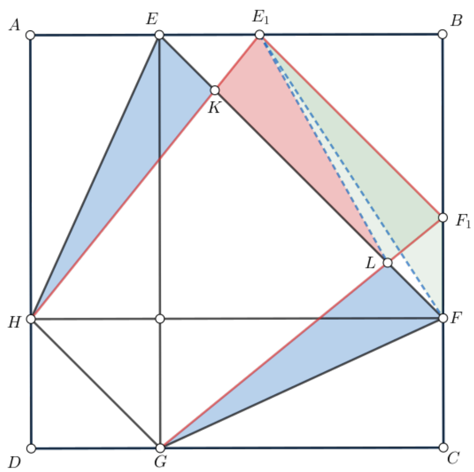
Not: (1) de $x+y = z$ dersek else edilen 2. dereceden polinomun en büyük değerini parabolün tepe noktasından yola çıkarak ya da polinomun türevini alarak da elde edebiliriz. Bizim çözümde uyguladığımız ise $AO \geq GO$ eşitsizliğinin pratik hali.

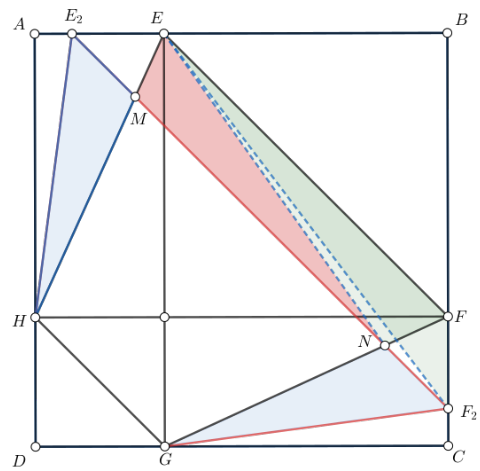
Çözüm 2:

Daha genelini, yani kenar uzunluğu verilen bir karede $DG = DH$ şartıyla oluşturulan $EFGH$ yamuklarının alanının en fazla karenin alanının yarısına eşit olacağını ispat edeceğiz.

$DH = DG = AE = CF$ olacak şekilde E, F, G, H noktalarını seçelim. Açık şekilde $[EFGH] = \dfrac{[ABCD]}{2}$ dir.

Bunun haricinde şeçilen E_1, F_1 noktaları (soldaki şekil) ve E_2, F_2 noktaları (sağdaki şekil) için $[E_1F_1GH] < [EFGH]$ ve $[E_2F_2GH] < [EFGH]$ olduğunu göstereceğiz.





E_1, F_1 için (soldaki şekil); $E_1H \cap EF = \{K\}$ ve $F_1G \cap EF = \{L\}$ olsun.
$EFGH$ ve E_1F_1GH yamuklarında $KLGH$ ortak alandır.

$$[EHE_1] = [E_1FE] > [E_1LE] \Longrightarrow [EKH] > [E_1KL] \tag{1}$$

Simetriden dolayı $[EHK] = [FGL]$ ve $[EE_1FH]$ yamuğunda $[EHK] = [E_1FK]$.
E_1F_1FK yamuğunda $KF > E_1F_1$ olduğu için

$$[E_1LF_1] < [E_1KF] = [FGL] \tag{2}$$

(1) ile (2) yi birleştirdiğimizde $[EKH] + [FGL] > [E_1LF_1] + [E_1KL] = [E_1L_1FK]$ dolayısıyla

$$[EFGH] > [E_1F_1GH] \tag{3}$$

elde ederiz.
E_2, F_2 için (sağdaki şekil); $EH \cap E_2F_2 = \{M\}$ ve $FG \cap E_2F_2 = \{N\}$ olsun.
$EFGH$ ve E_2F_2GH yamuklarında $MNGH$ ortak alandır.

$$[E_2HE] < [ENE_2] \Longrightarrow [E_2HM] < [ENM] \tag{4}$$

$$[EFN] = [EFF_2] = [GFF_2] > [F_2GN] \tag{5}$$

(4) ile (5) birleştirildiğinde $[EFNM] = [EFN] + [ENM] > [E_2HM] + [F_2GN]$ dolayısıyla

$$[EFGH] > [E_2F_2GH] \tag{6}$$

elde edilir. ■

Çözüm 3:

$AC \parallel GH \parallel EF$ ve $DH = DG$ olduğu için $BE = BF$ ve $EFGH$ ikizkenar yamuktur. Dolayısıyla $FH = EG$.
EG ile FH arasında kalan açı 2α olsun. $\angle EGC = 45^\circ + \alpha$ olacaktır.
$AB = a$ dersek, $EG = \dfrac{a}{\sin(45^\circ + \alpha)}$ ve

$$[EFGH] = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot FH \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot a^2 \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2(45^\circ + \alpha)} \qquad (1)$$

olur.
$\sin^2(45^\circ + \alpha) = (\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha)^2 = \sin^2 45^\circ (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot (1 + \sin 2\alpha)$ değerini (1) de yerine yazarsak

$$[EFGH] = a^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = a^2 \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\sin 2\alpha} + 1} \qquad (2)$$

$\max[EFGH]$ için $\sin 2\alpha = 1$ olmalı. Bu durumda $\max[EFGH] = \dfrac{a^2}{2}$ olur.

Çözüm 4:

$D(0,0,$ $A(0,24)$, $B(24,24)$, $C(24,0)$ olsun.
$G(9,0)$ ve $H(0,9)$ olacaktır.
$E(x,24)$ dersek $F(24,x)$ olacaktır.

$$[EFGH] = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \\ 24 & x \\ x & 24 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |9x + 24^2 + 9x - 9^2 - x^2| = \frac{24^2 - (x-9)^2}{2} \le \frac{24^2}{2} = 288$$

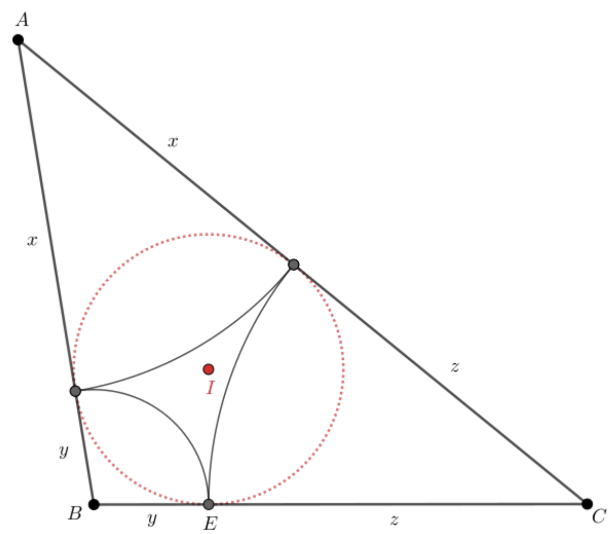
$\boxed{2}$ Kenar uzunlukları $|AB| = 5$, $|BC| = 4$ ve $|AC| = 7$ olan ABC üçgeninin köşeleri merkez alınarak, ikişer ikişer birbirine dıştan teğet üç çember çiziliyor. B ve C merkezli çemberlerin değme noktası E ise, $|AE|$ nedir?

a) $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $2\sqrt{5}$ **d)** $2\sqrt{6}$ **e)** $2\sqrt{7}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

A, B ve C merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla x, y, z olsun.



$a = y + z = 4$, $b = x + z = 7$, $c = x + y = 5$

$x + y + z = \dfrac{a + b + c}{2} = 8$

$BE = y = 1$ ve $CE = z = 3$. Stewart'tan $AE^2 = \dfrac{5^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 1}{4} - 3 \cdot 1 = 28 \Rightarrow AE = 2\sqrt{7}$.

Dikkat edilirse çemberler birbirine içteğet çemberin kenarlara değdiği noktada dokunmakta.

$\boxed{3}$ N sayısının ondalık yazılımında birler basamağındaki rakam 2'dir. Bu rakamı bulunduğu yerden kaldırıp en başa yazdığımızda elde ettiğimiz sayı N'nin iki katı ise, N'nin basamak sayısı en az kaçtır?

a) 12 **b)** 36 **c)** 4 **d)** 18 **e)** 6

Çözüm:

$N = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1 2$ ve $N' = 2a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1$ olsun.

$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1 = \dfrac{N-2}{10}$ olacağı için

$$N' = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{N-2}{10} = 2N \Longrightarrow 2(10^n - 1) = 19N$$

Bu durumda $10^n \equiv 1 \pmod{19}$ olmalı.

Fermat'tan $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ olduğunu biliyoruz; ama bu demek değil ki en küçük n sayısı 18 dir. (10, mod19 da bir ilkek kök ise aradağımız cevap 18 olacak)

Bu şartı sağlayan en küçük sayı d olsun. $10^d \equiv 1 \pmod{19}$ ve $d \mid 18$ olmalı.

$d < 18$ ise $10^6 \equiv 1 \pmod{19}$ veya $10^9 \equiv 1 \pmod{19}$ olmalı.

$10^2 \equiv 5 \pmod{19}$, $10^3 \equiv 12 \pmod{19}$, $10^6 \equiv 12^2 \equiv 11 \pmod{19}$, $10^9 \equiv 11 \cdot 12 \equiv 11 \equiv -1 \pmod{19}$ olduğu için $10^n \equiv 1 \pmod{19}$ denkliğini sağlayan en küçük n tam sayısı 18 dir.

Not: Şıklardan gitmek istersek sadece 6 yı denememiz yeterliydi.

$\boxed{4}$ A, B, C, D den her birinin ya her söylediği yalan, ya da her söylediği doğrudur. Aralarında şu konuşma geçer: A, B ye "Sen yalancısın" der. C, A ya "Asıl sen yalancısın" der. D, C ye bunların (A ve B nin) ikisi de yalancı der ve "Ayrıca sen de yalancısın" diye ekler. Bu dört kişi içindeki yalancıların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{B, C, D\}$ **b)** $\{B, D\}$ **c)** $\{A, B, C\}$ **d)** $\{A, C\}$ **e)** $\{A, D\}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Eğer A yalancı değilse B ve C yalancıdır. Bu durumda D'nin ilk söylediği yalanken ikincisi yalan değildir. Bu bir çelişkidir.

Eğer A yalancıysa B yalancı değildir. C de yalancı değildir fakat D yalan söylemiştir. Bu durumda yalancılar $\{A, D\}$'dir.

$\boxed{5}$ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ harfleri, a, b'den ve c de d'den daha önce gelmek koşulu ile kaç değişik şekilde sıralanabilir?

a) $\dfrac{10!}{4!5!}$ **b)** $\dfrac{10!}{4}$ **c)** $8!$ **d)** $4 \cdot 6!$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

a, b kendi içerisinde yer değiştiremeyeceği, c, d kendi içerisinde yer değiştiremeyeceği için; $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ yi $x, x, y, y, e, f, g, h, i, j$ gibi düşünebiliriz.

$\dfrac{10!}{2!2!} = \dfrac{10!}{4}$ elde edilir.

$\boxed{6}$ $\{(x, y) \in R^2 : y = x - 3\}$, $\{(x, y) \in R^2 : y = (x - 3)^2\}$, $\{(x, y) \in R^2 : y = (x - 3)^3\}$ kümelerinden en az ikisine ait olan noktaların sayısı kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x - 3 = (x - 3)^2 \Rightarrow (x - 3)((x - 3) - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4 \Longrightarrow (3, 0), (4, 1)$

$x - 3 = (x - 3)^3 \Rightarrow (x - 3)((x - 3)^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2 \Longrightarrow (3, 0), (4, 1), (2, -1)$

$(x - 3)^2 = (x - 3)^3 \Rightarrow (x - 3)^2((x - 3) - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4 \Longrightarrow (3, 0), (4, 1)$

Grafik için: wolfram

$\boxed{7}$ m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $2n^2 - 36 = m^2 - mn$ denklemini sağlayan kaç (m, n) sıralı ikilisi vardır?

a) 2 **b)** 0 **c)** 4 **d)** 3 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Eşitliği düzenlediğimizde $36 = 2n^2 + mn - n^2 = (2n-m)(n+m)$ elde ederiz.

$(2n-m)+(n+m) = 3n$ olduğu için 36 yı toplamları 3 ün katı olan iki çarpan şeklinde yazmalıyız.

$3 \cdot 12 = 36$, $6 \cdot 6 = 36$ ve $12 \cdot 3 = 36$ durumlarından $(m,n) = (7,5)$, $(m,n) = (8,4)$ ve $(m,n) = (-2,5)$ bulunur.

m ve n pozitif olduğunundan aradığımız yanıt 2 dir.

$\boxed{8}$ $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin orta noktaları, sırasıyla M ve N $(M \neq N)$ olan bir $ABCD$ dörtgeninde MN doğrusu $[AD]$ kenarını P, $[BC]$ kenarını da Q noktasında kesiyor.

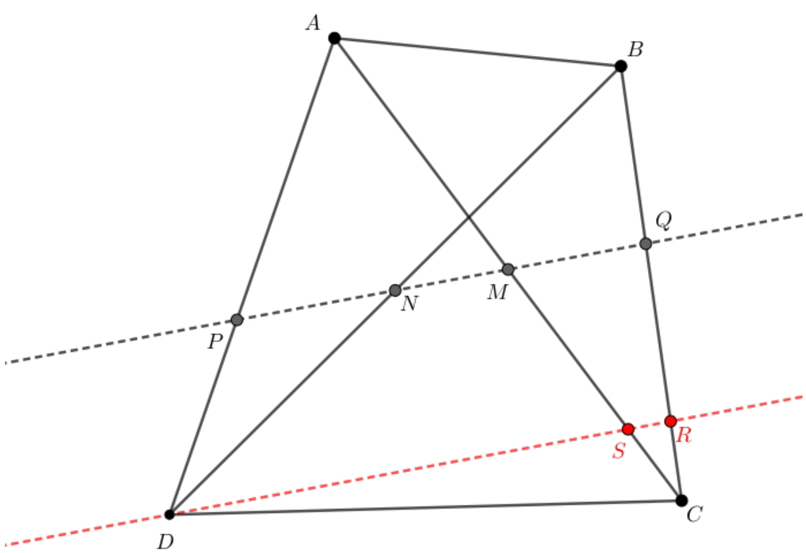
Alan$(MAP) = x$ ve Alan$(PDCM) = y$ ise, $\dfrac{|QB|}{|QC|}$ nedir?

a) $\dfrac{y-x}{x}$ **b)** $\dfrac{y-2x}{2x}$ **c)** $\dfrac{x+2y}{2y}$ **d)** $\dfrac{y-x}{2x}$ **e)** $\dfrac{2x+y}{y}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

D den geçen ve MN ye paralel olan doğru BC ve AC ile sırasıyla R ve S noktalarında kesişsin.



$ND = NB \Rightarrow QR = QB$ ve $AM = MC$ bilgisiyle,

$$\frac{PD}{AP} = \frac{MS}{AM} = \frac{MS}{MC} = \frac{QR}{QC} = \frac{QB}{QC} = k \tag{1}$$

$$\frac{[MAP]}{[ACD]} = \frac{AP \cdot AM}{AD \cdot AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{AP+PD}{AP}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+k} = \frac{x}{x+y}$$

$\dfrac{x+y}{2x} = 1 + k \Longrightarrow k = \dfrac{y-x}{2x}$ ■

Çözüm 2:

Test mantığıyla $ABCD$ yamuk olarak ele alınabilir. ($AB \parallel CD$)

Bu durumda $[MAP] = x$, $[PDCM] = y = 3x$ tir. Aradığımız yanıt ise $QB : QC = 1$ dir.

Şıklardan sadece $\dfrac{y-x}{2x} = \dfrac{3x-x}{2x} = 1$ sağlar.

9 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi, $a_1 \equiv 1 \pmod{13}$, $a_2 \equiv 4 \pmod{13}$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \pmod{13}$ koşulunu sağlıyorsa, $a_{100} \pmod{13}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 7 **b)** 6 **c)** 12 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$a_1 = 1,$

$a_2 = 4,$

$a_3 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2,$

$a_4 = 4 \cdot (3 \cdot 2^2 - 4) = 4 \cdot 2^3$

$a_5 = 4 \cdot (4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2) = 5 \cdot 2^4$

İddia: $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4(a_n - a_{n-1}) \\ &= 4(n \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2}) \\ &= 4(n \cdot (2^{n-1} - 2^{n-2}) + 2^{n-2}) \\ &= 4(n \cdot 2^{n-2} + 2^{n-2}) \\ &= 4(n+1)2^{n-2} \\ &= (n+1)2^n \quad ■ \end{aligned}$$

Soruya geri dönersek,

$$a_{100} = 100 \cdot 2^{99}$$

olacaktır.

Fermat'ın Küçük Teoreminden

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\begin{aligned} a_{100} &\equiv 100 \cdot 2^{99} && \pmod{13} \\ &\equiv 9 \cdot 2^{96} \cdot 2^3 && \pmod{13} \\ &\equiv 72 && \pmod{13} \\ &\equiv 7 && \pmod{13} \end{aligned}$$

Çözüm 2:

Doğrusal indirgemeli dizilerin çözüm yöntemini uygulayacağız.

$a_n = r^2$, $a_{n-1} = r$, $a_{n-2} = 1$ olarak aldığımızda,

$$r^2 = 4r - 4 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 2$$

Bu durumda genel terim
$$a_n = a \cdot 2^n + b \cdot n \cdot 2^n$$
şeklinde olacaktır.

$a_1 = 2a + 2b = 1$ ve $a_2 = 4a + 8b = 4$ denklemlerinin ortak çözümünden $a = 0$ ve $b = \frac{1}{2}$ gelecektir. O halde genel terim
$$a_n = n \cdot 2^{n-1}$$
olacaktır.

$a_{100} = 100 \cdot 2^{99}$ elde edilir. Fermat'ın Küçük Teoreminden faydalanarak ya da $2^6 \equiv 64 \equiv -1 \pmod{13}$ olduğu fark edilerek $a_{100} \equiv 7 \pmod{13}$ sonucuna ulaşılabilir.

Çözüm 3:

Bir nevi doğrusal indirgemeli dizilerin çözüm yönteminin ispatını yaparak sonuca gitmeye çalışalım.

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

Her tarafı 2^n ile bölelim.

$$\frac{a_n}{2^n} = 2 \cdot \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} \tag{1}$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ dizisini tanımlayalım. $b_1 = \frac{1}{2}$ ve $b_2 = 1$ olacaktır. (1) deki eşitliği b_n cinsinden yazarsak

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} \tag{2}$$

elde edilir. Biraz düzenlemeyle
$$b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2} \tag{3}$$
elde edilir. Tüm ardışık terimlerin farkı birbirine eşit olduğu için b_n dizisi aritmetik dizidir.

$$b_n - b_{n-1} = b_2 - b_1 = \frac{1}{2} \tag{4}$$

b_n genel terimini

$$b_n = (n-1) \cdot \frac{1}{2} + b_1 = \frac{n}{2} \tag{5}$$

şeklinde elde ederiz. Bu durumda a_n dizisi,

$$a_n = 2^n b_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = n2^{n-1} \tag{6}$$

olarak elde edilir.

Fermat'ın Küçük Teoreminden

$$a_{100} \equiv 100 \cdot 2^{99} \equiv 9 \cdot (2^{12})^8 \cdot 2^3 \equiv 72 \equiv 7 \pmod{13}$$

elde edilir.

10 $T = \dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{1996\sqrt{1997}+1997\sqrt{1996}}$ toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $\dfrac{43}{44} < T < \dfrac{44}{45}$

b) $\dfrac{43}{176} < T < \dfrac{43}{88}$

c) $T = \dfrac{1995}{1996 \cdot 1997}$

d) $T = \dfrac{1996}{1997 \cdot 1998}$

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$T = \sum\limits_{i=1}^{1996} \dfrac{1}{i\sqrt{(i+1)} + (i+1)\sqrt{i}}$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\sqrt{(i+1)} + (i+1)\sqrt{i}} &= \frac{(i+1)\sqrt{i} - i\sqrt{(i+1)}}{\left((i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{(i+1)}\right)\left((i+1)\sqrt{i} - i\sqrt{(i+1)}\right)} \\
&= \frac{(i+1)\sqrt{i} - i\sqrt{(i+1)}}{(i+1)^2 i - i^2(i+1)} \\
&= \frac{(i+1)\sqrt{i} - i\sqrt{(i+1)}}{(i+1)i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}}
\end{aligned}$$

Bu durumda $T = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1997}}$ olur.

$44^2 < 1997 < 45^2$ olduğundan, $\dfrac{1}{45^2} < \dfrac{1}{1997} < \dfrac{1}{44^2}$

$-$ ile çarptıktan sonra 1 eklersek, $1 - \dfrac{1}{44} < T < 1 - \dfrac{1}{45}$ ve $\dfrac{43}{44} < T < \dfrac{44}{45}$ bulunur.

11 $|AC| = 4\sqrt{3}$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D, E ve F dir. D, B ve E noktalarından geçen çember, bu üçgenin ağırlık merkezinden de geçiyorsa, $|BF|$ kaçtır?

a) 6 **b)** $4\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{3}$ **d)** 4 **e)** 3

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Ağırlık merkezi G olsun.

$DE \parallel AC$ ve $DBEG$ kirişler dörtgeni olduğu için $\angle FAG = \angle GED = \angle DBG$.

Buradan da $FG \cdot FB = FA^2$ elde edilir. ($A.A.$ benzerliğinden $\triangle FAG \sim \triangle FBA$.)

$FG = x$ dersek $FB = 2x$.

$$3x^2 = (2\sqrt{3})^2 \implies x = 2$$

Buradan da $BF = 3x = 6$ elde edilir.

Çözüm 2:

Ağırlık merkezi G olsun. DE ile BF doğruları H de kesişsin.
$DH = HE = \sqrt{3}$.
$HG = y$ dersek $GF = 2y$ ve $BH = 3y$.
H noktasının çembere göre kuvvetini yazarsak

$$DH \cdot HE = BH \cdot HG \Longrightarrow 3 = 3y^2 \Longrightarrow y = 1$$

Buradan da $BF = 6y = 6$ elde edilir.

12 Aşağıdaki $P(x)$ polinomlarından hangisi için, $P(x) = Q(x)(x^2+1) + R(x)(x-1)$ olacak şekilde tamsayı katsayılı $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları vardır?

a) $P(x) = x^9 + 2x^6 + 3x^5 + 2x$
b) $P(x) = x^9 + x^7 + 2x + 1$
c) $P(x) = x^9 + 2x^6 + x^4 + 3x$
d) $P(x) = x^9 + 4x^7 + x^3 + 3x + 2$
e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$
$P(1) = Q(1) \cdot 2 + R(1) \cdot 0 = 2Q(1)$.
$Q(x)$ tam sayı katsayılı olduğu $Q(1)$ tam sayıdır. Dolayısıyla $P(1)$ çift tam sayıdır.
Şıklardan sadece A seçeneğindeki $P(x) = x^9 + 2x^6 + 3x^5 + 2x$, $(P(1) = 8)$ çift tam sayı değer verir.
$Q(x) = 4$ polinomu için,
$P(x) = x^9 + 2x^6 + 3x^5 + 2x = 4(x^2+1) + R(x)(x-1)$ eşitliğini sağlayan $R(x)$ polinomu vardır.
$(R(x) = x^8 + x^7 + x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 4)$

13 $[a]$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim. Her x gerçel sayısı için,
$f(x) = x - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right]$
olarak tanımlanan fonksiyonun değer kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $[0,1)$ **b)** $[0,2)$ **c)** $[0,3)$ **d)** $[0,4)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$
$x \geq [x] > x - 1$ olduğundan $1 - x > -[x] \geq -x$ olur ve

$$x - \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) - \left(1 - \frac{x}{6}\right) > x - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] \geq x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$$

olacağından

$$3 > f(x) \geq 0$$

bulunur. Test mantığıyla bu kadarı cevabı bulmak için yeterlidir ama tam çözüm olması için devam edelim.
f'nin değer kümesi S olsun. Yukarıdan görebileceğimiz gibi $S \subseteq [0,3)$ olacaktır. $a \in [0,3)$ olsun. Eğer $a \in [0,2)$ ise

$$f(a) = a - \left[\frac{a}{2}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] - \left[\frac{a}{6}\right] = a$$

olur ve $a \in S$ olur. Eğer $a \in [2, 3)$ ise

$$f(a+3) = (a+3) - \left[\frac{a+3}{2}\right] - \left[\frac{a+3}{3}\right] - \left[\frac{a+3}{6}\right] = (a+3) - 2 - 1 - 0 = a$$

olur. Yani her $a \in [0, 3)$ için $a \in S$'dir. Buradan $[0, 3) \subseteq S$ ve $S = [0, 3)$ bulunur.

14 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası O, AOB üçgeni ve COD üçgeninin alanları sırasıyla 4 ve 9 ise bu dörtgenin alanı en az kaç olur?

a) 20 **b)** 22 **c)** 24 **d)** 25 **e)** 27

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$[BOC] = x$ ve $[AOD] = y$ olsun.

$AO/OC = [AOB]/[COD] = [AOD]/[COD] \Longrightarrow xy = 36$.

$AO \geq GO$ dan $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12$

$[ABCD] = x + y + 4 + 9 \geq 12 + 13 = 25$ olur.

Eşitlik durumu $x = y = 6$ iken, yani $AB \parallel CD$ iken sağlanır.

15 Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = 2$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD}) = 90°$, E ve F noktaları sırasıyla ABD ve ACD üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezi olmak üzere, $|EF| = \sqrt{2}$ ise $|BC|$ nedir?

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **e)** $2\sqrt{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$.

$ABCD$ bir kirişler dörtgenidir. BE, $\angle ABD$ nin açıortayı olduğu için, çevrel çemberi $\overset{\frown}{AD}$ yayının orta noktası G de keser. Benzer durumdan dolayı CE de çevrel çemberi G de keser. Bu durumda $\triangle AGD$ ikizkenar dik ücgen ve $AG = GD = \sqrt{2}$ olur.

$\angle AED = 90° + \dfrac{\angle ABD}{2} = 135°$ ve benzer şekilde $\angle AFD = 135°$ olduğu için $AEFD$ kirişler dörtgenidir. $AG = GD$ ve $2\angle AED + \angle AGD = 360°$ olduğu için $AEFD$ nin çevrel merkezi G noktasıdır. Bu durumda $AG = GD = EG = FG = \sqrt{2} = EF$, dolayısıyla $\triangle EFG$ eşkenar olur.

AD kenarının orta noktasına O dersek $\angle BOC = 2\angle BGC = 120°$ ve $BO = OC = 1$ olacaktır. $\triangle BOC$ bir $30° - 30° - 120°$ üçgeni olduğu için $BC = BO\sqrt{3} = \sqrt{3}$ elde ederiz.

Çözüm 2:

$\angle ABD = \angle ACD$ olduğu için $ABCD$ bir kirişler dörtgenidir.

$\angle AED = 90° + \dfrac{\angle ABD}{2} = 135°$ ve benzer şekilde $\angle AFD = 135°$ olduğu için $AEFD$ bir kirişler dörtgenidir.

$$\angle EAF = \angle EAD - \angle FAD = \frac{\angle BAD}{2} - \frac{\angle CAD}{2} = \frac{\angle BAC}{2} \tag{1}$$

Kirişler dörtgenlerinde Sinüs oranlarını yazarsak

$$\frac{EF}{AD} = \frac{\sin\angle EAF}{\sin\angle AED} = \frac{\sin\angle EAF}{\sin 145°} \tag{2}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin 90^\circ} \tag{3}$$

elde ederiz. $EF = \sqrt{2}$ ve $AD = 2$ değerlerini (2) de yerine yazarsak $\sin \angle EAF = \dfrac{1}{2}$ ve $\angle EAF = 30^\circ$ elde ederiz. Bu durumda (1) den elde ettiğimiz $\angle BAC = 60^\circ$ değerini (3) te yerine yazarsak $BC = \sqrt{3}$ elde ederiz.

Not:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ dönüşümünü kullanarak $BC = \dfrac{EF \cdot \sqrt{2AD^2 - EF^2}}{AD}$ elde ederiz.

$\boxed{16}$ $2x^2 + ky^2 \equiv z^2 \pmod{32}$ denkliğinin; x, y, z tek tam sayılar olmak üzere, en az bir çözümünün bulunmasını sağlayan k tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{k : k \equiv 7 \pmod{16}\}$ **b)** $\{k : k \equiv 7 \pmod{32}\}$ **c)** $\{k : k \equiv 7 \pmod{8}\}$

d) $\{k : k \equiv 7 \pmod{4}\}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

x, y, z tek sayılar olduklarından $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}$'dir. Ayrıca

$$2x^2 + ky^2 \equiv z^2 \pmod{32} \implies 2x^2 + ky^2 \equiv z^2 \pmod{8}$$

olduğundan

$$2 + k \equiv 1 \pmod{8} \implies k \equiv 7 \pmod{8}$$

olmalıdır. Eğer çözüm olmasını sağlayan k'ların kümesine S dersek

$$S \subseteq \{k \mid k \equiv 7 \pmod{8}\} \tag{1}$$

olmalıdır. Şimdi herhangi bir $k \in \{k \mid k \equiv 7 \pmod{8}\}$ alalım. k için 4 olasılık vardır.

i) $k \equiv 7 \pmod{32}$ ise

$$2x^2 + 7y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$

denkliğin çözümü var mı diye bakmalıyız. Eğer $(x, y, z) = (1, 1, 3)$ seçersek denklik sağlanır. $k \in S$'dir.

ii) $k \equiv 15 \pmod{32}$ ise denklik

$$2x^2 + 15y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$

olacaktır. Eğer $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ seçersek denklik sağlanır. $k \in S$'dir.

iii) $k \equiv 23 \pmod{32}$ ise denklik

$$2x^2 + 23y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$

olacaktır. Eğer $(x, y, z) = (3, 1, 3)$ seçersek denklik sağlanır. $k \in S$'dir.

iv) $k \equiv 31 \pmod{32}$ ise denklik

$$2x^2 + 31y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$

olacaktır. Eğer $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ seçersek denklik sağlanır. $k \in S$'dir.

Her durumda $k \in S$ olduğundan

$$\{k \mid k \equiv 7 \pmod{8}\} \subseteq S \tag{2}$$

olacaktır. (1) ve (2)'den $S = \{k \mid k \equiv 7 \pmod{8}\}$ bulunur.

17 S kümesinin her elemanı T kümesinin her elemanından küçük olmak üzere, 1 den 100 e kadar olan tam sayılardan 10 ar elemanlık S ve T kümeleri kaç değişik şekilde seçilebilir?

a) $\frac{1}{2}\binom{100}{10}\binom{90}{10}$ **b)** $\binom{100}{10}\binom{90}{10}$ **c)** $\binom{100}{20}$ **d)** $\binom{100}{10}^2$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesine ait herhangi 20 elemanlı bir A alt kümesi ($a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$) tek bir şekilde $A = S \cup T$ ($S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ ve $T = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{20}\}$) olarak yazılabilir. Bu durumda aradığımız yanıt 20 elemanlı tüm alt kümelerin sayısı olacaktır: $\binom{100}{20}$.

18 x, y, z gerçek sayılar olmak üzere, $x^3 - y = 24$, $y^3 - z = 24$, $z^3 - x = 24$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

a) 0 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 6 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$$x^3 - y = 24 \tag{1}$$
$$y^3 - z = 24 \tag{2}$$
$$z^3 - x = 24 \tag{3}$$

(1) den (2) yi çıkaralım:

$$x^3 - y^3 = y - z \tag{4}$$

(2) den (3) ü çıkaralım:

$$y^3 - z^3 = x - z \tag{5}$$

(3) ten (1) i çıkaralım:

$$z^3 - x^3 = x - y \tag{6}$$

(4) ten $x \geq y$ ise $y \geq z$ olmalı. $y \geq z$ bilgisini (5) te kullanırsak $x \geq z$ olmalı. $x \geq z$ ise (6) nın sağ tarafı $x - y \leq 0 \Longrightarrow x \leq y$ olmalı. Bu da $x = y$ olduğu anlamına gelir. Benzer durum $x \leq y$ de de elde edilir.

Simetriden dolayı $x = y = z$ olmalı.

$x^3 - x = 24 \Rightarrow x^3 - x - 24 = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2+3x+8) = 0 \Rightarrow x = 3$ olduğu için sistemin tek çözümü $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ tür.

19 a, b, c adındaki üç adam, adları (aynı sırayla olması gerekmeksizin) x, y, z olan eşleri ile kitap almaya çıkarlar. Kitapların fiyatları tam sayılar olup bir kişinin aldığı tüm kitapların fiyatı aynıdır. Bu altı kişiden her biri bu alışverişte bir kitaba ödediği para kadar kitap alır. Adamlardan her biri kendi eşinden 63 lira; a, y den 23 lira; b de x ten 11 lira daha fazla harcar. d nin w ile evli olma durumunu (d, w) ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) (a, z) , (b, x) , (c, y) **b)** (a, y) , (b, z) , (c, x) **c)** (a, x) , (b, y) , (c, z)

d) (a, z) , (b, y) , (c, x) **e)** (a, y) , (b, x) , (c, z)

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

m kişisinin aldığı kitapların bir tanesinin fiyatı n_m olsun. Aynı zamanda n_m adet kitap aldığından, bu kişi n_m^2 lira ödemiştir. a, y'den 63 lira değil, 23 lira fazla harcadığından bu kişiler evli değildir. Benzer şekilde b ve x de evli değildir.

$$n_a^2 - n_y^2 = 23 \implies (n_a + n_y)(n_a - n_y) = 23 \implies n_a + n_y = 23 \text{ ve } n_a - n_y = 1 \implies (n_a, n_y) = (12, 11)$$

$$n_b^2 - n_x^2 = 11 \implies (n_b + n_x)(n_b - n_x) = 11 \implies n_b + n_x = 11 \text{ ve } n_b - n_x = 1 \implies (n_b, n_x) = (6, 5)$$

n_a'nın eşi t kitap aldıysa

$$n_a^2 - t^2 = 63 \implies 144 - t^2 = 63 \implies t^2 = 81 \implies t = 9$$

olur. x ve y'nin ikisi de 9 kitap almadığından a'nın eşi z olmalıdır ve 9 kitap almıştır. b'nin eşi x veya z olmadığından y olmalıdır. c'nin eşi ise x olur. Cevap $\boxed{(a,z),(b,y),(c,x)}$ olmalıdır.

Not: Başta a ve b'nin eşlerinin kim olamayacağını söylemiştik. Bu bilgilerle şıkları elersek sadece C ve D şıkları kalır. Yani b'nin eşi y olduğunu görebiliriz. Eğer a'nın eşi x olsaydı yukarıdaki notasyonlarla

$$(n_a^2 - n_x^2) + (n_b^2 - n_y^2) = 63 + 63 = 126$$

$$(n_a^2 - n_y^2) + (n_b^2 - n_x^2) = 23 + 11 = 34$$

çelişkisi çıkardı. Böylece C'yi eleyip, doğru cevabı D bulabilirdik.

Çözüm 2:

Soru hatalıdır.

Bir önceki çözümde (b, y) bulduk.

$n_b = 6$ ve $n_y = 11$ bulundu; ama $n_b^2 - n_y^2 = -85 \neq 63$ eşitliği sağlanmaz.

Soru; **"Adamlardan her biri kendi eşinden 63 fazla; a, y den 943 fazla; b, x ten 143 fazla"** şeklinde sorulsaydı cevap (D) olarak bulunabilirdi.

Yeni haliyle iki şekilde sonuca gidebiliriz:

$[d, w]$ ile d nin w ile evli olmama durumunu gösterelim

Bu durumda, $n_a^2 - n_y^2 = 943$ ve $n_b^2 - n_x^2 = 143$ olduğu için $[a, y]$ ve $[b, x]$. (A), (B), (E) şıkları elenir.

$n_a^2 + n_b^2 - n_y^2 - n_x^2 = 1086 \neq 63 + 63$ olduğu için (a, x) ise $[b, y]$. (C) şıkkı elenir. Geriye sadece (D) şıkkı kalır.

Tam çözüm yapmak gerekirse:

(d, w) çifti için $n_d^2 - n_w^2 = 63$ olduğu için $(n_d - n_w)(n_d + n_w) = 63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$ olacaktır.

Buradan sadece $(n_d, n_w) \in \{(32, 31), (12, 9), (8, 1)\}$ gelir.

$n_a > 943$ olduğu için $n_a = 32$, $n_y = 9$, a'nın eşinin 31 kitap aldığı ve y nin eşinin 12 kitap aldığı sonucu çıkar.

$n_b^2 - n_x^2 = (n_b - n_x)(n_b + n_x) = 143 = 1 \cdot 143 = 11 \cdot 13$ olduğu ve $n_b \leq 32$ olduğu için $n_b = 12$ ve $n_x = 1$ olur.

$n_x = 1$ olduğu için x in eşi 8 kitap almış olmalı. Bu durumda x in eşi c dir. $n_c = 8$.

$n_b = 12$ ve $n_y = 9$ olduğu için (b, y) dir.

Bu durumda $n_a = 32$ ve $n_z = 31$ olacaktır.

Toparlarsak, $(a, z), (b, y), (c, x)$ tek çözümdür.

Çözüm 3:

Sorunun doğru olması için 63 değeri sabit kalmak şartıyla hangi sayıların sağladığını bilgisayar yardımıyla bulmuştum.

Mustafa Töngemen, Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında aslında daha güzel bir nokta yakalamış.

Soru; **"Adamlardan her biri kendi eşinden** 63 **lira fazla harcar;** a, y **den** 23 **kitap;** b **de** x **ten** 11 **kitap fazla alır."** şeklinde sorulduğunda da doğru oluyor.

(d, w) çifti için $n_d^2 - n_w^2 = 63$ olduğu için $(n_d - n_w)(n_d + n_w) = 63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$ olacaktır.

Buradan sadece $(n_d, n_w) \in \{(32, 31), (12, 9), (8, 1)\}$ gelir.

a, y den 23 fazla kitap almışsa $n_a = 32$, $n_y = 9$ olmak zorunda.

b, x ten 11 fazla kitap almışsa $n_b = 12$, $n_x = 1$ olmak zorunda.

Bu durumda (a, z), (b, y), (c, x) aradığımız yanıt olur.

20 $1 < n < 200$ koşulunu sağlayan ve 1'den büyük hiçbir tam sayının karesi ile bölünmeyen kaç n tam sayısı vardır?

a) 116 **b)** 112 **c)** 121 **d)** 111 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Bu n sayısı karekalansız bir sayıdır. Asal çarpanlarına ayırdığımızda farklı p_i asalları için $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ formatında olmalıdır. Eğer $k \geq 4$ ise

$$n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

olur, bu da verilen aralığın dışına çıkar. Demek ki $n = p$, $n = pq$ veya $n = pqr$ formatında olmalıdır. 200'den küçük asal sayıları bulmak gerekiyor. Sınavda yeterli vakit olduğundan soruyu hazırlayanların, sınavdaki öğrencilerin bu sayıları bulmakla uğraşabileceklerini düşündükleri kanısındayım.

i) $n = p$ ise $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199$ olmak üzere 46 tane asal sayı vardır.

ii) $n = pq$ ise genelliği bozmadan $p < q$ olsun. $200 > n > p^2$ olduğundan $13 \geq p$ olmalıdır.

iia) $p = 2$ ise $2 < q < 100$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 24 tane q bulunur.

iib) $p = 3$ ise $3 < q \leq 66$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 16 tane q bulunur.

iic) $p = 5$ ise $5 < q < 40$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 9 tane q bulunur.

iid) $p = 7$ ise $7 < q \leq 28$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 5 tane q bulunur.

iie) $p = 11$ ise $11 < q \leq 18$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 2 tane q bulunur.

iif) $p = 13$ ise $13 < q \leq 15$ olmalıdır. Böyle bir q asalı yoktur.

İki asal böleni olan $24 + 16 + 9 + 5 + 2 = 56$ sayı vardır.

iii) $n = pqr$ ise genelliği bozmadan $p < q < r$ olsun. $200 > n > p^3$ olduğundan $p = 2, 3, 5$ olabilir.

iiia) $p = 2$ ise $qr < 100$ olmalıdır. Buradan da $q < 10$ olur.

iiiaa) $(p, q) = (2, 3)$ ise $3 < r \leq 33$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 9 tane r bulunur.

iiiab) $(p, q) = (2, 5)$ ise $5 < r < 20$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 5 tane r bulunur.

iiiac) $(p, q) = (2, 7)$ ise $7 < r \leq 14$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 2 tane r bulunur.

iiib) $p = 3$ ise $qr \leq 66$ olmalıdır. Buradan da $q \leq 7$ olur.

iiiba) $(p, q) = (3, 5)$ ise $5 < r \leq 13$ olmalıdır. Yukarıda yazdığımız asallara bakarsak 3 tane r bulunur.

iiibb) $(p,q) = (3,7)$ ise $7 < r \leq 9$ olmalıdır. Böyle bir r asalı yoktur.

iiic) $p = 5$ ise $qr < 40$ olmalıdır. $q, r \geq 7$ olduğundan böyle q, r asalları yoktur.

Dolayısıyla 3 asal böleni olan $9 + 5 + 2 + 3 = 19$ tane n vardır. Toplamda $46 + 56 + 19 = 121$ tane n vardır.

Not: Soruyu çözmek için 46 tane asal sayıyı, arada sayı kaçırmadan yazmak gerektiğinden, bu soruda işlem hatası yapmak çok kolaydır. Ben bile çözümü girerken işlem hatası yapmadığımdan emin olamadım. Dolayısıyla bu soru benim için, argo olacak ama, "amele işi" bir soru olmuş.

Çözüm 2:

S_k ile $1 < n < 200$ ve $k \mid n$ sayılarının kümesini gösterelim.

Aradığımız yanıt; $|S| = 198 - |S_4 \cup S_9 \cup S_{25} \cup S_{49} \cup S_{121} \cup S_{169}|$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
|S_4 \cup S_9 \cup S_{25} \cup S_{49} \cup S_{121} \cup S_{169}| &= |S_4| + |S_9| + |S_{25}| + |S_{49}| + |S_{121}| + |S_{169}| \\
&\quad -|S_{36}| - |S_{100}| - |S_{196}| \\
&= 49 + 22 + 7 + 4 + 1 + 1 - 5 - 1 - 1 \\
&= 77
\end{aligned}$$

O halde cevap $198 - 77 = 121$ dir.

21 Bir çembere, dışındaki bir A noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları B ve C dir. $[AB]$ ve $[BC]$ nin orta noktaları sırasıyla D ve E, CD doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta F olmak üzere, $m(\widehat{BAC}) = 36°$ ise $m(\widehat{EFC})$ kaç derecedir?

a) 36 **b)** 45 **c)** 54 **d)** 60 **e)** 72

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Teğet-Kiriş açıdan $\angle ACF = \angle CBF$.

$ED \parallel AC$ den $\angle ACF = \angle EDF$.

$\angle EBF = \angle EDF$ olduğu için $BEFD$ bir kirişler dörtgenidir.

$\angle EBA = \angle EFC = \dfrac{180° - \angle BAC}{2} = 72°$.

22 $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin, varsa, pozitif köklerinin (çarpma işlemine göre) terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $\dfrac{13}{2} < S < 7$ **b)** $7 < S < \dfrac{15}{2}$ **c)** $S = 7$ **d)** Denklemin pozitif kökü yoktur. **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Verilen denklemin 3 tane kökünün iki tanesinin pozitif, bir tanesinin negatif olduğunu gösterelim. Polinoma $P(x)$ dersek $P(-3) = -5$, $P(-2) = 7$, $P(0) = 1$, $P(1) = -5$, $P(3) = 7$ olduğundan aradeğer teoreminden $(-3,-2)$, $(0,1)$, $(1,3)$ aralıklarında birer kökü vardır. Negatif köke $-a$, pozitif köklere b ve c diyelim. Vieta teoreminden

$$S - \frac{1}{a} = \frac{1}{(-a)} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{(-a)b + (-a)c + bc}{(-a)bc} = \frac{-7}{-1} = 7$$

Dolayısıyla $S = 7 + \frac{1}{a}$'dir. Yukarıda bulduğumuz aralıklardan dolayı $a \in (2,3)$ ve buradan da $\frac{1}{a} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$'dir. Dolayısıyla

$$7 < 7 + \frac{1}{3} < S < 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

elde edilir.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında sorunun yanıtının olmadığı belirtilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

23 $0 < n < 945$ ve $\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv 0 \pmod{105}$ koşullarını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 80 **b)** 89 **c)** 82 **d)** 90 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Eğer

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

yazarsak, istenilen şart

$$n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{105 \cdot 6}$$

ile denktir. $105 \cdot 6 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ olduğundan $2, 5, 7, 9$ modlarında incelememiz yeterlidir. İfadenin her zaman 2 modunda 0 kalanı verdiği barizdir. Mod 5 için

$$n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{5} \iff n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$$

Mod 7 için

$$n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{7} \iff n \equiv 0, 3, 6 \pmod{7}$$

Mod 9 için ya n, $n+1$, $2n+1$ çarpanları 0 kalanı vermelidir ya n ve $2n+1$ çarpanları 3'ün katı kalan vermelidir (ki böyle bir n yoktur) ya da $n+1$ ve $2n+1$ çarpanları 3'ün katı olmalıdır (böyle bir n de yoktur). Buradan

$$n \equiv 0, 4, 8 \pmod{9}$$

çözümleri bulunur. Çin kalan teoreminden n'nin alabileceği değerler mod 315'de 27 adettir ve bunlardan biri 0 kalanıdır. $945 = 3 \cdot 315$ olduğundan $0 \leq n < 945$ aralığında $27 \cdot 3 = 81$ çözüm vardır. 0'ı çıkartırsak 80 çözüm bulunur.

24 Tahtaya 1 den 12 ye kadar olan tam sayıları yazalım. Her adımda bu 12 sayıdan ikisini silerek, ya toplamlarının ya da farklarının mutlak değerini iki kere yazıyoruz. Sonlu sayıda adım sonucunda tahtaya yazılı sayıların hepsi aynı n tam sayısına eşit hale geliyor. n aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 9 **b)** 24 **c)** 10 **d)** 16 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$2 - 1 = 1$, $4 - 3 = 1$, $\ldots$, $12 - 11 = 1$ ile tahtadaki tüm sayılar 1 e dönüşür.

$(1, 1)$ üzerinden sürekli toplama işlemi ile $2^0, \ldots, 2^n$ sayıları elde edilebilir.

$(1,1) \to (2,2) \to (4,4) \to (8,8) \to (16,16) \to \ldots$

İlk 6 sayının tamamını a yaptığımızı, ikinci 6 sayının tamamını da b yaptığımızı varsayalım. O zaman 1. ile 7., 2. ile 8., $\ldots$, 6. ile 12. toplanarak tahtadaki tüm sayılar $a + b$ haline gelir.

$9 = a + b = 8 + 1$, $24 = a + b = 16 + 8$, $10 = a + b = 8 + 2$, $16 = a + b = 8 + 8$ olduğu için şıklardan hepsi elde edilebilir.

25 $[AB]$ çaplı bir çemberin $[AC]$ ve $[BD]$ kirişlerinin kesişim noktası P olmak üzere, $|AP| = 2\sqrt{2}$, $|PC| = 3\sqrt{2}$ ve $|AB| = 5\sqrt{3}$ ise $|BP|.|BD|$ nedir?

a) 55 **b)** 48 **c)** $30\sqrt{2}$ **d)** $25\sqrt{3}$ **e)** 36

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\triangle ABC$ de Pisagor uygularsak $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 5$ elde ederiz.

$BP \cdot BD = BP \cdot (BP + PD) = BP^2 + BP \cdot PD$

P noktasının kuvvetinden $BP \cdot PD = AP \cdot PC$,

$\triangle BPC$ de Pisagordan $BP^2 = BC^2 + PC^2$,

$BP \cdot BD = BC^2 + PC^2 + AP \cdot PC = 25 + 18 + 12 = 55$ elde edilir.

Çözüm 2:

P den AB ye inilen dikmenin ayağı H olsun.

$AH \cdot AB = AP \cdot AC$ ve $BH \cdot BA = BP \cdot BD$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$AP \cdot AC + BP \cdot BD = AB(AH + BH) = AB^2$$

elde ederiz.

Değerleri yerine yazarsak $BP \cdot BD = (5\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 75 - 20 = 55$ elde ederiz.

26 O merkezli R yarıçaplı bir çemberin $[OA]$ ve $[OB]$ yarıçapları üzerinde sırasıyla L ve M noktaları alınıyor. AB yayının orta noktası K olmak üzere, KLM üçgeni eşkenar üçgen ve $Alan(KLM) = \dfrac{(2\sqrt{3}-3)R^2}{8}$ ise $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?

a) 15 **b)** 30 **c)** 45 **d)** 60 **e)** 75

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Simetriden dolayı $KLOM$ deltoittir. $KLPM$ eşkenar dörtgenini oluşturalım. Açık şekilde $P \in OK$.

Hesap kolaylığı olsun diye $R = 2$ alalım.

$[KLM] = \dfrac{KL^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

$KL^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Longrightarrow KL = \sqrt{3} - 1$, dolayısıyla $KP = 3 - \sqrt{3}$.

$OK = 2$ olduğu için de $OP = 2 - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 = LP = PM$.

Bu durumda $\angle LOM = \dfrac{\angle LPM}{2} = 30°$ olacaktır.

27 n elemanlı her $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ negatif olmayan gerçel sayı kümesinde, $0 < \dfrac{|x_i - x_j|}{(3+x_i)(3+x_j)} < \dfrac{1}{33}$ olacak şekilde en az iki x_i, x_j elemanının var olmasını gerektiren en küçük n tam sayısı kaçtır?

a) 34 **b)** 12 **c)** 3 **d)** 100 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{B}$

Kümenin elemanlarını $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ olarak dizelim. Verilen eşitsizliğin hiçbir x_i, x_j için sağlamadığını varsayalım. Tüm farklı i ve j için

$$\frac{|x_i - x_j|}{(3+x_i)(3+x_j)} \geq \frac{1}{33}$$

olmalıdır. Genelliği bozmadan $i > j$ olsun. $3 + x_j = a$ ve $x_i - x_j = k$ diyelim,

$$\frac{k}{a(a+k)} \geq \frac{1}{33}$$

olacaktır. Soldaki ifadeyi k'ya bağlı bir fonksiyon olarak düşünelim. Türevi $\frac{1}{(a+k)^2}$ olduğundan bu ifade k'ya göre artandır. Dolayısıyla i'i $j+1$ olarak almamız ve incelememiz yeterlidir. Eşitsizliği düzenlersek

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{(3+x_j)(3+x_{j+1})} \geq \frac{1}{33} \iff x_{j+1}(30 - x_j) \geq 9 + 36x_j$$

elde edilir. Buradan $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $x_i < 30$ olması gerektiğini görürüz. Bunu kabul ederek

$$x_{j+1} \geq \frac{9 + 36x_j}{30 - x_j}$$

elde ederiz. Sağdaki ifadeyi de x_j'ye bağlı bir fonksiyon olarak yazıp, türevini hesaplarsak, artan olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla en uzun (x_i) dizisini elde edebilmek için $x_1 = 0$ ve $x_{i+1} = \dfrac{9+36x_j}{30-x_j}$ olarak almalıyız. Dizinin elemanlarını yazarsak,

$$0, \frac{3}{10}, \frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{12}{7}, \frac{5}{2}, \frac{18}{5}, \frac{21}{4}, 8, \frac{27}{2}, 30$$

olur ve 11 terimden daha fazla ilerleyemeyiz. Dolayısıyla 12 veya daha fazla terim varsa kesinlikle verilen eşitsizliği sağlayan bir ikili vardır.

Çözüm 2:

Basit bir düzenlemeyle $0 < \dfrac{|x_i - x_j|}{(3+x_i)(3+x_j)} = \left|\dfrac{1}{x_i+3} - \dfrac{1}{x_j+3}\right| < \dfrac{1}{33}$ elde ederiz.

$y_i = \dfrac{1}{x_i+3}$ şeklinde değişken değiştirsek $0 < y_i \leq \dfrac{1}{3}$ ve $0 < |y_i - y_j| < \dfrac{1}{33}$ olacaktır.

$\left(0, \frac{1}{3}\right]$ aralığında 11 noktayı ($n = 1, 2, \ldots, 11$ olmak üzere) $y_n = \dfrac{n}{33}$ şeklinde seçersek herhangi iki noktanın arasındaki uzaklık $|y_i - y_j| \geq \dfrac{1}{33}$ olacaktır.

$\left(0, \frac{1}{3}\right]$ aralığını $\left(0, \frac{1}{33}\right]$, $\left(\frac{1}{33}, \frac{2}{33}\right]$, $\ldots$, $\left(\frac{10}{33}, \frac{11}{33}\right]$ şeklinde 11 ayrık bölgeye ayıralım. 12 nokta aldığımızda Güvercin Yuvası İlkesi gereği en az 2 nokta aynı aralıkta yer alacaktır.

Bu durumda bu iki nokta için $0 < |y_i - y_j| < \dfrac{1}{33}$ olacaktır.

Çözüm 3:

Verilen şartı sağlamayan bir n sayısı ve $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dizisi düşünelim. Her $i > j$ için $\dfrac{x_i - x_j}{(3+x_i)(3+x_j)} \geq \dfrac{1}{33}$ olacaktır.

$$\frac{1}{3+x_j} - \frac{1}{3+x_i} \geq \frac{1}{33}$$

eşitsizliğinde $i = j+1$ ve $j = 1, 2, \ldots, n-1$ değerlerini yazarsak

$\dfrac{1}{3+x_1} - \dfrac{1}{3+x_2} \geq \dfrac{1}{33}$
$\dfrac{1}{3+x_2} - \dfrac{1}{3+x_3} \geq \dfrac{1}{33}$
$\vdots$
$\dfrac{1}{3+x_{n-1}} - \dfrac{1}{3+x_n} \geq \dfrac{1}{33}$
olur. Alt alta toplarsak, teleskopik toplam oluşur ve

$$\frac{1}{3+x_1} - \frac{1}{3+x_n} \geq \frac{n-1}{33}$$

elde ederiz. $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3+x_1} - \dfrac{1}{3+x_n}$ olduğundan $\dfrac{1}{3} > \dfrac{n-1}{33}$ elde ederiz. Buradan $n < 12$ iken istenen koşulun sağlanmayacağını anlıyoruz. Koşulu sağlayan en az iki x_i, x_j sayısının olması için $n \geq 12$ olmalıdır.

Şimdi $n = 12$ için $\dfrac{1}{3+x_1} - \dfrac{1}{3+x_{12}} \geq \dfrac{12-1}{33} = \dfrac{1}{3}$ olmaması gerekir. İsterseniz bu eşitsizlik mümkün olabiliyor mu diye bir kez daha kontrol edelim. $x_1 = 0$ en küçük değerini verirsek ve $x_{12} \to \infty$ limit durumunda eşitlik sağlanabiliyor. Fakat $x_{12} < \infty$ bir pozitif gerçel sayı olduğundan $0 < \dfrac{1}{3+x_1} - \dfrac{1}{3+x_{12}} < \dfrac{1}{3}$ olur. $(0, \dfrac{1}{3})$ aralığını 11 eş uzunluklu alt aralığa ayırırsak, yani alt aralıkların uzunlukları $\dfrac{1}{33}$ olursa (bkz Geo'nun çözümü); seçtiğimiz 12 noktadan en az ikisi aynı alt aralığa düşer. Bu sayılara x_i, x_j dersek $\dfrac{1}{3+x_j} - \dfrac{1}{3+x_i} < \dfrac{1}{33}$ koşulu sağlanır. En küçük değer $n = 12$ dir.

$\boxed{28}$ Ondalık yazılımlarında hiçbir rakamın yan yana tekrarlanmadığı ve $1 \leq n \leq 10^{1997}$ koşulunu sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 9^{1997} **b)** $\dfrac{9^{1998}-9}{8}$ **c)** $\dfrac{9^{1997}-1}{8}$ **d)** 10.9^{1996} **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$n = 10^{1997}$ şartı sağlamadığından $n < 10^{1997}$ kabul edebiliriz. Yani n en fazla 1997 basamaklı olabilir. k basamaklı olsun. Soldan ilk basamak 0 olamayacağından 9 tane değer alabilir. Ondan sonraki basamaklar ise 0 olabilir ama ondan önceki basamak olamazlar. Dolayısıyla onlar için de 9 değer vardır. Sonuç olarak 9^k tane k basamaklı şartı sağlayan sayı vardır. $k = 1, 2, \ldots, 1997$ olabileceğinden aradığımız cevap

$$\sum_{k=1}^{1997} 9^k = \frac{9^{1998}-1}{9-1} - 1 = \frac{9^{1998}-9}{8}$$

olacaktır.

$\boxed{29}$ a, b sıfırdan farklı ve c pozitif olmak üzere, a, b, c tam sayıları, $\dfrac{5}{663} = \dfrac{a}{17} + \dfrac{b}{c}$ denklemini sağlıyorsa b'nin alabileceği en küçük pozitif değer nedir?

a) 5 **b)** 44 **c)** 1 **d)** 76 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

a'lı kesiri karşı tarafa atarsak
$$\frac{b}{c} = \frac{5-39a}{663}$$
olur. b ve c pozitif olduğundan a negatiftir. a yerine $-n$ yazalım. Böylece $n, b, c > 0$ olacaktır.
$$\frac{b}{c} = \frac{5+39n}{663}$$
$\frac{5+39n}{663}$'nin en sade hali $\frac{p}{q}$ ise $b = pk$ ve $c = qk$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. b'nin en küçük değerini aradığımızdan $k = 1$ seçmeliyiz. $663 = 3 \cdot 13 \cdot 17$ olduğundan ve $39n + 5$ sayısı ne 3'ün ne de 13'ün tam katı olduğundan, $\frac{5+39n}{663}$ kesiri ya sadeleşemez ya da 17 ile sadeleşir. Eğer sadeleşmiyorsa $b = 39n + 5$ olmalıdır. Buradan minimum b değeri 44 bulunur.

Eğer 17 ile sadeleşebiliyorsa $b = \frac{39n+5}{17}$ olmalıdır. Buradan
$$39n + 5 \equiv 5n + 5 \equiv 0 \pmod{17} \implies n \equiv 16 \pmod{17}$$
bulunur. Yani b'nin en küçük değeri $\dfrac{16 \cdot 39 + 5}{17} = 37$ bulunur. Yani en küçük b pozitif tam sayı değeri 37'dir.

30 İçlerinde siyah ve beyaz toplar olan iki torbada toplam 25 top var. Her torbadan rasgele birer top alındığında her ikisinin de beyaz olma olasılığı $0,54$ ise her ikisinin de siyah olma olasılığı nedir?

a) $0,46$ **b)** $0,04$ **c)** $0,16$ **d)** Verilenler bu olasılığı belirlemek için yeterli değil. **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

İlk torbada x adet, ikinci torbada $25-x$ adet top olsun. Beyaz top sayısı ise birinci ve ikinci torbada sırasıyla y ve z olsun. Beyaz top olasılığı 0 olmadığından $y, z \neq 0$'dır. Ayrıca $1 \leq y \leq x$ ve $1 \leq z \leq 25 - x$ olmalıdır. Genelliği bozmadan ilk torbada daha fazla top olsun diyebiliriz. Yani $1 \leq x \leq 12$'dir. Verilen olasılık,
$$\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{25-x} = 0.54 = \frac{27}{50}$$
Dolayısıyla, öyle bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki
$$yz = 27k$$
$$x(25-x) = 50k$$
İkinci denklemden $5 \mid x$ olması gerektiği görülebilir. Yani $x = 5$ veya $x = 10$ olabilir.

i) Eğer $x = 5$ ise $x(25-x) = 50k$'dan $k = 2$ bulunur. $1 \leq y \leq 5$ ve $1 \leq z \leq 20$ olur. Ayrıca $k = 2$ olduğundan $yz = 54$ olacaktır. y ve z'nin aralıklarından $yz = 54$ olmasını sağlayan tek sayı çifti $(y, z) = (3, 18)$'dir. Çekilen iki topun da siyah olma olasılığı
$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{20} = 0.04$$
bulunur.

ii) Eğer $x = 10$ ise $k = 3$ bulunur. $1 \leq y \leq 10$ ve $1 \leq z \leq 15$ ve $yz = 81$ olacaktır. Bu şartları sağlayan tek (y, z) çifti $(9, 9)$'dur. Olasılığı tekrar hesaplarsak
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{6}{15} = 0.04$$
elde edilir. Tüm durumlarda 0.04 bulunduğundan aradığımız olasılık 0.04'dür.

Not: Bu soru benim gözümde çok iyi hazırlanmış bir sorudur. Ortaokulda ve lisedeyken bu sorudaki ince ayara hayran olmuş çok fazla matematik ve bilgisayar olimpiyatçısı öğrenciyle karşılaşmıştım. Hatta bilgisayar olimpiyatlarındaki matematik kısmını hiç sevmeyen bir bilgisayar olimpiyatçısı arkadaşım bu sorunun matematiğe olan ilgisini çok fazla arttırdığını söylemişti.

31 $x_1, x_2, ..., x_{100}$ negatif olmayan gerçel sayılar ve $x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 100$ ise $x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_4 + ... + x_{98}.x_{99} + x_{99}.x_{100}$ toplamının alabileceği en büyük değer nedir?

a) 99 **b)** 199 **c)** 2500 **d)** 5000 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_{100}$ ifadesine bakılırsa görülür ki, tüm terim çarpımlarının indis ikilileri tek-çift hâlindedir. O hâlde, sayıların her biri negatif olmayan gerçel sayılar olduğundan, tek ve çift indisli terimleri ayırarak

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_{100} \le (x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}) \cdot (x_2 + x_4 + \ldots + x_{100})$$

olduğunu görebiliriz, çünkü eşitsizliğin sağ tarafındaki parantez çarpımının açılımında sol tarafındaki terimlerin her biri mevcuttur.

O hâlde bu iki toplamı $A = x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}$ ve $B = x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}$ olarak gösterirsek,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_{100} \le A \cdot B$$

olduğunu biliyoruz.

Soruda verilen $A + B = 100$ bilgisini kullanarak aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$A \cdot B \le \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \left(\frac{100}{2}\right)^2 = 2500$$

elde ederiz. Yazmıi olduğumuz son iki eşitsizlikten

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_{100} \le 2500$$

elde ederiz. Eşitlik durumunun da örneğin

$$x_1 = x_2 = 50, x_3 = x_4 = \ldots = 0$$

alarak sağlandığı görülebilir.

32 $\dfrac{2^{p-1} - 1}{p}$ sayısının tam kare olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 8 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$p = 2, 3, 5$ sayılarını deneyelim.

$p = 2 \Rightarrow \dfrac{2^1 - 1}{2} = \dfrac{1}{2}$ sağlamaz.

$\boxed{p = 3 \Rightarrow \dfrac{2^2 - 1}{3} = 1}$ sağlar.

$p = 5 \Rightarrow \dfrac{2^4 - 1}{5} = 3$ sağlamaz.

$p > 5$ olsun.

$4^{\frac{p-1}{2}} - 1 = pT^2 \equiv 3 \pmod 4$ ve $T^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ olduğu için $p = 4k + 3$ formunda bir asal sayıdır.

$4^{2k+1} - 1 = (2^{2k+1} - 1)(2^{2k+1} + 1) = pT^2$

obeb$(2^{2k+1} - 1, 2^{2k+1} + 1) = 1$ olacağı için inceleyeceğimiz iki durum var:

(i) $2^{2k+1} - 1 = T_1^2$ ve $2^{2k+1} + 1 = pT_2^2$

(ii) $2^{2k+1} - 1 = pT_1^2$ ve $2^{2k+1} + 1 = T_2^2$

$p = 4k + 3$ formunda bir asal sayı olduğu için (i) deki ikinci eşitliği mod 4 te incelersek $2^{2k+1} + 1 \equiv 1 \pmod 4$ ve $pT^2 \equiv 3T^2 \equiv 0, 3 \pmod 4$ elde ederiz. Yani (i) den bir çözüm gelmez.

(ii) deki ikinci denklemden $2^{2k+1} = T_2^2 - 1 = (T_2 - 1)(T_2 + 1)$ elde ederiz. 2^{2k+1} in çarpanları a, b pozitif tam sayılar olmak üzere $2^a \cdot 2^b$ formunda olmalı. Çarpanların farkları 2 olduğu için $2^b - 2^a = 2$ olmalı. Bu da ancak $a = 1$, $b = 2$ iken gerçekleşir.

$T_2 - 1 = 2 \Rightarrow T_2 = 3 \Rightarrow 2^{2k+1} = T_2^2 - 1 = 8 \Rightarrow k = 1$ ve $\boxed{p = 4k + 3 = 7}$ dir.

O halde aradığımız değerler $p = 3$ ve $p = 7$ dir.

33 $[a]$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1994$

$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1995$

$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1996$

$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1997$

denklemlerinden kaç tanesinin çözüm kümesi boş değildir?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

$x - 1 < [x] \leq x$ olduğundan dolayı $A = 1994, 1995, 1996, 1997$ için

$$40x - 6 < [x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = A \leq 40x$$
$$\Longrightarrow \frac{A}{40} \leq x < \frac{A+6}{40}$$

olacaktır.

A'nın verilen her değeri için $49.85 = \frac{1994}{40} \leq x < \frac{2003}{40} = 50.075$ olacaktır. Yani $[x] = 49$ veya $[x] = 50$ olabilir.

Eğer $[x] = 50$ ise $x \geq 50$'dir ve

$$A = [x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] \geq 40 \cdot 50 = 2000$$

olur fakat bu bir çelişkidir. Yani $[x] = 49$'dur ve $49.85 < x < 50$'dir. Dolayısıyla

$$149.55 < 3x < 150 \implies [3x] = 149$$
$$249.25 < 5x < 250 \implies [5x] = 249$$
$$348.35 < 7x < 350 \implies [7x] = 348 \text{ veya } [7x] = 349$$
$$548.35 < 11x < 550 \implies [11x] = 548 \text{ veya } [11x] = 549$$
$$648.05 < 13x < 650 \implies [13x] = 648 \text{ veya } [13x] = 649$$

Buradan da

$$A = [x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] \leq 49 + 149 + 249 + 349 + 549 + 649 = 1994$$

Yani A, verilen değerleri arasında sadece 1994 değerini alabilir. Örnek durum olarak da 49.99 gibi 50'ye çok yakın sayılar verilebilir.

Çözüm 2:

a tam sayı ve $0 \le y < 1$ olmak üzere; $x = a + y$ olsun.

$$\begin{aligned}
A &= [x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] \\
&= [a+y] + [3a+3y] + [5a+5y] + [7a+7y] + [11a+11y] + [13a+13y] \\
&= 40a + [y] + [3y] + [5y] + [7y] + [11y] + [13y] \\
&\le 40a + 0 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 \\
&= 40a + 34
\end{aligned}$$

Bu durumda, A toplamı 40 ile bölündüğünde 34 ten büyük kalan alamaz. $40 \times 49 + 34 = 1994$ olduğu için denklemlerden sadece biri sağlayabilir.

$a = 49$ ve $1 - \dfrac{1}{13} \le y < 1$ sayıları için $A = 40a + 34 = 1994$ eşitliği sağlanır.

$\boxed{34}$ Her a, b, c, d için, $(a \mid b,\ b \mid c$ ve $c \mid d) \implies \{a, b, c, d\} \not\subset T$ koşulunu sağlayan ve pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her T kümesi, hiçbiri bir diğerini bölmeyen en az 6 tam sayı içeriyorsa n tam sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

a) 18 **b)** 15 **c)** 17 **d)** 16 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

15 elemanlı $T = \{2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 5, 5^2, 5^3, 7, 7^2, 7^3, 11, 11^2, 11^3\}$ kümesi, hiçbiri bir diğerini bölmeyen en fazla 5 tam sayı içerir.

Çünkü $T_k = \{k, k^2, k^3\}$ olmak üzere S_2, S_3, S_5, S_7, S_{11} kümelerinin her birinden en fazla bir eleman alınabilir.

16 elemanlı $T = \{2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 5, 5^2, 5^3, 7, 7^2, 7^3, 11, 11^2, 11^3, 13\}$ kümesinde ise hiçbiri bir diğerini bölmeyen 6 eleman bulunabiliyor.

$(\mathbf{Z}^+, |)$ kısmi sıralı bir kümedir. Kısmi sıralı kümelerdeki zincir ve anti-zincir kavramlarını kullanacağız.

Soru bize en fazla 3 uzunluklu bir zincir olduğunu, 6 uzunluklu bir anti-zincirin var olması için kümenin en az kaç elemanlı olması gerektiğini soruyor.

Dilworth veya Mirsky Teoremlerinin bir sonucu olarak $rs + 1$ elemanlı kümede $r + 1$ uzunlukta bir zincir ya da $s + 1$ uzunlukta bir anti-zincir bulunur. $16 = 3 \cdot 5 + 1$ olduğu için 16 elemanlı bir kısmi sıralı küme içerisinde $3+1 = 4$ elemanlı bir zincir ya da $5+1 = 6$ elemanlı bir anti-zincir vardır. Tanım gereği 4 elemanlı zincir olmadığı için 6 elemanlı bir anti-zincir vardır.

Kaynaklar:

Partially Ordered Sets

Bağıntılar

$\boxed{35}$ Katsayıları tam sayılar olan ve 5 farklı tam sayıda 8 değerini alan bir polinomun en çok kaç tam sayı kökü olabilir?

a) 0

b) 8

c) 5

d) Bu koşulları sağlayan polinom yoktur.

e) Bu koşulları sağlayan polinomların tam sayı köklerinin sayıları üstten sınırlı değildir.

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Bu şartı sağlayan bir polinom $P(x)$ olsun. Farklı a, b, c, d, e değerlerinde $P(x) = 8$ olsun. O halde

$$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) + 8$$

olacak şekilde bir tam sayı katsayılı Q polinomu vardır. Basitçe $Q \equiv 1$ alarak böyle bir P polinomu olduğunu görebiliriz.

t tam sayısı P'nin bir kökü olsun. $t \neq a, b, c, d, e$ olduğu barizdir ve

$$Q(t)(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)(t-e) = -8$$

-8'i en az 5 farklı tamsayının çarpımı olarak yazmalıyız. -8'in tüm bölenleri $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$ olduğundan bunlardan 3 tanesini veya daha azını çıkartarak kalanların çarpımını -8 yapmalıyız. Bu çıkartılan bölenler x, y, z olsun. Dolayısıyla

$$-8xyz = (-8)\cdot(-4)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 8 \implies xyz = -512$$

ancak xyz'nin alabileceği en küçük değer $(-8)\cdot 8\cdot 4 = -256$'dır. Yani -512'i elde edemeyiz. Bu polinomun tam sayı kökü olamaz.

$\boxed{36}$ $a, b, c, r, s, t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomlarından kaç tanesi, $f(x) \equiv (x+r)(x^2+sx+t) \pmod 5$ şeklinde bir denkliği sağlamaz?

a) 30 **b)** 10 **c)** 20 **d)** 40 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f(x) \equiv (x+r)\left(x^2+sx+t\right)(\text{mod}5)$ şeklinde gösterilebilen polinomları saydığımızda r, s, t sayıları 5'er değişik değer alabildikleri için 5^3 seçenek çıkıyor, fakat bunlardan bazılarını birkaç kez saymış oluyoruz. r, u, v birbirinden farklı olacak şekilde $(x+r)(x+u)(x+v)$ biçiminde yazılabilen $\binom{5}{3}$ tane polinomu 3'er kez saymışız, 2'sini çıkarmamız gerekir. $u \equiv v \pmod 8$ olacak şekilde $\left[(x+u)(x+v)^2\right]$ biçiminde yazlabilen $5\cdot 4 = 20$ tane polinomu 2'şer kez $\left[(x+u)(x+v)^2\right]$ ve $(x+v)[(x+u)(x+v)]$ şeklinde yazmışız, birini çıkarmamız gerekir. Tüm polinomların sayısı 5^3 tür ve bunlardan $5^3 - 2\binom{5}{3} - 5\cdot 4$ tanesi $(x+r)\left(x^2+x+t\right)$ şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazılamayanların sayısı da

$$5^3 - \left[5^3 - 2\binom{5}{3} - 5\cdot 4\right] = 40$$

olacak.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 2.62, Sayfa 140.

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1998

$\boxed{1}$ Kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ olan bir ABC üçgeninde $3m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$ ve $3a = 2c$ ise, b nin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{3a}{2}$ **b)** $\dfrac{5a}{4}$ **c)** $a\sqrt{2}$ **d)** $a\sqrt{3}$ **e)** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

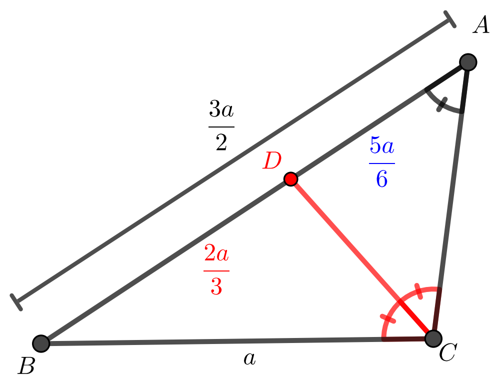
Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle C = 2 \cdot \angle A = 2\alpha$ olur. $\angle C$'nin açıortayı CD'yi çizelim. $\angle BCD = \angle DCA = \angle CAB = \alpha$ olacaktır. Bu durumda $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ $(A.A)$ elde edilir.

$$\frac{CB}{AB} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow CB^2 = BD \cdot AB \Rightarrow a^2 = BD \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} \Rightarrow AD = \frac{3a}{2} - \frac{2a}{3} = \frac{5a}{6}$$

olur.



Bu aşamadan sonra iki şekilde çözüme gidebiliriz:

(i) Açıortay teoreminden

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2a}{3}} = \frac{b}{\frac{5a}{6}} \Rightarrow b = \frac{5a}{4}$$

elde edilir.

(ii) $\angle DAC = \angle DCA$ olduğu için $AD = DC = \dfrac{5a}{6}$ ve benzerlikten

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD \cdot AB}{CB} = \frac{\frac{5a}{6} \cdot \frac{3a}{2}}{a} = \frac{5a}{4}$$

Çözüm 2:

Sinüs Teoremin'den $\dfrac{AB}{\sin 2\alpha} = \dfrac{BC}{\sin \alpha} = \dfrac{AC}{\sin 180° - 3\alpha}$ olur.

$$\frac{c}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$$

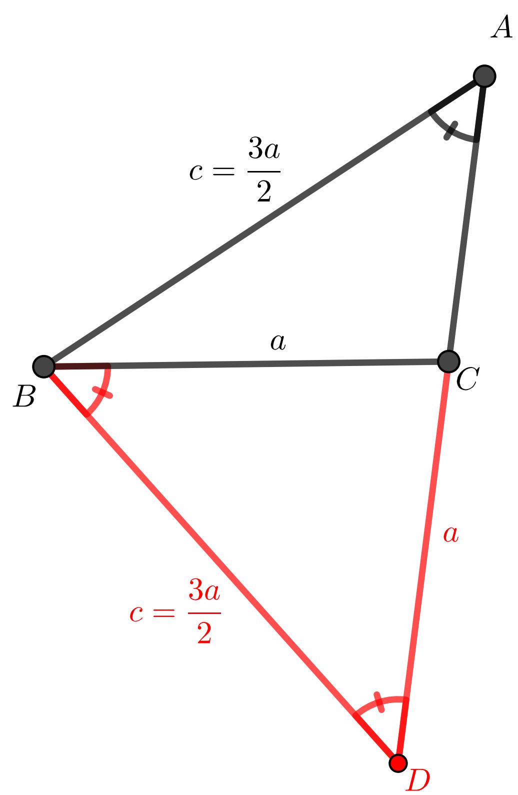
İlk denklemden b'yi çekersek, $b = a \cdot \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ elde ederiz.

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ olduğu için $b = a(3 - 4\sin^2\alpha)$ elde edilir.

$\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{7}{16}$ olacağı için $b = a\left(3 - 4\sin^2\alpha\right) = a\left(3 - 4\cdot\dfrac{7}{16}\right) = \dfrac{5a}{4}$ elde edilir.

Çözüm 3:

$[AC$ üzerinde ($\triangle ABC$'nin dışında) $BC = CD = a$ olacak şekilde D noktası alalım. $\angle BDC = \dfrac{\angle BCA}{2} = \angle CAB$ olduğu için $BD = AB = c$ dir.



Bu aşamadan sonra iki şekilde çözüme gidebiliriz:
(i) İkizkenar üçgende Stewart'ın özel halinden

$$AB^2 - AC\cdot CD = BC^2 \Rightarrow \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - b\cdot a = a^2 \Rightarrow b = \frac{\frac{9a^2}{4} - a^2}{a} = \frac{5a}{4}$$

olur.
(ii) $\triangle DCB \sim \triangle DBA$ dir.

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DA = \frac{9a}{4} \Rightarrow AC = \frac{9a}{4} - a = \frac{5a}{4}$$

Çözüm 4:

$\angle A = \alpha$ dersek $\angle C = 2\alpha$ olur.
B den AC ye inilen dikmenin ayağı H olsun.
$BH = BA\cdot\sin\alpha = BC\cdot\sin 2\alpha$ ve $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ olduğu için $\cos\alpha = \dfrac{BA}{2\cdot BC} = \dfrac{c}{2a} = \dfrac{3}{4}$ tür.

$\triangle ABH$ de, $\dfrac{AH}{BA} = \cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{3c}{4} = \dfrac{9a}{8}$ elde edilir.

$AB^2 - BC^2 = AH^2 - CH^2 \Rightarrow \dfrac{81a^2}{64} - CH^2 = c^2 - a^2 = \dfrac{9a^2}{4} - a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow CH^2 = \dfrac{a^2}{64} \Rightarrow CH = \dfrac{a}{8}$.

$AC = AH + CH = \dfrac{10a}{8} = \dfrac{5a}{4}$ olur.

Not 1: Aslında H nin $[AC]$ dışında olduğu durumda $AC = AH - CH = \dfrac{8a}{8} = a$ olur. $\angle B = \alpha$ olacağı için ABC üçgeni ikizkenar dik üçgen olur. Bu durumda kenarlar a, a, $3a/2$ olamaz.

Not 2: $\angle C$ nin dar açı olduğunun bir diğer ispatı da $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{1}{8} > 0$ olmasıdır. Zaten $\cos 2\alpha$ hesaplandığında $\cos 2\alpha = \dfrac{CH}{BC} \Rightarrow CH = \dfrac{a}{8}$ elde edileceği için $AC = \dfrac{10a}{8} = \dfrac{5a}{4}$ çıkar.

2 2^{1998} sayısının ondalık yazılımı ile 5^{1998} sayısının ondalık yazılımını art arda yazarsak, oluşan yeni sayı kaç basamaklı olur?

a) 1998 **b)** 1999 **c)** 2000 **d)** 3996 **e)** 3998

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$10^a < 2^{1998} < 10^{a+1}$ ise 2^{1998} sayısı $a+1$ basamaklıdır.

$10^b < 5^{1998} < 10^{b+1}$ ise 5^{1998} sayısı $b+1$ basamaklıdır.

Taraf tarafa çarparsak

$$10^{a+b} < 10^{1998} < 10^{a+b+2}$$

olacağından, $a+b < 1998 = a+b+1 < a+b+2$ elde edilir. Bu durumda yeni sayı $(a+1)+(b+1) = a+b+2$ basamaklı olacağından $a+b+1 = 1998 \Rightarrow a+b+2 = 1999$ elde edilir.

Çözüm 2:

$2^{1998} = 10^a$ olsun. 10^a sayısı da $\lfloor a \rfloor + 1$ dir.

Her iki tarafın log unu alırsak, $1998 \log 2 = a$ olacağından 2^{1998} sayısı $\lfloor a \rfloor + 1 = \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1$ basamaklı olacaktır.

Benzer şekilde $5^{1998} = 10^b$ sayısı da $\lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 1$ basamaklı olacaktır.

Bu iki sayının yan yana yazımı $\lfloor 1998\log 2\rfloor + 1 + \lfloor 1998 \log 5\rfloor + 1 = \lfloor 1998\log 2\rfloor + \lfloor 1998\log 5\rfloor + 2$ basamaklıdır.

$$1998\log 2 - 1 < \lfloor 1998\log 2\rfloor < 1998\log 2$$
$$1998\log 5 - 1 < \lfloor 1998\log 5\rfloor < 1998\log 5$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak,

$$1998(\log 2 + \log 5) - 2 < \lfloor 1998\log 2\rfloor + \lfloor 1998\log 5\rfloor < 1998(\log 2 + \log 5)$$

elde edilir. $\log 2 + \log 5 = \log 2 \cdot 5 = \log 10 = 1$ olacağından,

$$1998 - 2 = 1996 < \lfloor 1998\log 2\rfloor + \lfloor 1998\log 5\rfloor < 1998$$

olur. Bu durumda aranan sayı $\lfloor 1998\log 2\rfloor + \lfloor 1998\log 5\rfloor + 2 = 1997 + 2 = 1999$ basamaklı olacaktır.

Çözüm 3:

İlk sayı $A = \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1$ basamaklı, ikinci sayı $B = \lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 1$ basamaklı.

$\log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$ özdeşliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} A + B &= \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor 1998(1 - \log 2) \rfloor + 1 \\ &= \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor 1998 - 1998 \log 2) \rfloor + 1 \\ &= 2000 + \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor -1998 \log 2 \rfloor \end{aligned}$$

$\lfloor\ \rfloor$ fonksiyonu ile aşmayan en büyük tam sayıyı gösterdiğimiz için pozitif değer $0 \le n < 1$ ve M tam sayı olmak üzere; $\lfloor M + n \rfloor = M$ ise $\lfloor -(M + n) \rfloor = -M - 1$ dir.

Bu durumda, $A + B = 2000 - 1 = 1999$ olacaktır.

Çözüm 4:

Biraz test mantığı ile soruya yaklaşacağız.

$n = 0$ için $\overline{2^0 5^0} = 11 \Rightarrow 2$ basamaklı

$n = 1$ için $\overline{2^1 5^1} = 25 \Rightarrow 2$ basamaklı

$n = 2$ için $\overline{2^2 5^2} = 425 \Rightarrow 3$ basamaklı

$n = 3$ için $\overline{2^3 5^3} = 8125 \Rightarrow 4$ basamaklı

$n = 4$ için $\overline{2^4 5^4} = 16625 \Rightarrow 5$ basamaklı

$n = 5$ için $\overline{2^5 5^5} = 323125 \Rightarrow 6$ basamaklı

$n = 6$ için $\overline{2^6 5^6} = 6415625 \Rightarrow 7$ basamaklı

$n = 7$ için $\overline{2^7 5^7} = 12878125 \Rightarrow 8$ basamaklı

Bu şekilde giderse $n = 1998$ için $\overline{2^{1998} 5^{1998}}$ sayısı $n + 1 = 1999$ basamaklı olacaktır.

Bu çıkarımımız tamamen sezgiseldir. 1999 cevabı test tekniği açısından bir tahmin niteliği taşımaktadır. Olimpiyat sorularında bu tip çıkarımlar yaparken dikkatli olunmalıdır. Ters köşeye yatabiliriz.

3 6 elemanlı bir küme hiçbiri boş olmayan üç ayrık alt kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

a) 90 **b)** 105 **c)** 120 **d)** 180 **e)** 243

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Kümenin 6 elemanını 3 kutuya yerleştireceğiz.

Her eleman için 3 alternatif olduğu için 3^6 farklı yolla bu işlem yapılabilir.

Yalnız, yukarıdaki dağıtımda bazı kutular boş kalmış olabilir. İçerme-Dışarma İlkesine göre

(0,1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar) - (1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar) + (2 kutunun boş olduğu durumlar)

(0,1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar): 3^6

(1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar): $\binom{3}{1}2^6$ (Boş olacak bir kutu seçiliyor, diğerleri akışına bırakılıyor.)

(2 kutunun boş olduğu durumlar): $\binom{3}{2}1^6$ (Boş olacak iki kutu seçiliyor, diğerleri boş olmayan kutuya koyuluyor.)

Bu durumda $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540$ farklı yolla bu işlem yapılabilir. Yalnız, mesela tüm 6 eleman da 1., 2. ve 3. kutularda birer kez yer aldı. 540'ın içinde kutuların sıralınışı da var. Bu durumda $\dfrac{540}{3!} = 90$ farklı yolla, kutuların sıralanışı önemsenmeksizin elemanları 3 kutuya yerleştirebiliriz.

Çözüm 2:

Kümelerin eleman sayıları $1-1-4$, $1-2-3$ ve $2-2-2$ olabilir. $\dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{2!}+\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3}+\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=15+60+15=90$.

$\boxed{4}$ x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $2x^2+5y^2+10z^2-2xy-4yz-6zx+3$ ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 **b)** 3 **c)** -3 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bu tip sorularda amaç, ifadeyi tam kare çarpanlara ayırmaktır. Neden böyle olduğunu birazdan daha iyi anlayacaksınız.

$$(x^2-2xy+y^2)+(4y^2-4yz+z^2)+(x^2-6xz+9z^2)+3=(x-y)^2+(2y-z)^2+(x-3z)^2+3$$

$(x-y)^2\geq 0$, $(2y-z)^2\geq 0$ ve $(x-3z)^2\geq 0$ olduğu için $(x-y)^2+(2y-z)^2+(x-3z)^2+3\geq 3$ elde edilir. Yani cevabın ≥ 3 olduğunu biliyoruz. Peki 3 olabilir mi? Bunun için eşitsizliklerdeki eşitlik kısımlarını ortak çözmek gerekecek.

$$\begin{aligned} x-y &= 0\\ 2y-z &= 0\\ x-3z &= 0 \end{aligned}$$

Açık şekilde $x=y=z=0$ bir çözüm. Bu durumda $(x-y)^2+(2y-z)^2+(x-3z)^2+3=3$ elde edilir.

$\boxed{5}$ Köşegenlerinin kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $m(\widehat{B})=m(\widehat{D})$, $m(\widehat{BCD})=150^\circ$, $|BE|=x$, $|ED|=y$ ve $|AC|=z$ ise, y nin x ve z cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{z-x}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{z-2x}{3}$ **c)** $z+x\sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{z-2x}{2}$ **e)** $\dfrac{2z-3x}{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\angle B=\angle D$ ve dörgen kirişler dörtgeni olduğu için AC çaptır. O bu kirişler dörtgeninin çevrel merkezi olsun. $\angle BOD=2\cdot\angle BAD=2\cdot(180^\circ-150^\circ)=60^\circ$ olacağından $\triangle BOD$ bir eşkenar üçgendir. Bu durumda çemberin yarıçapı $OB=OD=BD=x+y$, çapı $z=2(x+y)=2x+2y\Rightarrow y=\dfrac{z-2x}{2}$ çıkar.

Çözüm 2:

$\triangle BCD$'de Sinüs teoreminden $\dfrac{BD}{\sin 150^\circ}=2R\Rightarrow\dfrac{x+y}{\frac{1}{2}}=2R\Rightarrow x+y=R$ elde edilir. AC çap olduğu için $z=2x+2y\Rightarrow y=\dfrac{z-2x}{2}$ elde edilir.

Çözüm 3:

AC'nin çap olduğu gerçeğini yakalayamadığımızı varsayarsak:

$\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ olsun.

$\triangle BCD$'de Sinüs teoreminden

$$\frac{BD}{\sin 150^\circ} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{x+y}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{2x+2y}$$

Aynı zamanda $\triangle ABC$ dik üçgeninde $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BC}{z}$ olduğu için, $z = 2x+2y \Rightarrow y = \dfrac{z-2x}{2}$ elde edilir.

$\boxed{6}$ $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin kaç p asal sayısı için $0 \le x \le p$ olmak üzere üç farklı tam sayı kökü yoktur?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

3. dereceden denklemlerin çözümünde genel bir yol olan son terimin çarpanlarından yararlanalım.

$2^3 - 5\cdot 2^2 - 22\cdot 2 + 56 = 8 - 20 - 44 + 56 = 0$ olacağı için $x = 2$ bir çözümdür. Polinom bölmesi yaparak diğer kökleri de bulabiliriz. Sonuçta $(x-2)(x-7)(x+4)$ elde edilir.

$$(x-2)(x-7)(x+4) \equiv 0 \pmod{p}$$

denkliğinin çözüm kümesi $\{2, 7, -4\}$ tür. Bu elemanlardan ikisi mod$p$ de birbirine denk ise, denkliğin üç farklı kökü yoktur. Aksi halde denkliğin üç farklı kökü olacaktır.

$$\begin{array}{rcrlrlcl} 2 & \equiv & 7 & \pmod{p} \Rightarrow & 0 \equiv 5 & \pmod{p} \Rightarrow p & = & 5 \\ 2 & \equiv & -4 & \pmod{p} \Rightarrow & 6 \equiv 0 & \pmod{p} \Rightarrow p & = & 2 \text{ veya } p = 3 \\ 7 & \equiv & -4 & \pmod{p} \Rightarrow & 11 \equiv 0 & \pmod{p} \Rightarrow p & = & 11 \end{array}$$

Bu durumda $p \in \{2, 3, 5, 11\}$ için denkliğin üçten az, farklı kökü vardır.

$\boxed{7}$ Alınan herhangi n küme arasında birbirini içermeyen en az 3 tane veya herhangi ikisinden biri diğerini içeren en az 3 tane küme bulunmasını garanti eden en küçük n tam sayısı nedir?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Soruda istenen $p \vee q$ ifadesinin tersi $p' \wedge q'$ dir. Dört küme arasından birbirini içermeyen en fazla 2 tane ve herhangi ikisinden biri diğerini içermeyecek en fazla 2 tane küme bulunan tek bir konfigürasyon vardır: $A \subset B$, $C \subset D$ (Kolaylık olması açısından $A \cap C = \{\}$ ve $B \cap D = \{\}$ kabul edebiliriz.). Görüldüğü gibi 4 küme olduğunda soruda verilen şartı sağlamayan bir konfigürasyon bulunabiliyor. Bu konfigürsayona bir E kümesi eklediğinizde bu küme A ya da C kümelerinden birinin alt kümesi ya da B ya da D kümelerden birini içeriyorsa herhangi ikisinden biri diğerini içeren 3 küme bulunmuş olacak, değilse A, C, E kümeleri birbirini içermeyen 3 küme olacak. Bu durumda alınan herhangi 5 küme arasından sorudaki şart kesinlikle sağlanır.

Çözüm 2:

Kümelerin kümesi S olsun.

$(S, \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Kısmi sıralı kümelerdeki zincir ve anti-zincir kavramlarını kullanacağız.

Soru bize 3 uzunluklu bir anti-zincirin veya 3 uzunluklu bir zincirin var olması için S nin en az kaç elemanlı olması gerektiğini soruyor.

Dilworth veya Mirsky Teoremlerinin bir sonucu olarak $rs+1$ elemanlı kümede $r+1$ uzunlukta bir zincir ya da $s+1$ uzunlukta bir anti-zincir bulunur. $5 = 2\cdot 2+1$ olduğu için 5 elemanlı bir kısmi sıralı küme içerisinde $2+1=3$ elemanlı bir zincir ya da $2+1=3$ elemanlı bir anti-zincir vardır. O halde aradığımız en küçük n değeri 5'tir.

Kaynaklar:

Partially Ordered Sets

Bağıntılar

$\boxed{8}$ (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+4a_n^2}}$ şeklinde tanımlanıyor. $a_k < 10^{-2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük k değeri nedir?

a) 2501 **b)** 251 **c)** 2499 **d)** 249 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+4a_n^2}}{a_n} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\
\frac{1+4a_n^2}{a_n^2} &= \frac{1}{a_{n+1}^2} \\
\frac{1}{a_n^2}+4 &= \frac{1}{a_{n+1}^2} \\
4 &= \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}
\end{aligned}
$$

Denklemin genel terimini bulmak için, son bulduğumuz eşitliği a_1'e kadar devam ettirelim.

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n-1}^2} \\
4 &= \frac{1}{a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_{n-2}^2} \\
&\vdots \\
4 &= \frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \\
4(n-1) &= \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2} \\
4(n-1)+1 &= \frac{1}{a_n^2} \\
a_n^2 &= \frac{1}{4n-3} \\
a_n &= \frac{1}{\sqrt{4n-3}}
\end{aligned}
$$

$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{4k-3}} < 10^{-2} \Rightarrow 100 < \sqrt{4k-3} \Rightarrow 10003 < 4k \Rightarrow 2500 + \frac{3}{4} < k$ olur. Yani verilen şartı sağlayan en küçük k değeri 2501 dir.

Çözüm 2:

Test mantığı ile hareket edeceğiz.

$a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $a_3 = \dfrac{1}{\sqrt{9}}$, $a_4 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}, \ldots$ şeklinde devam ediyor. Buradan genel terimi $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$ şeklinde bulduktan sonra, Çözüm 1'deki işlemleri yapacağız.

9 Birbirine dıştan teğet olan $[AB]$ ve $[BC]$ çaplı iki çemberin merkezleri, sırasıyla D ve E ile; A noktasından E merkezli çembere ve C noktasından D merkezli çembere (AC doğrusuna göre aynı tarafta kalacak şekilde) çizilen teğetlerin kesişim noktası F ile gösterilmek üzere, $|DB| = |BE| = \sqrt{2}$ ise, AFC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ **c)** $4\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** $2\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Çemberler eş olduğu için FB, $\triangle AFC$'de simetri eksenidir. CF, D merkezli çembere T'de dokunsun. $\triangle TDC$ dik üçgeninde $DT = \sqrt{2}$, $DC = 3\sqrt{2}$ olduğu için Pisagordan $TC = 4$ ve $\tan\angle TCD = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ elde edilir. $\triangle FBC$ dik üçgeninde $\tan\angle BCF = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ olacağı için $FB = 1$ ve $Alan(AFC) = \dfrac{1\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

10 p ve q tek sayıları asal sayılar dizisinin ardışık iki terimi olsun. $p+q$ sayısının farklı pozitif bölenlerinin sayısı en az kaç olabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Tek asal sayıların toplamı bir çift sayıdır. $k > 1$ olmak üzere; $p + q = 2k = 2^1k^1$ sayısının da pozitif bölen sayısı en az $2 \times 2 = 4$ olacaktır. Bu son söylediğimiz şey, kısmen yanlış. Neden? $m \geq 1$ olmak üzere; $k = 2$ olma durumunda, $2k = 4m$ olacağından bu ifadenin pozitif bölen sayısı $(2 + 1) = 3$ tür. Belki de bu şekilde iki asal sayı yoktur. 3 pozitif bölen olduğu için $m = 1$ yani $p + q = 4$ olması gerekir. Bu şekilde ardışık iki asal sayı yoktur. O zaman 4 pozitif bölen için araştırma yapalım. $3 + 5 = 8 = 2^3$ sayısı $(3 + 1) = 4$ pozitif bölene sahip. Gerçi soruyu çözerken düşünmediğimiz bir olasılıktan bulduk sonucu. 3'ten az olamayacağını gösterdik, 3 olamayacağını gösterdik. 4'e bir örnek bulduk. O zaman cevap 4'tür.

Aslında $p+q = 2k$'nın 4 böleni olması için ya $k = 4$ olacak, ya da k bir asal sayı olacak. $k = 4$ için $p = 3, q = 5$ asal sayıları bulunabilir.

k asal sayı ise, $p + q = k + k$ olacağı için k'nın p ile q arasında bir asal sayı, yani $p < k < q$ olması gerekir. Bu da soru da verilen p, q ardışık iki asal sayı ifadesine ters düşer. Yani, anlayacağınız, $p + q$ ifadesinin 4 pozitif böleninin olmasını sağlayanan tek (p, q) asal ikilisi $(3, 5)$'tir.

Çözüm 2:

$p + q \geq 8$ çift sayısının bölenlerinden bazıları kabaca $1, 2, \dfrac{p+q}{2}, p + q$ dir. 4'ten daha az böleni olması için $\dfrac{p+q}{2} = 2 \Rightarrow p + q = 4$ olması gerekir. Asal sayılar dizisinin en küçük iki tek elemanı 3 ve 5 olduğu için $p + q \geq 8$ olacağıdan pozitif bölenler en azından $1, 2, 4, 8$ olacaktır. Bu durumda 4 pozitif bölenli $p + q$ sayısı vardır; fakat 3 bölenli yoktur.

11 Bir kübün yüzlerine $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarını işaretleyerek bir zar yapmak istiyoruz. Ortak bir ayrıta sahip iki yüze komşu yüzler dersek, ardışık sayıların komşu yüzler üstünde yer alması koşuluyla, bu zarı kaç değişik biçimde yapabiliriz?

a) 10 **b)** 14 **c)** 18 **d)** 56 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

1 ve 2 yi yerleştirdikten sonra küpü açalım.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & \\ A & B & C \\ & D & \end{array}$$

$A = 3$ ve $B = 4$ ise (C, D) ikilisi $(5, 6)$ ya da $(6, 5)$ olabilir.

$A = 3$ ve $D = 4$ ise (B, C) ikilisi $(5, 6)$ ya da $(6, 5)$ olabilir.

Bu durumda $A = 3$ ise 4 farklı diziliş var. Benzer şekilde $C = 3$ için 4 farklı diziliş olabilir.

$B = 3$ ise $D = 4$ olamaz; çünkü (A, C) ikilisi komşu değil. Bu durumda $B = 3$ ve $A = 4$ ise $(C, D) = (6, 5)$ olmalı. $B = 3$ ve $C = 4$ için ise $(A, D) = (6, 5)$ olacak.

Yani toplamda $4 + 4 + 2 = 10$ farklı diziliş mümkün.

12 Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun çevreye oranının alabileceği tüm değerler gerçel sayılar ekseninde bir aralık oluşturur. Bu aralığın orta noktası nedir?

a) $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ **c)** $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$ **d)** $\sqrt{2}-1$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Hipotenüs c ve diğer kenarlar a, b olsun. Pisagordan

$$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2c^2 \geq c^2 + 2ab = (a+b)^2 \Rightarrow c\sqrt{2} \geq a + b$$

ve üçgen eşitsizliğinden

$$a + b > c$$

elde edilir. Eşitsizliklerin her iki tarafına c eklersek

$$c + c\sqrt{2} \geq a + b + c \Rightarrow \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

ve

$$a + b + c > 2c \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{c}{a+b+c}$$

elde edilir. $(\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$ aralığının orta noktası

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}}{2} = \frac{\dfrac{3+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$$

olur. Dikkat edilirse alt sınır üçgen ikiz kenar dik üçgen iken, üst sınır da üçgen dejenere iken yani açılarından biri $0°$ iken elde ediliyor.

13 Yüksekliklerinin kesişim noktası H olmak üzere, bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ ve A, H, C noktalarından geçen çemberin merkezi O ise, HOC açısının α cinsinden ölçüsü nedir?

a) $90° - \alpha$ **b)** $90° + \dfrac{\alpha}{2}$ **c)** $180° - \alpha$ **d)** $180° - \dfrac{\alpha}{2}$ **e)** $180° - 2\alpha$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$\angle HAC = 90° - \angle B = 90° - \alpha$, $\angle HOC = 2 \cdot \angle HAC = 2 \cdot (90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$.

14 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{30}$ denkliğinin $0 \le x < 30$ olacak şekilde kaç farklı tam sayı çözümü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğu için mod2, mod3, mod5 te denkliği inceleyeceğiz.

3 modda da $x \not\equiv 0$ olduğu aşikar.

mod2 için, $x \equiv 1 \pmod 2$.

Fermat'ın küçük teoreminden $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ olacağı için,

$$x^2 \cdot x^2 + 2x \cdot x^2 + 3x^2 - x + 1 \equiv 1 + 2x + 3 - x + 1 \equiv 2 + x \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 3$$

elde edilir.

Yine Fermat'ın küçük teoreminde $x^4 \equiv 1 \pmod 5$ olacağı için,

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 \equiv 2x^3 - 2x^2 - x + 2 \equiv 0 \pmod 5$$

denkliğini sağlayan değerleri araştıracağız. Sırasıyla 1, 2 ve $4 \equiv -1 \pmod 5$ için denkliğin sağlanmadığını görelim. $x \equiv 3 \pmod 5$ için $2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + 2 \equiv 4 + 2 - 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir ki, $x \equiv 3 \pmod 5$ denkliğin tek kökü olur. Son durumda

$$x \equiv 1 \pmod 2, x \equiv 1 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5$$

denkliklerinin ortak çözümü $x \equiv 13 \pmod{30}$ dur.

13 sayısını şöyle buluyoruz. $x + 2$ sayısı hem 3 ile bölümüyor, hem de 5 ile bölünüyor. Bu durumda $x = 13$ ya da $x = 28$ olacaktır. $x \equiv 1 \pmod 2$ olduğu için $x = 13$ tür.

Ama soruyu çözerken, 13 sayısını bulmamız şart değil. Çinlilerin Kalan Teoremine göre $2, 3, 5$ sayıları ikişerli olarak aralarında asal oldukları için mod$2 \cdot 3 \cdot 5$ yani mod30 da söz konusu denklik sisteminin bir çözümü vardır.

15 12 evli çift yuvarlak bir masanın etrafında, erkeklerin hepsi masanın bir tarafında yan yana, her kadın da eşinin tam karşısında olacak şekilde oturmaktadır. Masada oturanlar, her seferinde yan yana oturan bir kadınla bir erkeğin yer değiştirmesi suretiyle, tüm eşler yan yana gelinceye kadar yer değiştirir. Bunun için en az kaç yer değiştirme işlemi yapılmıştır?

a) 36 **b)** 55 **c)** 60 **d)** 66 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

E_1'i K_1 ile kavuşuncaya kadar yer değiştirelim.

$E_1 \leftrightarrow K_{12}, K_{11}, \ldots K_2$ şeklinde toplam 11 yer değiştirme gerekecek.

Şimdi de aynı şeyi E_2 için yapalım.

$E_2 \leftrightarrow K_{12}, K_{11}, \ldots K_3$ şeklinde toplam 10 yer değiştirme gerekir.

$$\vdots$$

$E_{10} \leftrightarrow K_{12}, K_{11}$, 2 yer değiştirme gerektirirken,

$E_{11} \leftrightarrow K_{12}$ ile 1 yer değiştirme ile eşine kavuşacaktır.

Tüm bunları toplarsak $1 + 2 + \cdots + 11 = \dfrac{11 \cdot 12}{2} = 66$ yer değiştirme elde ederiz. 66 yer değiştirme ile tüm eşleri yan yana oturttuk. Ama daha az sayıda yer değiştirme ile oturtabililir miyiz? Buna cevap vermemiz gerekiyor.

$|E_iK_i|$ ile eşlerin birbirinden uzaklığını gösterelim. Başlangıçta her çift için $|E_iK_i| = 12$. Son durumda bunun $|E_iK_i| = 1$ olmasını istiyoruz. Başlangıçta $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i| = 144$ iken son durumda $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i| = 12$ olmalı.

Her seferinde yer değiştirdiğimiz $E_x \leftrightarrow K_y$ ikilisi eşlerine en fazla 1 birim yaklaşıyorlar. Bu durumda seferinde $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i|$ toplamı en fazla 2 birim küçülebilir. Bu takdirde, toplam değerinin 144 ten 12 ye düşmesi için en az $\dfrac{144 - 12}{2} = 66$ adım gerekir. 66 adımda soruda istenen yer değiştirmeyi yapabildiğimize göre cevap 66 dır.

$\boxed{16}$ x, y, z sayıları

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z &= 15 \\ x + y + z^2 &= 27 \\ xy + yz + zx &= 7 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $3 \leq |x + y + z| \leq 4$
b) $5 \leq |x + y + z| \leq 6$
c) $7 \leq |x + y + z| \leq 8$
d) $9 \leq |x + y + z| \leq 10$
e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Üçüncü denklemi 2 ile genişletip denklemleri taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z + x + y + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx &= 15 + 27 + 2 \cdot 7 \\ (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) + (x + y + z) &= 56 \\ (x + y + z)^2 + (x + y + z) &= 56 \end{aligned}$$

elde edilir. $x + y + z = S$ dersek, $S^2 + S - 56 = 0$ eşitliğinin çözüm kümesi $\{7, -8\}$ olur. Bu durumda $|S| = |x + y + z| = 7$ veya $|S| = 8$ olacağı için $7 \leq |x + y + z| \leq 8$ eşitsizliği doğru olacaktır.

17 Bir ABC üçgeninde A açısının iç açıortayı ile $[BC]$ nın kesişim noktası D; $[CB$ ışını üzerinde $|DE| = |DB| + |BE|$ özelliğinde bir nokta E; A, D, E noktalarından geçen çemberin AB doğrusunu ikinci kez kestiği nokta F ile gösterilmek üzere, $|BE| = |AC| = 7$, $|AD| = 2\sqrt{7}$ ve $|AB| = 5$ ise, $|BF|$ nedir?

a) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** 3 **e)** $\sqrt{10}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$BD = 5k$ ise $DC = 7k$ dır. B noktasının kuvvetini alırsak

$$EB \cdot BC = AB \cdot BF \Rightarrow 7 \cdot 5k = 5 \cdot BF \Rightarrow BF = 7k$$

elde edilir. Açıortay teoreminden

$$AB \cdot AC - BD \cdot DC = AD^2 \Rightarrow 35 - 35k^2 = 28 \Rightarrow 7 = 35k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow BF = 7k = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

18 $p_1 < p_2 < \cdots < p_{24}$, $[3, 100]$ aralığındaki asal sayıları göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^{24} p_i^{99!} \equiv a \pmod{100}$$

denkliğini gerçekleyen en küçük $a \geq 0$ sayısı nedir?

a) 24 **b)** 25 **c)** 48 **d)** 50 **e)** 99

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Euler Teoreminden $(a, 100) = 1$ olmak üzere, $a^{\phi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$ elde edilir. $\phi(100) = 100 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 40$ olduğu için $a^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ olur. $40 | 99!$ olduğu için de $a^{99!} \equiv 1 \pmod{100}$ olacaktır. Bu durumda $p_2 = 5$ hariç diğer 23 asal sayı 100 ile aralarında asal olduğu için mod100 de 1 kalanını verirler. 5 i özel olarak inceleyeceğiz.

$i > 1$ tam sayısı için $5^i \equiv 25 \pmod{100}$ olacağından, $5^{99!} \equiv 25 \pmod{100}$ elde edilir.

Son durumda $25 + 23 \cdot 1 = 48$ aradığımız yanıt olacaktır.

19 Bir torbada 3 ü mavi 22 si siyah toplam 25 top vardır. Ahmet, 1 ve 25 arasında bir n tam sayısı seçer. Betül, torbadan birer birer ve geriye koymaksızın rastgele n tane top çeker. Çekilen n toptan tam olarak ikisi maviyse ve bunlardan ikincisi n inci sırada çekilmişse Ahmet, aksi halde ise, Betül oyunu kazanır. Oyunu kazanma olasılığını mümkün olduğu kadar yükseltebilmek için, Ahmet hangi n sayısını seçmelidir?

a) 2 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 23

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$P(n=2) = \dfrac{3\cdot 2}{25\cdot 24}$ olur. $n \geq 3$ için $\dfrac{3}{25}\cdot\dfrac{22}{24}\cdot\dfrac{21}{23}\cdots\dfrac{25-n}{27-n}\cdot\dfrac{2}{26-n}$ gibi bir olasılık elde edeceğiz. İlk mavi top $n-1$ yerden birine gelebileceği için

$$P = (n-1)\cdot\frac{3\cdot 2\cdot(25-n)}{25\cdot 24\cdot 23} = \frac{3\cdot 2}{25\cdot 24}\cdot\frac{(n-1)(25-n)}{23}$$

olur. $(n-1)(25-n)$ ifadesi en büyük değerini $n-1=25-n$ olduğu zaman yani $n=13$ te alır. Burada yaptığımız şey, toplamları sabit olan iki sayı en büyük değerini sayılar eşitken alır. Bunu görmenin diğer bir yolu da $AO \geq GO$ eşitsizliği:

$$\frac{(n-1)+(25-n)}{2} \geq \sqrt{(n-1)(25-n)} \Rightarrow 13 \geq \sqrt{(n-1)(25-n)} \Rightarrow 169 \geq (n-1)(25-n)$$

ve eşitlik $n-1=25-n$ iken sağlanır. Yani P yi maksimize en eden n değeri 13 tür.

$\boxed{20}$ $x^3 3^{1/x^3} + \dfrac{1}{x^3}3^{x^3} = 6$ denkleminin kaç farklı gerçel çözümü vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x<0$ için sol taraf negatif olacağı için denklemin negatif kökü yoktur.

$x \geq 0$ için, $AO \geq GO$ uygularsak

$$\frac{6}{2} = \frac{x^3 3^{1/x^3} + \frac{1}{x^3}3^{x^3}}{2} \geq \sqrt{x^3 3^{1/x^3}\cdot\frac{1}{x^3}3^{x^3}} = \sqrt{3^{x^3+\frac{1}{x^3}}} \geq \sqrt{3^2} = 3$$

elde edilir. Bu durumda iki kez $AO \geq GO$ kullandığımız için, hem $x^3 3^{1/x^3} = \dfrac{1}{x^3}3^{x^3}$ hem de $x^3 = \dfrac{1}{x^3}$ olmalı. İkincisi birincisini gerektireceğinden $x=\pm 1$ elde edilir. Negatif olamayacağı için eşitlik durumu sadece $x=1$ iken sağlanır.

$\boxed{21}$ ABC dar açılı bir üçgen, D ve E sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ üzerinde $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$ koşulunu sağlayan noktalar; AED üçgeninin çevresi 9 ve çevrel çemberinin yarıçapı $\frac{9}{5}$ olmak üzere, ABC üçgeninin çevresi 15 ise, $|BC|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 5 **b)** $\dfrac{24}{5}$ **c)** 6 **d)** 8 **e)** $\dfrac{48}{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$BCDE$ kirişler dörtgeni olduğu için

$$\angle ABC = \angle ADE \text{ ve } \angle ACB = \angle AED$$

olacaktır. Bu durumda $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ dir ve benzerlik oranı $\dfrac{9}{15}$ tir.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\angle A = \frac{4}{5}$$

Çevrel çemberlerin yarıçapları oranı da benzerlik oranına eşit olacağından, (ABC) nin yarıçapı için

$$\frac{\frac{9}{5}}{R} = \frac{9}{15} \Rightarrow R = 3$$

elde edilir. $\triangle ABC$ de Sinüs Teoreminden

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R \Rightarrow R = \frac{24}{5}$$

çıkar.

Çözüm 2:

ABC üçgeninin çevrel merkezi O, diklik merkezi H, BC nin orta noktası M olsun.

$AH = 2 \cdot OM$ özelliğini kullanarak çözüme gideceğiz.

$AEHD$ kirişler dörtgeni olduğu için AED çevrel çemberi H den geçer. AH bu çemberin bir çapıdır. O halde $AH = 2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{18}{5}$ tir. Bu durumda $OM = \frac{AH}{2} = \frac{9}{5}$ tir.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ olduğu için bu üçgenlerin çevrel yarıçaplarının oranları da benzerlik oranına eşit olacaktır. O halde $\frac{\frac{9}{5}}{OC} = \frac{9}{15} \Rightarrow OC = 3$.

OMC dik üçgeni bir $3-4-5$ üçgenidir. O halde $CM = \frac{12}{5}$ ve $BC = 2 \cdot CM = \frac{24}{5}$ elde edilir.

22 $(x_1x_2 \dots x_{1998})$, ondalık sistemde 1998 basamaklı bir sayının gösterimi olmak üzere, $(x_1x_2 \dots x_{1998}) = 7 \cdot 10^{1996}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1998})$ denklemini sağlayan kaç $(x_1x_2 \dots x_{1998})$ sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Açık bir şekilde

$$(x_1x_2 \dots x_{1998}) \equiv 7 \cdot 10^{1996}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1998}) \equiv 0 \pmod{10^{1996}}$$

olduğu görülüyor. Bu durumda

$$x_3 = x_4 = \cdots = x_{1998} = 0$$

olur ve soru

$$(x_1x_200 \dots 0) = 7 \cdot 10^{1996}(x_1 + x_2)$$

halini alır.

$$x_1 10^{1997} + x_2 10^{1996} = 7 \cdot 10^{1996}(x_1 + x_2) \Rightarrow 10x_1 + x^2 = 7x_1 + 7x_2 \Rightarrow 3x_1 = 6x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

Bu şartı sağlayan (x_1, x_2) ikililerinin kümesi $S = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$ ve $|S| = 4$ olacaktır.

23 $n \times n$ $(n \geq 7)$ satranç tahtasında oynanan iki kişilik bir oyunda Ahmet'in bir, Betül'ün ise iki taşı vardır. İlk olarak Ahmet taşını n^2 kareden birine yerleştirir. Sonra Betül, tahtanın kenarındaki karelerden boş olan ikisine taşlarını yerleştirir. Taşlar yerleştirildikten sonra Ahmet ile başlayarak sıra ile hamle yaparlar. Ortak bir kenara sahip iki kenara komşu kareler diyelim. Ahmet, hamle sırası kendine geldiğinde taşını bulunduğu kareden ya boş olan bir komşu kareye sürer ya da tahtanın kenarındaki karelerden birinde bulunuyorsa tahtanın dışına çıkarır. Betül ise, her iki taşını da bulundukları karelerden komşu karelere sürer. Betül'ün taşlarını sürdüğü karelerden birinde Ahmet'in taşı varsa Betül Ahmet'in taşını yer ve oyunu kazanır. Taşını, yenmeden tahtanın dışına çıkartabildiği takdirde ise, oyunu Ahmet kazanır. Ahmet'in oyunu kazanmasını garanti etmek için taşını ilk başta yerleştirebileceği karelerin sayısı nedir?

a) 0 **b)** n^2 **c)** $(n-2)^2$ **d)** $4(n-1)$ **e)** $2n-1$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Ahmet taşını tahtanın kenarlarına koyarsa, oyuna o başlayacağı için oyunu kesinlikle kazanır. $4(n-1)$

Ahmet taşını tahtanın kenarları dışında bir kareye koyarsa, Betül taşlarını Ahmet'in taşını çapraz olarak şıkıştıracak şekilde koyar.

24 $x^6 - 2x^4 + x^2 = A$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısını $n(A)$ ile gösterelim. A tüm gerçel değerleri aldığında $n(A)$ nın alacağı değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ **b)** $\{0,2,4,6\}$ **c)** $\{0,3,4,6\}$ **d)** $\{0,2,3,4,6\}$ **e)** $\{0,2,3,4\}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f(x) = g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ denklemlerinin grafiklerinin kesiştiği noktalardır.

Bu durumda $x^6 - 2x^4 + x^2 = x^2(x^4 - 2x^2 + 1) = x^2(x^2-1)^2 = A$ denkleminin çözüm kümesi $y = x^2(x^2-1)^2$ ile $y = A$ grafiklerinin kesiştikleri noktalar olacak.

$y = x^2(x^2-1)^2$ denkleminin kökleri $\{-1, 0, 1\}$ dir. Tüm bu kökler katlı köktür. Yani bu noktalara gelince fonksiyon artan-azalan durumunu değiştirir. Bu durumda

$y = A < 0$ için denklemin hiç kökü yoktur.

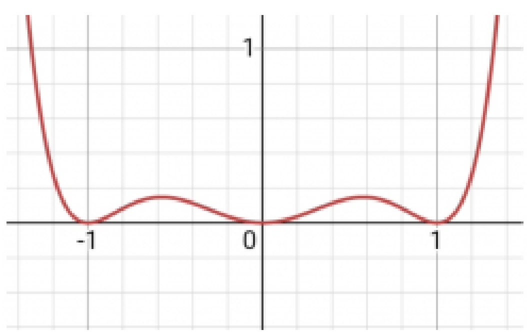
$y = A = 0$ için denklemin 3 kökü vardır.

Yeterince büyük A'lar için denklemin 2 kökü vardır.

$y = x^2(x^2-1)^2$ fonksiyonu $(-1,0)$ ile $(0,1)$ aralığında simetrik olduğu için eğrilerin tepe noktaları aynıdır. A bu tepe noktasının ordinat değerine eşit olduğunda denklemin 4 kökü olacaktır.

$(-1,0)$ aralığındaki tepe noktası ile $y = 0$ arasındaki değerler için denklemin 6 kökü olur.

Yani $n(A) = \{0,2,3,4,6\}$ dır.



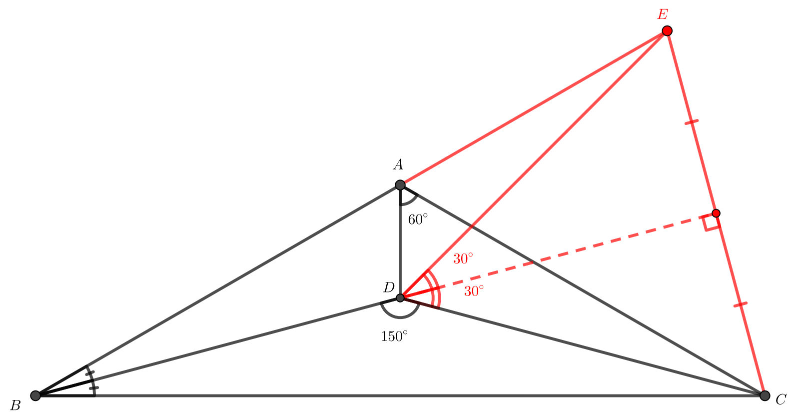
25 ABC bir üçgen; $|BC| > |BA|$ ve D bu üçgenin iç bölgesinde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ koşulunu sağlayan bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{BDC}) = 150°$ ve $m(\widehat{DAC}) = 60°$ ise $m(\widehat{BAD})$ kaç derecedir?

a) 45 **b)** 50 **c)** 60 **d)** 75 **e)** 80

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$[BA$ üzerinde $BE = BC$ olacak şekilde E noktası alalım.



İkizkenar üçgenin tepe noktasından çıkan açıortay simetri ekseni olduğundan $\angle BDE = \angle BDC = 150° \Rightarrow \angle EDC = 60°$ ve $DE = DC$ dolayısıyla da $\triangle DEC$ eşkenardır.

$\angle DAC = \angle DEC = 60°$ olduğu için $ADCE$ kirişler dörtgenidir. Bu durumda $\angle DCE = \angle DAB = 60°$ olur.

Çözüm 2:

$\triangle ABC$ üçgeninin iç merkezi için

$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \angle IAC$$

bağıntısı vardır. $\angle IAC = 60°$ ise $\angle BIC = 150°$ olacaktır. $I \in [BD$ olduğu için D noktası için soruda verilen her özellik I noktası için de sağlanır. Bu durumda biraz da test mantığı ile $I = D$ kabul edip, $\angle BAI = \angle IAC = 60°$ elde ederiz.

Çözüm 3:

$\angle ABD = \angle DBC = \alpha$ ve $\angle BAD = \beta$ olsun.

$\angle BCD = 30° - \alpha$ ve $\angle ACD = 90° - \alpha - \beta$ olacaktır.

$\triangle ABC$ de, D noktası için Ceva Teoreminin Trigonometrik Halini uygularsak:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 60°} \cdot \frac{\sin(90° - \alpha - \beta)}{\sin(30° - \alpha)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

Biraz düzenlemeyle $\sin\beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos 30° \cdot \sin(30° - \alpha)$ elde ederiz. Trigonometrik ters dönüşümlerle $\sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha = \sin(60° - \alpha) - \sin\alpha \Rightarrow \sin(\alpha + 2\beta) = \sin(60° - \alpha)$ olur. Bu durumda $\alpha + 2\beta = 60° - \alpha$ ya da $\alpha + 2\beta = 180° - (60° - \alpha) = 120° + \alpha$ olur.

İlkinden $\beta = 30° - \alpha$, ikincisinden $\beta = 60°$ elde edilir. $\beta = 30° - \alpha$ olduğunda $AB = BC$ olacağı, bu da sorudaki koşul ile çelişeceği için $\beta = 60°$ tek çözümdür.

26 $\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1997+\sqrt{x+1997+\cdots+\sqrt{x+1+\sqrt{x+1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}}} = y$ denklemini sağlayan kaç (x,y) sıralı tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 1998 **d)** 3996 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

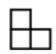
Yanıt: $\boxed{A}$

İki tarafın karesini alıp, kök içerisinde olmayan ifadeleri sağa geçirelim. Sonra bu kare alma işini

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = A \in \mathbb{Z}$$

elde edene kadar devam ettirelim. Bu işlemi bir adım daha ilerletirsek $\sqrt{x} = A^2 - x \in \mathbb{Z}$ elde ederiz. Bu da x'in tam kare olmasını gerektirir.

$T \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $x = T^2$ dersek, $x + \sqrt{x} = A \Rightarrow T^2 + T = A^2$ olur. $T^2 < A^2 < (T+1)^2 = T^2 + 2T + 1$ ardışık iki tam kare arasında bir başka tam kare olamayacağı için bu şekilde bir $x = T^2$ tam sayısı yoktur.

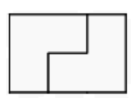
27 $\square$ birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda  ve en çok bir tane $\square$ kullanarak aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $n \times n$ lik bir satranç tahtası kaplanamaz?

a) 96 **b)** 97 **c)** 98 **d)** 99 **e)** 100

Çözüm:

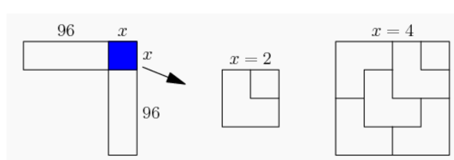
Yanıt: $\boxed{\text{Soru hatalıdır}}$

2 tane L şekliyle 2×3 bölge kaplanabilir.



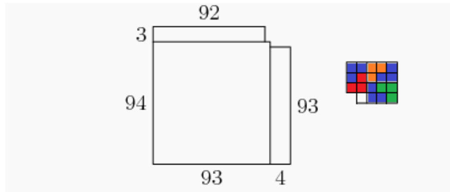
Bu durumda $2m \times 3k$ şeklinde alanlar sadece L şekilleriyle kaplanabilir. Bu yolla $6k \times 6k$ şeklinde tahtalar sadece L şekilleriyle kaplanabilir. Bu durumda 96×96 seçeneği eleniyor.

$n = 96 + 2$ ve $n = 96 + 4$ formundaki tahtalar bir tane 96×96, iki tane $96 \times (n - 96)$ şeklinde L ler ile kaplanabilir hale getirilebilir.

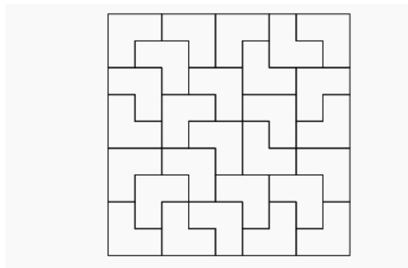


Arta kalan $(n-96) \times (n-96)$ alanlar yukarıda gösterildiği gibi bir adet $\square$ kullanılarak kaplanabilir. Bu durumda 98×98 ve 100×100 tahtaları da kaplanmış oldu.

97×97 tahtasını 94×93, 3×92, 93×4 lük L lerle kaplanabilir alanlara aşağıdaki şekildeki gibi ayırırsak,



geriye kalan bir köşesindeki bir kare eksik 4×5 lik parça da yukarıdaki gibi L şekilleri ve bir adet $\square$ ile kaplanabilir.



9×9 luk bloklar yukarıdaki şekildeki gibi kaplanabileceği için 99×99 luk tahta da kaplanabilir.

O halde şıklarda verilen tüm tahtalar bahsedilen şekilde kaplanabilir.

Not 1:

Resmi cevap anahtarında bu sorunun cevabı $\boxed{D)\ 99}$ olarak verilmiş.

Kaynak:

AoPS

Not 2:

Bu sorunun hatalı olduğuna dair 2002 yılı Liselerarası Proje Yarışmasında üçüncülük ödülü almış bir çalışmaya Matematik Dünyası Temmuz 2002 (Syf. 19-22) sayısından ulaşabilirsiniz.

28 $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısı nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4+2\cdot 2\cdot \sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = \sqrt{x-4}+2$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\cdot 1\cdot \sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$$

İkinci ifadeyi ilkinden çıkarısak

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-4} - \sqrt{x-1}+1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x-4} = \sqrt{x-1}$$

elde edilir. Bu eşitliğin ise çözümü yoktur.

29 $ABCD$ bir dışbükey dörtgen, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$, CD doğrusuna C noktasında teğet olan ve A, B noktalarıdan geçen çember ile $[AD]$ nın kesişim noktası E olmak üzere, $|BC| = 20$ ve $|AD| = 16$ ise, $|CE|$ nedir?

a) 9 **b)** $6\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{5}$ **d)** $7\sqrt{2}$ **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$BC \perp CD$ ve CD (ABC) çemberine teğet olduğu için BC çaptır. Çemberin merkezi O olsun. O dan AE ye inilen dikmenin ayağı F olsun. $AF = FE$ olduğu için

$$OC = FD = 10 \Rightarrow AF = AD - FD = 16 - 10 = 6$$

elde edilir. $\triangle OAF$ dik üçgeni $6-8-10$ üçgeni olduğu için $OF = CD = 8$ ve $\triangle ECD$ dik üçgeninde

$$EC^2 = CD^2 + ED^2 \Rightarrow EC^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow EC = 4\sqrt{5}$$

olarak bulunur.

30 $m = (abab)$ ve $n = (cdcd)$ ondalık sistemde dört basamaklı sistemde dört basamaklı iki tam sayının gösterimi olsun. $m + n$ sayısının tam kare olmasını sağlayan (m, n) çiftleri için, $a \cdot b \cdot c \cdot d$ çarpımı en çok kaç olabilir?

a) 392 **b)** 420 **c)** 588 **d)** 600 **e)** 750

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$$\begin{aligned} m + n &= (1000a + 100b + 10a + b) + (1000c + 100d + 10c + d) \\ &= 1010a + 101b + 1010c + 101d \\ &= 101(10a + b + 10c + d) \\ &= 101(\overline{ab} + \overline{cd}) \\ 101(\overline{ab} + \overline{cd}) &= T^2 \Rightarrow (\overline{ab} + \overline{cd}) = 101k^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $20 \leq \overline{ab} + \overline{cd} \leq 198$ olacağı için de $k = 1$ ve $\overline{ab} + \overline{cd} = 101$ olur.

$$2 \leq b + d \leq 18 \Rightarrow 101 - 18 = 83 \leq 10(a + c) \leq 99 \Rightarrow 10(a + c) = 90 \Rightarrow a + c = 9 \Rightarrow b + d = 11$$

$a \cdot b \cdot c \cdot d$ ' yi maksimize etmek için a ile c, b ile de d de birbirine çok yakın olmalı. Bunun nedeni toplamları sabit olan $(a + c = 9)$ iki sayının çarpımı en büyük değerini sayılar eşit $(a = b)$ iken alır. Bu $AO \geq GO$ nun bir sonucudur. Bu durumda

$$\{a, c\} = \{4, 5\}, \{b, d\} = \{5, 6\} \Rightarrow \max\{a \cdot b \cdot c \cdot d\} = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 600$$

olur.

31 m sütun ve n satırı olan bir satranç tahtasında iki kişilik bir oyun oynanıyor. Her iki oyuncunun da birer taşı olup, başlangıçta birinci oyuncunun taşı tahtanın sol üst köşesindeki, ikinci oyuncununki ise, tahtanın sağ alt köşesindeki karedir. Ortak bir kenara sahip iki kare komşu sayılmak üzere, hamle sırası gelen oyuncu, taşını bulunduğu karenin komşularından birine sürer. Sürdüğü karede diğer oyuncunun taşı varsa, onu yiyerek oyun dışı bırakır. Oyunu, diğer oyuncunun taşını yiyen veya taşını, diğer oyuncunun taşının başlangıçta bulunduğu sıraya önce ulaştıran oyuncu kazanır. İlk hamleyi birinci oyuncu yaparsa, aşağıdaki (m, n) sıralı ikililerinden hangisi için ikinci oyuncunun oyunu kazanmasını garanti eden bir strateji vardır?

a) $(1998, 1997)$ **b)** $(1998, 1998)$ **c)** $(997, 1998)$ **d)** $(998, 1998)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Soruda "diğer oyuncunun taşının başlangıçta bulunduğu sıraya önce ulaştıran" gibi bir ifade var. Aslında "sıra" yerine "satır" denmesi gerekirdi. Sıra aynı zamanda sütunu da tanımlayabileceği için ilk oyuncu her zaman tahtanın kenarlarından birine ikinci oyuncudan önce varabilir. Cevap anahtarında D seçeneği doğru şık olarak verildiği için, soruda "sıra" ifadesinden maksadın "satır" olduğu sonucu çıkar.

$n \leq m$ olduğu durumlarda birinci oyuncu her zaman dikine hareket ederse oyunu kazanır.

$m = 997, n = 1998$ durumu için, tahtayı satranç tahtasında olduğu gibi damalı (siyah-beyaz) şekilde boyayalım. Sol üst köşe beyazsa, sağ alt köşe siyah olacaktır. İlk hamle sonunda birinci oyuncu siyah kareye geçecek, bu durumda ikinci oyuncu siyah karede olduğu için birinci oyuncunun taşını yiyemez. Bu durum sonraki hamleler için de geçerli olacak. $m = 997, n = 1998$ için ikinci oyuncunun birinci oyuncunun taşını yeme ihtimali yok. Birinci oyuncuda, ilk başlama avantajı da olduğu için oyunu her zaman kazanabilir.

$m = 998, n = 1998$ durumu için ise, sol üst köşe beyazsa, sağ alt köşe de beyaz olacak. Bu durumda, birinci oyuncu her zaman farklı renkteki kareye hareket etmek zorunda olduğu için ikinci oyuncuyu hiçbir zaman yiyemeyecek. Bu durumda yeme avantajı, ikinci oyuncuda oluyor. Bakalım, ikinci oyuncu bu avantajını nasıl fırsata dönüştürecek.

İkinci oyuncu ilk olarak birinci oyuncuyla aynı sütunda yer alana kadar yatay hareket yapacak. Bu durumda, bu kadar yatay hareketle oyunu kazanmak için rakibinin taşını yemesi gerekecek. Bu aşamadan sonra, rakibiyle arasındaki dikey farkı yavaş yavaş kapatmaya başlayacak. Rakibi bu durumdan kurtulmak için yatay hareketler yapacak. Normalde yatay hareketlerin takibi gerekir; ama birinci oyuncu bir sağa bir sola giderek oyunu kilitleyebileceği için, sütun takibi için daha farklı bir strateji gerekir. İkinci oyuncu birinci oyuncu ile sütunu eşitledikten sonra, birinci oyuncunun yatay hareketine ilk başta dikey hareketle tepki verecek. Birinci oyuncu bir önceki adımda yaptığı yatay hareketin tersini yapmaya çalışırsa, birinci oyuncu zaten o sütunda olduğu için bir tane daha dikey hareketle birinci oyuncuya daha da yaklaşacak. Birinci oyuncu bir önceki hamlesiyle aynı yönde yatay hareketi tekrarlarsa, bu sefer ikinci oyuncu onu sütunca takibe alacak. Birinci oyuncu illa ki ters yönde yatay hareket yapacak çünkü en kötü ihtimalle tahtanın kenarına gelecek. Bu ana kadar, ikinci oyuncu bir karelik takip mesafesini korumuş olacak. İkinci oyuncu, aralardaki dikey harekete dikey hareketle cevap verirken sütunca takip mesafesi korunurken satırca takip mesafesi azalacak. Belirli bir andan sonra, birinci oyuncu ile ikinci oyuncu aynı 2×2 karenin içerisinde yer alacak ve ikinci oyuncu birinci oyuncuyu yiyecek.

$\boxed{32}$ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + 1 - \dfrac{1}{xy}$ koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise, $f(3)$ değeri nedir?

a) $2/3$
b) $4/3$
c) 1
d) Verilenlerden tek bir $f(3)$ değeri belirlenemez.
e) Verilen koşulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$$\begin{aligned} x = y = 1 \quad &\Rightarrow \quad f(1) + f(1) = f(1)^2 + 1 - \frac{1}{1 \cdot 1} \\ &\Rightarrow \quad 2f(1) - f(1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad f(1)(2 - f(1)) = 0 \end{aligned}$$

olduğu için $f(1) = 0$ ya da $f(1) = 2$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
x=2, y=1 \quad &\Rightarrow \quad f(2)+f(1)=f(2)f(1)+1-\frac{1}{2\cdot 1}\\
&\Rightarrow \quad f(2)-f(2)f(1)=\frac{1}{2}-f(1)\\
&\Rightarrow \quad f(2)(1-f(1))=\frac{1}{2}-f(1)\\
&\Rightarrow \quad f(2)=\frac{\frac{1}{2}-f(1)}{1-f(1)}
\end{aligned}$$

olduğu için $f(1)=0$ ise $f(2)=\frac{1}{2}$ ya da $f(1)=2$ ise $f(2)=\frac{3}{2}$ elde edilir. Soruda $f(2)<1$ olarak verildiği için $f(1)=0$ dır.

$$\begin{aligned}
y=1 \quad &\Rightarrow \quad f(x)+f(1)=f(x)f(1)+1-\frac{1}{x\cdot 1}\\
&\Rightarrow \quad f(x)=1-\frac{1}{x}\\
&\Rightarrow \quad f(3)=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Çözümün sıhhati açısından $f(x)=1-\frac{1}{x}$ fonksiyonunun soruda verilenleri sağladığından emin olalım:

$$\begin{aligned}
f(x)=1-\frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad f(2)=\frac{1}{2}\\
f(x)+f(y)-f(x)f(y) \quad &= \quad (1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{y})-(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y})\\
&= \quad 2-1-\frac{1}{x}-1-\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\\
&= \quad 1-\frac{1}{xy}
\end{aligned}$$

33 $[BC]$ çaplı bir çemberin bu çapına dik olan bir kirişi $[AD]$, AC ve CD yaylarının orta noktaları sırasıyla E ve F, $AD\cap BE=\{G\}$, $AF\cap BC=\{H\}$ olmak üzere, $m(AC)=\alpha$ ise, BHG açısının α cinsinden ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ **b)** $60^\circ-\frac{\alpha}{3}$ **c)** $\alpha-30^\circ$ **d)** $15^\circ+\frac{\alpha}{2}$ **e)** $\frac{180^\circ-2\alpha}{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$AD\cap BC=\{I\}$, $AF\cap BE=\{J\}$ ve $AB\cap GH=\{K\}$ olsun.

$$\begin{aligned}
AE=EC \quad &= \quad CF=FD\\
\angle BID \quad &= \quad \frac{\angle AC+\angle BD}{2}=90^\circ\\
\angle BJF \quad &= \quad \frac{\angle AE+\angle BF}{2}\\
&= \quad \frac{\angle AC-\angle EC+\angle BF}{2}\\
&= \quad \frac{\angle AC-\angle FD+\angle BF}{2}\\
&= \quad \frac{\angle AC+\angle BD}{2}=90^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\triangle ABH$ da, AI ve BJ yükseklik olduğu için G diklik merkezi ve HK da yükseklik olur. Bu durumda

$$\angle ABH = \frac{\angle AC}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABH + \angle BHG = 90^\circ \Rightarrow \angle BHG = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

olur.

34 a, b, c, d rasyonel sayılar ve $a > 0$ olmak üzere, $an^3 + bn^2 + cn + d$ sayısı her $n \geq 0$ tam sayısı için bir tam sayı oluyorsa, a nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** Böyle bir en küçük değer yoktur. **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$n = 0$ için, d'nin tam sayı olması gerekir.

$n = 1$ için, $a + b + c + d$ bir tam sayıdır

$n = 2$ için, $8a + 4b + 2c + d$ tam sayıdır.

$n = 3$ için, $27a + 9b + 3c + d$ tam sayıdır.

Buna göre $(a + b + c + d) - d = a + b + c$ bir tam sayı,

$(8a + 4b + 2c + d) - 2(a + b + c) - d = 6a + 2b$ bir tam sayı,

$(27a + 9b + 3c + d) - 3(a + b + c) - d = 24a + 6b$ bir tam sayı,

$4(6a + 2b) - (24a + 2b) = 2b$ bir tam sayı,

$(6a + 2b) - 2b = 6a$ bir tam sayı çıkar.

Soruda $a > 0$ verildiği için $6a > 0 \Rightarrow 6a \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{6}$ elde edilir. $a = \frac{1}{6}$ değeri için $an^3 + bn^2 + cn + d$ ifadesini her zaman tam sayı yapan b, c, d sayıları var mı? Onu araştıracağız. Yani $a \geq \frac{1}{6}$ olduğunu gösterdik; ama henüz $a = \frac{1}{6}$ olabileceğini gösteremedik.

$(n-1)(n)(n+1) = n^3 - n$ sayısını ele alalım. Ardışık üç sayıdan en az biri 2 ile, tam olarak bir tanesi de 3 ile bölünür. Bu üçünün çarpımı da doğal olarak 6 ile bölünür. Bu durumda $\frac{n^3 - n}{6} = \frac{1}{6} \cdot n^3 + 0 \cdot n^2 + \frac{-1}{6} \cdot n + 0$ sayısı her $n \geq 0$ için tam sayıdır.

35 10 elemanlı bir kümenin, hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayacak şekilde en çok kaç altkümesi bulunur?

a) 126 **b)** 210 **c)** 252 **d)** 420 **e)** 1024

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Test mantığı ile hareket edeceğiz. Eksik çözüm yapıp, en azından soruyu belirli bir aşamaya getireceğiz.

$$\binom{10}{0} = \binom{10}{10} < \binom{10}{1} = \binom{10}{9} < \binom{10}{2} = \binom{10}{8} < \binom{10}{3} = \binom{10}{7} < \binom{10}{4} = \binom{10}{6} < \binom{10}{5} = 252$$

Görüldüğü gibi k-elemanlı altkümelerin sayısı en büyük değerini $k = 5$ olduğunda alıyor. k-elemanlı altkümelerden hiçbiri bir diğerini içermez, içerseydi altkümelerin ikisi de k elemanlı olduğu için altkümeler aynı olurdu.

Ya bazısı 3-elemanlı, bazısı 4-elemanlı, bazısı 5-elemanlı, bazısı da 6-elemanlı altkümelerin birleşimden elde edilen altküme kümesi daha çok elemanlı ise? Buna karar vermek test içinde o kadar kolay değil. En azından, bu çözüm için bu iddianın doğru olmadığını ispatlamayacağız. Önsezilerimizle, C şıkkını işaretleyeceğiz.

Çözüm 2:

Çözüm 1'in aksine burada matematiksel bir çözüm yapalım. Açıkçası söz konusu problem bir Kombinatorik konusu olan Sperner Teoremi'ni doğrudan soruyor. Biraz da bu teoremin ispatını bilerek bir çözüm yapacağız. Böyle bir çözümün bir test süresinde düşünülüp yapılmasını çok mümkün görmüyoruz. Yine de;

S ile birbirinin altkümesi olmayan kümeleri içeren bir kümeyi gösterelim.

En basit mantığıyla, $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{10\}\}$ bu şekilde bir küme olacak. S_i ile S kümesinin i elemanlı kümelerden oluşan elemanları içeren kümeyi gösterelim. Buna göre yukarıda verdiğimiz basit örnek için $|S_5| = 0$ iken $|S_1| = 10$ dur.

$S = \{x : |x| = 5 \wedge x \subset \{1, 2, \dots, 10\}\}$ şeklinde bir S kümesi alalım. $|S| = \binom{10}{5} = 252$ ve S'deki elemanlardan hiçbiri bir diğerinin altkümesi değil. Bu durumda örneğin $|S_0| = |S_3| = |S_9| = 0$ iken $|S_5| = 252$ dir.

Bu tanımlamaları yaptıktan sonra, asıl sorunun çözümüne gelelim.

S içerisinden k elemanlı bir eleman alıp (unutmayalım, S nin elemanları birer kümeydi!), Bu elemanları $k!$ şekilde sıralayalım. Sonra da $\{1, 2, \dots, 10\}$ kümesinin kullanmadığımız $10 - k$ elamanını $(10 - k)!$ şekilde sıralayalım. k elemanlı elemanların kümesi S_k olacağından toplamda $|S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)!$ şekilde $(1, 2, \dots 10)$ sayılarının bir permütasyonunu elde etmiş olduk.

Son yaptığımızı her $0 \le k \le 10$ sayısı için yaparsak toplamda

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)!$$

permütasyon elde ederiz. Toplamda elde ettiğimiz bu permüstasyonlar arasında aynı permütasyonlar var mı? Yoksa bu permütasyon sayısı

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)! \le 10!$$

olmalı; çünkü 10 elemanlı bir kümenin 10! permütasyonu vardır. Toplamda elde ettiğimiz permütasyonlar arasında aynı olanlar varsa, o zaman dükkanı kapatma vakti gelmiş. Çünkü yapacak bir şeyimiz kalmadı demektir. Dua edelim, böyle bir şey olmasın.

S nin herhangi iki elemanını ele alalım. Bunlardan biri x elemanlı X, diğeri y elemanlı Y olsun; genellemeyi bozmadan $x \le y$ kabul edelim. X i kullanarak yukarıda anlatıldığı gibi 10 elemanlı bir permütasyon üretelim. Sonra da Y yi kullaranak bir permütasyon üretelim. Bu iki permütasyonun ilk x basamağına bakalım. $X \not\subset Y$ olduğu için, bu basamaklar aynı olamaz. Bu durumda üretilen tüm permütasyonlar farklı, bunların toplam sayısı da 10! den küçük ya da 10! e eşittir. Biraz düzenleme yaparsak:

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)! \le 10! \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\dfrac{10!}{k! \cdot (10 - k)!}} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}} \le 1$$

elde ederiz. Şimdi de

$$\binom{10}{k} \le \binom{10}{5} \Rightarrow \frac{|S_k|}{\binom{10}{5}} \le \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}}$$

özdeşliğini kullanarak

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{5}} \le \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}} \le 1$$

ve

$$\frac{1}{\binom{10}{5}} \cdot \sum_{k=0}^{10} |S_k| \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} |S_k| = |S| \leq \binom{10}{5}$$

elde ederiz. Son eşitsizlik bize hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayan kümelerin toplam sayısının en fazla $\binom{10}{5}$ olacağını söylüyor. Anlaşılır kılmak için, biraz uzattık; yoksa internetteki kaynaklarda sadece yukarıdaki cebirsel ifadeler verilerek ispat yapılıyor.

Çözüm 3:

İlk çözümdeki, daha doğrusu eksik çözümdeki, eksik parçayı tamamlayalım.

En büyük dağılımlardan biri S olsun. Bu altkümelerden en fazla eleman içeren S_a kümesinin eleman sayısı a, en az eleman içeren S_b kümesinin eleman sayısı b olsun.

$a \neq b$ olduğunu varsayalım.

b elemanlı S_b altkümesine $a-b$ sayıda eleman ekleyerek a elemanlı X_{a_i} kümelerini elde edelim. $S_b \not\subset S_a$ ve $S_b \subset X_{a_i}$ olduğu için $X_{a_i} \not\subset S_a$ olacaktır. S_b yi dağılımdan çıkarıp X_{a_i} kümelerini dağılıma ekleyelim. Bu durumda yeni dağılımın eleman sayısı S den fazla olacaktır. Bu da S nin en fazla altkümeye sahip olduğu varsayımı ile çelişir. O halde $a = b$, yani S nin tüm elemanları aynı sayıda elemana sahip altkümelerdir.

k-elemanlı altkümelerin sayısı en büyük değerini $k = 5$ iken alacağı için aradığımız yanıt, $\binom{10}{5} = 252$ dir.

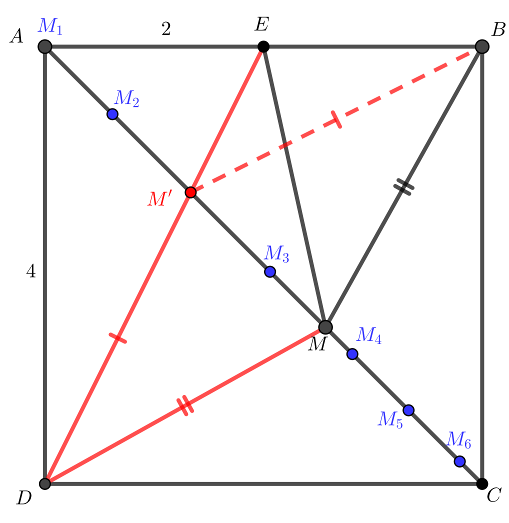
36 Kenar uzunluğu 4 olan bir $ABCD$ karesinde E, $[AB]$ kenarının orta noktasıdır. M noktası $[AC]$ üzerinde olmak üzere, $|EM| + |MB|$ toplamını tam sayı yapan kaç farklı M noktası vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

B nin AC ye göre simetriği D'dir. Bu durumda $DM = MB$ ve $EM + MB = DM + ME$ olur. $DM + ME$ en küçük değerini D, M, E doğrusalken alır.



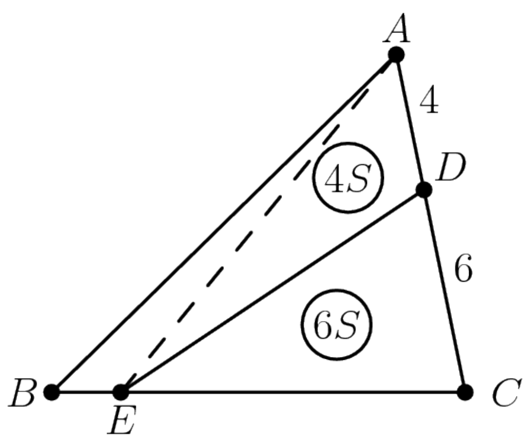
Bunu daha iyi görmek için D ile E yi birleştirelim. Üçgen eşitsizliğinden $DM + ME \geq DE = 2\sqrt{5}$ elde edilir. $DE \cap AC = \{M'\}$ ise $M = M'$ olduğunda $DM' + M'E = 2\sqrt{5}$ en küçük değerine ulaşır. $[M', A]$ aralığında $DM + ME$ artarken $M = A$ olduğunda $DA + AE = 6$ bu aralıkta en büyük değerine ulaşır. $[M', C]$ aralığında $DM + ME$ artarken $M = C$ olduğunda $DC + CE = 4 + 2\sqrt{5}$ bu aralıkta en büyük değerine ulaşır. M noktası A dan C ye giderken $ME + MB$ toplamı $6 \to 2\sqrt{5} \to 4 + 2\sqrt{5}$ şeklinde değerler alır. Bu değerlerden tam sayı olanlar $6, 5, 5, 6, 7, 8$ olacağından toplamda 6 farklı M noktası için $EM + MB$ tam sayı değer alır.

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1999

1 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 14$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ ve D, $[AC]$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|AD| = 4$ tür. E, $[BC]$ üstünde bir nokta ve $Alan(ABC) = 2 \cdot Alan(CDE)$ ise, $Alan(ABE)$ kaçtır?

a) $4\sqrt{6}$ **b)** $6\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{6}$ **d)** $4\sqrt{2}$ **e)** $4\sqrt{5}$

Çözüm:



AE yi çizelim.

$$[EDC] = 6S \Rightarrow [EDA] = 4S \Rightarrow [ABE] = 2S \Rightarrow [ABC] = 12S$$

$\triangle ABC$ üçgeninin kenarları belli olduğu için üçgenin alanı $[ABC]$ bulunabilir. $\triangle ABC$ de Heron formülü (u Alan Formülü) uygularsak:

$$\begin{aligned}
[ABC] &= \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}, u = \frac{14+10+12}{2} = 18 \\
[ABC] &= \sqrt{18(18-14)(18-10)(18-12)} = 24\sqrt{6} \\
[ABE] &= \frac{[ABC]}{6} = 4\sqrt{6}
\end{aligned}$$

2 $xy = 4(y^2 + x)$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 14 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
x(y-4) &= 4y^2 \\
x &= \frac{4y^2}{y-4} \\
&= \frac{4(y^2-16)+64}{y-4} \\
&= 4(y+4) + \frac{64}{y-4}
\end{aligned}$$

x in tam sayı olması için $(y-4)|64$ gerekir. 64 ün pozitif bölenleri sayısı $d(64=2^6)=7$, tüm bölenleri sayısı da $7 \cdot 2 = 14$ tür. Bu durumda her y değeri için otomatik olarak x değeri belirleneceği için (x,y) ikililerinin sayısı 14 tür.

Çözüm 2:

$x(y-4) = 4y^2$ haline getirdikten sonra $z = y-4$ değişikliği yapalım.

$xz = 4(z+4)^2 = 4z^2 + 32z + 64 \Longrightarrow x = 4z + 32 + \dfrac{64}{z}$ elde edilir.

$\dfrac{64}{z}$ ifadesini tam sayı yapan 14 farklı z tam sayısı vardır.

$\boxed{3}$ En fazla $3, 5, 7$ ve 8 top alabilen dört kutuya birbirinin aynı olan 19 top kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

a) 34 **b)** 35 **c)** 36 **d)** 40 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} 3+5+7+8 &= 23 \\ 23-19 &= 4 \end{aligned}$$

Bu sayılar da neyin nesi? Toplamda kutuların kapasitesi 23, yerleştirilecek topların sayısı 19. Kutuların dolu olduğunu varsayalım, bu durumda 4 kutudan 4 top çıkaracağız. Normalde bu işlem (tekrarlı kombinasyon)

$$\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

farklı şekilde yapılır. Kapasitesi 3 olan kutudan 4 top çıkaramadığımız için $(4,0,0,0)$ dağıtımını iptal ediyoruz. Bu durumda $35-1=34$ farklı dağıtım elde edilir.

Çözüm 2:

Bir önceki çözümde yapılanı daha cebirsel bir dille ifade edelim.

$x_1 \le 3, x_2 \le 5, x_3 \le 7, x_4 \le 8$ olmak üzere $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ denkleminin negatif olmayan tam sayı çözümlerini araştırıyoruz.

$x_1+y_1 = 3, x_2+y_2 = 5, x_3+y_3 = 7, x_4+y_4 = 8$ olsun.

Benzer şekilde $y_1 \le 3, y_2 \le 5, y_3 \le 7, y_4 \le 8$ ve $3-y_1+5-y_2+7-y_3+8-y_4 = 19$

$\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4 = 23-19 = 4$

4 şeker 4 çocuğa $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ şekilde dağıtılabilir; ama ilk çocuk $y_1 < 4$ olduğu için $(4,0,0,0)$ dağılımı mümkün değil. Bu durumda cevap $35-1=34$ olur.

$\boxed{4}$ $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x} \ge k$ eşitsizliğini her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için sağlayan en büyük k değeri kaçtır?

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{3}{4}$ **c)** 1 **d)** $\dfrac{3}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cos x} &= \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}\\ &= \frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-4\sin^2 x\cos^2 x}{2\sin x\cos x}\\ &= \frac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}\end{aligned}$$

$\sin 2x$ artarken; kesrin payı azalacak, paydası da artacak. Yani kesir küçülecek. Bu durumda kesir en küçük değerini $\sin 2x=1$ en büyükken alır. Bu durumda

$$\frac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}\geq\frac{2-1^2}{1}=1=k$$

olacaktır. Eşitlik $2x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ iken sağlanır.

Çözüm 2:

$x+y=\dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere; sorudaki eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\sin^3 y}{\cos y}\geq k$$

$x\leq\pi/4\leq y$ olsun.

$\sin^3 x\leq\sin^3 y$ ve $\dfrac{1}{\cos x}\leq\dfrac{1}{\cos y}$ olduğu için Yeniden Düzenleme Eşitsizliği (Rearrangement Inequality) gereği

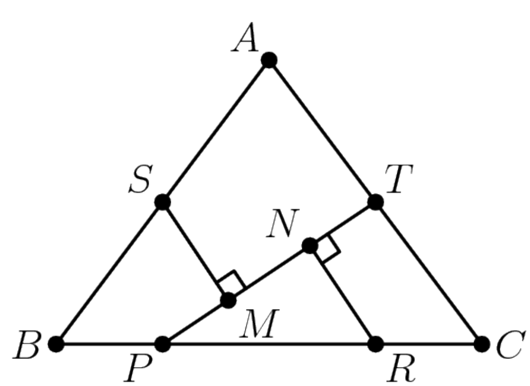
$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\sin^3 y}{\cos y}\geq\frac{\sin^3 x}{\cos y}+\frac{\sin^3 y}{\cos x}=\frac{\sin^3 x}{\sin x}+\frac{\sin^3 y}{\sin y}=\sin^2 x+\sin^2 y=1=k$$

elde edilir.

$\boxed{5}$ ABC ikizkenar üçgeninde $|AB|=|AC|=10$ ve $|BC|=12$ dir. $[BC]$ üstünde $|BP|=|RC|=3$ olacak şekilde P ve R noktaları alınıyor. S ve T sırasıyla AB ve AC nin orta noktaları olmak üzere, PT ye S ve R den inilen dikme ayakları, M ve N ise, $|MN|$ kaçtır?

a) $\dfrac{9\sqrt{13}}{26}$ **b)** $\dfrac{12-2\sqrt{13}}{13}$ **c)** $\dfrac{5\sqrt{13}+20}{13}$ **d)** $15\sqrt{3}$ **e)** $\dfrac{10\sqrt{13}}{13}$

Çözüm:



$[BC]$ nin orta noktası H olsun. $SP \parallel AH \parallel TR$ ve $ST \parallel BC$ olduğu için $PSTR$ bir dikdörtgendir. Pisagordan

$$SP = 4, PR = 6, PT = 2\sqrt{13}$$

elde ederiz. Öklid'den elde ettiğimiz

$$MT \cdot PT = ST^2 = 36$$
$$NT \cdot PT = RT^2 = 16$$

ifadeleri taraf tarafa çıkartırsak

$$(MT - TN)PT = 20 \Rightarrow MN = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

bulunur.

6 a, b, c tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{14} \\ x &\equiv b \pmod{15} \\ x &\equiv c \pmod{16} \end{aligned}$$

denklik sistemini ve $0 \leq x < 2000$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$(14, 15, 16)$ sayıları ikişerli olarak aralarında asal olsalardı tam bir Çinlilerin Kalan Teoremi sorusu diyecektik. Ama yine de tam bir Çinlilerin Kalan Teoremi sorusu.

Öncelikle a, c sayılarından biri tek, diğeri çift ise denklik sisteminin çözümünün olmadığını görmeye çalışalım.

$$a = b = c = 0 \Rightarrow 7 \cdot 15 \cdot 16 | x$$

şartını sağlayan $0 \leq x < 2000$ aralığında iki tane $(x = 0 \vee x = 1680)$ tam sayı vardır.

$$a = 13, b = 14, c = 15 \Rightarrow 7 \cdot 15 \cdot 16 | (x + 1)$$

şartını sağlayan $0 \leq x < 2000$ aralığında tek bir tane $x = 1680 - 1 = 1679$ tam sayısı vardır.

Bu durumda denklik sisteminin çözüm kümesi $0, 1$ ya da 2 elemanlı olabilir. Denklik sisteminin çözüm kümesinin eleman sayısının 3 olamayacağını göstereceğiz.

$$x \equiv a \pmod{14} \Rightarrow x \equiv a \pmod{7}$$

gerektirmesini kullandığımızda

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{7} \\ x &\equiv b \pmod{15} \\ x &\equiv c \pmod{16} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sistemin çözümleri, Çinlilerin Kalan Teoremine göre

$$x = 7 \cdot 15 \cdot 16 \cdot k + m = 1680k + m$$

formundadır. $0 \leq x < 2000$ aralığında çözüm kümesi 1 ya da 2 elemanlıdır. Bu durumda ikinci denklik sisteminin çözüm kümesi 3 elemanlı olamaz.

$$x \equiv a \pmod{14} \Rightarrow x \equiv a \pmod{7}$$

gerektirmesi çift yönlü olmadığı için ikinci denklik sisteminin bazı çözümleri birinci denklik sistemini sağlamaz. Bunun içindir ki birinci denklik sisteminin çözüm kümesi 0 elemanlı da olabilir.

7 Üstlerinde $1, 1, 3, 4, 4$ ve 5 yazılı altı kart bir torbaya konur. Torbadan rastgele, sırayla ve çekilenler geri konmaksızın üç kart çekilip, üstlerindeki rakamlardan çekiliş sırasına göre oluşturulan üç basamaklı sayının 3 e bölünme olasılığı kaçtır?

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{7}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$(114), (135), (144), (345)$ sayıları 3 ile bölünür.

$(113), (115), (134), (145), (344), (445)$ sayıları da 3 ile bölünmez.

$1, 1, 4$ sayıları için

$$P_1 = \frac{3!}{2!}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

$1, 3, 5$ sayıları için

$$P_2 = 3!\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$1, 4, 4$ sayıları için

$$P_3 = \frac{3!}{2!}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

$3, 4, 5$ sayıları için

$$P_4 = 3!\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

ve

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

olur.

8 $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $2P(x) = P(x+3) + P(x-3)$ koşulunu sağlıyorsa, P nin derecesi en çok kaç olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
P(x+3) &= a_n (x+3)^n + a_{n-1}(x+3)^{n-1} + \cdots + a_1(x+3) + a_0 \\
P(x-3) &= a_n (x-3)^n + a_{n-1}(x-3)^{n-1} + \cdots + a_1(x-3) + a_0
\end{aligned}$$

olsun. x^{n-2}'li terimin katsayısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
P(x+3) &= \cdots + (a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 + a_{n-1} \cdot \tbinom{n-1}{1} \cdot 3 + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots \\
P(x-3) &= \cdots + (a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 - a_{n-1} \cdot \tbinom{n-1}{1} \cdot 3 + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots \\
P(x+3) + P(x-3) &= \cdots + (2a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot x^{n-2} + 2a_{n-2} \cdot x^{n-2}) + \ldots \\
2P(x) &= \cdots + 2a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots
\end{aligned}$$

Burada

$$2a_n \cdot \binom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot x^{n-2} = 0$$

sonucu çıkar ki, bu da ancak $(n-2)$. terimin tanımlı olmamasıyla açıklanabilir. Yani $n - 2 < 0 \Rightarrow n \leq 1$ ile açıklanabilir.

$n = 1$ durumunda bariz şekilde $P(x) = x$ polinomu eşitliği sağladığı için P nin derecesi en çok 1 olabilir.

Çözüm 2:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $P(0), P(3), P(6), \ldots, P(3n)$ bir aritmetik dizi oluşturacaktır. Bu durumda, $P(3n) = (P(3) - P(0))n + P(0)$ olacaktır.

$Q(x) = (P(3) - P(0))x + P(0)$ şeklinde lineer (1. dereceden) bir polinom olsun.

$R(x) = Q(x) - P(x)$ olarak tanımlansın.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $R(0) = R(3) = \cdots = R(3n) = 0$ olacağından, $R(x)$ polinomunun sonsuz sayıda kökü olacaktır. Bu da $R(x) = 0$ olmasını gerektirir.

O halde $P(x) = Q(x) = ax + b$ şeklindedir.

$\boxed{9}$ Köşeleri bir çember üzerinde bulunan dışbükey bir sekizgenin dört kenarının uzunluğu 2, diğer dört kenarının uzunluğu da $6\sqrt{2}$ ise, bu sekizgenin alanı kaçtır?

a) 120 **b)** $24 + 68\sqrt{2}$ **c)** $88\sqrt{2}$ **d)** 124 **e)** $72\sqrt{3}$

Çözüm 1:

Sekizgenin köşeleri çember üzerinde olduğu için her 2 uzunluğundaki kenar (kiriş), aynı α merkez açısı ile görülür. Benzer şekilde her $6\sqrt{2}$ lik kenar (kiriş) da β merkez açısı ile görülür. Buradan

$$4\alpha + 4\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

elde edilir. Sekizgende biri 2 diğeri de $6\sqrt{2}$ olan bir ardışık kenar ikilisini ele alalım. (Bu şekilde bir ikili vardır. Neden?) Genellemeyi bozmadan $AB = 2, BC = 6\sqrt{2}$ ve çemberin merkezi O olsun. $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ olduğu için $\angle AOC = 90^\circ$, $AO = OC = R$ ve $\angle ABC = \dfrac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$ elde edilir. Sekizgenin alanı

$$4[AOB] + 4[BOC] = 4[ABCO]$$

olacağı için, $[ABCO]$ değerini hesaplamaya çalışacağız. ABC üçgeninde Cosinüs teoreminden

$$AC^2 = 2^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ) = 4 + 72 + 24 = 100 \Rightarrow AC = \sqrt{100}$$

elde edilir.

Sinüs teoreminden

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2}\sin(135^\circ) = 6$$

ve $\triangle AOC$ ikizkenar dik üçgen olduğu için

$$[AOC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AC^2}{4} = 25$$

dolayısıyla

$$[ABCO] = [ABC] + [AOC] = 25 + 6 = 31 \Rightarrow 4[ABCO] = 4 \cdot 31 = 124$$

elde edilir.

Çözüm 2:

$A_1A_2 = 2$ olmak üzere $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ kirişler sekizgeninin kenarları sırasıyla $2, 6\sqrt{2}, 2, 6\sqrt{2}, 2, 6\sqrt{2}, 2, 6\sqrt{2}$ olsun. (Kenar sıraları farklı olsa da sekizgenin alanı değişmezdi; çünkü O merkez olmak üzere A_iOA_j üçgenlerinden dördünün kenarları $R - R - 2$, diğer dördünün kenarları $R - R - 6\sqrt{2}$ olacaktır.)

A_1A_8, A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7 kenarlarını uzantıları A, B, C, D noktalarında kesişsin. $ABCD$ kenarı $8\sqrt{2}$ olan bir karedir.

Sekizgenin alanı $(8\sqrt{2})^2 - 4 = 128 - 4 = 124$ tür.

10 En büyük ortak bölenleri n olan tüm a, b, c tam sayıları için

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a \\ 2x + y - 2z &= b \\ 3x + y + 5z &= c \end{aligned}$$

denklem sisteminin x, y, z tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir?

a) 7 **b)** 14 **c)** 28 **d)** 56 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Sistemi sırasıyla $-1, 1, 1$ ile genişletip taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= -a \\ 2x + y - 2z &= b \\ 3x + y + 5z &= c \end{aligned}$$

$4x = -a + b + c$ elde ederiz.

Sistemi sırasıyla $1, 4, 1$ ile genişletip taraf tarafa toplarsak

$$12x + 7y = a + 4b + c$$

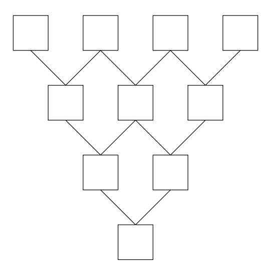
elde ederiz. x i yerine yazdığımızda $7y = 4a + b - 2c$ elde edilir.

Bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda $28z = a - 5b + 3c$ olarak bulunur.

En büyük ortak böleni n olan tüm a, b, c tam sayıları için sistemin sağlanması gerekeceğinden sistemin $a = b = c = n$ için de sağlanması gerekir. Bu durumda $28z = -n$ olduğu için n en az 28 olmalıdır.

$n = 28$ olduğunda sistemin sağlandığı kolayca görülebilir.

11 1 den 10 a kadar olan tam sayılar, yandaki şekildeki on kutuya yerleştiriliyor. En üst sıradakiler dışında her kutudaki sayı, hemen üstündeki iki kutuda bulunan sayıların farkına eşitse, en alttaki kutuya yerleştirilen sayı en çok kaç olabilir?



a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Herhangi iki sayının farkı 10 olamayacağı için 10 en üstte olmalı. Bu durumda ikinci satırdaki en büyük rakam, en fazla 9 olabilir. Üçüncü satırdaki en büyük rakam 8 olamaz; çünkü bu durumda hemen üstünde $9 - 1$ olması gerekir. 9'u üretmenin tek yolu $10 - 1$ olduğu için, 1 de kullanıldığı için mümkün değil. Demek ki, üstten üçüncü satırdaki en büyük rakam en fazla 7 olabilir. En alttaki sayının 5 olduğunu düşünelim.

7 yi üretmek için $8 - 1$ ya da $9 - 2$ gerekli. $7 - 2 = 5$ olduğu için 2 kullanılmış. Bu durumda 7'in üstünde 8 ve 1 var. 8, $9 - 1$ ya da $10 - 2$ şeklinde üretileceğinden 1 de 2 de kullanıldığından $7 - 2 = 5$ şeklinde son üç kutu yerleştirilemez. 5 olabilmesi için geriye tek ihtimal kalıyor. O da $6 - 1 = 5$. 6 yı üretmek için $8 - 2$ ya da $9 - 3$ gerekli. $8 = 10 - 2 = 9 - 1$ olacağından iki durumda da 1 ve 2 aşağılarda kullanıldığı için $6 = 8 - 2$

olamaz. $9 - 3$ için $9 = 10 - 1$ olacağından, 1 de aşağıda kullanıldığından bu da mümkün değil. Demek ki, en alttaki kutuya 5 gelemez.

4 olabilir mi?

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & & 10 & & 3 & & 8 \\ & 1 & & 7 & & 5 & \\ & & 6 & & 2 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

Bir diğer çözüm de

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 3 & & 9 \\ & 2 & & 7 & & 6 & \\ & & 5 & & 1 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

Not: Bu sorunun benzeri IMO 2018/3 te karşımıza çıkıyor.

Çözüm 2:

En alttaki sayı a olsun.

a nın hemen üstündeki iki sayıdan küçük olanı b olsun. Büyük olanı $a + b$ olacaktır.

$a + b$ nin hemen üstündeki iki sayıdan küçük olanı c olsun. Büyük olanı $a + b + c$ olacaktır.

$a + b + c$ nin hemen üstündeki iki sayıdan küçük olanı d olsun. Büyük olanı $e = a + b + c + d$ olacaktır.

a, b, c, d farklı sayılar olduğu için $e \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ olacaktır. Bu durumda $e = 10$ ve $a < 5$ olacaktır.

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & & 10 & & 3 & & 8 \\ & 1 & & 7 & & 5 & \\ & & 6 & & 2 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 3 & & 9 \\ & 2 & & 7 & & 6 & \\ & & 5 & & 1 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & & 1 & & 10 & & 8 \\ & 5 & & 9 & & 2 & \\ & & 4 & & 7 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & & 10 & & 1 & & 8 \\ & 4 & & 9 & & 7 & \\ & & 5 & & 2 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

12

$$x^2 + y^2 + z^2 = 21$$
$$x + y + z + xyz = -3$$
$$x^2yz + y^2xz + z^2xy = -40$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$(xyz)(x+y+z) = -40$ ve $xyz + x + y + z = -3$ denklemlerini $xyz = P$ ve $x + y + z = S$ diyerek ortak çözersek

$$\begin{aligned} P+S &= -3 \\ PS &= -40 \\ P(-3-P) &= -40 \\ P^2+3P-40 &= 0 \end{aligned}$$

$P = -8, S = 5$ ya da $P = 5, S = -8$ elde ederiz.

$$(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz + 2xz$$

özdeşliğinden dolayı

$$\begin{aligned} x+y+z = -8 &\Rightarrow xy+yz+yz = \frac{43}{2} \quad , \quad xyz = 5 \\ x+y+z = 5 &\Rightarrow xy+yz+yz = 2 \quad , \quad xyz = -8 \end{aligned}$$

elde edilir. Vieta Teoremine göre x, y, z sayıları

$$x^3 + 8x^2 + \frac{43}{2}x - 5 = 0$$

ya da

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

denklemlerinin kökleridir. Kolaylık olsun diye önce ikincisini çözelim.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 8 \Rightarrow f(-1) = 0$$

olduğu için, denklemin bir kökü $x = 1$ sayısı, polinom bölmesi yaparak

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$$

elde ederiz. Bu durumda $x = -1, y = 2, z = 4$ sorudaki denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanıdır. $3! = 6$ farklı şekilde (x, y, z) sıralı gerçel üçlüsü elde edileceği için şu an için 6 farklı gerçel çözüm bulduk.

$$x^3 + 8x^2 + \frac{43}{2}x - 5 = 0$$

denklemine dönersek, $f(0) = -5$ ve $f(1) > 0$ olduğu için denklemin $(0, 1)$ aralığında en az bir gerçel kökü vardır. Bunun yanında

$$f'(x) = 3x^2 + 16x + \frac{43}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{43}{2} = -2 < 0$$

olduğu için denklemin karmaşık (kompleks) kökleri vardır. Bu son yaptığımızı biraz açarsak, normalde 3. dereceden bir eğrinin üç gerçel kökü olması için, x-eksenini üç kez kesmesi gerekir. Bu durum da eğrinin iki yerel ekstremumu olması gerekir. Biraz daha yalın türkçeyle, eğrinin ekseni üç kez kesmesi için eğrinin iki kez kambur oluşturması gerekir. Bu noktalardaki türev, yani eğriye çizilen teğetler x-eksenine paralel olacağı için bu teğetlerin eğimi 0, yani o noktalardaki türev 0'dır. Diğer bir ifadeyle fonksiyonun türevini 0'a eşitlersek, fonksiyonun davranış (artan-azalan) değiştirdiği, kambur oluşturduğu noktaları buluruz. Bu şekilde gerçel noktalar olmadığı için denklemin iki kökü karmaşık, bir kökü gerçeldir. Bizim için tüm köklerin gerçel olması gerektiği için, bu denklemden gerçel kök çıkmaz.

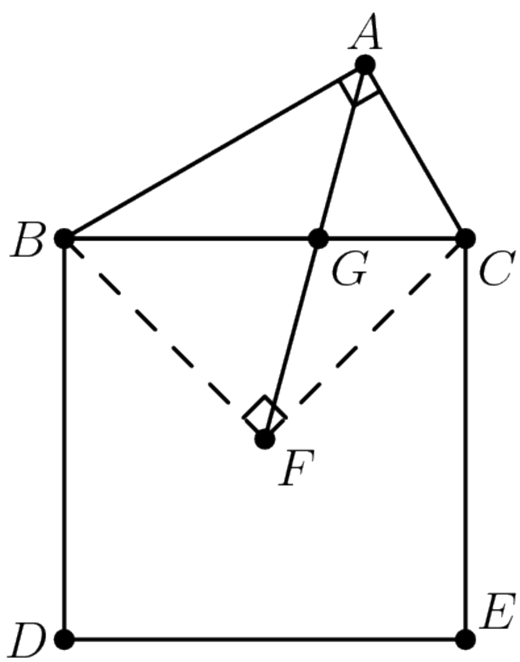
Bu durumda sadece $(-1, 2, 4)$ sayılarının permütasyonu kadar çözüm vardır.

Çözüm 2:

$x+y+z=-8$ ve $xyz=5$ durumunda reel çözüm olamayacağını türev gerektirmeden de gösterebiliriz.
$xyz>0$ ve $x+y+z<0$ olduğu için x,y,z sayılarından tam olarak ikisi negatif olmalı.
Genelliği bozmadan $x\le y<0<z$ olsun.
$AO\ge GO$ eşitsizliğinden $x^2+y^2\ge 2xy$.
Her iki tarafa x^2+y^2 eklersek $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$
$x^2+y^2+z^2=21$ olduğu için $21>x^2+y^2$ olacaktır.
$42>2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2=(-8-z)^2=(8+z)^2>64$ çelişkisini elde etmiş olduk.
O halde $x+y+z=-8$ ve $xyz=5$ durumunda reel çözüm yoktur.

13 Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A})=90°$, $|AB|=\sqrt{12}$ ve $|AC|=2$ olmak üzere, bu üçgenin dışına doğru $BEDC$ karesi kurulduğunda, karenin merkezi F, $[AF]\cap[BC]=G$ ise, $|BG|$ kaçtır?
a) $6-2\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{3}-1$ **c)** $2+\sqrt{3}$ **d)** $4-\sqrt{3}$ **e)** $5-2\sqrt{2}$

Çözüm 1:



$\angle BFC=90°$ olduğu için $ABFC$ kirişler dörtgenidir. $BF=FC$ olduğu için de AF, $\angle BAC$ nin iç açıortayıdır. Açıortay teoremi gereği

$$\begin{aligned} BG &= \frac{BC}{AB+AC}\cdot AB \\ &= \frac{4}{2+2\sqrt{3}}\cdot 2 = 6-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm 2:

A dan ve F den BC ye inilen yüksekliklerin ayakları sırasıyla H ve I olsun.

$BC = 4$, $BI = IC = IF = 2$, $AH = \sqrt{3}$, $CH = 1$ ve $IH = 1$ olacaktır.

$FI \parallel AH$ olduğu için $\triangle GIF \sim \triangle GHA$.

$\dfrac{GI}{IH} = \dfrac{FI}{FI + AH} = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}$

$GI = 4 - 2\sqrt{3}$ ve $BG = 6 - 2\sqrt{3}$ olacaktır.

Bu sorunun genel hali için buraya başvurabilirsiniz.

14 72 tane pozitif böleni olan en küçük pozitif tam sayının on tabanına göre yazılımındaki rakamların karelerinin toplamı kaçtır?

a) 41 **b)** 65 **c)** 110 **d)** 123 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Normalde, böyle bir soruda
$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$
olduğu için
$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 13860$$
gibi bir sayı seçerek toplamda 72 pozitif böleni olan sayıyı küçültmeye çalışırız. 13860 sayısının rakamlarının kareleri toplamı $1^2 + 3^2 + 8^2 + 6^2 + 0^2 = 110$ dur. Ama cevabımız ne yazık ki 110 değil.

$k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ olmak üzere $n = 11k$ sayısının 72 pozitif böleni vardır (Az önce gösterdik.).

$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ sayısını ele alalım. $d(n) = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ olduğu için ve $n = 8k$ sayısı $n = 11k$ sayısından daha küçük olduğu için $n = 8k = 10080$ sayısının rakamlarının kareleri toplamı $1^2 + 8^2 = 65$ tir. $10080 < 13860$ olduğu için $72 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ şeklinde bir çarpanlara ayırma $72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ şeklinde bir çarpanlara ayırmadan daha küçük bir sonuç verecektir. Ama 72 pozitif böleni olan en küçük sayı $n = 10080$ sayısı mı? Aslında bunu söylemek o kadar da kolay değil.

Ya, daha küçük bir sayı varsa?

Aslında bu soruyu 1644'te Mersenne öğrencilerine sormuş (Kaynak: Elementary Number Theory In Nine Chapters, 1999, syf. 94):

$D(k)$ ile tam olarak k pozitif böleni olan en küçük sayıyı gösterelim. Önce 60 pozitif bölene sahip bir sayı bulun. Sonra $D(60)$ ı hesaplayın.

Rahatça görüldüğü üzere bizim sorumuzdan farklı değil.

Bu konu literatürde *Highly Composite Number* diye geçiyor. Kendisinden küçük sayılardan daha fazla bölene sahip sayılara, benim çevirimle *bir hayli birleşik sayı* diyoruz. 10080 sayısı bir hayli birleşik bir sayı. Yani kendisinden küçük sayıların pozitif bölenleri sayısı 72'den küçük. O zaman 72 pozitif bölene sahip ilk sayı 10080 dir.

Şimdi de bu sorunun çözümü için neler yapabiliriz, ona bakalım.

(1) 72 tane pozitif böleni olan sayılardan en fazla asal bölene sahip sayı, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ olduğu için, 5 asal bölenli bir sayıdır.

72 tane pozitif böleni olan sayılardan en küçüğünü arıyorsak, bu asal sayılar 2, 3, 5, 7 ve 11 olmalı. Aksi halde daha büyük olan asal sayı bu listedeki eksiklerden biri ile değiştirilirse aynı sayıda pozitif bölene sahip daha küçük bir sayı elde edilir.

(2) Asal bölenlerden küçük olanın üssü, daha büyük asal bölenin üssünden daha az olamaz. Bu durumda, üsleri değiştirirsek daha küçük bir sayı elde edebiliriz.

(3) Bu iki özelliğin yanında, Wikipedia ve Wolframda bahsedilen bir üçüncü özellik var. En büyük asal bölenin üssü, sayı 4 veya 36 değilse 1 olmalı. Muhtemelen bu özelliğin ispatı, diğer iki özelliğe göre daha

uzun. Belki Highly Composite Numbers ile ilgili bir başlık altında bu özelliğin ispatı verilebilir. Şimdilik bu özelliği kullanmadan çözümümüze devam edelim.

72 tane pozitif bölene sahip, (1) ve (2) özelliklerini sağlayan 16 farklı sayı vardır:

1	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$2^2 3^2 5^1 7^1 11^1 = 13860$
2	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9$	$2^8 3^1 5^1 7^1$
3	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$	$2^5 3^2 5^1 7^1 = 10080$
4	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$	$2^3 3^2 5^2 7^1$
5	$2 \cdot 2 \cdot 18$	$2^{17} 3^1 5^1$
6	$2 \cdot 3 \cdot 12$	$2^{11} 3^2 5^1$
7	$2 \cdot 4 \cdot 9$	$2^8 3^3 5^1$
8	$2 \cdot 6 \cdot 6$	$2^5 3^5 5^1$
9	$3 \cdot 3 \cdot 8$	$2^7 3^2 5^2$
10	$3 \cdot 4 \cdot 6$	$2^5 3^3 5^2$
11	$2 \cdot 36$	$2^{35} 3^1$
12	$3 \cdot 24$	$2^{23} 3^2$
13	$4 \cdot 18$	$2^{17} 3^3$
14	$6 \cdot 12$	$2^{11} 3^5$
15	$8 \cdot 9$	$2^8 3^7$
16	72	2^{71}

(3) nolu özelliği kullansaydık 9., 10., 12., 13., 14., 15. ve 16. sayılar da iptal olacaktı.

$2^2 < 5^1$ ve $2^3 < 3^2 < 11$ özelliklerini kullanarak ilk dört sayıya baktığımızda $2^5 3^2 5^1 7^1 = 10080 < 2^{14}$ sayısının en küçük olduğu görülür.

2 veya daha az asal çarpandan oluşan sayılar $(2^a \cdot 3^b)$ için, $a \geq b$, $a + b < 14$, $(a + 1)(b + 1) = 72$ ve $a + 1 + b + 1 < 16$ şartları sağlanmalı. $8 \cdot 9 = 72$ ve $8 + 9 > 16$ olduğu için bu şekildeki sayılar 10080 den küçük olamaz.

$[5, 10]$ arasındaki sayıları 2 nin üssü şeklinde yazmaya çalıştığımızda 10. sayı hariç diğerleri 2^{14} ten büyük olacaktır.

10. sayı ile 3. sayıyı oranlarsak $\dfrac{15}{7} > 1$ çıkacağı için 3. sayı yani 10080, 72 pozitif bölene sahip en küçük sayıdır.

Referanslar:

Wikipedia

Wolfram

Mathematical Gems III, Rons Honsberger, 1985, Chapter 14, Syf. 193.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (C) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

15 3×3 lük bir tahtadaki dokuz kareden dördü, ikisi kırmızı, ikisi maviye olmak üzere ve aynı renkte iki kare ne aynı satır ne de aynı sütunda yer alacak biçimde boyanıyor. Bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

a) 198 **b)** 288 **c)** 396 **d)** 576 **e)** 792

Çözüm:

9 kareden birini kırmızıya boyadığımızda, kırmızı renk için geriye 4 uygun kare kalıyor. Geriye kalan 7 kareyi maviye $4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 22$ şekilde boyarız. Yani toplamda $9 \times 4 \times 22 = 792$ boyama oldu. Yalnız, kırmızılar kendi arasında, maviler de kendi arasında özdeş olduğu için 792'yi $2! \times 2! = 4$'e bölmemiz gerekiyor. $\dfrac{792}{4} = 198$ aradığımız cevap.

16 $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{1999}}$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) rasyonel sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Her iki tarafın karesini alalım.

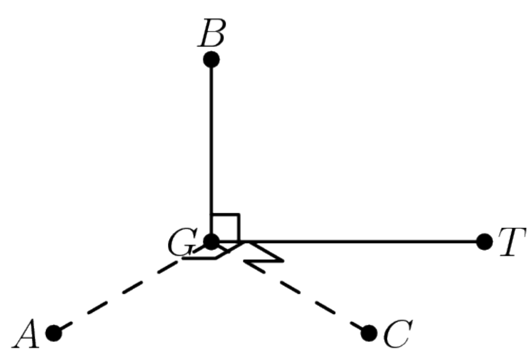
$$y^2 = x^2 + \frac{1}{1999} \Rightarrow (y-x)(y+x) = \frac{1}{1999}$$

olacaktır. $y - x = r$ ise $y + x = \dfrac{1}{1999r}$ olur. Bu durumda $y = \dfrac{r + \dfrac{1}{1999r}}{2}$ ve $x = \dfrac{\dfrac{1}{1999r} - r}{2}$ elde edilir. Her r rasyonel sayısı için x, y sayıları rasyonel olacağı için sonsuz farklı çözüm vardır.

17 Tabanı ABC eşkenar üçgeni ve tepe noktası T olan bir düzgün piramidin $[AB]$, $[BC]$, $[CT]$, $[TA]$ ayrıtlarının orta noktaları sırasıyla P, Q, R, S ile gösterilmek üzere, bu piramidin cisim yüksekliği $2\sqrt{15}$ ve $|AB| = 6$ ise, $Alan(PQRS)$ kaçtır?

a) $4\sqrt{15}$ **b)** $8\sqrt{2}$ **c)** $8\sqrt{3}$ **d)** $6\sqrt{5}$ **e)** $9\sqrt{2}$

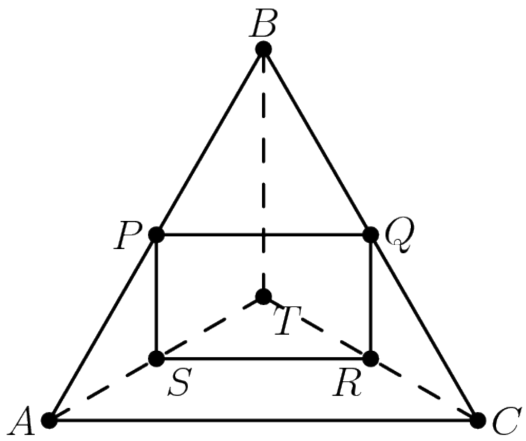
Çözüm:



T noktası A, B, C noktalarına eş uzaklıkta olacak. Bu durumda T'nin ABC düzlemindeki izdüşümü ABC üçgeninin ağırlık merkezi olan G noktasıdır. $TG = 2\sqrt{15}$ soruda verilmiş. $AB = 6$ ise $AG = 2\sqrt{3}$ ve TAG dik üçgeninde

$$AT^2 = AG^2 + TG^2 \Rightarrow AT^2 = 72 \Rightarrow AT = 6\sqrt{2}$$

dir.



ATB üçgeninde PS, kenarları ortalayan bir doğru parçası olduğu için

$$PS = \frac{TB}{2} = 3\sqrt{2}$$

elde edilir. Bu işlemi diğer orta noktalar için de yapınca

$$PQ = SR = \frac{AC}{2} = 3, PS = QR = \frac{TB}{2} = 3\sqrt{2}$$

elde ediyoruz. Bu durumda $PQRS$ kenarları 3 ve $3\sqrt{2}$ olan bir paralelkenar oldu. Simetriden dolayı $PR = SQ$ olacağı için paralelkenar bir dikdörtgendir. Bu durumda

$$[PQRS] = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

olacaktır.

18 $t_k(n)$ ile n pozitif tam sayısının on tabanına göre yazılımındaki rakamların k inci kuvvetlerinin toplamını gösterelim. Aşağıdaki k değerlerinden hangisi için, 3 ün $t_k(n)$ yi bölmesi 3 ün n yi bölmesini gerektirmez?

a) 3 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 15 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$a^3 \equiv a \pmod 3$ olduğunu fark edelim. Daha genel bir şekilde, k negatif olmayan bir tam sayı ise

$$a^{2k+1} \equiv a \pmod 3$$

özdeşliği vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0} &\equiv 10^m a_m + \cdots + 10a_1 + a_0 && \pmod 3 \\ &\equiv a_m + a_{m-1} + \dots a_1 + a_0 && \pmod 3 \\ &\equiv a_m^{2k+1} + a_{m-1}^{2k+1} + \dots + a_0^{2k+1} && \pmod 3 \end{aligned}$$

olacaktır. Yani her k tek sayısı için $3|t_k(n)$ olduğunda otomatik olarak $3|n$ olacaktır. Dikkat edilirse, şıklardaki tek çift sayı 6.

$k = 6$ için

$$t_6(\overline{112}) = 66 \equiv 0 \pmod 3$$

iken

$$\overline{112} \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod 3$$

tür.

19 2×5 lik bir satranç tahtasının üst sırasında sol köşeden itibaren ardışık k kareye siyah pullar konmuştur. Boş olan karelere istediğimiz sırayla beyaz pullar koyuyoruz. En az bir ortak köşeye sahip iki kare komşu sayılmak üzere, her beyaz pul konduğunda, komşu karelere daha önceden konmuş olan pılların rengi, beyazsa siyaha, siyahsa beyaza dönüşüyor. k nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için tüm kareler dolduğunda pulların hepsi beyaz olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$k > 1$ olduğu durumda

S	S			

İlk karedeki siyah taşın etrafında 2 boşluk olduğu için nihayetinde ($S \to B \to S$) siyaha dönüşecek. Bu durumda $k = 1$ olabilir, $k = 0$ olabilir, ya da hiçbir k değeri için bu şekilde bir yerleştirme yapılamaz.

$k = 1$ için, ilk taş siyah olacak.

S				

B	**B**			

B	S	**B**		

B	S	S	**B**	

B	S	S	S	**B**

Dikkat edilirse baştaki ve sondaki karenin 2 komşusu, diğerlerinin 3 komşusu var. 2 komşusu olan beyaz taşlar ($B \to S \to B$) beyaza, 3 komşusu olan siyah taşlar ($S \to B \to S \to B$) beyaza dönüşecek. Yani ikinci satırdaki taşlar hangi sırada konursa konsun, ilk sıradaki taşların tamamı beyaza dönüşecek. Bu durumda, ikinci sıradaki taşları beyaz taşları öyle yerleştirmeliyiz ki, hepsi beyaz olsun. Biraz düşününce (aslında birden çok bu şekilde diziliş var), ortadaki karenin 3 komşusu, baştaki ve sondaki karenin 1 komşusu, diğerlerinin (yani baştan ve sondan ikinci karelerin) 2 komşusu var. Beyaz taşın beyaza dönüşmesi için, değişime uğramaması, yani etrafına kendisinden sonra taş konmaması ya da çift sayıda taş konması gerekiyor. Önce 2 ve 4 nolu karelere, sonra 1 ve 5 nolu karelere, en son da 3 nolu kareye taşı yerleştirdiğimizde tüm taşlar beyaz olur.

S	B	B	S	B
	B			

S	B	S	B	S
	B		**B**	

B	S	S	B	S
B	S		B	

B	S	S	S	B
B	S		S	**B**

B	B	B	B	B
B	B	**B**	B	B

Not:

Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (E) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

20 $x^4 - 2^{-y^2}x^2 - \lfloor x^2 \rfloor + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

$\{a\}$ ile a pozitif sayısının virgülden sonraki kısmını gösterelim. Buna göre

$$\lfloor x^2 \rfloor = x^2 - \{x^2\}$$

olacaktır.

$$\begin{aligned}
x^4 - 2^{-y^2}x^2 - (x^2 - \{x^2\}) + 1 &= 0 \\
(x^4 - 2x^2 + 1) + x^2 - 2^{-y^2}x^2 + \{x^2\} &= 0 \\
(x^2 - 1)^2 + x^2(1 - \frac{1}{2^{y^2}}) + \{x^2\} &= 0
\end{aligned}$$

Sol taraftaki terimlerin üçü de ≥ 0 olduğu için, toplamlarının 0 olması için her birinin 0 olması lazım. Buna göre

$$(x^2-1)=0 \wedge (1-\frac{1}{2^{y^2}})=0 \wedge \{x^2\}=0 \Rightarrow x=\pm 1 \wedge y=0 \wedge x\in\mathbb{Z}$$

olur. Bu durumda

$$(x,y)=(\pm 1,0)$$

ile çözüm kümesinin eleman sayısı 2 olacaktır.

21 ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC})=10^\circ$ ve $m(\widehat{ABC})=150^\circ$ dir. $[AC]$ üstünde $|AX|=|BC|$ olacak şekilde X noktası alınıyor. $m(\widehat{BXC})$ kaç derecedir?

a) 15 **b)** 20 **c)** 25 **d)** 30 **e)** 35

Çözüm 1:

$\angle YBA=\angle BAY=10^\circ$ olacak şekilde $[AC]$ üzerinde Y noktasını alalım. $BY=YA$ olacaktır. $\angle BYC=\angle BCY=20^\circ$ olduğu için $BY=BC$, dolayısıyla da $AX=AY$ olacaktır. Bu durumda X ile Y noktası çakışıktır. Yani $\angle BXC=20^\circ$.

Çözüm 2:

$[AC$ üzerinde $BA=BD$ olacak şekilde bir D noktası alalım.

$$\angle BDA=10^\circ \Rightarrow \angle DBC=10^\circ$$

olduğu için $CD=CB$ olacaktır. Bu durumda

$$DB=BA, DC=AX, \angle BDC=\angle BAX=10^\circ$$

olduğu için $\triangle BDC\cong\triangle BAX$ olacaktır. Bu da

$$BX=BC\Rightarrow \angle BXC=20^\circ$$

olmasını gerektirir.

Çözüm 3:

$BX=\sin 10^\circ$ olsun. Bu durumda $AB=\sin X$ ve $AX=\sin(X-10^\circ)=BC$ olacaktır. $\triangle BXC$ üçgeninde Sinüs Teoreminden

$$\frac{\sin(X-10^\circ)}{\sin X}=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

elde edilir. Açık bir şekilde $X=20^\circ$ denklemi sağlar.

Çözüm 4:

$\angle BCA$ nın açıortayı AB yi Y de kessin.

$$\angle YCA=\angle YAC=10^\circ\Rightarrow CY=YA$$

$$\angle BCY=\angle YAX=10^\circ\wedge CY=YA\wedge AX=BC\Rightarrow \triangle AXY\cong\triangle CBY\Rightarrow BY=YX$$

$\angle XYB = \angle BCX = 20^\circ$ olduğu için de $BYXC$ kirişler dörtgenidir. Bu durumda

$$\angle BYC = \angle BXC = 20^\circ$$

olur.

Çözüm 5:

$\angle ABY = 30^\circ$ olacak şekilde $[AC]$ üzerinde Y noktasını alalım.

Z, $[CB$ üzerinde $[BC]$ nin dışında $BZ = BY$ olacak şekilde bir nokta olsun.

$\triangle BZY$ eşkenar üçgendir. $AB \perp ZY$ olduğu için de $BZAY$ bir deltoiddir. Bu durunda $AZ = AY$ ve $\angle ZAB = \angle BAY = 10^\circ$ olduğu için

$$\angle ZAC = 20^\circ = \angle ZCA \Rightarrow AZ = CZ$$

elde edilir.

$$AX + XY = AY = CZ = BC + BZ \Rightarrow YX = BZ = BY$$

bilgisi eşliğinde

$$\angle BYC = 40^\circ \Rightarrow \angle BXY = 20^\circ$$

elde edilir.

Çözüm 6:

C nin AB ye göre simetriği D olsun. $\triangle ACD$ bir $80^\circ - 20^\circ - 80^\circ$ üçgenidir. Bu durumda $\triangle BCD$ eşkenar; $AXBD$ dörtgeni de ikizkenar yamuk, yani kirişler dörtgenidir. Buna göre AB açıortay olduğu için DX de $\angle ADB$ nin açıortayıdır. Ayrıca $BD = BX = AX$ olduğu için de $\triangle AXB$ ikizkenar üçgen olur. Bu durumda $m(\widehat{BXC}) = 20^\circ$ elde edilir.

Çözüm 7:

Daha genelini çözeceğiz:

$\angle BAC = x$ ve $\angle BCA = 2x$ olsun.

$\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin merkezi O olsun. OB ile AC, Y de kesişsin.

$\angle BOA = 2\angle BCA = 4x$, $\angle COB = 2\angle BAC = 2x$, $\angle CBO = 90^\circ - x$, $\angle BYC = 90^\circ - x$. $CY = BC = AX$.

$OC = OA$ ve $CY = AX$ olduğu için $OY = OX$ ve $\angle XOA = \angle YOC = \angle YOX = 2x$ elde edilir.

Bu aşamadan sonra iki şekilde ilerleyebiliriz:

(1) $\angle BOX = \angle BCX$ olduğu için $BXOC$ bir kirişler dörtgeni ve $\angle BCX = \angle BOX = 2x$

(2) $\triangle BOA$ ikizkenar ve OX tepe açısına ait açıortay olduğu için $BX = XA$ ve $\angle ABX = x$ ve $\angle BCX = 2x$

Çözüm 8:

Bu soru, Üçgende Kesenin Kenarlarla Yaptığı Açı Üzerine konusunda bahsedilen $(k_2 = 1, b = x, c = x/2)$ ya da diğer bir deyişle $(k_2 = 1, N = 1.1)$ ailesine $(x = 20^\circ)$ aittir. Bundan önceki tüm yanıtlar aslında genel durum için de çalışıyor.

22 Aşağıdaki sayılardan hangisi, m ve n tam sayılar olmak üzere, $m^2 + 3mn - 4n^2$ şeklinde ifade edilemez?

a) 69 **b)** 76 **c)** 91 **d)** 94 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$$A = m^2 + 3mn - 4n^2 = (m+4n)(m-n)$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} m+4n &= a_1 \\ m-n &= a_2 \end{aligned}$$

deyip taraf tarafa çıkarırsak,

$$\begin{aligned} 5n &= a_1 - a_2 \\ n &= \frac{a_1-a_2}{5} \\ m &= n + a_2 \\ A &= a_1a_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. A sayısını farkları 5 ile bölünen iki sayının çarpımı biçimde yazabilirsek, A sayısı

$$m^2 + 3mn - 4n^2 = (m+4n)(m-n)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $A = 69 = 23 \cdot 3$, $A = 76 = 76 \cdot 1$, $A = 91 = 91 \cdot 1$ ve $A = 94 = 47 \cdot 2$ sayılarının hepsi farkları 5 ile bölünen iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

23 Saat kısmı 1 den 12 ye kadar olan sayıları gösteren dijital bir saatin, dakika kısmı doğru çalışmakta, ancak saat kısmı bir bozukluk sonucu, saat başlarında $n : 59$ dan sonra, ($n+1$ ve $2n$, mod12 düşünülmek üzere), $(n+1) : 00$ olacağına, $2n : 00$ a atlamaktadır. (Örneğin, saat, $7 : 00$ a ayarlanırsa, bir saat sonra $8 : 00$ yerine $2 : 00$ olmaktadır.) Saati gelişi güzel bir zamana ayarlar ve aradan bir gün geçtikten sonra saate bakarsak, saat kısmının 4 ü gösteriyor olma olasılığı kaçtır?

a) $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Saat şu anda $n : 30$ olsun. 1 saat sonra $2n : 30$ olacaktır. Buna göre, saat 24 saat içerisinde

$$\begin{aligned} t_0 &\equiv n \pmod{12} \\ t_1 &\equiv 2n \pmod{12} \\ &\vdots \\ t_{24} &\equiv 2^{24}n \pmod{12} \end{aligned}$$

değerlerini alacaktır. 24 saat sonra

$$t_{24} \equiv 2^{24} \equiv 4 \pmod{12}$$

olacaksa

$$2^{24}n \equiv 4n \equiv 4 \pmod{12}$$

denkliğinden k bir tam sayı olmak üzere;

$$4n - 4 = 12k \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow n = 3k+1$$

elde edilir. $[1, 12]$ aralığındaki 12 sayıdan $\{1, 4, 7, 10\}$ sayılarının 3 ile bölümünden kalan 1 olduğu için

$$P(2^{24}n \equiv 4 \pmod{12}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

24 $f(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)=0$ koşulunu sağlıyor. $f(2)=6$ ise, $f(\frac{3}{2})$ kaçtır?

a) -6 **b)** 0 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{15}{8}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$$f(x)=\frac{(x-1)f(x+1)}{x+2}$$

olduğu için $f(1)=0$ ve polinomun bir kökü $(x-1)$ olur.

x yerine $x-1$ dersek,

$$(x-2)f(x)-(x+1)f(x-1)=0 f(x)=\frac{(x+1)f(x-1)}{x-2}$$

olduğu için $f(-1)=0$ ve polinomun diğer kökü $(x+1)$ olur.

$f(x)=g(x)(x-1)(x+1)$ olsun. Soruda verilen denklemi yeniden yazarsak

$$\begin{aligned}(x-1)g(x+1)x(x+2)-(x+2)g(x)(x-1)(x+1) &= 0\\ (x-1)(x+2)(g(x+1)x-g(x)(x+1)) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{g(x+1)}{g(x)} &= \frac{x+1}{x}\\ g(x) &= \frac{xg(x+1)}{x+1}\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda $g(0)=0$ ve $g(x)=xh(x)$ tir. Bu son bulduğumuzu

$$\frac{g(x+1)}{g(x)}=\frac{x+1}{x}$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$\frac{(x+1)h(x+1)}{xh(x)}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow\frac{h(x+1)}{h(x)}=1$$

elde ederiz. Buradan da $h(x)=A$ sabit bir fonksiyon olarak elde edilir. Son olarak

$$f(x)=x(x-1)(x+1)A$$

elde edilir. $f(2)=6$ değerini yerine yazarsak

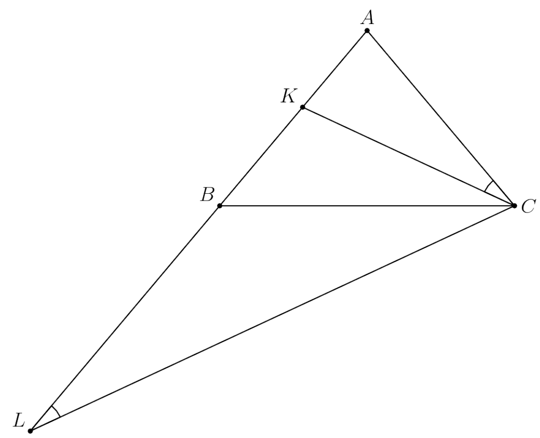
$$f(2)=2(2-1)(2+1)A=6\Rightarrow A=1$$

elde ederiz. Son durumda $f(x)=x(x-1)(x+1)$ ve $f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$ elde edilir.

25 ABC üçgeninde $m(\widehat{A})=80^\circ$ ve $|AB|=|AC|$ dir. $[AB]$ üstünde K ve $[AB$ üstünde L noktaları, $|AB|^2=|AK|\cdot|AL|$ ve $|BL|=|BC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{KCB})$ kaç derecedir?

a) 20 **b)** 25 **c)** 30 **d)** 35 **e)** 40

Çözüm:



$$BC = BL, \angle BLC = 25°, AK \cdot KL = AB^2 = AC^2$$

olduğu için $\triangle ACK \sim \triangle ACL$, dolayısıyla da

$$\angle ACK = \angle ALC = 25° \Rightarrow \angle KCB = 25°$$

olacaktır.

Benzerliği fark edemeyenler için

$$AK \cdot KL = AC^2 \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AL}$$

ve

$$\angle KAC = \angle LAC$$

olduğu için $\triangle ACK \sim \triangle ACL$ $(K.A.K)$ dır. Aslında bu tip soruda *benzerlik vardır* ara adımını atlayabiliriz. $AK \cdot AL = AC^2$ ifadesi A dan $\triangle CKL$ üçgeninin çevrel çemberine çizilen teğetin denklemidir. Bu durumda teğet-kiriş açıdan $\angle ACK = \angle ALC$ olacaktır. Bu tip $xy = z^2$ tarzı eşitliklerde, teğet-kiriş açıyı hemen fark etmemiz gerekiyor.

26 x, y, z tam sayıları

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= 7 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlıyorsa z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 3^{111} **b)** 4^{111} **c)** 5^{111} **d)** 6^{111} **e)** Hiçbiri

Çözüm:

3 bilinmeyen 2 denklem var. Yani denklem sistemini çözemeyiz. Ama x, y, z tam sayılar olduğu için z hakkında yorum yapabiliriz.

Denklem sisteminde x i yok etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -2x - y + 5z &= -7 \\ -7y + 9z &= -5 \end{aligned}$$

y yi yok edelim.

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 6x + 3y - 15z &= 21 \\ 7x - 13z &= 22 \end{aligned}$$

Son bulduğumuz değerleri mod7 de inceleyelim.

$$\begin{aligned} -7y + 9z &= -5 \\ 2z &\equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow z \equiv 1 \pmod 7 \\ 7x - 13z &= 22 \\ z &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Bu durumda z nin 7 ile bölümünden kalan 1 olmalı. 7 asal sayı, şıklardaki üslerin hepsi 111 olduğu için Euler'in Phi (ϕ) Fonksiyonunu, ya da Fermat'ın Küçük Teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} a^6 &\equiv 1 \pmod 7 \\ a^{108} &\equiv 1 \pmod 7 \\ a^{111} &\equiv a^3 \pmod 7 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $3, 4, 5, 6$ sayılarından küpü 7 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayıyı arıyoruz.

$$4^3 \equiv 1 \pmod 7$$

olduğu için aradığımız sayı 4 tür. Diğer şıklar mod7 de -1 kalanını verirler.

$\boxed{27}$ Kenar uzunluğu c olan bir karenin noktaları kırmızı ya da maviye boyanıyor. Bu boyama nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkte iki nokta bulunuyorsa, c nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Öncelikle şunu ifade edelim. Karenin iç bölgesindeki noktaları boyamıyoruz. Karenin kenarları üzerindeki noktaları boyuyoruz.

$ABCD$ karesinde AB nin orta noktası E, CD nin orta noktası F olsun. EF üzerinden kareyi ikiye bölelim. Bir tarafını tamamen kırmızıya, diğer tarafını tamamen maviye boyayalım.

$c < 2$ ise yukarıda anlatıldığı gibi bir boyamada, aynı renkte iki noktanın arasındaki uzaklık en fazla $\triangle ADF$ üçgenindeki A, F noktaları arasındaki uzaklık kadardır. $AD = c$ ve $DF = \dfrac{c}{2}$ olduğu için Pisagordan

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{5c^2}{4} \Rightarrow AF = \frac{c\sqrt{5}}{2}$$

olur.

$c < 2$ olduğu için

$$AF = \frac{c\sqrt{5}}{2} < \frac{2\sqrt{5}}{2} < \sqrt{5}$$

olacağı için, $c < 2$ olan bir karede aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ olan aynı renk iki nokta bulunamayabilir. Demek ki, $c \geq 2$ olmalı. $c = 2$ olan karede boyamalar nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkte iki nokta bulunuyorsa aradığımız yanıt $c = 2$. Bulunmuyorsa, bu durumda $c > 2$ olacak şekilde başka arayışlara gireceğiz.

$c = 2$ olan bir kare ele alalım. Aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten küçük olacak şekilde boyama yapmaya çalışacağız. Bunu başarırsak, aradığımız yanıt $c = 2$ değil. Başaramazsak, yani ne yaparsak yapalım, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkli iki nokta oluyorsa, aradığımız yanıt $c = 2$ olacak.

A ile C aynı renkli olamaz. Olursa $AC = 2\sqrt{2} > \sqrt{5}$ olduğu için, soruda istenen şekilde boyama yapmış oluruz. Hatırlatalım, elimizden geldiğince bu şekilde boyama yapmayacağız. Benzer şekilde B ile D de aynı renkli olamaz. O zaman bu durumda ya B ile C, ya da C ile D aynı renkli. B ile C aynı renkli olsun. Bu durumda A ile D de aynı rekli olur. Genelliği bozmadan B ile C yi kırmızı, A ile D yi de mavi kabul edelim. E ya kırmızı ya da mavi olacak. Mavi ise, $DE = \sqrt{5}$ olacak; kırmızı ise $CE = \sqrt{5}$ olacak. Yani ne yaparsak yapalım aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ olan aynı renkli iki nokta bulabiliyoruz. Bu durumda, bu şartı sağlayan karelerin en küçük kenarlısı için $c = 2$ dir.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (E) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

28 Pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı, $f(1) = 1$ koşulu ile tüm x, y gerçel sayıları için $f(x^2y^2) = f(x^4 + y^4)$ koşulunu sağlayan kaç f fonksiyonu vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

$xy = 1$ ise
$$f(1) = f\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$$
$AO \geq GO$ dan
$$x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$$
elde edilir. Bu durumda
$$f(x \geq 2) = f(1) = 1$$
elde edilir.Yani $x \in [2, \infty)$ için $f(x) = 1$ elde edilir.

$x = y$ ise $f(x^4) = f(2x^4)$ olacağından $(0, 2)$ aralığındaki her x için yeteri kadar $f(x^4) = f(2x^4) = f(4x^4) = \cdots = f(2^n x^4) = f(K)$ eşitliği kullanıldığında $K = 2^n x^4 \geq 2$ olacağı için $f(K) = f(1) = 1$ olur. Bu durumda $(0, \infty)$ aralığındaki her x için $f(x) = f(1) = 1$ olacaktır. Yani sorudaki koşulu sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır.

29 Yüksekliği 3 olan ABC eşkenar üçgeninin $[BC]$ kenarına orta noktasında teğet olan ve diğer kenarları da kesen 2 yarıçaplı çember çiziliyor. AB ve AC nin çemberi üçgenin dışında kestiği noktalar D ve E olmak üzere, $Alan(ABC)$ nin $Alan(ADE)$ ye oranı kaçtır?

a) $2(5 + \sqrt{3})$ **b)** $7\sqrt{2}$ **c)** $5\sqrt{3}$ **d)** $2(3 + \sqrt{5})$ **e)** $2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

Çözüm:

Çemberin merkezi O ve $[AB]$ ile çember F de kesişsin.$\triangle AFO$ da, ister Cosinüs Teoreminden ister AF ye ait yüksekliği çizerek AF yi bulabiliriz. Yükseklik yaklaşımını kullanalım.

$\triangle AOF$ de OH, AF ye ait yükseklik olsun. $\angle FAO = 30°$, $AO = 1$ ve $OF = 2$ olduğu için
$$OH = \frac{1}{2}, AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
olarak elde edilir. $\triangle OHF$ dik üçgeninde Pisagordan
$$HF^2 = OF^2 - OH^2 \Rightarrow HF^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow HF = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

olarak elde edilir. Bu durumda
$$AF = AH + HF = \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
olur. A noktasının çembere göre kuvvetinden
$$AE \cdot AF = 1 \cdot 3 \Rightarrow AE = \frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$$
elde edilir. Benzer şekilde $AD = AE$ elde edilir. $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ olduğu için
$$\frac{[ABC]}{[ADE]} = \frac{AB^2}{AE^2}$$
olacaktır.
$AB = 2\sqrt{3}$ ve $AE = \dfrac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$ olduğu için
$$\frac{[ABC]}{[ADE]} = \frac{AB^2}{AE^2} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{\left(\dfrac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{36} = 6 + 2\sqrt{5} = 2(3+\sqrt{5})$$

$\boxed{30}$ Her $0 \le i \le 9$ için $a_i \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, $6\sum_{i=0}^{9} a_i 5^i \equiv 1 \pmod{5^{10}}$ ise, a_9 aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Tüm işlemlerimizi 10 tabanı yerine 5 tabanında yaparsak, bizden istenen
$$(11)_5 \cdot (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (b_n \dots b_{10} b_9 b_8 \dots b_0) = (b_n \dots b_{10} 00 \dots 1)$$
eşitliğindeki a_i leri bulmamız. Eşitliği
$$(11)_5 \cdot (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (a_9 a_8 \dots a_0 0)_5 + (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (b_n \dots b_{10} 00 \dots 1)$$
olarak yeniden yazdığımızda 5^0 lar basamağının eşitliğinden $a_0 = 1$ olduğu hemen fark edilir. Daha sonra 5^1 ler basamağında $a_0 + a_1 = 0$ olduğu için $a_1 = 4$ olarak elde edilir. Bu işlem ilkokul toplamasındaki gibi devam ettirilerek
$$(40404040410)_5 + (4040404041)_5 = (100000000001)_5 \equiv 1 \pmod{5^{10}}$$
elde edilir. Bu durumda $a_9 = 4$ tür.

$\boxed{31}$ Birbirinin aynı olan 30 top, A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere, A, B, C, D kutularına kaç değişik biçimde dağıtılabilir?

a) 2472 **b)** 2600 **c)** 2728 **d)** 2856 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D deki topların toplam sayısından fazla olduğu S farklı dağılım olsun. Simetriden dolayı C ve D deki topların toplam sayısı, A ve B deki topların toplam sayısından fazla olduğu S farklı dağılım olur. $A+B=C+D$ olacak şekilde T farklı dağıtılım yapılıyorsa, hiçbir şart olmadan 30 top bu dört kutuya $S+T+S$ farklı şekilde dağıtılabilir.

$A+B=15$ ve $C+D=15$ olacak şekilde,

$$T=\binom{2+15-1}{15}\binom{2+15-1}{15}=\binom{16}{15}\binom{16}{15}=16\cdot 16=256$$

farklı dağıtım yapılabilir.

$A+B+C+D=30$ olacak şekilde,

$$2S+T=\binom{4+30-1}{30}=\binom{33}{30}=5456$$

farklı şekilde dağıtılacağı için

$$2S+256=5456\Rightarrow S=\frac{5200}{2}=2600$$

elde edilir.

Çözüm 2:

$P(k)$ ile $A+B=k$ olacak şekilde olan dağılımları gösterelim. Açık şekilde $P(k)=k+1$ dir. Benzer şekilde $Q(k)$ ile $C+D=k$ olacak şekilde olan dağılımları gösterelim.

A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere,

$$\sum_{i=16}^{30}P(i)Q(30-i)$$

farklı dağıtım yapılabilir.

$$S=\sum_{i=16}^{30}P(i)Q(30-i)=\sum_{i=16}^{30}(i+1)(31-i)=17\cdot 15+18\cdot 14+\cdots+31\cdot 1$$

İlk çözümdeki mantığı kullanarak,

$$T=\sum_{i=1}^{31}i(32-i)=1\cdot 31+2\cdot 30+\cdots+15\cdot 17+16\cdot 16+17\cdot 15+\cdots+30\cdot 2+31\cdot 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$S=\frac{T-256}{2}$$

olacaktır.

$$T=\sum_{i=1}^{31}i(32-i)=32\sum_{i=1}^{31}i-\sum_{i=1}^{31}i^2=32\cdot\frac{31\cdot 32}{2}-\frac{31\cdot 32\cdot 63}{6}=\frac{31\cdot 32}{2}\left(32-\frac{63}{3}\right)=31\cdot 16\cdot 11$$

$$S=\frac{T-256}{2}\Rightarrow S=\frac{31\cdot 16\cdot 11-16\cdot 16}{2}=\frac{16(31\cdot 11-16)}{2}=8\cdot(325)=2600$$

elde edilir.

Çözüm 3:

Bir önceki çözümdeki

$$S = \sum_{i=16}^{30} P(i)Q(30-i) = \sum_{i=16}^{30}(i+1)(31-i) = 17\cdot 15 + 18\cdot 14 + \cdots + 31\cdot 1$$

ifadesini daha sade bir şekilde hesaplayabiliriz.

$$\sum_{i=16}^{30}(i+1)(31-i) = \sum_{i=1}^{15}(16+i)(16-i) = \sum_{i=1}^{15} 16^2 - i^2 = 15\cdot 16^2 - \frac{15\cdot 16\cdot 31}{6} = 2600$$

$\boxed{32}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisi, her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$ koşulunu sağlıyorsa, $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

olduğu için

$a_1 = a$ ve $a_2 = b$ ise

$$a_3 = \frac{b}{a}, a_4 = \frac{1}{a}, a_5 = \frac{1}{b}, a_6 = \frac{a}{b}, a_7 = a, a_8 = b$$

elde edilir. Bu durumda $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin elemanları $a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ dan oluşur.

$a = 1, b = -1$ ise $1, -1, 1, -1, -1, -1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 2 elemanlı olacaktır.

$a = b \neq 1$ ise $a, a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 1, 1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 3 elemanlı olacaktır.

$b = a^2 \neq 1$ olduğunda $a, a^2, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, a$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 4 elemanlı olacaktır.

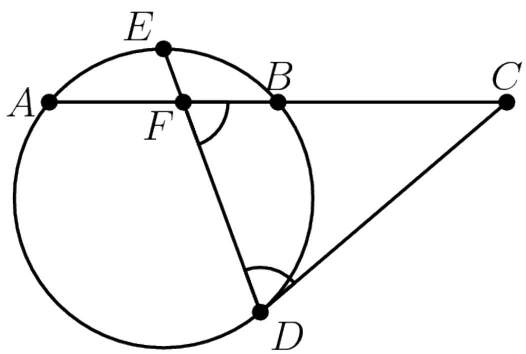
$a = -b \notin \{1, -1\}$ ise $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, -1, -1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 5 elemanlı olacaktır.

Bu durumda cevap hiçbiridir.

$\boxed{33}$ $|AC| = 8\sqrt{2}$; $[AC]$ nın orta noktası B; $[AB]$ nı kiriş kabul eden bir çemberin AB yayının orta noktası E; C noktasından bu çembere çizilen teğetin değme noktası da, (D ile E, AB doğrusunun ters taraflarında olmak üzere) D dir. $[DE] \cap [AB] = \{F\}$ ise, $|CF|$ kaçtır?

a) $5\sqrt{2}$ **b)** $4\sqrt{2}$ **c)** 8 **d)** 6 **e)** $4\sqrt{3}$

Çözüm 1:



C noktasının çembere göre kuvvetinden

$$CD^2 = BC \cdot AC = 4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 64 \Rightarrow CD = 8$$

elde edilir.

$$\angle BFD = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BD}}{2} \text{ ve } \angle CDF = \frac{\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

olduğu için

$$\angle CFD = \angle CDF \Rightarrow CF = CD = 8$$

elde edilir.

Çözüm 2:

Çemberin merkezi O olsun. $OD \perp CD$.

AB nin orta noktası M olsun.

$\overset{\frown}{AB}$ nin orta noktası E olduğu için O, M, E doğrusal ve $OE \perp AB$ dir.

$\angle OED = \angle ODE = \alpha$ dersek $\angle EFM = 90° - \alpha$ ve $\angle FDC = 90° - \alpha$ olacaktır. Bu durumda $\angle CDF = \angle CDF = 90° - \alpha$, dolayısıyla $CF = CD = \sqrt{CB \cdot CA} = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}} = 8$ elde edilir.

$\boxed{34}$ Kaç p asal sayısı için, $x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2(x-s) \pmod{p}$ denkliğinin tüm x tam sayıları tarafından gerçeklenmesini sağlayan r, s tam sayıları bulunabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2(x-s) \pmod{p}$$

$$f(r) = r^3 - r + 2 \equiv 0 \pmod{p}..*$$

$$f'(x) = 2(x-r)(x-s) + (x-r)^2 \Rightarrow f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}..**$$

$p = 3$ için
$$-1 \not\equiv 0 \pmod 3$$
olacağı için $p \neq 3$ tür.

Bu durumda denkliği 3 ile genişletmek sorun çıkarmaz.

$$3f(r) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 3r^3 - 3r + 6 \equiv (3r^2 - 1)r - 2r + 6 \equiv 0 \pmod p$$

Daha önce elde ettiğimiz $f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$ özdeşliğini kullanarak,

$$-2r + 6 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow r \equiv 3 \pmod p \text{ veya } p = 2$$

elde edilir. $r \equiv 3 \pmod p$ ise

$$f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 26 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p = 2 \text{ veya } p = 13$$

elde edilir. Sonuçta, $(p, r) = (13, 3)$ veya $(p, r) = (2, 3) \equiv (2, 1) \pmod p$ elde edilir. Vieta formülüne göre, köklerin toplamları 0 olacağı için
$$r + r + s = 0 \Rightarrow s = -2r$$
, buradan da $(p, r, s) = (13, 3, 7)$ ve $(p, r, s) = (2, 1, 0)$ çözümleri elde edilir.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (B) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

Çözüm 2:

$$x^3 - x + 2 \equiv (x - r)^2(x - s) \equiv x^3 - x^2(s + 2r) + x(r^2 + 2rs) - r^2 s \pmod p$$

$$s + 2r \equiv 0 \pmod p$$
$$r^2 + 2rs \equiv -1 \pmod p$$
$$r^2 s \equiv -2 \pmod p$$

İlk denklemden s çekilip 3. ve 2. denklemlerde yazılırsa,

$$r^3 \equiv 1 \pmod p$$

$$3r^2 \equiv 1 \pmod p$$

Taraf tarafa çıkartılırsa,

$$r^3 - 3r^2 \equiv r^2(r - 3) \equiv 0 \pmod p$$

$$r \equiv 0 \Rightarrow s \equiv 0$$

verilen eşitlikte yazılırsa

$$x^3 - x + 2 \equiv x^3 \pmod p$$

Absürt.

$$r \equiv 3 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod p \iff 26 \equiv 0 \pmod p$$

bunu da $p = 2$ ve $p = 13$ sağlayabilir, denklemlerde yerine yazılırsa çözümlerin $(p, r, s) = (13, 3, 7)$ ve $(p, r, s) = (2, 1, 0)$ olduğu görülür.

35 13 kent arasında, karşılıklı olması gerekmeyen uçak seferleri yapılıyor. $k \geq 2$ olmak üzere, A_1 den A_2 ye, A_2 den A_3 e, $\ldots$, A_{k-1} den A_k ye ve A_k den A_1 e uçak seferi varsa, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dizisine bir çevrim diyelim. Seferler hangi kentler arasında olursa olsun, bir çevrimin oluşmasını gerektiren en küçük toplam sefer sayısı kaçtır?

a) 14 **b)** 53 **c)** 66 **d)** 79 **e)** 156

Çözüm:

$A_1A_2 \ldots A_{13}$ bir 13-gen olsun. Köşegenleri ve kenarları çizelim. Bu yollara $i < j$ ise $A_i \to A_j$ olacak şekilde yön verelim. Bu durumda $\binom{13}{2} = 78$ yol vardır. Bu stratejiye göre, bir çevrimin olabilmesi için $1 < 2 < \cdots < k < 1$ gerekir. Bu mümkün değil. Demek ki, bu 78 yol hiçbir şekilde bir çevrim oluşturmuyor. Bu sayı aynı zamanda $1 \leq i < j \leq 13$ olacak şekilde yazılabilecek (i, j) sıralı çiftlerin sayısıdır. 79. çifti ele aldığımızda mecburen $i > j$ olacaktır.

36 $x_1, \ldots, x_9$ gerçel sayıları, $i = 1, 2 \ldots, 9$ için $|x_i| \leq 1$ ve $\sum\limits_{i=1}^{9} x_i^3 = 0$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum\limits_{i=1}^{9} x_i$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 1 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 3 **d)** $\frac{9}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Her $-1 \leq x_i = \sin(\alpha_i) \leq 1$ sayısı bir açının sinüsüne eşittir. Bununla birlikte

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$$

özdeşliğini kullanarak

$$\sum_{i=1}^{9} \sin(3\alpha_i) = 3\sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) - 4\sum_{i=1}^{9} \sin^3(\alpha_i)$$

elde ederiz.

$$\sum_{i=1}^{9} \sin(3\alpha_i) = 3\sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) \leq 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) \leq 3$$

elde edilir. Eşitlik hali için

$$\sin(3\alpha_1) = \sin(3\alpha_2) = \cdots = \sin(3\alpha_9) = 1 = \sin(90^\circ) = \sin(-270^\circ) \Rightarrow \alpha_i \in \{30^\circ, -90^\circ\}$$

olması gerekir. Aynı zamanda

$$\sum_{i=1}^{9} \sin^3(\alpha_i) = 0$$

olması gerektiğinden eşitlik hali

$$\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2) = \cdots = \sin(\alpha_8) = \frac{1}{2} \text{ ve } \sin(\alpha_9) = -1$$

iken sağlanır.

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2000

$\boxed{1}$ Alanı a olan bir dik üçgenin iç teğet çemberi ile, alanı b olan bir dik üçgenin çevrel çemberi aynı çember ise, $\dfrac{a}{b}$ en az nedir?

a) $3+2\sqrt{2}$ **b)** $1+\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $2+\sqrt{3}$ **e)** $2\sqrt{3}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

a yı minimum, b yi de maksimum yapacağız.

Bir çemberi içine çizilebilecek dik üçgenlerin en büyük alanlısı (b), ikizkenar dik üçgendir. Dik üçgenin hipotenüsü çemberin çapı olacağı için tüm dik üçgenlerin hipotenüsleri aynıdır. Alanı en çok yapmak için hipotenüse ait yüksekliği en çok yapmak gerekiyor. Hipotenüse ait yükseklik en fazla bir yarıçap kadar olabilir. Bu durumda çemberin yarıçapına r dersek, $b = r^2$ olacaktır.

Alanı a olan dik üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapını r olarak tanımlamıştık. Bu durumda u yarıçevreyi göstermek üzere; $a = ur$ olacaktır.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{ur}{r^2} = \dfrac{u}{r}$ değerini küçültmeye çalışacağız.

Üçgenin kenarlarına da a, b, c diyeceğimiz için soruda $a = A$ ve $b = B$ değişikliğini yapalım.

Bu durumda bizden

$$\frac{A}{B} = \frac{u}{r} = \frac{u}{u-a} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{u}} = \frac{1}{1-\dfrac{2a}{a+b+c}}$$

ifadesini minimize etmemiz isteniyor.

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{1-\dfrac{2}{1+\dfrac{b+c}{a}}} = \frac{1}{1-\dfrac{2}{1+\dfrac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{b^2+c^2+2bc}{b^2+c^2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}}}$$

olacağından $\dfrac{A}{B}$ yi en küçük yapmak için, son ifadedeki paydayı, yani

$$1-\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}}$$

ifadesini en büyük yapmak gerekir. Bunun için de, paydadaki çıkan durumundaki

$$\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}}$$

ifadesi en küçük değerini almalı. Bu ifadenin en küçük değerini alması için paydanın, yani

$$1+\sqrt{1+\frac{2bc}{b^2+c^2}}$$

ifadesinin en büyük değerini, yani

$$\frac{2bc}{b^2+c^2}$$

ifadesinin en büyük değerini alması gerekir. $AO \geq GO$ olduğu için

$$b^2+c^2 \geq 2bc \Rightarrow 1 \geq \frac{2bc}{b^2+c^2}$$

olacağından

$$\frac{2bc}{b^2+c^2}$$

ifadesi en fazla 1 olabilir. Eşitlik ise $b = c$, yani üçgen ikizkenar olduğunda mümkündür. Bu durumda r yarıçaplı çemberi iç teğet çemberi kabul eden en küçük alanlı dik üçgen, ikizkenar dik üçgendir.

$$\frac{2bc}{b^2+c^2} = 1$$

değerini yerine yazarsak,

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{1-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$$

elde ederiz.

Çözüm 2:

a yı minimum, b yi de maksimum yapacağız.

Bir çemberin içine çizilebilecek dik üçgenlerin en büyük alanlısı (b), ikizkenar dik üçgendir.

İspat: Dik üçgenin hipotenüsü çemberin çapı olacağı için tüm dik üçgenlerin hipotenüsleri aynıdır. Alanı en çok yapmak için hipotenüse ait yüksekliği en çok yapmak gerekiyor. Hipotenüse ait yükseklik en fazla bir yarıçap kadar olabilir. Bu durumda çemberin yarıçapına r dersek, üçgen ikizkenar dik üçgen olur. Dolayısıyla $b = r^2$ olacaktır.

Alanı a olan dik üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapını r olarak tanımlamıştık. Bu durumda u yarıçevreyi göstermek üzere; $a = ur$ olacaktır.

$\frac{a}{b} = \frac{ur}{r^2} = \frac{u}{r}$ değerini küçültmeye çalışacağız.

$\angle YXZ = 90^\circ$ olmak üzere $YZ = x$ dersek; $u - x = r \Rightarrow u = x + r$ olacağı için $\frac{a}{b} = \frac{u}{r} = \frac{x+r}{r} = 1 + \frac{x}{r}$ elde edilir.

Bu durumda herhangi bir dik üçgende hipotenüsün içteğet çemberin yarıçapına oranının en küçük değerini bulmaya çalışacağız. Kolaylık olması açısından $r = 1$ kabul edersek, $\frac{a}{b} = x + 1$ olacaktır.

Üçgenin iç merkezi I olsun. YIZ üçgenlerinin ortak özelliği $\angle YIZ = 135^\circ$ ve YZ ye ait yüksekliğin $r = 1$ olmasıdır. Buradaki sorunun sonucu olarak, bu üçgenlerden en küçük $YZ = x$ kenarına sahip olanı ikizkenar üçgendir. Bu durumda XYZ dik üçgeni de ikizkenar olur. İkizkenar dik üçgende $r = 1$ ise $YZ = x = 2(1+\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$ olur.

Öyleyse, $\frac{a}{b} = x + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$ dir.

Çözüm 3:

Bir önceki çözümdeki gibi büyük dik üçgenimiz YZ hipotenüs olmak üzere $\triangle XYZ$ olsun.

İç teğet çemberin merkezi I, yarıçapı r olsun. İç teğet çember hipotenüse T noktasında dokunsun.

Önceki çözümlerdeki gibi $\max\{b\} = r^2 = 1$ olacaktır.

Dik üçgenlerde $a = \text{Alan}(XYZ) = YT \cdot TZ$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülebilir.

Demek ki, amacımız $YT \cdot TZ$ çarpımını en küçük yapmak.

Yine bir önceki çözümdeki YIZ üçgenlerinin ortak özelliği $YIZ = 135^\circ$ ve YZ ye ait yüksekliğin $r = 1$ olması. Buradaki sorunun sonucu olarak, $\angle YIZ$ geniş açı olduğu için, $YT \cdot TZ$ çarpımının en küçük olduğu üçgen ikizkenardır.

$YT = TZ = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \min\{a\} = (1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ elde edilir.

Çözüm 4:

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{1 + \dfrac{b+c}{a}}}$ kısmına kadar ilk çözümdeki adımları uygulayalım.

Amacımız $\dfrac{b+c}{a}$ yı maksimize etmek. a yı sabit tutarsak, a kenarını gören açı da sabit, 90°, olduğu için $b+c$ nin en büyük değerini arıyoruz. Bu da $b = c$, üçgen ikizkenar iken olur.

Çözüm 5:

Çemberin yarıçapı 1 olsun.

$\max b = 1$ olacaktır. $\min a$ yı araştırıyoruz

İçteğet çember hipotenüsü x ve y şeklinde ikiye bölsün.

Alandan ya da Pisagor'dan $(x+1)(y+1) = 2xy = 2a$ elde ederiz.

Biraz düzenlemeyle $x + y + 1 = xy = a$ elde edilir.

$x = p + 1$, $y = q + 1$ şeklinde değişken değiştirelim.

$p + q + 3 = (p+1)(q+1) = a$ olacaktır.

Biraz düzenlemeyle $pq = 2$ olacaktır.

$p + q$ toplamının en küçük değeri $2\sqrt{2}$, dolayısıyla $\min a = \min(p + q + 3) = 3 + 2\sqrt{2}$ olacaktır.

2 Aşağıdakilerden hangisi tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz?

a) 23 **b)** 24 **c)** 25 **d)** 28 **e)** 33

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesi mod4 te, 0 ya da 1 değerini alabilir. Bu durumda

$$23 \equiv 3 \not\equiv 1 \not\equiv 0 \pmod 4$$

olduğu için tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı 23 olamaz.

3 $0, 1, 2, \dots, 9$ sayılarını, tek sayılar kendi içlerinde, çift sayılar da yine kendi içlerinde artan olmak koşuluyla, kaç değişik biçimde sıralayabiliriz?

a) 126 **b)** 189 **c)** 252 **d)** 315 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Tek sayıları kırmızıya, çift sayıları maviye boyayalım. Örnek bir dağılımda, tek sayıları kendi içlerinde yeniden sıralayıp, yeni dağılımlar oluşturamıyoruz; çünkü tek sayılar artan olmak koşuluyla tek bir şekilde sıralanabilir. Aynısı çift sayılar için de geçerli. Bu durumda tek sayıları özdeş kırmızı top, çift sayıları özdeş mavi top gibi düşünebilir. 5 kırmızı top, 5 mavi top $\dfrac{10!}{5!5!} = 252$ farklı şekilde sıralanabilir.

4 $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$ denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı nedir?

a) $\dfrac{18}{7}$ **b)** $\dfrac{71}{4}$ **c)** $\dfrac{9}{4}$ **d)** $\dfrac{24}{19}$ **e)** $\dfrac{13}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$$x^{\frac{3x}{2}} = x^{x^{\frac{3}{2}}}$$

eşitliğinde her iki tarafın log unu alalım.

$$\frac{3x}{2}\log x = x^{\frac{3}{2}}\log x \Rightarrow \log x\left(\frac{3x}{2} - x^{\frac{3}{2}}\right) = x\log x\left(\frac{3}{2} - x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$x = 0$ için 0^0 tanımsız olduğu için, $x = 0$ bir kök değildir. Olsaydı da, gerçel köklerin toplamına etki etmeyecekti.

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1$$

ve

$$\frac{3}{2} - x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

olduğundan denklemin gerçel kökleri toplamı

$$1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

tür.

5 Bir ABC üçgeninde $[BD]$ kenarortay, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$, $|AB| = 2$ ve $|AC| = 6$ ise, $|BC|$ nedir?

a) 3 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** 5 **d)** $4\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{6}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

D den AB ye çizilen paralel BC yi E de kessin. $BE = EC$ ve $DE = 1$ olacaktır. $\triangle ABD$ de Pisagordan, $BD = \sqrt{5}$; $\triangle BDE$ de Pisagordan $BE = \sqrt{6}$ çıkacaktır. Bu durumda $BC = 2\sqrt{6}$ olur.

6 $\sqrt{17p + 625}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir?

a) 3 **b)** 67 **c)** 101 **d)** 151 **e)** 211

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$17p + 625 = T^2 \Rightarrow 17p = (T - 25)(T + 25)$

$T - 25 \neq 1$ ise, $(T - 25)(T + 25)$ sayısının en az iki asal çarpanı olacak.

Bu durumda $T + 25 > 17$ olduğu için, $T - 25 = 17$ ve $T + 25 = p$ olmalı. Bu durumda, $T = 42$ ve $p = 67$ olacaktır.

$T - 25 = 1$ ise, $T = 26$ ve $17p = (T + 25) = 51 \Rightarrow p = 3$ elde edilecektir.

Bu durumda, $17p + 625$ sayısının tam kare olmasını sağlayan en büyük asal sayı 67 olacaktır.

7 A, B, C, D ve E den bazıları doğrucu, bazıları da yalancıdır. Doğrucuların her söylediği doğru; yalancıların ise, her söylediği yalandır. A nın doğrucu olduğunu ve diğerlerinin de aşağıdaki önermeleri söylediğini biliyoruz:

B : Ben doğrucuyum.

C : D, doğrucudur.

D : B ve E ikisi birden doğrucu değildir.

E : A ve B doğrucudur.

Bu toplulukta toplam doğrucu sayısı nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Veriler yetersizdir

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

A doğrucu olduğu için, E nin doğrucu olması B nin doğrucu olmasına bakıyor. Yani B doğrucu ise, E doğrucu; B yalancı ise E de yalancı olacaktır.

B doğrucu olsun. Bu durumda D nin söylediği yalan oluyor. D yalancı olduğu için de C yalancı oluyor. Bu durumda doğrucu sayısı 3 tür.

B yalancı olsun. Doğal olarak E yalancı ve D de doğrucu olacak. D doğrucu olduğu için de C doğrucu olacak. Doğrucu sayısı yine 3 oluyor.

8

$$\begin{aligned} (x+y)^5 &= z \\ (y+z)^5 &= x \\ (z+x)^5 &= y \end{aligned}$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x \geq y \geq z$ olsun.

$(x+y)^5 \geq (z+x)^5 \geq (y+z)^5$ olacaktır.

Sistemdeki eşitlikleri bu eşitsizlikte yerine yazarsak.

$$z \geq y \geq x$$

elde ederiz. Baştaki kabulümüzün tam tersi çıktı. Bu durumda $x = y = z$ dir. Bu eşitliği sistemde yerine yazarsak,

$$(2x)^5 = x$$

denklemini elde ederiz.

$$32x^5 - x = 0 \Rightarrow x(32x^4 - 1)$$

denkleminin köklerinden biri $x = 0$ dır. Diğerleri ise,

$$x^2 = \sqrt{\frac{1}{32}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{1}{32}}}$$

dir. Yani, sistemin çözüm kümesi

$$\{(0,0,0),(2^{-\frac{5}{4}},2^{-\frac{5}{4}},2^{-\frac{5}{4}}),(-2^{-\frac{5}{4}},-2^{-\frac{5}{4}},-2^{-\frac{5}{4}})\}$$

dir.

9 $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90°$, $m(\widehat{C}) = 120°$, $|AB| = 2$, $|BC| = |CD| = \sqrt{3}$ ve $|ED| = 1$ olduğuna göre, $|AE|$ nedir?

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\sqrt{3}-1$ **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

BA ile DE doğruları F de kesişsin.

$\triangle BCD$ de, $\angle CBD = \angle CDB = 30°$ ve $BD = 3$ dir.

$\angle ABD = \angle BDE = 60°$ olduğu için, $\triangle FBD$ bir eşkenar üçgendir. Bu durumda $FB = 1$ ve $FE = 2$ dir.

$\triangle AFE$ de ister Kosinüs teoreminden, isterse de doğrudan AFE üçgeninin bir $30°-60°-90°$ üçgeni olduğunu fark ederek $AE = \sqrt{3}$ bulabiliriz. Biraz daha estetik bir yol izleyelim.

A dan BD ye çizilen paralel FD yi G de kessin. $FA = AG = FG = GE = 1$ ve $\angle AGE = 120°$ olduğu için, $AE = \sqrt{3}$ tür.

10 On tabanına göre yazılımı 50 basamaklı olan bir N tam sayısının soldan 26. basamağı dışındaki bütün basamaklarında 1 rakamı bulunuyor ve N, 13 ile bölünüyorsa, N nin yazılımında soldan 26. rakam nedir?

a) 1 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 8 **e)** Veriler yetersizdir

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$N = 10^{49} + 10^{48} + \cdots + 10^{25} + a \cdot 10^{24} + 10^{23} + \cdots + 1$ ise, amacımız a yı bulmak. Biraz düzenlemeyle

$$\begin{aligned} N &= (1 + 10^2 + \cdots + 10^{49}) + (a-1)10^{24} \\ &= \frac{10^{50}-1}{9} + (a-1)10^{24} \end{aligned}$$

elde edilir. $A = \dfrac{10^{50}-1}{9} \Rightarrow 9A = 10^{50} - 1$ olsun.

Fermat'ın Küçük Teoreminden $10^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğu için,

$$9A \equiv 10^{50} - 1 \equiv 100 - 1 \equiv 99 \equiv 8 \pmod{13}$$

tür.

$9A \equiv 8 \pmod{13}$ denkliğinin çözümü $A = 11$ dir. Bu durumda,

$$N = \frac{10^{50}-1}{9} + (a-1)10^{24} = A + (a-1)10^{24} \equiv 11 + a - 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{13}$$

elde ederiz.

11 7 kırmızı, 7 beyaz topu, her kutuda tam olarak 2 top olması koşuluyla, 7 kutuya kaç değişik biçimde dağıtabiliriz?

a) 163 **b)** 393 **c)** 858 **d)** 1716 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Önce kırmızı topları dağıtalım. Tüm kırmızı toplar dağıtıldıktan sonra, toplamda 14 top olacağı için geri kalan 7 top, 7 boşluğa tek bir şekilde dağıtılır. Yani soru, "7 topu 7 kutuya, her kutuda en fazla 2 top olacak şekilde kaç değişik biçimde dağıtırız?" oldu.

Kırmızı toplar kutulara ($(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ ile her kutunun içindeki kırmızı top sayısını gösteriyoruz),

Hiçbir kutuda 2 kırmızı top olmayacak şekilde $((1,1,1,1,1,1,1))$ $\frac{7!}{7!} = 1$ değişik biçimde,

tam olarak 1 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2,1,1,1,1,1,0))$ $\frac{7!}{5!1!1!} = 42$ değişik biçimde,

tam olarak 2 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2,2,1,1,1,0,0))$ $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ değişik biçimde,

tam olarak 3 kutuda 2 kırmızı top olacak şekilde $((2,2,2,1,0,0,0))$ $\frac{7!}{3!3!} = 140$ değişik biçimde dağıtılır.

Yani toplamda, $1 + 42 + 210 + 140 = 393$ farklı şekilde dağıtılır.

12 (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için $|a_n| = |a_{n-1} + 2|$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum\limits_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

a) -4000 **b)** -3000 **c)** -2000 **d)** -1000 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

(a_n) bir tam sayı dizisidir.

Verilen mutlak değerli denklemde her iki tarafın karesini alalım:

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_{n-1}^2 + 4a_{n-1} + 4 \\ a_{n-1}^2 &= a_{n-2}^2 + 4a_{n-2} + 4 \\ &\vdots \\ a_2^2 &= a_1^2 + 4a_1 + 4 \end{aligned}$$

olacaktır. Taraf tarafa topladığımızda,

$$a_n^2 = a_1^2 + 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 4(n-1)$$

olacaktır.

$n = 2001$ ve $a_1 = 1$ için,

$$a_{2001}^2 = 1 + 4\sum_{i=1}^{2000} a_i + 8000 \geq 0 \Rightarrow 4\sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -8001 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -2000$$

olacaktır. Peki, $\sum\limits_{i=1}^{2000} a_i = -2000$ eşitliğini sağlayan bir (a_n) dizisi var mıdır?

Mutlak değerli eşitliği, her seferinde

$$a_n = -a_{n-1} - 2$$

şeklinde çözersek,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -3 \\ a_3 &= 1 \\ a_4 &= -3 \\ &\vdots \\ a_{1999} &= 1 \\ a_{2000} &= -3 \end{aligned}$$

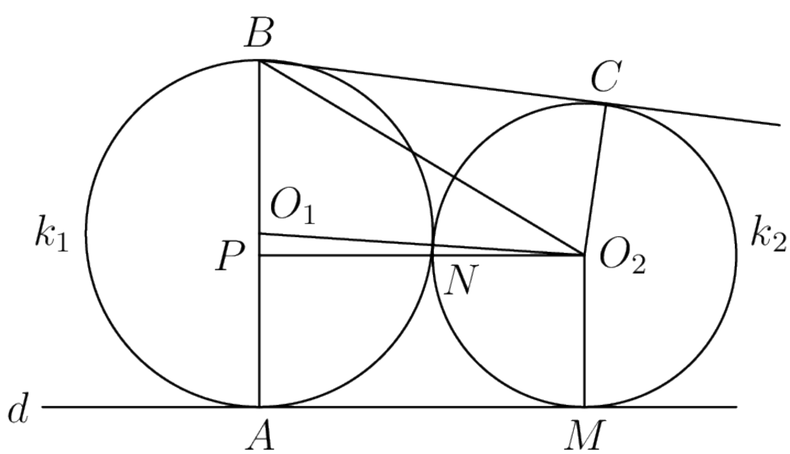
elde ederiz. Bu durumda $\sum\limits_{i=1}^{2000} a_i = -2000$ dir.

13 Birbirine dıştan teğet olan k_1 ve k_2 çemberlerinin ortak dış teğet doğrularından biri d olsun. d nin k_1 çemberine değdiği nokta A, k_1 çemberinin A dan geçen çapı $[AB]$, B noktasından k_2 çemberine çizilen teğetin değme noktası C ile gösterilmek üzere, $|AB| = 8$ ve k_2 çemberinin çapı 7 ise, $|BC|$ nedir?

a) 7 **b)** $6\sqrt{2}$ **c)** 10 **d)** 8 **e)** $5\sqrt{3}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$



k_1 ve k_2 çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. d doğrusu, k_2 çemberine M noktasında dokunsun. Çemberler teğet olduğu için

$$O_1O_2 = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

dir. O_1AMO_2 bir dik yamuktur. O_2 den O_1A ya inilen dikmenin ayağı P olsun.

$$O_1P = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} BO^2 &= BP^2 + O_2P_2 = BC^2 + O_2C^2 \Rightarrow \\ BC^2 &= BP^2 + O_2P^2 - OC^2 \Rightarrow \\ BC^2 &= \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 64 \Rightarrow \\ BC &= 8. \end{aligned}$$

NOT:

$AB = a$ ve $O_2C = b$ olsaydı,

$$BC^2 = \left(\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} - b)\right)^2 + \left((\frac{a}{2} + b)^2 - (\frac{a}{2} - b)^2\right) - (b)^2 = a^2 \Rightarrow BC = a$$

olacaktı. Demek ki, BC uzunluğu, k_2 nin çapından bağımsız olarak, her zaman AB ye eşit.

Çözüm 2:

İki çember N noktasında birbirlerine dokunsun. O_1, N, O_2 nin doğrusal olduğunu söylemek çok da zor değil. Şimdi de BN ve NM doğru parçalarını çizelim. $O_2M \parallel O_1A$ olduğu için $\angle BO_1N = \angle NO_2M$ dir. $\triangle BO_1N$ ve $\triangle NO_2M$ nin ikisi de ikizkenardır. Bu durumda $\angle O_2NB = \angle O_1NM$ olacak, bu da B, N, M noktalarının doğrusal olmasını gerektirecek. AB çap olduğu için, $AN \perp BM$ olacak. Öklit'ten $AB^2 = BN \cdot BM$ ve BC nin k_2 teğet olmasından $BC^2 = BC \cdot BM$ olacağı için, $BC = AB$ dir.

14 $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir?

a) 81 **b)** 61 **c)** 41 **d)** 21 **e)** 01

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$(100, 9) = 1$ ve $\varphi(100) = 40$ olduğu için

$$9^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$

olacaktır. Bu durumda

$$8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \equiv x \pmod{40}$$

denkliğini çözmemiz gerekiyor.

$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \pmod{40} \\ 8^2 &\equiv 24 \pmod{40} \\ 8^3 &\equiv 32 \pmod{40} \\ 8^4 &\equiv 16 \pmod{40} \\ 8^5 &\equiv 8 \pmod{40} \end{aligned}$$

ve

$$7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \equiv (-1)^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} = 1 \pmod{4}$$

olduğu için

$$8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \equiv 8 \pmod{40}$$

ve

$$9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} \equiv 9^{40k+8} \equiv 9^8 \equiv 81^4 \equiv 19^4 \equiv 61^2 \equiv 21 \pmod{100}$$

olur.

15 A, B ve C, aralarında tavla oynarlar. Önce A ile B karşılaşır, kazanan C ile oynar. Bundan sonra, parti devam ettiği sürece, oynanan son oyunu kazanan, o karşılaşmada oynamayan üçüncü kişi ile karşılaşır. Oyunculardan biri art arda iki kez kazanınca, parti sona erer ve ardışık iki oyunu kazanan partinin galibi olur. Her oyunda iki tarafın da kazanma olasılığı eşit ise, C nin partiyi kazanma olasılığı nedir?

a) $\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{3}{14}$ **d)** $\frac{1}{7}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

A ilk maçı kazanırsa, A nın partiyi kazanma olasılığı

$$P_1(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{4 \cdot 8^k} + \ldots$$

olacaktır.A ilk maçı kaybederse, A nın partiyi kazanma olasılığı

$$P_0(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots + \frac{1}{16 \cdot 8^k} + \ldots$$

olacaktır. A nın turnuvayı kazanma olasılığı

$$P(A) = P_1(A) + P_0(A) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8^k} + \ldots\right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{14}$$

tür. Benzer şekilde, $P(B) = P(A) = \frac{5}{14}$ olacağı için, $P(C) = 1 - \frac{5}{14} - \frac{5}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ olur.

Çözüm 2:

C ilk maçını kayberderse, onu yenen oyuncu ikinci galibiliyetini almış olacağı için parti sona erer. Yani, C nin partiyi kazanması için ilk maçını mutlaka kazanması gerekiyor ($\frac{1}{2}$). C, bundan sonraki maçını, yani ikinci maçını kazandığında ($\frac{1}{2}$) partiyi kazanmış olacak. İkinci maçı kaybettiğinde ($\frac{1}{2}$), bir maç bekleyecek ve kendisini yenenin kaybetmesi için dua edecek. Aksi takdirde, kendisini yenen, peşpeşe iki maç kazanmış olacak ki, bu da partiyi sonlandırır. Kendisini yenen ikinci oyununu kaybettiğinde ($\frac{1}{2}$), C için her şey başa dönmüş olacak. Bu durumu,

$$P(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P(C)\right) \Rightarrow P(C) = \frac{2}{7}.$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$\boxed{16}$ $(2 + (2 + (2 + x)^2)^2)^2 = 2000$ denkleminin gerçel kökleri toplamı nedir?

a) -4 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 2 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$(x + 2)^2$ pozitif olduğu için,

$$\begin{aligned} \sqrt{2000} - 2 &= (2 + (2 + x)^2)^2 \\ \sqrt{\sqrt{2000} - 2} - 2 &= (2 + x)^2 = x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

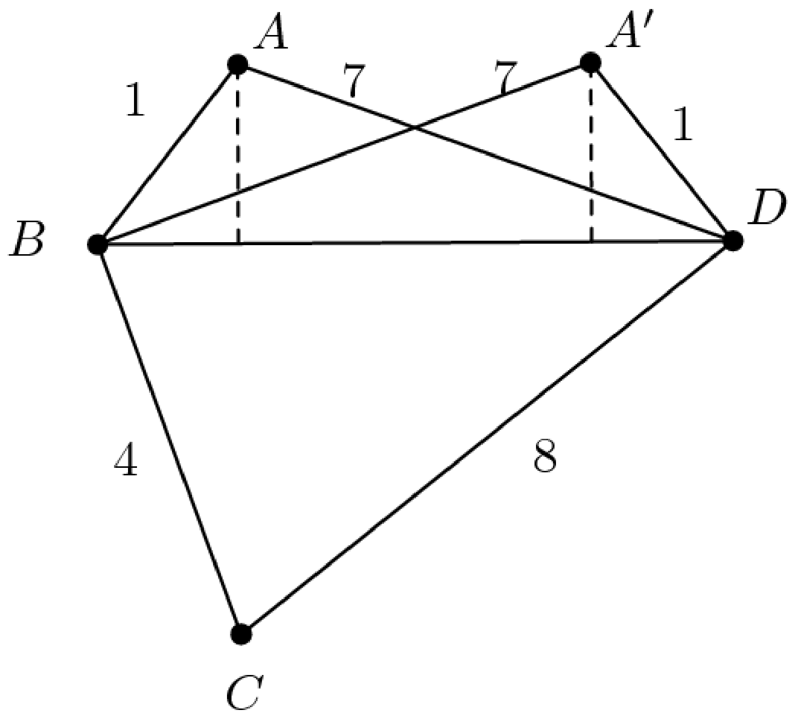
ikinci dereceden denkleminin kökler toplamı -4 tür.

$\boxed{17}$ Kenar uzunlukları $1, 4, 7, 8$ olan bir dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?

a) $7\sqrt{2}$ **b)** $10\sqrt{3}$ **c)** 18 **d)** $12\sqrt{3}$ **e)** $9\sqrt{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$



4 ile 7 ardışık iki kenar değilse, uzunluğu 1 olan kenar 4 ile 7 arasındadır. Bu durumda $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$, $AD = 7$ olsun.

$AB = A'D$ olacak şekilde $AA'DB$ ikizkenar yamuğunu çizelim. $A'B = 7$, $A'D = 1$ ve $[A'BD] = [ABD] \Rightarrow [ABCD] = [A'BCD]$ olacaktır. Bu durumda 4 ile 7 ardışık iki kenar oldu. Kenarları 4 ile 7 olan bir üçgenin alanı en çok $\dfrac{4 \times 7}{2} = 14$ olabilir. Kenarları 1 ile 8 olan bir üçgenin alanı en çok $\dfrac{1 \times 8}{2} = 4$ olabilir. Bu durumda

$$[ABCD] = [A'BCD] \leq 4 + 14 = 18$$

olacaktır. Eşitliğin sağlanması için, 4 ile 7 arasındaki açı 90° ve 1 ile 8 arasındaki açı da 90° olması gerekir. Bunun olabilmesi için $7^2 + 4^2 = 65 = 1^2 + 8^2$ olması gerekir ki, bu da mümkün. Demek ki, kenarları $1, 4, 7, 8$ olan bir dörtgenin alanı en çok 18 olabilir.

Çözüm 2:

Kenarları sabit olan dörtgenler arasında en büyük alanlısı, kirişler dörtgenidir. Bir kirişler dörtgeninin alanı da Brahmagupta Formülü ile bulunur. $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ olmak üzere,

$$[ABCD] = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

dir. Soruda verilenleri yerine yazarsak,

$$p = 10 \text{ ve } [ABCD] = \sqrt{(10-1)(10-4)(10-7)(10-8)} = 18$$

elde ederiz.

Şimdi de isterseniz, yukarıdaki sonuca nasıl varıldığını açıklayalım:

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $\angle ABC = \alpha$ ve $\angle CDA = \beta$ olsun.

Kosinüs Teoreminden,

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

olur. Her iki tarafı 2 ye bölüp, her iki tarafın karesini alalım.

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 = a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta - 2abcd\cos\alpha\cos\beta \tag{1}$$

Şimdi de $ABCD$ dörtgeninde alanı yazalım.

$$A = \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin\beta}{2} \Rightarrow 4A^2 = a^2b^2\sin^2\alpha + c^2d^2\sin^2\beta + 2abcd\sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

elde edilir. (1) ile (2) yi taraf tarafa toplarsak $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ve $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ olacağından

$$a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\beta) = 4A^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 \tag{3}$$

elde edilir. a, b, c, d verildiği için maksimum alan için $\cos(\alpha+\beta)$ değeri minimum olmalı. Yani $\alpha+\beta = 180^\circ$ olmalı. Bu da $ABCD$ nin kirişler dörtgeni olduğunu gösterir. (3) yeniden düzenlersek

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd = 4A^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 \Rightarrow (ab+cd)^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 = 4A^2.$$

İki kare farkından yararlanarak

$(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) = 16A^2$

$\Rightarrow \left((a+b)^2 - (c-d)^2\right)\left((c+d)^2 - (a-b)^2\right) = (b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d).$

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ise

$$16A^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) \Rightarrow A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

elde edilir.

Çözüm 3:

1 ile 8 yan yana ise alanın en büyük değeri $\dfrac{1\times 8 + 4\times 7}{2} = 18$ olabilir. $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ olduğu için de 1 ile 8 arasındaki ve 4 ile 7 arasındaki açılar 90° olabilir.

1 ile 8 yan yana değilse karşılıklıdır. Bu durumda karşılıklı kenarların kareleri toplamı birbirine eşit olduğu için bu durumdaki dörtgenin köşegenleri dik kesişir. Ptolemy eşitsizliğinden köşegenlerin çarpımı en çok karşılıklı kenarların çarpımı olabileceği için alan en fazla $\dfrac{1\times 8 + 4\times 7}{2} = 18$ olabilir.

Çözüm 4:

Bkz. Bretschneider alan formulü

Ayrıca bkz. Çevresi sabit dörtgende max köşegenler çarpımı

Çözüm 5:

bkz. Matematik Dünyası, Şubat 2000 sayısında A203 nolu soru.

Çözüm için bkz. Matematik Dünyası, Temmuz 2000

18 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tam sayısı nedir?

a) 101 **b)** 105 **c)** 111 **d)** 119 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1 \equiv 0 \pmod{77} \Rightarrow 2^{n+1}-1 \equiv 0 \pmod{7} \wedge 2^{n+1}-1 \equiv 0 \pmod{11}$$

Söz konusu denklikleri sağlayan en küçük n değerleri

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n+1 = 3p$$

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n+1 = 10q$$

şeklinde bulunur. Sonuçları birleştirdiğimizde

$$n+1 = 30k \Rightarrow n = 30k-1$$

olduğu için en küçük $n \geq 100$ sayısı 119 dur.

NOT:

$\varphi(77) = 60$ olduğunu fark edip, $2^{60} \equiv 1 \pmod{77} \Rightarrow n = 120-1 = 119$ şeklinde bir çözüm yanlış olacaktır. $\varphi(77)$, bize $2^x \equiv 1 \pmod{77}$ denkliğini sağlayan en küçük x değerini vermez. Sadece $x|\varphi(77)$ olduğunu söyler. Soru bize $n \geq 200$ olarak verseydi, $\varphi(77)$ den sonuca gitmeye çalışan biri $n = 239$ bulacaktı ki, yukarıda yaptığımız çözüme göre $n = 209$ olurdu.

19 Kenar uzunlukları 3, 7 ve 8 olan bir üçgenin içinde gelişigüzel alınan bir noktadan, köşelerden en az birine olan uzaklığı 1 den küçük olması olasılığı nedir?

a) $\frac{\pi}{36}\sqrt{2}$ **b)** $\frac{\pi}{36}\sqrt{3}$ **c)** $\frac{\pi}{36}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{3}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Köşeleri merkez alarak 1 yarıçaplı çember yaylarını üçgen içerisinde kalacak şekilde çizelim. Bu üç eş yarıçaplı yayın ölçüleri toplamı 180° olduğu için, bu üç yay bir yarım çember yapar. Bu çemberin alanı $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$ dir. Üçgenin alanı da (Heron Formülü) $\sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}$ olduğu için seçilen bir noktanın bu üç çember parçasının içerisinde olma olasılığı

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{36}\sqrt{3}$$

olur.

20 $p(x)$ tüm kökleri gerçel olan ve her x gerçel sayısı için $p(x^2-1) = p(x)p(-x)$ eşitliğini sağlayan bir polinom ise, $p(x)$ in derecesi en fazla kaç olabilir?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** $p(x)$ in derecesi için üst sınır yoktur. **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$p(x) = x^{2n}(x+1)^{2n}$ polinomu verilen eşitliği sağlar.

$$p(x^2-1) = (x^2-1)^{2n}(x^2)^{2n} = (x-1)^{2n}x^{2n}(x+1)^{2n}x^{2n} = (-x+1)^{2n}(-x)^{2n}(x+1)^{2n}x^{2n} = p(-x)p(x)$$

Çözüm 2:

$\alpha_i \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

polinomu tüm kökleri gerçel olan n. dereceden bir polinomdur.

$$p(x^2-1) = (x^2-1-\alpha_1)(x^2-1-\alpha_2)\dots(x^2-1-\alpha_n)$$

ve

$$p(x)p(-x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)(-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2)\dots(-x-\alpha_n)$$

ifadelerini sorudaki eşitlikte yerine yazarsak

$$(x^2-1-\alpha_1)(x^2-1-\alpha_2)\dots(x^2-1-\alpha_n) = (-1)^n(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)\dots(x^2-\alpha_n^2)$$

elde ederiz.

n çift olduğunda

$$x^2-1-\alpha_i = x^2-\alpha_i^2$$

eşitliğini sağlayan α_i gerçel sayısı varsa, polinomun derecesi n için bir üst limit olmayacak. Gerçekten de

$$\alpha_i^2-\alpha_i-1=0$$

denkleminin iki gerçel kökü vardır. α bunlardan biri ise

$$p(x) = (x-\alpha)^{2n}$$

polinomu soruda verilen eşitliği her zaman sağlar. Bu durumda $p(x)$ in derecesi için bir üst sınır yoktur.

21 Bir $ABCD$ dışbükey kirişler dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$, $|AB| = 26$ ve $|BC| = 10$ ise, DAC üçgeninin alanı nedir?

a) 120 **b)** 108 **c)** 90 **d)** 84 **e)** 80

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$ABCD$ kirişler dörtgeninde $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$ ve $\angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$ olduğu için $\triangle ABD$ ikizkenar dik üçgendir. $AB = 26 \Rightarrow AD = 13\sqrt{2}$.

$\angle ADC$ geniş açı olduğu için A dan CD ye inilen yükseklik üçgenin dışındadır. Bu yükseklik CD yi E de kessin. $\angle ADE = \angle ABC$ olduğu için

$$\triangle ADE \sim ABC \Rightarrow AE = 12\sqrt{2} \text{ ve } DE = 5\sqrt{2} \Rightarrow CD = 7\sqrt{2}$$

elde edilir.

$$[DAC] = \frac{DC \cdot AE}{2} = \frac{12\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}}{2} = 84$$

Çözüm 2:

Pisagordan $AC = 24$ ve $\triangle ABD$ ikizkenar dik üçgeninden $AD = BD = 13\sqrt{2}$ dir. Ptolemy'den

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC \Rightarrow 26 \cdot CD + 10 \cdot 13\sqrt{2} = 24 \cdot 13\sqrt{2} \Rightarrow CD = 7\sqrt{2}$$

olur.

$$[DAC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin\angle ACD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 84$$

22

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 &= 0 \\ 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$$\begin{array}{rrcl} 5/ & 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 & = & 0 \\ -3/ & 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 & = & 0 \\ \hline & -y^2 + z^2 + 48 & = & 0 \end{array}$$

Bu durumda

$$y^2 - z^2 = 48 \Rightarrow (y - z)(y + z) = 48$$

elde edilir.

y ve z pozitif tam sayılar ve $(y - z) + (y + z) = 2y$ sayısı çift sayı olduğu için, 48 i toplamları çift olmak üzere,

$$48 = 2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

3 farklı şekilde çarpanlarına ayırabiliriz. Bu durumda, olası çözümler

$$\begin{array}{lclclcl} y & = & 13 & z & = & 11 \\ y & = & 8 & z & = & 4 \\ y & = & 7 & z & = & 1 \end{array}$$

den ibarettir. İlk denklemden

$$3x^2 = 2y^2 + 4z^2 - 54 = 2y^2 - 2z^2 + 6z^2 - 54 = 2 \cdot 48 + 6z^2 - 54 \Rightarrow x^2 = 2(7 + z^2)$$

elde edilir.

$2(7 + z^2)$ in bir tam kare olabilmesi için z nin tek sayı olması gerekir ki, bu da denenecek ihtimalleri ikiye indirir.

$y = 13, z = 11$ için

$$x^2 = 2(7 + 11^2) = 256 \Rightarrow x = 16$$

$y = 7, z = 1$ için

$$x^2 = 2(7 + 1^2) = 16 \Rightarrow x = 4$$

Yani **ÇK**$= \{(4, 7, 1), (16, 13, 11)\}$ dir.

23 20 kişilik bir komite, A, B, C adayları arasından bir seçim yapmak için değişik türden bir oylamaya başvurur. Her komite üyesi, adaylara ilişkin tercih sıralmasını, herhangi iki aday arasında çekimser kalmaksızın, oy pusulasına yazar. (Örneğin, pusulaya BAC yazan üye, B yi A ya ve C ye; A yı da C ye tercih ediyor demektir.) Oy pusulaları açılınca, üç adayın altı değişik sıralanışından her birinin en az bir pusulada geçtiği ve tam olarak 11 üyenin A yı B ye; 12 üyenin C yi A ya; 14 üyenin de B yi C ye tercih ettiği görülür. Kaç komite üyesinin birinci tercihi B dir?

a) 5 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 10 **e)** Veriler yetersizdir

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\begin{cases} x = (ABC), y = (BAC), z = (CAB), \\ x' = (ACB), y' = (BCA), z' = (CBA). \end{cases}$$

olsun.

$$\begin{aligned} x + x' + z &= 11 \\ z + z' + y' &= 12 \\ y + y' + x &= 14 \end{aligned}$$

olacaktır. Taraf tarafa toplarsak,

$$x + y' + z = 17$$

elde edilir. Bu durumda

$$x' + y + z' = 3$$

olacaktır. Bu da

$$x' = y = z' = 1$$

olduğu anlamına gelir. Bu değerleri yerine yazarsak,

$$x + x' + z = 11 \Rightarrow x + z = 10$$

elde ederiz.

$$x + y' + z = 17 \Rightarrow y' = 7 \Rightarrow y + y' = 8$$

olur.

24 a, b, c, d, e negatif olmayan gerçel sayılar ve $a+b+c+d+e > 0$ olmak üzere, $a+c = tb$, $b+d = tc$, $c+e = td$ koşullarını sağlayan en küçük gerçel t sayısı nedir?

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** 1 **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$c = 0$ olursa, tüm hepsi 0 olacağı için; $c > 0$.

$$2c \le a + c + c + e = tb + td = t(b + d) = t^2c \Rightarrow t \ge \sqrt{2}.$$

$t = \sqrt{2}$ olduğunda ise,

$$a = e = 0 \text{ ve } c = b\sqrt{2} = d\sqrt{2}$$

sayıları sorudaki eşitlikleri sağlar.

25 Alanı 18 olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, $|AB| + |BD| + |DC| = 12$ ise, $|AC|$ nedir?

a) 9 **b)** $6\sqrt{3}$ **c)** 8 **d)** 6 **e)** $6\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$AB = x$, $BD = y$, $CD = z$ olsun.

$$[ABCD] = 18 \leq \frac{xy + yz}{2} = \frac{y(x+z)}{2} \Rightarrow 36 \leq y(x+z)$$

olacaktır. Diğer taraftan $AO \geq GO$ dan,

$$\frac{y + (x+z)}{2} = 6 \geq \sqrt{y(x+z)} \Rightarrow 36 \geq y(x+z)$$

olacağı için $y(x+z) = 36$ dır. Yani eşitsizlikteki eşitlik sağlanmış. Eşitlik $y = x + z = 6$, $BD \perp AB$ ve $BD \perp AC$ iken sağlanır.

A dan BD ye çizilen paralel DC yi E de kessin. $AE = BD = 6$ ve $EC = AB + CD = 6$ olduğu için $AC = 6\sqrt{2}$ çıkacaktır.

NOT:

Bu soru, IMO 1976/1 sorusunun neredeyse aynısıdır.

26 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 10$ ise,

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$$

gerektirmesinin tüm a, b tam sayıları için doğru olmasını p nin aşağıdaki değerlerinden hangisi sağlar?

a) 5 **b)** 7 **c)** 11 **d)** 13 **e)** 17

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Sorudaki ifadenin eşiti,

$$p|f(a) - f(b) \Rightarrow p|a - b$$

dir. İlk birkaç $f(x)$ değerlerini hesaplarsak:

$$f(0) = 10, f(1) = 27$$

$17|27 - 10$ olduğu için E şıkkı elenir.

$$f(2) = 64, f(3) = 127$$

$5|127 - 27$ olduğu için A şıkkı elenir.

$7|127 - 64$ olduğu için B şıkkı elenir.

$13|127 - 10$ olduğu için D şıkkı elenir.

Bu durumda geriye sadece $p = 11$ kalır.

Çözüm 2:

AoPS'te yer alan bir çözümde; $p = 11$ in niçin sağladığı gösterilmiş. Burada biraz değiştirerek o çözümü tekrarlayacağım.

$a \not\equiv b \pmod{p}$ şartıyla; $a^3 + 7a^2 + 9a + 10 \equiv b^3 + 7b^2 + 9b + 10 \pmod{p}$ olsun.

Biraz düzenlemeyle; $(a^3 - b^3) + 7(a^2 - b^2) + 9(a - b) \equiv 0 \pmod{p}$ elde ederiz.

$a - b \not\equiv 0 \pmod{p}$ olduğu için denkliğin her iki tarafını $a - b$ ye bölebiliriz: $a^2 + ab + b^2 + 7a + 7b + 9 \equiv 0 \pmod{p}$.

Şimdi de denkliği 12 ile genişletelim: $12a^2 + 12ab + 12b^2 + 84a + 84b + 108 = 3(2a + b + 7)^2 + 9b^2 + 42b - 39 \equiv 0 \pmod{p}$

Şimdi denkliğin her iki tarafına 88 ekleyelim: $3(2a + b + 7)^2 + 9b^2 + 42b + 49 \equiv 3(2a + b + 7)^2 + (3b + 7)^2 \equiv 88 \pmod{p}$ olmalı.

$11 \mid 88$ olduğu için $p = 11$ özel durumunu inceleyelim.

$m = 2a + b + 7$ ve $n = 3b + 7$ olsun. $3m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğinin çözümlerini arayalım.

$m \equiv 0 \pmod{11}$, $n \equiv 0 \pmod{11}$ bir çözümdür.

$3b + 7 \equiv 0 \pmod{11}$ ve $2a + b + 7 \equiv 0 \pmod{11}$ denklik sisteminin tek çözümü $a \equiv b \equiv 5 \pmod{11}$ dir. $a \not\equiv b$ olduğu için buradan çözüm gelmez.

$m \not\equiv n \pmod{11}$ olduğu durumda; 11 asal sayı olduğu için $n \equiv km \pmod{11}$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır.

$-3m^2 \equiv n^2 \equiv (km)^2 \pmod{11} \Rightarrow k^2 \equiv -3 \pmod{11}$ olmalı. -3, mod11 de bir kare kalan olmadığı için buradan da çözüm gelmez.

O halde, $a \neq b$ sayıları için $f(a) \not\equiv f(b) \pmod{11}$ dir.

Çözüm 3:

Bir önceki çözümdeki, $p = 11$ için çalışan yöntemi genelleştirelim.

$a^3 + 7a^2 + 9a + 10 \equiv b^3 + 7b^2 + 9b + 10 \pmod{11}$

$\Longrightarrow (a^3 - b^3) + 7(a^2 - b^2) + 9(a - b) \equiv 0 \pmod{11}$

$\Longrightarrow a^2 + b^2 + ab + 7a + 7b + 9 \equiv 0 \pmod{11}$

$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğinin çözümü yoktur. Çünkü -1, mod11 de bir kare kalan olmadığı için; $x^2 \equiv -1 \cdot y^2 \pmod{11}$ denkliğini sağlayan x ve y yoktur.

O halde $g(a, b) = a^2 + b^2 + ab + 7a + 7b + 9 \equiv x^2 + y^2 \pmod{11}$ şeklinde yazabilirsek $a \not\equiv b$ durumunda $g(a, b) \not\equiv 0$ şartını sağlayan a, b sayıları bulamamış olacağız.

$x \equiv ma + nb + r$ ve $y \equiv kb + s$ olsun.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab + 7a + 7b + 9 &\equiv (ma + nb + r)^2 + (kb + s)^2 \\ &\equiv m^2a^2 + n^2b^2 + r^2 + 2mnab + 2mra + 2nrb + k^2b^2 + 2ksb + s^2 \\ &\equiv m^2a^2 + (n^2 + k^2)b^2 + 2mnab + 2mra + (2nr + 2ks)b + (r^2 + s^2) \end{aligned}$$

mod11 de; $m^2 \equiv 1$, $n^2 + k^2 \equiv 1$, $2mn \equiv 1$, $2mr \equiv 7$, $2nr + 2ks \equiv 7$ ve $r^2 + s^2 \equiv 9$ denklik sistemini çözelim.

$m \equiv 1$ olsun.

$2mn \equiv 2n \equiv 1 \Longrightarrow n \equiv 6$.

$2mr \equiv 2r \equiv 7 \Longrightarrow r \equiv 9 \equiv -2$.

$n^2 + k^2 \equiv 36 + k^2 \equiv 1 \Longrightarrow k^2 \equiv 9 \Longrightarrow k \equiv \pm 3$

$r^2 + s^2 \equiv 9 \Longrightarrow 9^2 + s^2 \equiv 9 \Longrightarrow s^2 \equiv 5 \equiv 16 \Longrightarrow s \equiv \pm 4$.

$2nr + 2ks \equiv 2 \cdot 6 \cdot 9 + 2ks \equiv 9 + 2ks \equiv 7 \Longrightarrow ks \equiv -1$. Bu durumda $k \equiv 3$, $s \equiv -4$ veya $k \equiv -3$, $s \equiv 4$ olmalı.

Gerçekten de;

$$\begin{aligned}(a+6b-2)^2+(3b-4)^2 &\equiv a^2+36b^2+4+12ab-4a-24b+9b^2+16-24b\\ &\equiv a^2+45b^2+12ab-4a-48b+20\\ &\equiv a^2+b^2+ab+7a+7b+9\end{aligned}$$

$\boxed{27}$ $\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin, her $1 \le k \le 4$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1,\dots,k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde kaç değişik $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu vardır?

a) 13 **b)** 65 **c)** 71 **d)** 461 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin toplamda $5! = 120$ permütasyonu var. Bunlardan

her $1 \le k \le 4$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1,\dots,k\}$ kümesinin bir permütasyonu olan $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ leri çıkartırsak sonucu elde ederiz.

$k=1$ için $(1\overbrace{\cdots}^{4!}) \to 24$

$k=2$ için $\{1,2\}$ kümesinin toplamda $2!$ permütasyonu var. Bunlardan biri $k=1$ de geçen $(12\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu olduğu için $(\overbrace{21}^{2!-1}\ \overbrace{\cdots}^{\text{Geriye kalanlar } 3!}) \to 6$

$k=3$ için $\{1,2,3\}$ kümesinin toplamda $3!$ permütasyonu var. Bunlardan ikisi $k=1$ de geçen $(1\overbrace{\cdots}^{2,3}\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu, biri de $k=2$ de geçen $(21\overbrace{3}^{\text{1 tane}}\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu olduğu için $(\overbrace{\cdots}^{3!-2!-1}\ \overbrace{\cdots}^{\text{Geriye kalanlar } 2!}) \to 6$

$k=4$ için $\{1,2,3,4\}$ kümesinin toplamda $4!$ permütasyonu var. Bunlardan $3!$ tanesi $k=1$ de geçen $(1\overbrace{\cdots}^{2,3,4}5)$ permütasyonu, $2!$ tanesi $k=2$ de geçen $(21\overbrace{\cdots}^{3,4}5)$ permütasyonu ve 3 tanesi de $k=3$ de geçen tüm permütasyonlar olduğu için $(\overbrace{\cdots}^{4!-3!-2!-3}\ 5) \to 13$

$$120-24-6-6-13=71$$

Çözüm 2:

İndirgenemez (Irreducible) ya da başka bir deyişle Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Permütasyonların sayısı sorulmuş. (bkz. oeis/A003319)

P_n ile $\{1,\dots,n\}$ kümesinin permütasyonlarını, $|P_n| = n!$ ile de permütasyonların sayısını gösterelim.

$P = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ permütasyonu için, ($1 \le k \le n$ olmak üzere) $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1,\dots,k\}$ kümesinin bir permütasyonu olacak şekilde seçilebilecek k sayılarının en küçüğüne, permütasyonun derecesi, $\mathrm{der}P$, diyelim. (Permütasyon tanımında derece ile başka bir şey ifade ediliyor olabilir; bu soruda o tanımı ezdiğimizi düşünelim.)

Q_n ile de $\{1,\dots,n\}$ kümesinin, her $1 \le k \le n-1$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1,\dots,k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde oluşturulan $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ permütasyonlarını gösterelim.

$Q_1 = \{(1)\}$ ve $Q_2 = \{(21)\}$ dir. Soruda bizden $|Q_5|$ i bulmamız isteniyor.

$1 \le i \le n$ için $D_i = \{P \in P_n \mid \mathrm{der}P = i\}$ olsun. $i \ne j$ için $D_i \cap D_j = \emptyset$ ve $P_n = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ olacaktır.

Öncelikle, $D_n = \{P \in P_n \mid \mathrm{der}P = n\} = Q_n$ olduğunu fark edelim.

$Q \in Q_i$ permütasyonuna $\{i+1,\dots,n\}$ kümesine ait bir permütasyon eklemlersek $D \in D_i$ permütasyonunu elde ederiz.

Bu durumda $n! = |P_n| = |Q_n| + |Q_{n-1}| \cdot 1! + |Q_{n-2}| \cdot 2! + \cdots + |Q_1| \cdot (n-1)! = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |Q_i| \cdot (n-i)!$

$|P_3| = 3! = |Q_3| + |Q_2| \cdot 1! + |Q_1| \cdot 2! \Longrightarrow |Q_3| = 3! - 1 - 2 = 3.$

$|P_4| = 4! = |Q_4| + |Q_3| \cdot 1! + |Q_2| \cdot 2! + |Q_1| \cdot 3! \Longrightarrow |Q_4| = 4! - 3 - 2 - 6 = 13.$

$|P_5| = 5! = |Q_5| + |Q_4| \cdot 1! + |Q_3| \cdot 2! + |Q_2| \cdot 3! + |Q_1| \cdot 4! \Longrightarrow |Q_5| = 5! - 13 - 6 - 6 - 24 = 71.$

28 $f_1(x) = x^2 + x \quad f_2(x) = 2x^2 - x \quad f_3(x) = x^2 + x$
$g_1(x) = x - 2 \quad g_2(x) = 2x \quad g_3(x) = x + 2$

olmak üzere, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere f_i ve g_i fonksiyonlarından $h(x) = x$ fonksiyonu elde edilebiliyorsa, $F_i = 1$; aksi halde $F_i = 0$ olarak tanımlanıyor. (F_1, F_2, F_3) nedir?

a) $(0, 0, 0)$ **b)** $(0, 0, 1)$ **c)** $(0, 1, 0)$ **d)** $(0, 1, 1)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$f_i(a) = A$ ve $g_i(a) = B$ olsun. $h_i(a) = a$ olacaktır. Toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, f_i ve g_i fonksiyonlarından $h_i(a) = a$ elde edilebiliyorsa, $(A, B) | a$ olması gerekir.

$i = 1$ için, $x = 2$ alırsak

$$f_1(2) = 6, g_1(2) = 0 \Rightarrow (6, 0) = 6 \nmid 2$$

olacağı için $F_1 = 0$ dır.

$i = 2$ için, $x = \dfrac{1}{2}$ alırsak

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, g_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

olacağı ve 0 ile 1 kullanarak $\dfrac{1}{2}$ elde edilemeyeceği için $F_2 = 0$ dır.

$i = 3$ için

$$g_3^2(x) - f_3(x) - g_3(x) - g_3(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - x - x - 2 - x - 2 = x$$

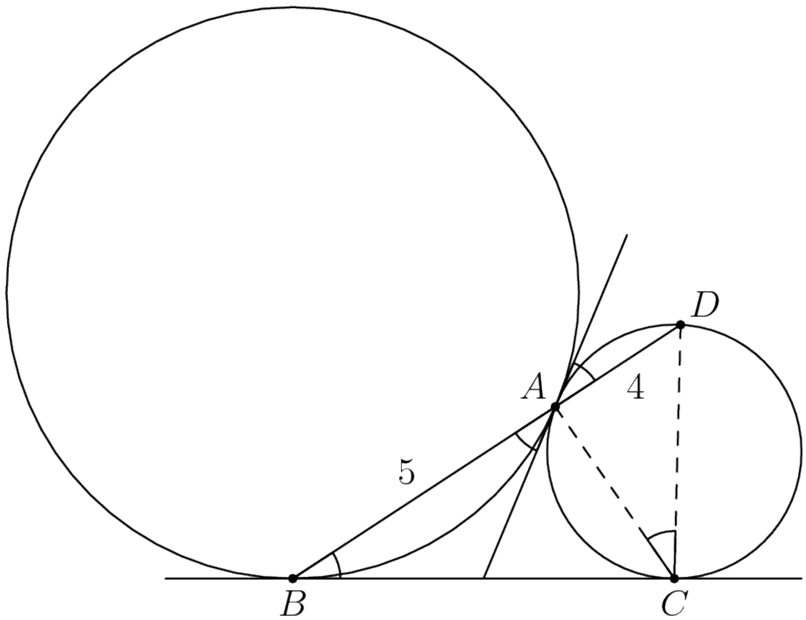
olduğu için de $F_3 = 1$ dir.

29 O_1 ve O_2 merkezli birbirine dıştan teğet iki çemberin ortak dış teğet doğrularından biri çemberlere sırasıyla B ve C noktalarında değiyor. Çemberlerin ortak noktası A olmak üzere BA doğrusu O_2 merkezli çemberi A ve D noktalarında kesiyor. $|BA| = 5$ ve $|AD| = 4$ ise $|CD|$ nedir?

a) $\sqrt{20}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** 6 **d)** $\dfrac{15}{2}$ **e)** $4\sqrt{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$



A dan geçen ve çemberlere teğet olan ℓ doğrusu BC yi E de kessin.

$$\angle ABC = \angle BAE = \angle(AD, \ell) = \angle DCA$$

olduğu için,

$$DA \cdot DB = DC^2 \Rightarrow 4 \cdot 9 = DC^2 \Rightarrow DC = 6$$

dır.

Niye? Çünkü $\angle DCA = \angle ABC$ olduğu için $\triangle DCA \sim \triangle DBC$ dir. Benzerlik oranları yazılırsa, $\dfrac{4}{DC} = \dfrac{DC}{9} \Rightarrow DC = 6$ elde edilir. Her seferinde, bu benzerliği yazmak yerine $\angle DCA = \angle DBC$ bağıntısı varsa doğrudan $DA \cdot DB = DC^2$ diyebiliriz. Dikkat ettiyseniz, bu çemberdeki kuvveti (teğet durumunda) hatırlatıyor. Gerçekten de öyle, $\angle DCA = \angle DBC$ ise DC doğrusu, $\triangle ABC$ nin çevrel çemberine teğettir (teğet-kiriş açı = çevre açı). Bu durumda D noktasının (ABC) çemberine göre kuvveti $DC^2 = DA \cdot DB$ olacaktır.

Çözüm 2:

A dan geçen ve çemberlere teğet olan doğru BC yi E de kessin.

$$AE = EB \text{ ve } AE = EC$$

olacağı için $\angle BAC = 90°$ dir. Bu durumda, DC çaptır. Bu durumda, $DC \perp BC$ olacağı için, $\triangle BCD$ bir dik üçgendir. Öklit'ten

$$DC^2 = DA \cdot DB \Rightarrow DC = 6$$

olacaktır.

NOT:

Öklit'in bu bağıntısı, Çözüm 1'de anlatılan bağıntının özel halidir.

30 $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere, $(x^2-18)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$ denkliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

a) 59 **b)** 60 **c)** 61 **d)** 62 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$f(x) = x^2 - 18$ olsun. Her x sayısı için,

$$f^2(x) \equiv y^2 \pmod{31}$$

denkliğinin

$$y \equiv f(x) \pmod{31} \text{ ve } y \equiv -f(x) \pmod{31}$$

olmak üzere, 2 çözümü vardır. Bu son ifade biraz yanlış $f(x) \equiv 0 \pmod{31}$ ise $f^2(x) \equiv y^2 \pmod{31}$ denkliğinin 1 çözümü vardır.

$$f(x) \equiv x^2 - 18 \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow x \equiv \pm 7 \pmod{31}$$

olacağı için, $x = 7$ için 1 adet y; $x = 31 - 7 = 24$ için 1 adet y, geri kalan 29 x değeri için ise 2 şer adet y vardır. Bu durumda, toplamda $2 \times 29 + 1 + 1 = 60$ çözüm vardır.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (D) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

31 Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111 ile bölünen on basamaklı kaç tam sayı vardır?

a) 0 **b)** 1264 **c)** 2842 **d)** 3456 **e)** 11111

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Tüm rakamlar kullanılarak elde edilen 10 basamaklı sayının rakamları toplamı

$$0 + 1 + 2 \cdots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \equiv 0 \pmod{9}$$

olacağı için bu sayı 9 ile bölünür. $(9, 11111) = 1$ olduğu için, hem 9 hem de 11111 ile bölünen sayılar 99999 ile bölünür.

$$\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = 100000 \cdot \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \equiv \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \equiv 0 \pmod{99999}$$
$$\Rightarrow \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = 99999k$$

olur. $k = 0$ olamaz. Tüm rakamlar birbirinden farklı olduğu için de $k \geq 2$ olamaz. Bu durumda $k = 1$ ve

$$\overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = 99999$$

olacaktır. $i = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere; her a_i için tek bir türlü a_{i+5} sayısı olacaktır. Ek olarak $a_9 \neq 0$ olduğu için $a_4 \neq 9$ dur. Rakamları dağıtmaya a_4 ten başlarsak, a_4 için 9 farklı seçenek var.

a_3 için a_4 ve a_9 da iki rakam kullanıldğı için 8 farklı seçenek var.

a_2 için 6,

a_1 için 4,

a_0 için 2 farklı seçenek vardır.

Bu durumda toplamda

$$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$$

farklı sayı elde edilir.

32 Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir?

a) $\frac{5}{2}$ **b)** $-\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{5}{4}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$x = 1, y = 1$ için

$$f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow f(1) = 2 \text{ veya } f(1) = -1$$

$y = 1,\ f(1) = 2$ için

$$f(x) \cdot 2 - f(x) = \frac{1}{x} + x \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$y = 1,\ f(1) = -1$ için

$$f(x)(-1) - f(x) = \frac{1}{x} + x \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

olur.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonu,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - xy - \frac{1}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

olduğu için verilen fonksiyon denklemini sağlar. Bu durumda $f(2) = \frac{5}{2}$ bir çözümdür.

Öte yandan, $f(x) = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ fonksiyonu,

$$\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{xy}{4} + \frac{1}{4xy} + \frac{x}{4y} + \frac{y}{4x} + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2xy} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\frac{3}{4} + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\frac{1}{4} \neq \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

olduğu için verilen fonksiyon denklemini sağlamaz.

Not: Mustafa Töngemen'e ait 2008 yılı basımlı Tübitak Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri kitabında cevap (C) olarak verilmiştir. Oradaki çözüm hatalıdır.

33 Bir $ABCD$ karesinin $[AB]$ kenarı üstünde bir K noktası, $[BC]$ kenarı üstünde de bir L noktası alınıyor. $|AK| = 3$, $|KB| = 2$ ve K nin DL doğrusuna uzaklığı 3 ise, $|BL| : |LC|$ nedir?

a) $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{8}{7}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

K nin AD ve DL ye olan uzaklıkları 3 olduğu için, DK; $\angle ADL$ nin açıortayıdır.

$\angle DLC = \angle ADL = 2\alpha$ olsun.

$$\tan\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{15}{8}$$

olacaktır.

$$DC = 15k = BC \Rightarrow LC = 8k \Rightarrow BL = 7k \Rightarrow BL : BC = \frac{7}{8}$$

Çözüm 2:

K nin AD ve DL ye olan uzaklıkları 3 olduğu için, DK; $\angle ADL$ nin açıortayıdır.

$[BC$ üzerinde $[BC]$ nin dışında $DL = LN$ olacak şekilde bir N noktası alalım.

$$\triangle DCN \cong \triangle DAK$$

olacaktır. Bu durumda, $DL = LN = LC + 3$ olacağından, Pisagor'dan

$$DL^2 = LC^2 + DC^2 = LC^2 + 25 = LC^2 + 6\cdot LC + 9 \Rightarrow LC = \frac{8}{3} \Rightarrow BL = \frac{7}{3} \Rightarrow BL : LC = \frac{7}{8}$$

olarak elde edilir.

34 Aşağıdaki önermelerden hangisi, en az bir p asal sayısı için doğru değildir?

a) $x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözümü varsa,
$x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin de çözümü vardır.

b) $x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözümü yoksa,
$x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin de çözümü yoktur.

c) $x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözümü varsa,
$x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin de çözümü vardır.

d) $x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin çözümü yoksa,
$x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin de çözümü yoktur.

e) Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Denklikleri uzun uzun yazmak yerine şu tanımlamayı yapalım.

$x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin p asal sayısı için çözümü varsa, $X(p) = 1$; yoksa $X(p) = 0$ olsun.

$x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin p asal sayısı için çözümü varsa, $Y(p) = 1$; yoksa $Y(p) = 0$ olsun.

Cevabın A olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir p asal sayısı var ki, $X(p) = 1$; ama $Y(p) = 0$. Bu p asal sayısı için, D şıkkı da doğru olmuyor. Çünkü $Y(p) = 0$ olmasına rağmen $X(p) \neq 0$.

Bu durum, diğer şıklar için de geçerli. Aslında, A ile D önermeleri, B ile C önermeleri karşıt ters.

Bir sorunun iki cevabı olmayacağı için, cevap A, B, C, D şıklarından hiçbirisidir. E deki şık da tam olarak bu anlama gelmektedir.

Çözüm 2:

Aslında soru şunu soruyor. Öyle bir p asal sayısı var mı ki,

$$x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod p \text{ ile } x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod p$$

denkliklerinden birinin çözümü var, diğerinin yok.
$x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod p$ denkliği için,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \pmod p.$$

$x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod p$ denkliği için,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-99}}{2} \pmod p.$$

Bu durumda 2^{-1}, mod p de tanımlıysa;
$D_1^2 \equiv -11 \pmod p$ koşulunu sağlayan bir D_1 sayısı varsa, $x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin bir çözümü vardır.
$D_2^2 \equiv -99 \pmod p$ koşulunu sağlayan bir D_2 sayısı varsa, $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin bir çözümü vardır.
Bu durumda D_1 ile D_2 arasında,

$$D_2 \equiv \pm 3D_1 \pmod p \text{ ve } 3^{-1}D_2 \equiv \pm D_1 \pmod p$$

bağıntıları vardır. Bu durumda, D_1 var olmasının D_2 varlığını gerektirmesi (ya da diğer ihtimaller) 3^{-1} in mod p de tanımlı olması ile alakası var.

Bir a sayısı için $a^{-1} \pmod p$ nin tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $(a, p) = 1$ olmasıdır.

$p = 2$ ve $p = 3$ hariç tüm asal sayılar için 2^{-1} ile 3^{-1} tanımlıdır.

$p = 2$ için, iki denkliğin de çözümü yoktur.

$p = 3$ için, iki denkliğin de çözümü vardır.

Bu durumda, tüm p asal sayıları için; ya iki denklemin de çözümü vardır, ya da iki denklemin de çözümü yoktur. Böylelikle, tüm şıklar doğru olmuş oldu. Doğru yanıt, şıklardan hiçbiri. Yani E.

35 $S = \{1, 2, \ldots, 32\}$ olmak üzere; S nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde, a, b yi; b de c yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir?

a) 17 **b)** 24 **c)** 25 **d)** 29 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Farklı a, b sayıları için $a|b$ demek, $b \geq 2a$ demektir. Bu durumda,

farklı $b|c$ sayıları için de $b|c$ ise, $c \geq 2b \geq 4a$ olacaktır.

Açık bir şekilde $S_{24}\{9, 10, 11, \ldots, 30, 31, 32\}$ kümesinden $a|b|c$ şeklinde üç sayı seçmek mümkün değil. Bu durumda $k > 24$ olmalı.

Acaba bu şekilde üç eleman içermeyen daha büyük bir küme var mı? Olduğunu varsayalım.

1, bu kümenin bir elemanı olabilir mi? 1 içeriliyorsa, n ile $2n$ sayılarından biri bu kümenin dışında olmalı.

$$\{2, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 10\}, \{7, 14\}, \{8, 16\}, \{9, 18\}, \{11, 22\}, \{12, 24\}, \{13, 26\}, \ldots$$

kümelerinin her birinden en fazla bir eleman seçilebileceği için 1 bu en büyük kümenin bir elemanı olamaz.

Bu en büyük küme, $\{2,4,8,16,32\}$ kümesinden en fazla iki eleman içerebilir. Yani en az 3 eleman içermez.

$\{3,6,12,24\}$ kümesinden en az 2 eleman içermez.

$\{5,10,20\}$ kümesinden en az 1 eleman içermez.

$\{7,14,28\}$ kümesinden en az 1 eleman içermez.

Bu durumda $a|b|c$ şeklinde üç eleman içermeyen en büyük küme, $S = \{1,2,\ldots,32\}$ kümesinden en az $1+3+2+1+1 = 8$ eleman içermez. Bu durumda bu kümenin eleman sayısı en fazla $32-8 = 24$ olabilir. Daha fazla olamaz. Demek ki bahsedilen koşulu sağlayan S_{24} kümesinden daha büyük bir küme yok. Bu durumda, S nin herhangi $k > 24$ elemanlı alt kümesinde $a|b|c$ şeklinde üç eleman bulunur.

36 $x_1 = -1$ ve her n pozitif tam sayısı için $x_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)x_n + \dfrac{4}{n}$ ise, x_{2000} nedir?

a) 1999998 **b)** 2000998 **c)** 2009998 **d)** 2000008 **e)** 1999999

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Biraz düzenlemeyle

$$nx_{n+1} = (n+2)x_n + 4$$

elde ederiz.

$y_n = x_n + 2$ olsun. Bu durumda $y_1 = 1$ ve

$$\begin{aligned} n(y_{n+1}-2) &= (n+2)(y_n-2)+4 \\ ny_{n+1}-2n &= (n+2)(y_n)-2n-4+4 \\ ny_{n+1} &= (n+2)y_n \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} ny_{n+1} &= (n+2)y_n \\ (n-1)y_n &= (n+1)y_{n-1} \\ (n-2)y_{n-1} &= ny_{n-2} \\ &\vdots \\ 3y_4 &= 5y_3 \\ 2y_3 &= 4y_2 \\ 1y_2 &= 3y_1 \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa çarparsak

$$y_{n+1} = \frac{y_1(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow y_{2000} = \frac{2000\times 2001}{2} = 2001000$$

elde ederiz. Bu durumda

$$y_{2000} - 2 = x_{2000} = 2000998$$

olur.

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2001

$\boxed{1}$ Bir $\widehat{XOY}$ açısının $[OX$ kenarı üzerinde $|OA| = |AB| = |BC|$ olacak şekilde A, B, C noktaları; $[OY$ kenarı üzerinde de $|OD| = |DE| = |EF|$ olacak şekilde D, E, F noktaları alınıyor. $|OA| > |OD|$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) Her $\widehat{XOY}$ açısı için, Alan$(AEC) >$ Alan(DBF)

b) Her $\widehat{XOY}$ açısı için, Alan$(AEC) =$ Alan(DBF)

c) Her $\widehat{XOY}$ açısı için, Alan$(AEC) <$ Alan(DBF)

d) $m(\widehat{XOY}) < 45°$ ise, Alan$(AEC) <$ Alan(DBF) ve $45° < m(\widehat{XOY}) < 90°$ ise, Alan$(AEC) >$ Alan(DBF)

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$[AEC] = [OCF] \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = [BDF]$.

$\boxed{2}$ İstanbulspor, Yeşildirek, Vefa, Karagümrük ve Adalet takımlarından her biri, geri kalan dördüyle tam olarak birer maç yapıyor. İstanbulspor, Yeşildirek hariç tüm takımları yeniyor; Yeşildirek, İstanbulspor'u yenip, diğer bütün takımlara yeniliyor. Vefa, İstanbulspor dışındaki bütün takımları yenerken, Karagümrük-Adalet maçını Karagümrük kazanıyor. Bu beş takımı, sonuncusu hariç her takım, kendinden bir sonra gelen takımı yenmiş olacak biçimde kaç değişik şekilde sıralayabiliriz?

a) 5 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İstanbulspor başta olacaksa, Yeşildirek diğer takımlara yenildiği için sonda olmalı. Vefa, İstanbulspor hariç diğer takımları yendiği için ikinci sırada olmalı. Karagümrük, Adalet'i yendiği için, sıralama IVKAY şeklindedir.

İstanbulspor başta olmadığı zaman, kendisini yenen tek takım olan Yeşildirek'ten hemen sonra gelmeli. Tüm durumlar:

YI − −−, −YI − −, − − YI−, − − −YI

Vefa'nın Karagümrük ve Adalet'i; Karagümrük'ün de Adalet'i yendiğini akılda tutarak yerleştirmelerimizi yaparsak:

YIVKA,

VYIKA, KYIVA,AYIVK,

KAYIV, VKYIA, VAYIK,

VKAYI

elde ederiz. Toplamda 9 farklı dağılım elde etmiş olduk.

$\boxed{3}$ $2p^4 - 7p^2 + 1$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 4 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$p = 3 \Rightarrow 2p^4 - 7p^2 + 1 = 100 = 10^2$.

$p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv p^4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2p^4 - 7p^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$

$a^2 \equiv 2 \pmod 3$ denkliğinin çözümü olmadığından tek çözüm $p = 3$ tür.

$\boxed{4}$ $\dfrac{x^{2000}}{2001} + 2\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{5}x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin kaç gerçel çözümü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 11 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$\dfrac{x^{2000}}{2001} > 0$ olduğunu biliyoruz (x reel olduğu için).

Geri kalan ifade de $\Delta < 0$ ve sabit terim $\sqrt{3}$ olduğu için tüm ifade toplam olarak her x reel sayısı için 0'dan büyük olur. Yani denklemi sağlayan x reel sayısı yoktur.

$\boxed{5}$ Bir $ABCD$ yamuğunda $AB \parallel CD$, $|AB| < |CD|$ ve Alan$(ABC) = 30$ dur. B den geçen ve AD ye paralel olan doğru, $[AC]$ yi E noktasında kesiyor. $|AE| : |EC| = 3 : 2$ ise, $ABCD$ yamuğunun alanı nedir?

a) 45 **b)** 60 **c)** 72 **d)** 80 **e)** 90

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

BE, CD yi F de kessin. $AB = DF = 3k$ ve $FC = 2k$ dır. $[ABC]/[ABCD] = 3k/(3k + 5k) = 3/8 \Rightarrow [ABCD] = 80$.

$\boxed{6}$ Ondalık yazılımında tüm basamakları tek sayı olan 5 basamaklı tam sayılardan kaç tanesinin en az iki ardışık basamağının toplamı 10 dur?

a) 3125 **b)** 2500 **c)** 1845 **d)** 1190 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$1, 3, 5, 7, 9$ kullanarak yazılabilecek sayıların sayısı 5^5.

Hiçbir ardışık iki basamağın toplamının 10 olmadığı durumları hesaplayalım:

İlk rakam $\binom{5}{1}$ şekilde seçilir. İkinci rakam, bu rakamın 10'a tamamlayanı hariç herhangi biri olabilir (4). Üçüncü rakam da ikincinin 10'a tamamlayanı hariç herhangi biri olabilir (4). Bu böyle gider. O halde, toplamda $\binom{5}{1}4^4$.

En az iki ardışık basamağının toplamının 10 olduğu durumlar: $5^5 - \binom{5}{1}4^4 = 5(5^4 - 4^4) = 5(5^2 - 4^2)(5^2 + 4^2) = 5 \cdot 9 \cdot 41 = 1845$.

$\boxed{7}$ $(2a + b)(2b + a) = 2^c$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

a ve b pozitif tam sayı olduğunda, $2b + a \geq 2$ ve $2a + b \geq 2$ olacaktır.

O halde, denklemi pozitif x, y tam sayıları için,

$$\begin{aligned} 2a + b &= 2^x \\ 2b + a &= 2^y \end{aligned}$$

şekline dönüştürebiliriz. Ortak çözersek, $a = \dfrac{2^{x+1} - 2^y}{3}$ ve $b = \dfrac{2^{y+1} - 2^x}{3}$ elde ederiz.

$a, b > 0$ olduğu için $x + 1 > y$ ve $y + 1 > x$, yani $1 > y - x > -1$ olmalı. O halde $y = x$ tir. Bu durumda, $a = b$ olacaktır. $3a \cdot 3a = 9a^2 = 2^c$ olamayacağı için, çözüm yoktur.

$\boxed{8}$ $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 21x - 14 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

a) -2 **b)** 7 **c)** -14 **d)** 21 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$(x^4 + 5x^2 - 14) + (3x^3 + 21x) = (x^2 + 7)(x^2 - 2) + 3x(x^2 + 7) = (x^2 + 7)(x^2 + 3x - 2)$

$x^2 + 7$ den gerçel kök gelmeyeceği için gerçel köklerin çarpımı -2 dir.

$\boxed{9}$ En büyük kenar uzunluğu 13 ve çevre uzunluğu 28 olan bir ikizkenar yamuğun alanı en çok kaç olabilir?

a) 13 **b)** 24 **c)** 27 **d)** 28 **e)** 30

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

İkizkenar yamukta Pisagor'dan yüksekliği bulup alana gidebiliriz; ama direkt alana giden bir yöntem uygulacağız: Kirişler dörtgeninde alan formülü.

İkizkenar yamuk bir kirişler dörtgeni olduğu için Alan $= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ formülünü kullanabiliriz.

Uzun taban 13 ise, diğer kenarlar; $x, x, 15 - 2x$ olacaktır. Yarıçevre 14 ten alanı yazarsak;

$$\text{Alan} = \sqrt{(14-1)(14-x)(14-x)(14-(15-2x))} = \sqrt{(14-x)(14-x)(2x-1)}$$

elde edilir. Toplamları $(14 - x) + (14 - x) + (2x - 1) = 27$ olan bir ifade $AO \geq GO$ dan en büyük çarpım değerini hepsi eşitken yani $14 - x = 9 \Rightarrow x = 5$ iken alır. Bu durumda $\text{Alan}_{\max} = 27$ dir.

İkizkenarlar 13 iken, yamuğun yüksekliği en fazla 13; tabanlar toplamı da 2 olacağı için alan en fazla $\dfrac{2 \cdot 13}{2} =$ 13 olacağı için, söz konusu ikizkenar yamuk alanca en büyük değerini kenarları $5, 5, 5, 13$ olunca alır.

$\boxed{10}$ Her adımda tam olarak iki sayının yerleri değiştirilmek üzere, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dizilişinden iki adımda elde edilebilecek farklı dizilişlerin sayısı nedir?

a) 88 **b)** 100 **c)** 120 **d)** 176 **e)** 441

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İki adımda ortak bir sayı yoksa, $(a,b),(c,d)$ sayı çiftleri $\dfrac{1}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}=105$ farklı şekilde seçilir.

İki adımda iki sayı ortaksa, yani çiftler aynıysa, $(a,b),(a,b)$, her zaman baştaki dizilim elde edilecek. O halde, bu şekilde 1 farklı seçim vardır.

İki adımda bir sayı ortaksa, a,b,c, değişim sonucunda hiçbir sayı kendi yerinde olmayacak. Örneğin a,b,c şeklinde bir dizilimden, ya c,a,b ya da b,c,a elde edilecek. Bu üç sayı $\binom{7}{3}$ şekilde seçileceğinden, bu şekilde elde edilecek dizilimlerin sayısı $2\cdot\binom{7}{3}=70$ olacaktır.

Toplamda, $105+1+70=176$ farklı diziliş elde etmiş olduk.

11 Kaç n tam sayısı için,

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 7 \\ 5x+ny &= n^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan en az bir (x,y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$10x+15y=35$ ve $10x+2ny=2n^2$ yi ortak çözersek, $(2n-15)y=2n^2-35$ elde ederiz. Buradan

$$2y=\frac{4n^2-70}{2n-15}=\frac{(2n-15)^2+30(2n-15)+155}{2n-15}=(2n-15)+30+\frac{155}{2n-15}$$

elde edilir. $2n-15\mid 155$ olması için $2n-15\in\{-155,-31,-5,-1,1,5,31,155\}$ olması gerekir. Tüm elemanlar tek sayı olduğu için, her eleman için tam olarak bir n sayısı vardır. Yalnız, $2x+3y=7$ denkleminde y çift olamaz. Bu durumu da kontrol etmeliyiz. Yani $4\nmid(2n-15)+30+\dfrac{155}{2n-15}$, yani $4\mid(2n-15)+\dfrac{155}{2n-15}$ olması gerekir. Bunu da her durum sağlar.

12 P noktasının, yarıçapı 15 olan bir çemberin merkezinden uzaklığı 9 ise, bu çemberin P den geçen ve uzunluğu tam sayı olan kaç kirişi vardır?

a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 29

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

P noktasından geçen kiriş XY olsun. P noktasının çembere göre kuvveti, $R^2-OP^2=144=XP\cdot PY$ dir. $XP+PY$ en küçük değerini $XP=PY$ iken elde eder. Yani $\min(XP+PY)=24$ tür.

P den geçen en büyük kiriş de, çaptır (30).

Dikkat edilirse, en küçük kiriş, çapa dik olan kiriştir. Bu şekilde tek bir en büyük ve en küçük kiriş vardır. Bunlar haricinde P den geçen kirişler $24<x<30$ aralığında her değeri iki kez alır. Tam sayı olanları ele alırsak, $25,26,27,28,29$ değerleri ikişer kez alınacağından, uzunluğu tam sayı olan kirişlerin toplam sayısı $1+1+2\cdot 5=12$ dir.

13 Bir ABC üçgeninde $|BC|=7$ ve $|AB|=9$ dur. $m(\widehat{ABC})=2m(\widehat{BCA})$ ise, üçgenin alanı nedir?

a) $14\sqrt{5}$ **b)** 30 **c)** $10\sqrt{6}$ **d)** $20\sqrt{2}$ **e)** $12\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$[CB$ üzerinde $[BC]$ dışında $AB = BD = 9$ olacak şekilde bir D noktası aldığımızda ACD üçgeni tepe açısı A olan bir ikizkenar üçgen olacak. CD tabanının orta noktası M olmak üzere; $BM = 1$ ve $AM = \sqrt{9^2 - 1^2} = 4\sqrt{5}$ olacaktır. $[ABC] = \dfrac{AM \cdot BC}{2} = 14\sqrt{5}$.

$\boxed{14}$ Her terimi 2001 den küçük ya da eşit olan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tam sayıları dizisi, her $i \geq 3$ için, $x_i = |x_{i-1} - x_{i-2}|$ koşulunu sağlıyorsa, n en çok kaç olabilir?

a) 1000 **b)** 2001 **c)** 3002 **d)** 4003 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Herhangi ardışık iki terim aynı olamaz; çünkü bu bir terimi 0 yapacaktır. Terim sayısının en fazla olması için değişimi en az yapmalıyız. Örneğin ; $1, 2001, 2000, 1, 1999, 1998, 1, \ldots$ şeklindeki dizi başka bir ifadeyle $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2001$ seçilerek hazırlanan dizi istenen dizidir.Bu dizinin terim sayısını hesaplamalıyız. Bu dizide her 3 terimde değer 2001'e göre 2 azalıyor. Daha matematiksel bir ifadeyle $a_2 = 2001, a_5 = 1999, a_8 = 1997, \ldots$ şeklinde olur. Başka bir ifadeyle $a_{3k+2} = 2001 - 2k$ olur. Burada $2001 - 2k = 1$ buradan $k = 1000$ olur . n'in en büyük değeri de $n = 3.1000 + 2 = 3002$ olur.

$\boxed{15}$ $x^3 + 3x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{25}$ denkliğinin, 25 moduna göre farklı kaç çözümü vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$(x^2 + 1)(x + 3) \equiv (x^2 - 49)(x + 3) \equiv (x - 7)(x + 7)(x + 3) \equiv 0 \pmod{25}$

$x - 7 \equiv x + 3 \equiv 0 \pmod 5$ denkliğini sağlayan her x sayısı sorudaki denkliği de sağlayacaktır. Buradan gelen çözümler: $x \in \{2, 7, 12, 17, 22\}$.

Bunlar haricinde $x + 7 \equiv 0 \pmod{25}$ de bir çözümdür. O halde, tüm çözümler, $x \in \{2, 7, 12, 17, 18, 22\}$, toplamda 6 tanedir.

$\boxed{16}$ a bir gerçel sayı olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax + 1$ polinomunun $[-2, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında tam olarak birer gerçel kökü varsa, aşağıdakilerden hangisi $P(2)$ ye eşit olamaz?

a) $\sqrt{17}$ **b)** $\sqrt[3]{30}$ **c)** $\sqrt{26} - 1$ **d)** $\sqrt{30}$ **e)** $\sqrt[3]{10}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$P(0) = 1$ olduğu için bahsi geçen aralıklarda tam olarak birer çözüm olması için $P(-2) < 0$ ve $P(1) < 0$ olması gerekir. Eşitsizlikleri yazarsak,

$$P(-2) = -7 - 2a < 0 \Rightarrow 7 < 2aP(1) = 2 + a < 0 \Rightarrow 2a < -4$$

$-7 < 2a < -4$ elde ederiz. Bu durumda $2 < P(2) = 2a + 9 < 5$ olacaktır. Şıklardan $\sqrt{30} \notin (2, 5)$ dir.

17 Yüksekliklerinin orta noktaları doğrudaş olan bir üçgenin en büyük kenar uzunluğu 10 ise, alanı en çok kaç olabilir?

a) 20 **b)** 25 **c)** 30 **d)** 40 **e)** 50

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Üçgen ABC, en büyük kenar da $BC = 10$ olsun.

$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ kenarlarının orta noktaları, sırasıyla, M_a, M_b, M_c olsun.

a, b, c kenarlarına ait yüksekliklerin orta noktaları, sırasıyla, H_a, H_b, H_c olsun.

M_bM_c, M_aM_c, M_aM_b doğrularını çizelim.

En uzun kenara ait yükseklik, üçgenin içerisinde yer almalı. Bu durumda H_a, $[M_bM_c]$ doğru parçasının üzerinde olacaktır.

$\triangle ABC$ dar açılı ise, H_b ve H_c üçgenin içerisinde, dolayısıyla da, sırasıyla, $[M_aM_c]$ ve $[M_aMb]$ doğru parçaları üzerinde olacaktır. Bu durumda, H_a, H_b, H_c dejenere olmayan bir üçgen oluşturacaktır.

$\triangle ABC$ geniş açılı ise, H_b ve H_c üçgenin dışında ve sırasıyla M_aM_c, M_aMb doğrularının üçgenin dışında kalan kısmında olacaktır. H_aH_b ve M_aM_b doğruları her zaman üçgenin içerisinde kesişeceğinden, H_a, H_b, H_c noktaları dejenere olmayan bir üçgen oluşturacaktır.

Bu durumda, son seçenek, $\triangle ABC$ nin dik üçgen olması. Bu durumda, $M_c = H_b$, $M_b = H_c$ ve $H_a \in M_bM_c$ olacaktır. $AM_a = 5$ ve $[ABC] \leq \dfrac{AM_a \cdot BC}{2} = 25$.

Not: Bu soru Hüseyin DEMİR'e ait olup "Proposal 1997, Mathematics Magazine 57, 1984" olarak yayınlanmıştır.

bkz. Matematik Dünyası, Cilt:1 Sayı: 4, 1991, Sayfa 19

18 En az bir kenarının uzunluğu 1 olup, tüm köşegenlerinin uzunlukları tam sayılar olan bir dışbükey çokgenin en çok kaç kenarı olabilir?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 10 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$A_1A_2 \cdots A_n$ dışbükey çokgeninde $A_1A_2 = 1$ olsun. $n \geq 6$ için, üçgen eşitsizliğinden

$$|A_1A_4 - A_4A_2| < 1 \Rightarrow -1 < A_1A_4 - A_4A_2 < 1 \Rightarrow A_1A_4 = A_4A_2$$

ve benzer şekilde, $A_1A_5 = A_5A_2$. A_4 ve A_5 noktalarının geometrik yeri, A_1A_2 doğru parçasının orta dikmesidir. A_4 ve A_5 aynı orta dikme üzerinde yer alırsa, dışbükeylik bozulacağı için, $n < 6$ olmalı.

$n = 5$ için, A_1A_2 ve iki köşegenden oluşan tek bir üçgen var. Yukarıda bahsedilen sıkıntı burada oluşmuyor. Yine de, $n = 5$ için örnek bir çizim yapalım.

$A_4A_1 = A_4A_2 = 3$ olsun. A_1 merkezli 3 yarıçaplı C_1 çemberil ile A_2 merkezli 3 yarıçaplı C_2 çemberini çizelim. C_2 üzerinde A_2 açısının gördüğü yay üzerinde bir A_5 noktası alalım. A_5 merkezli 3 yarıçaplı çemberle C_1 çemberi A_3 te kesişsin. $A_1A_2A_3A_4A_5$ dışbükey çokgeninde tüm köşegenler 3 olacak.

19 m, n, k tam sayıları $221m + 247n + 323k = 2001$ eşitliğini sağlıyorsa, k nin alabileceği 100 den büyük en küçük değer kaçtır?

a) 124 **b)** 111 **c)** 107 **d)** 101 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Eşitliği 13 modunda incelersek,

$$0 \cdot m + 0 \cdot n + -2k \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow k \equiv 7 \pmod{13}$$

elde ederiz. 100 den büyük ilk k sayısı da $13 \cdot 8 + 7 = 111$ dir.

$$13 \cdot 17 \cdot m + 13 \cdot 19 \cdot n = 2001 - 323 \cdot 111$$

denkleminde obeb$(13 \cdot 17, 13 \cdot 19) = 13 \mid (2001 - 323 \cdot 111)$ olduğu için uygun m, n tam sayıları bulunabilir.

20 21 gerçel sayıdan herhangi 10 tanesinin toplamı, geri kalan 11 tanesinin toplamından daha küçük ise, bu 21 sayıdan en az kaç tanesi pozitiftir?

a) 18 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 21 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Sayılar arasında $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{21}$ bağıntısı olsun.

$$a_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}) > (a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21})$$
$$a_1 > (a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21}) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}) \geq 0$$

Bu durumda

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{21}$$

olacak, yani sayıların hepsi pozitif olacak.

21 Kenar uzunluğu a olan düzgün dışbükey dokuzgenin en kısa ve en uzun köşegenlerinin uzunlukları sırasıyla b ve c ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $b = \dfrac{a+c}{2}$ **b)** $b = \sqrt{ac}$ **c)** $b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2}$
d) $c = a + b$ **e)** $c^2 = a^2 + b^2$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$A_1A_2 \ldots A_9$ bir düzgün dokuzgen olsun. A_1A_5 en büyük, A_1A_3 de en küçük köşegendir.

Düzgün dokuzgenin bir dış açısı 40° olacağı için, dokuzgenin köşelerinden oluşan her açı gördüğü kenar sayısının 20° ile çarpımı kadar ölçüye sahip olacaktır. Bu durumda, $\angle A_4A_5A_1 = 60^\circ$ dir. $[A_1A_5]$ üzerinde $A_5P = A_4A_5 = a$ olacak şekilde bir P noktası alalım. $\triangle A_4A_5P$ bir eşkenar üçgen olacak. $A_4P = A_3A_4$ ve $\angle A_3A_4P = 80^\circ$ olduğu için $\angle A_3PA_4 = 50^\circ$. Bu durumda $\angle A_3PA_1 = 70^\circ$ ve $\angle A_3A_1P = 40^\circ$ olduğu için $A_1A_3 = A_1P = b$ olacaktır. O halde $c = a + b$.

22 10×10 bir satranç tahtasında, her $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ için, k inci satırda soldan $k-1$ ardışık kareyi atarak elde edilen merdiven biçimindeki şekilde, birim karelerin bileşiminden oluşan kaç farklı dikdörtgen vardır?

a) 625 **b)** 715 **c)** 1024 **d)** 1512 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$n \times n$ için aradığımız yanıt a_n olsun.

$n+1 \times n+1$ için $n \times n$ şekline gerekli eklemeleri yapalım. Önceki dikdörtgenlere ek olarak, yeni eklenen dikdörtgenlerin sol alt - sağ üst köşelerinden biri yeni eklenen köşelerden biri olacak. Satır indisinin yukarıdan başladığını düşünürsek, yeni dikdörtgenlerin sol alt köşesi yeni eklenen noktalardan oluşacak.

En soldaki sol-alt köşe için, $(n+1)$ adet aday sağ-üst köşe var.

İkincisi için, $(n-1)$ adet kareden n adet paralel 2 birimlik doğru parçaları oluşur. Buradan $2 \cdot n$ aday sağ üst köşe gelir.

Devam ederserk, en sağdaki yeni sol-alt köşe için $(n+1) \cdot 1$ aday sağ-üst köşe gelecektir.

Bu durumda

$$a_{n+1} = a_n + 1 \cdot (n+1) + 2 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 3 + n \cdot 2 + (n+1) \cdot 1$$

olacaktır. Düzenlersek;

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot (n+2-i) = a_n + (n+2)\sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+2)(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+1)(n+2)}{6} \cdot (3n+6-2n-3)$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = a_n + \binom{n+3}{3}$$

$$a_{n+1} = a_1 + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n+3}{3}$$

elde edilir. $a_1 = 1 = \binom{3}{3}$ olduğunu düşünürsek,

$$a_{n+1} = \sum_{i=3}^{n+3} \binom{i}{3}$$

olacaktır. $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}$ olacağı için $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} = \binom{5}{4}$, $\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = \binom{6}{4}$, $\ldots$ şeklinde devam ettirirsek

$$a_{n+1} = \binom{n+3}{3} + \binom{n+3}{4} = \binom{n+4}{4}$$

elde edilir. $n = 9$ için $a_{10} = \binom{13}{4} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 715$ elde edilir.

23 $9, 99, 999, \ldots$ dizisi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a) Bu dizinin hiç bir terimini bölmeyen asal sayılar sonlu sayıdadır.

b) Sonsuz çoklukta asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.

c) Her n pozitif tam sayısı için, bu dizinin n den çok sayıda farklı asal sayı ile bölünen bir terimi vardır.

d) Öyle bir n tam sayısı vardır ki, n den büyük her asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Diziyi $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = 10^k - 1$ şeklinde tanımlayalım.

a) öncülü doğrudur. $(10, p) = 1$ şeklinde her p asal sayısı için, Fermat'tan, $p \mid a_{p-1}$ dir. O halde, $p \nmid a_k$ şeklinde sadece 2 asal sayı vardır. $p = 2, 5$.

b) öncülü doğrudur. Bu dizinin bir terimini bölen her p asal sayısı için, $\{k_r\}_{r=1}^{\infty} = (p-1) \cdot r$ asal sayısı için, $p \mid a_{k_r}$ dir.

c) öncülü doğrudur. Herhangi farklı $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P} - \{2, 3, 5\}$ asal sayıları için $k = 2(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1)$ aldığımızda, a_k sayısı, $3, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayılarının hepsine bölünecektir.

d) öncülü doğrudur. b) öncülünde $2, 5$ haricindeki her asal sayının dizinin sonsuz çoklukta terimini böldüğünü göstermiştir. O halde her $n > 4$ sayısı için n den büyük her asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.

24 $[x]$ ile x i aşmayan en büyük tam sayı gösterilmek üzere,

$$x^2 - 18[x] + 77 = 0$$

denkleminin tam sayı olmayan gerçel köklerinin sayısı kaçtır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$[x] = a$ ve $x = a + r$ olsun. $(0 < r < 1)$

$x^2 - 18(x - r) + 77 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 77 + 18r = 0$

$18r > 0$ olduğu için $x^2 - 18x + 77 < 0 \Rightarrow 7 < x < 11$ dir. Bu durumda $a = 8, 9, 10$ olabilir.

$a = 8$ için, $x^2 - 18 \cdot 8 + 77 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{67}}$.

$a = 9$ için, $x^2 - 18 \cdot 9 + 77 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{85}}$.

$a = 10$ için, $x^2 - 18 \cdot 10 + 77 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{103}}$.

25 Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı, merkezinin AB ye olan uzaklığının iki katıdır. $|AC| = 2$, $|BC| = 3$ ise, C den geçen yükseklik ne olur?

a) $\sqrt{14}$ **b)** $\frac{3}{7}\sqrt{21}$ **c)** $\frac{4}{7}\sqrt{21}$ **d)** $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ **e)** $\frac{2}{3}\sqrt{14}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

O çevrel merkez, AH yükseklik olsun, AB nin orta noktası da M olsun. $OB = 2 \cdot OM$ olduğu için $\angle ABO = 30° \Rightarrow \angle ACB = 60°$ dir.

$HC = 1$ ve $AH = \sqrt{3}$ ten $AB = \sqrt{7}$ ve alan eşitlğinden $x \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

26 Berk, Ayça'nın tuttuğu iki basamaklı bir sayıyı tahmin etmeye çalışıyor. Berk'in her tahminine karşılık, Ayça, doğru bilinen basamakların sayısını söylüyor. Ayça'nın tuttuğu sayı ne olursa olsun, Berk bu sayıyı n tahminde bulmayı garanti ediyorsa, n en az kaçtır?

a) 9 **b)** 10 **c)** 11 **d)** 15 **e)** 20

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Birler basamağı için 10 durum söz konusu. Berk, 9 tahmin yaptığında, Ayça hiçbir tahminde cevap olarak 2 dememiş olabilir. Bu durumda 9 tahmin yeterli değildir.

10 tahminde garantilemek için aşağıdaki gibi bir strateji takip edilebilir:

Berk sırasıyla 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 tahmininde bulunur.

Berk bu tahminleri sıralarken olasılıklar şöyle:

(1) **Berk hep 0 cevabını alır.**
Demek ki, Ayça'nın tuttuğu sayı ya 90 ya da 99. Böylece, 9 ya da 10 tahminde tutturmuş olur.

(2) **Berk bir kez 1 cevabını alır.**
1 cevabını aldığı sayı aa olsun. Ayça'nın tuttuğu sayı $a9$, $9a$ ya da $a0$ olacak.
Berk önce $a0$ tahmininde bulunur.
Tutmadıysa, 1 cevabını aldıysa, a nın yeri doğru demektir. O halde, Ayça'nın tuttuğu sayı $a9$ dur.
Tutmadıysa, 0 cevabını aldıysa, a nın yeri yanlış ve sayı 0 içermiyor demektir. O halde, Ayça'nın tuttuğu sayı $9a$ dır.
Bu durumda da, Berk, 9 ya da 10 tahminde sayıyı tutturmuş oldu.

(3) **Berk iki kez 1 cevabını alır.**
Berk n. tahmininde ikinci kez 1 cevabını almış olsun $(2 \le n \le 8)$.
Bu sayılar aa ve bb olsun. Ayça'nın sayısı ya ab ya da ba olacak.
O halde, Berk, bu durumda $3 \le n \le 10$ tahmin aralığında sayıyı tutturabilir.

(4) **Berk bir kez 2 cevabını alır.**
Berk, sayıyı $2 \le n \le 8$ tahmin aralığında tutturmuş demektir.

En kötü senaryoda $n = 10$ tahmin gerekiyor.

$\boxed{27}$ 2^n sayısının ondalık yazılımı 7 ile başlıyorsa, 5^n sayısının ondalık yazılımı hangi rakam ile başlar?

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

5^n nin ilk rakamı x olsun.

$$7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$
$$x \cdot 10^m < 5^n < (x+1) \cdot 10^m$$

Taraf tarafa çarparsak,

$$7 \cdot x \cdot 10^{k+m} < 10^n < 8 \cdot (x+1) \cdot 10^{k+m}$$
$$7 \le 7x < 10^{n-k-m} < 8(x+1) \le 80$$

olacaktır. 7 ile 80 arasında 10 un kuvveti olan tek sayı 10^1 olduğu için $7x < 10 \Rightarrow x = 1$ dir.

$\boxed{28}$ A, B, C, D, E kasabaları çember biçmindeki bir yol üstünde, saat yönünde A ile B, B ile C, C ile D, D ile E ve E ile A arasındaki yolların uzunlukları sırasıyla 5, 5, 2, 1 ve 4 km olacak şekilde yer alıyor. Bu yol üstünde kurulacak bir sağlık ocağının yeri, sağlık ocağından bu kasabalara giden en kısa yolların uzunluklarının maksimumunu en aza indirecek biçimde seçilmek isteniyor. Bu koşulu sağlayan kaç yer vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$A(0), B(5), C(10), D(12), E(13)$ noktalarını çember üzerinde alalım. Sağlık ocağını da S ile gösterelim.

AB büyük yayının orta noktası $A_1(11)$ olsun. Sağlık ocağı bu noktaya kurulursa, sağlık ocağı en uzak kasabalara (A ve B) 6 km. uzaklıkta olacaktır. Bu da demektir ki, aradığımız uzaklık 6 km. den büyük olamaz.

$A_2(6)$ olmak üzere; sağlık ocağı $\overset{\frown}{A_1A}$ ya da $\overset{\frown}{AA_2}$ küçük yayları üzerinde olmalıdır. Yani $A_1\overset{\frown}{A}A_2$ yayı üzerinde olmalıdır.

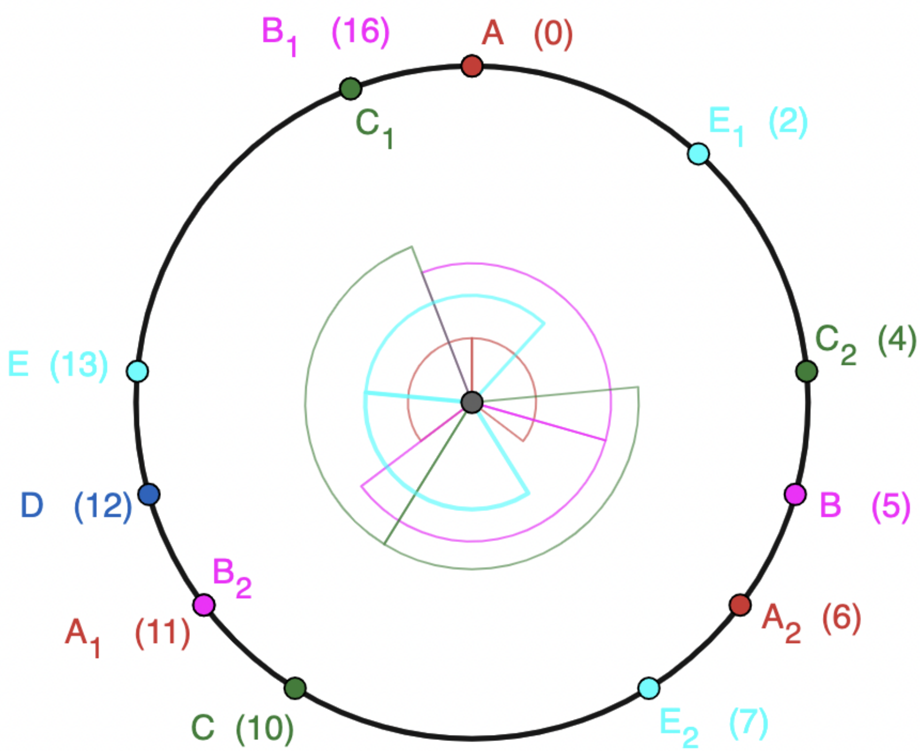
Benzer şekilde $B_1(16)$ ve $B_2(11)$ olmak üzere; $S \in B_1\overset{\frown}{B}B_2$ olmalı.

$C_1(16)$ ve $C_2(4)$ olmak üzere; $S \in C_2\overset{\frown}{C}C_1$ olmalı.

$E_1(2)$ ve $E_2(7)$ olmak üzere; $S \in E_2\overset{\frown}{E}E_1$ olmalı.

Bu dört aralığın kesişim kümesi sadece $A_1(11) = B_2(11)$ noktası ile $B_1(16) = C_1(16)$ noktasıdır.

Bu iki noktanın D ye uzaklıkları 6 km. den küçük olduğu için, bu iki nokta da sorudaki koşulu sağlar.



29 $AB \parallel CD$ olan ikizkenar bir $ABCD$ yamuğunun tüm kenarları bir çembere teğettir. $[AD]$ nin bu çembere değme noktası N; NC ve NB doğrularının çemberi N dışında kestiği noktalar sırasıyla K ve L ise, $\dfrac{|BN|}{|BL|} + \dfrac{|CN|}{|CK|}$ nedir?

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$ABCD$ ikizkenar yamuğunda içteğet çemberin merkezinden taban ve tavana dikmeler indirildiğinde, bu değme noktaları ve iç merkez doğrusal olacaktır. Bu doğru yamuğun simetri ekseni olacaktır.

$AN = x$ ve $DN = y$ olsun.

B noktasının içteğet çembere göre kuvvetinden $BL \cdot BN = x^2 \Rightarrow \dfrac{BN}{BL} = \dfrac{BN^2}{x^2}$,

C noktasının içteğet çembere göre kuvvetinden $CK \cdot CN = y^2 \Rightarrow \dfrac{CN}{CK} = \dfrac{CN^2}{y^2}$.

$\angle BAD = \alpha$ dersek, $BN^2 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos\alpha$ ve $CN^2 = 5y^2 + 4y^2 \cdot \cos\alpha$ olur.

Bu durumda, $\dfrac{BN}{BL} + \dfrac{CN}{CK} = 5 - 4\cos\alpha + 5 + 4\cos\alpha = 10$ elde edilir.

Test Mantığı:

$ABCD$ yi neredeyse kare olan bir ikizkenar yamuk olarak düşünebiliriz. Bu durumda problem $1 - 2 - \sqrt{5}$ dik üçgeni ve çemberde kuvvet sorusuna dönüşüyor.

Çözüm 2:

Önceki çözümdeki gibi $AN = x$, $DN = y$ değişkenlerini kullanırsak $\dfrac{BN}{BL} = \dfrac{BN^2}{x^2}$ ve $\dfrac{CN}{CK} = \dfrac{CN^2}{y^2}$ elde ederiz.

$[AD$ üzerinde $[AD]$ dışında M noktası $\triangle CMD \sim \triangle BNA$ olacak şekilde M noktası aldığımızda $\dfrac{CM^2}{y^2} = \dfrac{BN^2}{x^2}$ olacaktır. Bu durumda,

$$\frac{BN}{BL} + \frac{CN}{CK} = \frac{CM^2}{y^2} + \frac{CN^2}{y^2} = \frac{CM^2 + CN^2}{y^2}$$

olacaktır.

$\triangle CMN$ de kenarortay teoreminden $CM^2 + CN^2 = 2(y^2 + 4y^2) = 10y^2$ olacağı için $\dfrac{BN}{BL} + \dfrac{CN}{CK} = 10$ elde edilir.

30 Başlangıçta, düzgün bir n-genin köşelerinde bulunan n havaalanından k tanesinde birer uçak vardır. Her gün, bu uçaklardan her biri, o gün bulunduğu havaalanının en yakınındaki iki havaalanından birine uçuyor. Başlangıç dağılımı ne olursa olsun, bütün uçakların günün birinde aynı havaalanında toplanması, aşağıdaki (n, k) sıralı ikililerinden hangisi için olanaksızdır?

a) $(10, 6)$ **b)** $(10, 4)$ **c)** $(11, 3)$ **d)** $(11, 5)$ **e)** $(13, 8)$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

İddia 1: n nin çift sayı olması durumunda $k > \dfrac{n}{2}$ iken bütün uçakların aynı havaalanında toplanması olanaksızdır. $k \leq \dfrac{n}{2}$ iken bütün uçakların aynı havaalanında toplanması mümkündür.

İddia 2: n nin tek sayı olması durumunda k nın her değeri için bütün uçakların aynı havaalanında toplanması mümkündür.

Bu iddialara göre $(n,k) = (10,6)$ durumunda uçakların aynı havaalanında toplanması olanaksız olduğunu anlarız. Şimdi Bu iddiaları ispat edelim.

İddia 1'in İspatı: Düzgün $2n$ genin köşeleri $A_0A_1 \dots A_{2n-1}$ ve saat yönünde sıralanmış olsun. Tüm uçakların toplanacağı havaalanının A_0 olduğunu kabul edelim. A_m havaalanındaki bir uçak A_0 a (saat yönünde veya ters yönde ilerlemesi durumuna göre) m günde ya da $2n-m$ günde gidebilir. m ve $2n-m$ sayılarının pariteleri (çift-tek durumları) aynıdır. Bunun anlamı: örneğin, A_3 deki bir uçak A_0 a tek sayı bir günde ulaşabilrken A_4 deki bir uçak A_0 a çift sayı bir günde ulaşabilir. Dolayısıyla pariteleri farklı olan uçaklar asla aynı yerde toplanamazlar. 0 dan $2n-1$ e kadar olan sayılardan yarısı çifttir, yarısı da tektir. Eğer $k > n$ ise güvercin yuvası prensibi gereği en az bir uçağın bulunduğu yer çift indislidir ve en az bir uçağın bulunduğu yer de tek indislidir. Dolayısıyla bu uçakları asla bir araya getiremeyiz. $k \leq n$ ise k tane uçağı çift indisli yerlere yerleştirerek A_0 da toplanmalarını sağlarız.

İddia 2'in İspatı: Düzgün $2n+1$ genin köşeleri $A_0A_1 \dots A_{2n}$ ve saat yönünde sıralanmış olsun. Tüm uçakların toplanacağı havaalanının A_0 olduğunu kabul edelim. A_m havaalanındaki bir uçak A_0 a (saat yönünde veya ters yönde ilerlemesi durumuna göre) m günde ya da $2n+1-m$ günde gidebilir. Bu sayılardan biri çift iken diğeri tektir, yani pariteleri farklıdır. Dolayısıyla herhangi bir şehirdeki uçağı A_0 a istersek tek günde, istersek çift günde ulaştırabiliriz. Dolayısıyla çokgenin kenar sayısı tek sayı iken k nın her değeri için bütün uçakların aynı havaalanında toplanması mümkündür.

31 $2^n + 65$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?

a) 1024 **b)** 268 **c)** 10 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$2^n + 65 = m^2$ olsun. mod 5 te incelersek $2^n \equiv m^2 \pmod 5$ olur. Ayrıca her m tam sayısı için $m^2 \equiv 0,1 \pmod 5$, her n pozitif tek tam sayısı için $2^n \equiv 2,3 \pmod 5$ olduğundan n tek sayı iken çözüm yoktur. $n = 2a$ diyelim. Denklem $m^2 - 2^{2a} = 65$ şekline dönüşür. İki kare farkı özdeşliğinden $(m-2^a)(m+2^a) = 65$ yazılır. a nın en büyük olması için $m - 2^a = 1$ ve $m + 2^a = 65$ durumunu incelemeliyiz. Buradan $m = 33$, $a = 5$ olup $n = 10$ en büyük değeri elde edilir.

32 $(\sqrt{10}+3)^{2001}$ sayısının ondalık açılımında virgülden sonraki 33 üncü rakam kaçtır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$(\sqrt{10}+3)^{2001} = a + b\sqrt{10}$ olacak şekilde a, b tam sayıları vardır. Bu sayılar için $(\sqrt{10}-3)^{2001} = a - b\sqrt{10}$ olur. Burada iki önemli gözlem yapmalıyız:

1. Gözlem: $(\sqrt{10}+3)^{2001} + (\sqrt{10}-3)^{2001} = 2a$ şeklinde bir pozitif çift tam sayı olur. Bu gözlemin doğruluğu açıktır.

2. Gözlem: $0 < (\sqrt{10}-3)^{2001} < 10^{-33}$ olur.

2. gözlemimizi ispatlayalım: $0 < (\sqrt{10}-3)^2 < 10^{-1}$ olduğunu görelim. Gerçekten $(\sqrt{10}-3)^2 < 10^{-1} \Leftrightarrow 10+9-6\sqrt{10} < \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 189 < 60\sqrt{10} \Leftrightarrow 189^2 < 36000$ olur. Dolayısıyla $(\sqrt{10}-3)^{2001} < (\sqrt{10}-3)^{2000} < (10^{-1})^{1000} < 10^{-33}$ elde edilir.

Bu 2. gözlemimize göre $(\sqrt{10}-3)^{2001}$ pozitif sayısının virgülden sonraki ilk 33 basamağının (hatta virgülden sonraki ilk 1000 basamağının bile) 0 olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $(\sqrt{10}+3)^{2001} = 2a - (\sqrt{10}-3)^{2001}$ sayısı $2a$ tam sayısına çok yakındır ve tam kısmı $2a-1$ dir. Ondalıklı kısmında ise virgülden sonra 33 tane (hatta 1000) tane 0 rakamı bulunur.

33 Bir ABC üçgeninde $|AC| = 1$, $|AB| = \sqrt{2}$ dir. AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta, $|MA| = |AB|$ ve $m(\widehat{MAB}) = 90°$ olacak şekilde M noktası ile AC doğrusuna göre B ile farklı tarafta, $|NA| = |AC|$ ve $m(\widehat{NAC}) = 90°$ olacak şekilde bir N noktası alınıyor. MAN üçgeninin çevrel çember merkezi ile A dan geçen doğru, $[BC]$ yi F noktasında kesiyorsa, $\dfrac{|BF|}{|FC|}$ nedir?

a) $2\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** 2 **d)** 3 **e)** $3\sqrt{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

(MAN) çemberinin A dan geçen çapı AA' olsun. $A'MAN$ dörtgeninde, $\angle A'MA = \angle A'NA = 90°$ dir. Ayrıca, $\angle MA'A + \angle MA'A = \angle MAB + \angle BAF$ olduğu için $\angle MA'A = \angle BAF$ ve benzer şekilde, $\angle FAC = \angle AA'N$ dir. F den, AB ve AC ye inilen dikmelerin ayakları sırasıyla X ve Y olsun. $AXFY \sim A'MAN$ olup, $MA/AN = XF/FY = \sqrt{2}$ dir. $BF/FC = [ABF]/[AFC] = \dfrac{AB \cdot XF}{AC \cdot FY} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ dir.

Çözüm 2:

(MAN) çemberinin merkezi O olsun. $\angle MOA = 2x$ ve $\angle NOA = 2y$ olsun.

$\angle NAO = 90° - y$, $\angle OAM = 90° - x$, $\angle NMA = y$ ve $\angle MNA = x$ olacaktır. Bu durumda $\angle CAF = y$ ve $\angle FAB = x$ olur.

BA bir kenarortay olacak şekilde $\triangle BCD$ yi oluşturalım. $\triangle ADB \cong \triangle ANM$ (KAK) olacaktır.

A dan geçen ve BD ye paralel olan doğru BC yi BC nin orta noktası P de keser. $\angle BAP = y$, $\angle PAC = x$, dolayısıyla da $\triangle ABC$ de, AP kenarortay; AF de kenarortaysıdır. Bu durumda, $BF/FC = AB^2/AC^2 = 2$ olacaktır.

Ek olarak, AP nin MN ye dik olduğunu söyleyebiliriz.

Çözüm 3:

Çoktan seçmeli sınav mantığı ile, $\angle CAB = 90°$ olsun. Soru metninde ve şıklarda böyle olmasına engel bir durum söz konusu değil.

$\angle ACB = \alpha$ dersek, $ACB \cong ANM$ olduğu için $\angle ANM = \alpha$ olur. (MAN) çemberinin merkezi O olsun. $\triangle MAN$ dik üçgen olduğu için $ON = OM = OA$, dolayısıyla $\angle MAO = \angle OMA = \alpha$ ve $\angle CAF = 90 \circ^{-} \alpha$. $\angle CAF + \angle ACF = 90°$ olduğu için $\triangle ABC$ dik üçgeninde Öklit'ten $BF : FC = AB^2 : AC^2 = 2 : 1$ elde edilir.

Çözüm 4:

(MAN) çemberinin merkezi O olsun. $\angle MOA = 2x$ ve $\angle NOA = 2y$ olsun.

$\angle NAO = 90° - y$, $\angle OAM = 90° - x$, $\angle NMA = y$ ve $\angle MNA = x$ olacaktır. Bu durumda $\angle CAF = y$ ve $\angle FAB = x$ olur.

B den geçen AC ye paralel olan doğru ile AF doğrusu E de kesişsin.

Paralellikten $\angle CAF = \angle BEA = y$ ve (AA) eşliğinden $\triangle ABE \sim \triangle NAM$ olacaktır.

$\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{AM}{AN} \Rightarrow BE = 2.$

Paralellikten $\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{BE}{AC} = 2$ elde edilir.

Çözüm 5:

Yanıt: $\boxed{C}$

AA' doğru parçası (MAN) çemberinin çapı olsun. $MANA'$ kirişler dörtgeninde $\angle AMA' = 90°$ olduğundan F noktası AA' doğrusu üzerinde olacaktır. Ayrıca $MA \perp AB$ ise

$$\angle ANM = 90° - \angle A'NM = 90° - \angle A'AM = \angle BAF$$

olur. Benzer şekilde $\angle FAC = \angle AMN$ olduğu için AMN üçgeninde Sinüs Teoremi'nden

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin \angle BAF}{AC \cdot AF \cdot \sin \angle FAC} = \frac{AB \cdot \sin \angle ANM}{BC \cdot \sin \angle AMN} = \frac{AB \cdot AM}{BC \cdot AN} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

elde edilir.

34 Tam sayı sıralı ikilileri üstünde tanımlanan gerçel değerli bir f fonksiyonu, tüm x, y, m, n tam sayıları için,

$$f(x + 3m - 2n, y - 4m + 5n) = f(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyonun değer kümesi en çok kaç elemandan oluşur?

a) 7 **b)** 8 **c)** 15 **d)** 49 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$f(0,0) = a_0$, $f(0,1) = a_1, \ \dots\ , f(0,6) = a_6$ olsun.

$m = 2, n = 3$ için $f(x, y) = f(x, y + 7)$ ve

$m = n = 1$ için $f(x, y) = f(x + 1, y + 1)$ olduğu için $f(x, y)$ bu 7 değerden farklı değer alamaz.

35 p asal ve n pozitif tam sayı olmak üzere, $(1 + p)^n = 1 + pn + n^p$ eşitliğini sağlayan kaç (p, n) sıralı ikilisi vardır?

a) 5 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$p > 2$ için p tek sayı olacağı için sol taraf her zaman çift, sağ taraf da her zaman tek sayı olacaktır. O halde buradan çözüm gelmez.

$p = 2$ için denklem $3^n = 1 + 2n + n^2 = (n + 1)^2$ ye dönüşüyor. $f(n) = 3^n - (n + 1)^2$ fonksiyonu $n > 2$ den sonra her zaman pozitif olacağı için denememiz gereken iki n değeri kalıyor: $n = 2$ ve $n = 1$. Bu durumda sadece $(p, n) = (2, 2)$ çiftinin çözüm olduğu kolayca görülebilir.

36 a ve b pozitif gerçel sayılar ve $ab(a-b)=1$ ise, a^2+b^2 aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{11}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=\dfrac{1}{a^2b^2}+2ab$ dir. $AO \geq GO$ dan

$$\frac{\frac{1}{a^2b^2}+ab+ab}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2}\cdot ab\cdot ab}=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 3$$

elde edilir.

10. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2002

1 Bir ABC üçgeninde $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın orta noktaları sırasıyla C', A' ve B'; A dan BC ye inilen dikmenin ayağı H dir. $|A'C'| = 6$ olduğuna göre, $|B'H|$ nedir?

a) 5 **b)** 6 **c)** $5\sqrt{2}$ **d)** $6\sqrt{2}$ **e)** 7

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

AHC dik üçgeninde $B'H = AC/2$, aynı zamanda $A'C' = AC/2$ olduğu için $A'C' = B'H = 6$.

2 11 modunda 3^{2002} aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Fermat'ın küçük teoremi gereğince $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. O halde $3^{2002} = (3^{10})^{200} 3^2 \equiv 9 \pmod{11}$.

3 Başlangıçta bütün birim kareleri beyaz olan $m \times n$ bir tahtayı, sonuçta, ortak kenara sahip herhangi iki kareden biri siyah biri beyaz olacak şekilde boyamak istiyoruz. Boyama işleminin her adımında tahta üstünde 2×2 bir kare seçilerek, beyaz birim kareleri siyaha, siyah birim kareleri beyaza boyanıyor. Aşağıdakilerden hangi (m, n) sıralı ikilisi için, tahta istenilen biçimde boyanabilir?

a) $(3, 3)$ **b)** $(2, 6)$ **c)** $(4, 8)$ **d)** $(5, 5)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

4×4 bir tahtayı ele alalım. Tahtanın satırlarını A, B, C, D diye, sütunlarını da $1, 2, 3, 4$ diye adlandıralım.

Boyanacak 2×2 lik parçanın sol-üst köşesi 4×4 lük tahtanın hangi karesine geliyorsa o kareye bir $+$ koyalım.

Örneğin aşağıdaki gibi bir boyama

	1	2	3	4
A	$+$	$+$		
B	$+$		$+$	
C		$+$	$+$	
D				

sonucu hangi karenin kaç kez boyandığını gösterecek olursak

	1	2	3	4
A	1	2	1	0
B	2	3	2	1
C	1	2	3	2
D	0	1	2	1

elde ederiz. Komşu kareler teklik çiftlik açısından farklı olduğu için soru istenilen şekilde bir boyama elde etmiş olduk.

Bu şekilde boyanan 4×4 lük blokları birleştirerek $4m \times 4n$ lük bloklar elde edebiliriz. Bu durumda, $(4, 8)$ çifti için istenen biçimde boyama yapabiliriz.

$\boxed{4}$ $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2$ polinomunun kaç gerçel kökü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2 &= x^4(x+1) - x^2(x+1) - 2(x+1) \\ &= (x+1)(x^4 - x^2 - 2) \\ &= (x^2-2)(x^2+1)(x+1) \end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1$.

$\boxed{5}$ Bir üçgenin iki yüksekliği 8 ve 12 dir. Üçüncü yükseklik aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 4 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 12 **e)** 23

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Diğer yüksekliğe h dersek, üçgenin kenarları $8h$, $12h$ ve 96 ile orantılı olacaktır. Sadeleştirdikten sonra $(2h, 3h, 24)$ üçgen eşitsizliğini yazarsak $5h > 24 > h$ yani $24/5 < h < 24$ elde ederiz.

$\boxed{6}$ Ondalık yazılımı beş basamaklı bir sayının binler basamağı 3 olup, bu sayı 37 ve 173 ile bölünüyorsa, bu sayının yüzler basamağı kaçtır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\overline{a3bcd} = 37 \cdot 173 \cdot x = 6401 \cdot x$ eşitliğini mod100 de incelersek $\overline{cd} \equiv x \pmod{100}$ elde edilir.

$x < 20$ olduğu aşikar. Bu durumda $x = \overline{cd}$ dir. ($c = 0$ olabilir.)

$\overline{a3bcd} = 6401 \cdot \overline{cd} \Rightarrow \overline{a3b00} + \overline{cd} = 6400 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} \Rightarrow \overline{a3b} = 64 \cdot \overline{cd}$.

4 ile bölünebilme kuralından $b = 2$ ya da $b = 6$ dır.

$b = 2$ için $\overline{a32} = 100a + 32 = 32 \cdot 2 \cdot \overline{cd} \Rightarrow 100a \equiv 4a \equiv 0 \pmod{32} \Rightarrow a = 8$.

$832 \div 64 = 13 = \overline{cd}$.

$b = 6$ için $\overline{a36} = 100a + 36 = 64 \cdot \overline{cd} \Rightarrow 100(a+1) = 64 \cdot (\overline{cd} + 1) \Rightarrow 25 \mid \overline{cd} + 1$.

Bu şartı sağlayan en küçük $\overline{cd}$ sayısı 24 olduğu için buradan çözüm gelmez.

O halde $\overline{a3bcd} = 83213$.

$\boxed{7}$ Her seferinde tam olarak iki karpuzu birlikte tartmak koşuluyla, 13 karpuzun toplam ağırlığı en az kaç tartıda bulunabilir?

a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 11

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

7 tartıda bulunamayacağı aşikar. İlk 10 karpuzu tarttıktan sonra, son 3 karpuzu ikişerli gruplar halinde tartıp çıkan sonuçları toplayıp 2 ye bölersek 3 karpuzun toplam ağırlığını buluruz. Bu durumda, 8 kez tartmış olduk.

$\boxed{8}$ $x^{60}-1$ polinomu aşağıdaki polinomlardan hangisi ile bölünmez?

a) x^2+x+1 **b)** x^4-1 **c)** x^5-1 **d)** $x^{15}-1$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Her $a \mid 60$ pozitif tam sayısı için $x^a-1 \mid x^{60}-1$ dir. Yani b, c, d şıklarında verilen polinomlar $x^{60}-1$ i böler. Ek olarak $x^2+x+1 \mid x^3-1$ olduğu için a şıkkındaki polinom da $x^{60}-1$ i böler.

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninde $|AB|=5$, $|BC|=9$ ve $|AC|=8$ dir. $\widehat{BCA}$ nın açıortayı BA yı X noktasında, $\widehat{CAB}$ nin açıortayı BC yi Y noktasında kesiyor. XY ve AC doğrularının kesiştiği nokta Z olmak üzere, $|AZ|$ nedir?

a) $\sqrt{104}$ **b)** $\sqrt{145}$ **c)** $\sqrt{89}$ **d)** 9 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

İddia: ABC üçgeninde $[BZ]$ dış açıortay, $[CX]$ ve $[AY]$ iç açıortay ise X, Y, Z doğrusaldır.

İspat:

$\triangle ABC$ de X, Y, Z noktaları için Menelaus uygulayalım.

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1. \blacksquare$$

O halde, BZ dış açıortaydır. $\dfrac{AZ}{CZ} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow AZ = 10.$

$\boxed{10}$ $x^3-13y^3=1453$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı sıralı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine bölünmez?

a) 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Eşitliği mod7 de inceleyelim.

$$x^3-13y^3 \equiv x^3+y^3 \equiv 1453 \equiv 4 \pmod 7$$

mod7 de küp kalanlar kümesi $\{0,1,6\}$ dır. $a, b \in \{0,1,6\}$ ve $a+b=4$ olacak şekilde a, b sayıları bulunamayacağı için denklemin çözüm kümesi boştur. Şıklardan hepsi 0 sayısını böleceği için cevap hiçbiridir.

11 $(1+x+x^2)^9$ ifadesinin açılımında x^5 in katsayısı nedir?

a) 1680 **b)** 882 **c)** 729 **d)** 450 **e)** 246

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\left((1+x)+x^2\right)^9 = \binom{9}{0}(1+x)^9(x^2)^0 + \binom{9}{1}(1+x)^8(x^2)^1 + \binom{9}{2}(1+x)^7(x^2)^2 + \cdots$ olacağı için x^5 in katsayısı $\binom{9}{0}\cdot\binom{9}{5} + \binom{9}{1}\cdot\binom{8}{3} + \binom{9}{2}\cdot\binom{7}{1} = 882$ dir.

12 a, b, c gerçel sayıları $a^2+b^2+c^2=1$ eşitliğini sağlıyorsa, $ab+bc+ac$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -1 **b)** $-\dfrac{1}{2}$ **c)** $-\dfrac{1}{3}$ **d)** $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **e)** 0

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$0 \le (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 1+2(ab+bc+ac) \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le ab+bc+ac.$

$a=0, b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ istenen koşulları sağlayan üçlülerden biridir.

13 AB nin CD ye paralel olduğu bir $ABCD$ yamuğunda $|BC|+|AD|=7$, $|AB|=9$ ve $|BC|=14$ tür. $\widehat{BCD}$ ve $\widehat{CDA}$ nın açıortayları ile CD nin oluşturduğu üçgenin alanının yamuğun alanına oranı nedir?

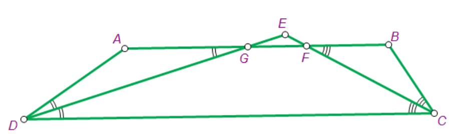
a) $\dfrac{9}{14}$ **b)** $\dfrac{5}{7}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $\dfrac{49}{69}$ **e)** $\dfrac{1}{3}$

Çözüm 1:

Bu soru iptal edilmiştir.

Çözüm 2:

$|BC|=14$ verildiğinden iptal edilmiş, $|DC|=14$ için çözüm aşağıdadır:



$\angle C$ ile $\angle D$ ye ait açıortaylar E de kesişsin. CE ile DE doğruları AB yi sırasıyla F ve G de kessin. $AD=AG$ ve $BF=BC$.

$GF = 9 - AG - BF = 9 - 7 = 2$ dir. $ABCD$ yamuğunun yüksekliği h, $\triangle DEC$ de DC ye ait yükseklik r olsun. $GF/CD = 2/14 = 1/7$ olduğu için $r/h = 7/6$ dır.

$$\frac{[CDE]}{[ABCD]} = \frac{CD\cdot r}{(AB+CD)h} = \frac{14r}{23h} = \frac{14}{23}\cdot\frac{7}{6} = \frac{49}{69}.$$

Buna göre cevap $\boxed{D}$ oluyor.

$\boxed{14}$ $39p+1$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardr?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$39p+1=T^2 \Rightarrow 39p=(T-1)(T+1)$

(i) $T-1=39, T+1=41 \Rightarrow p=41$

(ii) $T-1=39, T+1=41 \Rightarrow p=37$

(iii) $T-1=13, T+1=15 \Rightarrow p=5$

$\boxed{15}$ Bir tiyatro salonunda onar koltukluk on sıra bulunmaktadır ve koltuklar numaralanmıştır. Birbirinden habersiz bilet alan iki arkadaşın koltuklarının yan yana düşmesi olasılığı nedir?

a) $\frac{1}{55}$ **b)** $\frac{1}{50}$ **c)** $\frac{2}{55}$ **d)** $\frac{1}{25}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Alınan koltukları (a,b) sıralı ikilisi ile gösterelim. $100\cdot 99$ farklı ikili oluşturulabilir.

İlk sıradan $(1,2),(2,3),\dots,(9,10)$ ve bunların yansıması olmak üzere toplam $9\cdot 2$ farklı yan yana bilet alınabilir.

Toplamda 10 sıra olduğu için aradığımız yanıt $\dfrac{9\cdot 2\cdot 10}{100\cdot 99}=\dfrac{1}{55}$ tir.

$\boxed{16}$ x pozitif bir gerçel sayı olmak üzere $x^2+\dfrac{1}{4x}$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) $\sqrt{3}-1$ **b)** $2\sqrt{2}-2$ **c)** $\sqrt{5}-1$ **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$$\frac{x^2+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x}}{3}\geq\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{8x}\cdot\frac{1}{8x}}=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+\frac{1}{4x}\geq\frac{3}{4}=0,75.$$

b,c,d şıkları $0,75$ ten büyük. a yı test etmemiz gerekiyor:

$$\sqrt{3}-1<\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sqrt{3}<\frac{7}{4}\Leftrightarrow 3<\frac{49}{16}\Leftrightarrow 48<49.$$

$\boxed{17}$ $AD \parallel BC$ ve $|AB|=|CD|$ koşullarını sağlayan bir $ABCD$ yamuğu aynı zamanda bir teğetler dörtgenidir. İç teğet çemberinin $[CD]$ kenarına değme noktası N, $[AN]$ nin çemberi ikinci kez kestiği nokta K, $[BN]$ nin çemberi ikinci kez kestiği nokta L olmak üzere, $\dfrac{|AN|}{|AK|}+\dfrac{|BN|}{|BL|}$ nedir?

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 16

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$ABCD$ ikizkenar yamuğunda içteğet çemberin merkezinden taban ve tavana dikmeler indirildiğinde, bu değme noktaları ve iç merkez doğrusal olacaktır. Bu doğru yamuğun simetri ekseni olacaktır.

$CN = x$ ve $DN = y$ olsun.

B noktasının içteğet çembere göre kuvvetinden $BL \cdot BN = x^2 \Rightarrow \dfrac{BN}{BL} = \dfrac{BN^2}{x^2}$,

A noktasının içteğet çembere göre kuvvetinden $AK \cdot AN = y^2 \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AN^2}{y^2}$.

$\angle BCD = \alpha$ dersek, $BN^2 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos\alpha$ ve $AN^2 = 5y^2 + 4y^2 \cdot \cos\alpha$ olur.

Bu durumda, $\dfrac{BN}{BL} + \dfrac{AN}{AK} = 5 - 4\cos\alpha + 5 + 4\cos\alpha = 10$ elde edilir.

NOT:

Aynı soru bir önceki senede de sorulmuş.

18 $|15x^2 - 32x - 28|$ sayısının asal olmasını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|15x^2 - 32x - 28| = |5x - 14| \cdot |3x + 2|$ dir. Bu durumda çarpanlardan birinin mutlaka 1 olması gerekir.

$x \in \mathbb{Z}$ olduğunu da hesaba katarak,

$5x - 14 = \pm 1 \Rightarrow x = 3$ veya

$3x + 2 = \pm 1 \Rightarrow x = -1$ bulunur.

$x = 3$ için $|3x + 2| = 11$ asaldır.

$x = -1$ için $|5x - 14| = 19$ asaldır.

O halde çözüm kümesi $\{-1, 3\}$ tür.

19 Bir A sayısının ondalık gösteriminin sağına üç rakam yazarak, $1 + 2 + \cdots + A$ toplamına eşit bir sayı elde edilmesini olanaklı kılan kaç tane A pozitif tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 2002 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$1000A \le 1 + 2 + \cdots + A < 1000A + 1000$

$1000A \le \dfrac{A(A+1)}{2} < 1000A + 1000$

$0 \le \dfrac{A(A+1)}{2} - 1000A < 1000$

$0 \le A(A - 1999) < 2000$ eşitsizliğini sağlayan tek pozitif tam sayı $A = 1999$ dur.

20 x, y gerçel sayıları $x^2 + xy + y^2 = 1$ eşitliğini sağlıyorsa, $x^2 + y^2$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{1}{2}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $3 - \sqrt{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(1 - x^2 - y^2) \Rightarrow 3(x^2 + y^2) \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \dfrac{2}{3}$.

21 Düzgün $A_1A_2 \cdots A_{10}$ 10-geninin $[A_1A_4]$ köşegeninin uzunluğu b, çevrel çemberinin yarıçapı R dir. Bu 10-genin kenar uzunluğu nedir?

a) $b - R$ **b)** $b^2 - R^2$ **c)** $R + \dfrac{b}{2}$ **d)** $b - 2R$ **e)** $2b - 3R$

Çözüm:

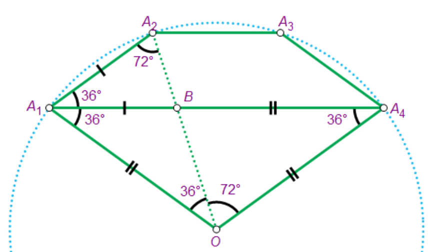
Yanıt: $\boxed{A}$

Çokgenin merkezi O olsun. $\angle A_1OA_2 = 36°$, $\angle A_2OA_4 = 72°$ dir.

$\angle A_2A_1A_4 = \angle A_4A_1O = \angle A_1A_4O = 36°$ dir.

$OA_2 \cap A_1A_4 = \{B\}$ olsun. $OA_4 = A_4B = R$.

$A_1A_2 = A_1B = A_1A_4 - A_4B = b - R$.



22 $5^{256} - 1$ sayısı 2^n ile bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?

a) 8 **b)** 10 **c)** 11 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$5^{256} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^{2^3}+1)\cdots(5^{2^6}+1)(5^{128}+1) = 2^2 \cdot \sum_{i=0}^{7} 5^{2^i} + 1$

$5^{2^i} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ olduğu için $5^{2^i} + 1 = 4a_i + 2 = 2(2a_i + 1)$ şeklinde değişken değiştirirsek

$5^{256} - 1 = 2^2 \cdot \sum_{i=0}^{7} 2(2a_i + 1) = 2^{10} \cdot \sum_{i=0}^{7} (2a_i + 1)$ olacaktır.

23 $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin, $1 \le r \le n$ olmak üzere, r elemanlı altkümelerinin en küçük elemanlarının aritmetik ortalaması nedir?

a) $\dfrac{n+1}{r+1}$ **b)** $\dfrac{r(n+1)}{r+1}$ **c)** $\dfrac{nr}{r+1}$ **d)** $\dfrac{r(n+1)}{(r+1)n}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

En küçük elemanı $1 \le i \le n+1-r$ olan alt küme sayısı $\dbinom{n-i}{r-1}$ dir. O halde aradığımız aritmetik ortalama:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1-r} i \cdot \dbinom{n-i}{r-1}}{\dbinom{n}{r}}.$$

Üstteki toplamı

$\binom{r-1}{r-1}$

$+\binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1}$

$\vdots$

$+\binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + \cdots + \binom{n-2}{r-1}$

$+\binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + \cdots + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-1}{r-1}$

şeklinde yazabiliriz.

Sütun-Toplam Özdeşliği: $\sum\limits_{r=c}^{n} \dbinom{r}{c} = \dbinom{n+1}{c+1}$

Binom katsayıları arasındaki Sütun-Toplam özdeşliğini her satıra uygularsak,

$\binom{r}{r}$

$+\binom{r+1}{r}$

$\vdots$

$+\binom{n-1}{r}$

$+\binom{n}{r}$

elde ederiz. Bunları da aynı özdeşlikten toplarsak $\binom{n+1}{r+1}$ elde ederiz.

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1-r} i \cdot \dbinom{n-i}{r-1}}{\dbinom{n}{r}} = \frac{\dbinom{n+1}{r+1}}{\dbinom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}. \blacksquare$$

Çözüm 2:

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin r elemanlı bir alt kümesinin en küçük elemanı a olsun. Bu alt kümeyi a kez yazalım. Bu alt kümelerin her birine $x = 0, 1, a-1$ sayılarından birini tam olarak bir kez ekleyelim. x yeni alt kümenin en küçük elemanı, a da ikinci en küçük elemanı olur. Bu yeni alt kümeler $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden seçilen $r+1$ elemanlı alt kümeler olacaktır. Bu durumda ağırlıklı toplam $\binom{n+1}{r+1}$, toplam alt küme sayısı da $\binom{n}{r}$ olacaktır. Aritmetik ortalama da $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$ olacaktır.

24 $\lfloor \sqrt[3]{7n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{7n+3} \rfloor$ eşitliğini sağlamayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 7 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

mod7 de küp kalanlar $\{0, 1, 6\}$ dır.

Bu durumda, $(a \in \mathbb{Z})$, $a < \sqrt[3]{7n+2} < a+1$ olduğunda $a^3 < 7n+2 < 7n+3 < (a+1)^3$ olacağından $\sqrt[3]{7n+2}$ ile $\sqrt[3]{7n+3}$ ün tam kısımları her zaman aynıdır.

25 Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin $[AD]$ kenarı üzerinde bir E noktası işaretleniyor. AB ve CE doğruları F de; BE ve DF doğruları G de kesişiyor. $m(\widehat{DAB}) = 60°$ ise, $m(\widehat{DGB})$ nedir?

a) 45° **b)** 50° **c)** 60° **d)** 65° **e)** 75°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$BD \cap EC = \{H\}$ olsun.

$AB = BC = CD = DA = a$ ve $AF = x$ diyelim.

$\dfrac{HD}{BE} = \dfrac{CD}{BF} = \dfrac{a}{a+x}$.

$\triangle BDF$ de Ceva Teoreminden

$$\frac{HD}{BH} \cdot \frac{BA}{AF} \cdot \frac{FG}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{FG}{GD} = \frac{x(a+x)}{a^2} \Rightarrow \frac{FG}{FD} = \frac{ax+x^2}{a^2+ax+x^2} \quad (1)$$

$\triangle FAD$ de Kosinüs Teoreminden $FD^2 = a^2 + x^2 + ax$ değerini (1) de yerine yazarsak

$$\frac{FG}{FD} = \frac{ax+x^2}{FD^2} = \frac{FA \cdot FB}{FD^2} \Rightarrow FG \cdot FD = FA \cdot FB \quad (2)$$

elde ederiz. Bu da B, A, G, D nin çembersel olduğu anlamına gelir. Bu durumda $\angle BAD = \angle BGD = 60°$ olur.

Not:

Test mantığı ile $AE = EB$ alırsak basit açı hesaplarıyla sonuca gidebiliriz.

Çözüm 2:

$\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{FD}{DC} = \dfrac{FD}{BD}$ ve $\angle FDB = \angle EBD = 60°$ olduğu için $K.A.K$ dan $\triangle EBD \sim \triangle FDB$, dolayısıyla $\angle BDE = \angle DFB$.

$\angle DGB = \angle GDF + \angle DFG = \angle GDF + \angle BDG = \angle BDF = 60°$.

Kaynak:

AoPS

26 Üç bileşik tek sayının toplamı olarak yazılabilen tüm tam karelerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{(2k+1)^2 : k \geq 0\}$

b) $\{(4k+3)^2 : k \geq 1\}$

c) $\{(2k+1)^2 : k \geq 3\}$

d) $\{(4k+1)^2 : k \geq 2\}$

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Üç tek sayının toplamı tektir.

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 &= 4k^2+4k+1 \\ &= 9+4k^2+4k-8 \\ &= 9+(k+2)k+(k+2)(3k-4) \qquad (i) \\ &= 9+(k+1)(k-1)+(k+1)(3k-7) \qquad (ii)\end{aligned}$$

k tek olduğunda (i) deki şekilde üç tek sayı seçilebilir.

k çift olduğunda (ii) deki şekilde üç tek sayı seçilebilir.

$k > 2$ için tek sayıların bileşikliği garantilenir.

Wikipedia'daki bileşik sayı tanımına göre bileşik sayılar pozitif olup en az 3 pozitif bölene sahip olmalı.

O halde en küçük bileşik tek sayı 9 dur. $(2k+1)^2 \geq 27 \Rightarrow k \geq 3$ olduğu için 49 dan itibaren tüm tek kareler üç bileşik tek sayının toplamı şeklinde yazılabilir.

27 Bir kasanın beş kilidine ait anahtarlar çoğaltılarak sekiz kişiye, bu sekiz kişiden herhangi beşinin birlikte kasayı açmalarını olanaklı kılacak biçimde dağıtılacaktır. Anahtarların toplam sayısı en az ne olmalıdır?

a) 18 **b)** 20 **c)** 22 **d)** 24 **e)** 25

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Anahtarlardan her biri en az 4 kişiye dağıtılmalı. Aksi takdirde en az 5 kişi de anahtarlardan biri olmayacak. Bu durumda kasayı açamayacaklar. Buna göre en az $5 \times 4 = 20$ anahtar olmalı.

20 anahtarlı dağılıma, sadece 4 kişiye tüm anahtarların verildiği dağılımı örnek olarak verebiliriz.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	×	×	×	×				
A_2	×	×	×	×				
A_3	×	×	×	×				
A_4	×	×	×	×				
A_5	×	×	×	×				

28 $a_{2001} = 2002$ ve $0 \leq k \leq 2000$ için $a_k = -k-1$ ise, $x^{2002}+a_{2001}x^{2001}+a_{2000}x^{2000}+\cdots+a_1x+a_0$ polinomunun kaç pozitif kökü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 1001 **e)** 2002

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$P(x) = x^{2002} + 2002x^{2001} - 2001x^{2000} - \cdots - 2x - 1$ polinomunun katsayılarının işaretlerini sırasıyla yazalım:

$+ + - - \cdots -$

Descartes'ın İşaret Kuralı gereğince $P(x)$ in pozitif gerçel kök sayısı $+, -$ ya da $-, +$ gibi işaret değişimlerinin sayısı kadar ya da onun çift sayı eksiği kadardır.

Bu durumda $P(x)$ için pozitif kök sayısı 1 olmalıdır.

Kaynak:

AoPS

Wikipedia

Vikipedi

Cut The Knot

Çözüm 2:

$P(0) = -1$ ve yeterince büyük k değerleri için $P(k) > 0$ olacaktır. Bu durumda, $0 < r < k$ ve $P(r) = 0$ olacak şekilde en az bir r gerçel sayısı vardır.

$P(x) = (x - r)Q(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2002} + 2002x^{2001} - 2001x^{2000} - \cdots - 2x - 1 \\ &= (x-r)(x^{2001} + (r+2002)x^{2000} + (r^2 + 2002r - 2001)x^{1999} + (r^3 + 2002r^2 - 2001r - 2000)x^{1998} \\ &\quad + \ldots + (r^{2000} + 2002r^{1999} - 2001r^{1998} - \ldots - 4r - 3)x \\ &\quad + (r^{2001} + 2002r^{2000} - 2001r^{1999} - \ldots - 4r^2 - 3r - 2)) \end{aligned}$$

$r^{2002} + 2002r^{2001} - 2001r^{2000} - \ldots - 2r - 1 = 0$ olduğu için $r^{2001}(r + 2002) = 2001r^{2000} + \ldots + 2r + 1$, dolayısıyla $r + 2002 > 0$. Benzer şekilde $Q(x)$ in tüm katsayıları pozitif olacaktır.

Tüm katsayıları pozitif olan bir polinomun pozitif kökü olamayacağı için $Q(x)$ in pozitif kökü yoktur. Dolayısıyla $P(x)$ in sadece bir pozitif kökü vardır.

29 Bir ABC üçgeninde $\widehat{CAB}$ nin açıortayı BC yi L de, $\widehat{ABC}$ nin açıortayı AC yi N de kesiyor. AL ile BN doğruları O da kesişiyor. $|NL| = \sqrt{3}$ ise, $|ON| + |OL|$ nedir?

a) $3\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** 2 **d)** 3 **e)** 5

Çözüm 1:

Bu soru iptal edilmiştir.

Çözüm 2:

$\angle ACB = 60^\circ$ verilseydi $c)2$ elde edilecek idi.

30 $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod{125}$ ve $0 \le x < 125$ koşullarını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x = 5k+1$ veya $x = 5k+2$.

$x = 5k+1$ için

$(5k+1)^3 - 2(5k+1) + 6 \equiv 75k^2 + 5k + 5 \equiv 0 \pmod{125} \Rightarrow 15k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

$k \equiv 4 \pmod 5$ olduğu için $x = 5(5k+4)+1 = 25k+21$ olmalı.

$$\begin{aligned}(25k+21)^3 - 2(25k+1) + 6 &\equiv 75k \cdot 441 - 50k + 21^3 - 36 \pmod{125}\\ &\equiv 75k \cdot 441 - 50k + 9225 \pmod{125}\\ &\equiv 75k \cdot 441 - 50k - 25 \pmod{125}\end{aligned}$$

$3k \cdot 441 - 2k - 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow k \equiv 1 \pmod 5$ olur. Bu durumda $x = 25(5k+1) + 21 = 125k + 46$ elde edilir.

$x = 5k+2$ için

$(5k+2)^3 - 2(5k+2) + 6 \equiv 25k^2 + 50k + 10 \equiv 0 \pmod{125} \Rightarrow 5k^2 + 10k + 2 \equiv 0 \pmod{25}$ den çözüm gelmez.

O halde, tek çözüm $x = 46$ dır.

31 $N \geq 2$ olmak üzere, $1, 2, \ldots, N$ sayıları bir çember etrafına diziliyor. Her sayı ondalık gösterimde her komşusuyla bir ortak rakama sahip ise, N en az kaç olmalıdır?

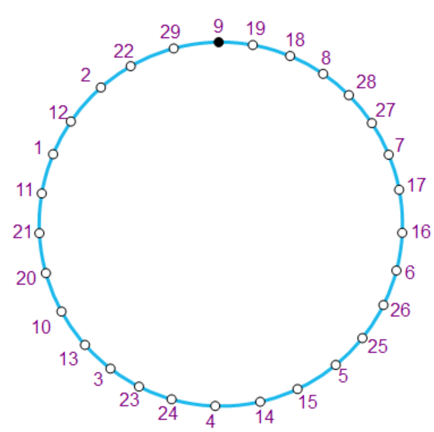
a) 18 **b)** 19 **c)** 28 **d)** 29 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

9 un solunda ve sağında 9 içeren sayılar olmalı. Bu durumda N en az 29 dur.

Aşağıdaki şekilde $N = 29$ için geçerli bir dizilim örneklendirilmiştir:



32 $S = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{2001^2} + \dfrac{1}{2002^2}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $1 \leq S < \dfrac{4}{3}$ **b)** $\dfrac{4}{3} \leq S < 2$ **c)** $2 \leq S < \dfrac{7}{3}$ **d)** $\dfrac{7}{3} \leq S < \dfrac{5}{2}$ **e)** $\dfrac{5}{2} \leq S < 3$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Serinin ilk üç teriminin toplamı $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=1+\frac{13}{36}>1+\frac{13}{39}=\frac{4}{3}$ olduğu için a şıkkı eleniyor.

$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$ eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2001^2}+\frac{1}{2002^2}\\
&\le 1+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2002}+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2003}\right)\\
&\le 1+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\right)\\
&\le 1+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
&\le \frac{7}{4}\\
&< 2.
\end{aligned}$$

33 Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninde $m(\widehat{ABC})=40^\circ$, $[BC]$ nin orta noktası E ve A dan DE ye indirilen dikmenin ayağı F ise, $m(\widehat{DFC})$ nedir?

a) 100° **b)** 110° **c)** 115° **d)** 120° **e)** 135°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$DE\cap AB=\{G\}$ olsun.

$BE/EC=BG/CD=1\Rightarrow AB=BG=BC$ olduğu için $\angle ACG=90^\circ=\angle GFA$. Bu da $AFCG$ yi kirişler dörtgeni yapar. $\angle GAC=\angle GFC=70^\circ$ ve $\angle DFC=110^\circ$ olur.

34 $3n^2+3n+7$ sayısının tam küp olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 7 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$3n^2+3n+7=(n+1)^3-n^3+6$ denklemini mod9 da inceleyelim:

n	n^3	$(n+1)^3-n^3+6$
0	0	7
1	1	4
2	8	7
3	0	7
4	1	4
5	8	7
6	0	7
7	1	4
8	8	7

Tablodan da görüleceği üzere $3n^2+3n+7$ ifadesi mod 9 da hiçbir zaman bir tam küple aynı kalanı bırakmıyor. Bu durumda çözüm kümesi boş kümedir.

35 Her $i = 0, 1, 2, \ldots$ tam sayısı için, ağırlığı 2^i olan sekiz top bulunmaktadır. n kutunun her birinin içine istenildiği kadar top konabiliyor. Her kutuya konulan topların ağırlıklarının toplamı aynıysa, n en çok kaç olabilir?

a) 8 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 16

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Kutulardaki en ağır top 2^m olsun. Bu durumda kullanılabilecek tüm topların toplam ağırlığı $8 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2^m) = 8(2^{m+1} - 1)$ olacaktır.

Diğer taraftan her kutunun ağırlığı en az 2^m olacağı için

$$n \cdot 2^m \leq 2^{m+4} - 8 \Rightarrow n \leq 2^4 - \frac{8}{2^m} < 16.$$

$m = 3$ için $n = 15$ olabilir.

8 kutuya 8 ağırlıklı toplardan birer tane, 4 kutuya 4 ağırlıklı toplardan ikişer tane, 2 kutuya 2 ağırlıklı toplardan dörder tane, 1 kutuya 1 ağırlıklı 8 top koyarsak her kutudaki topların ağırlığı 8 olmuş olur.

36 $a \neq -1$ olmak üzere, a gerçel sayısı, $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 3a^2 - 9a - 6 = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, $(a+1)^3$ nedir?

a) 1 **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** 7 **d)** 8 **e)** 27

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$a = -1$ in polinomu 0 yaptığı hemen görülebilir. Bu durumda $(a+1)$ bir çarpandır.

$$\begin{aligned} a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 3a^2 - 9a - 6 &= (a+1)(a^4 + 4a^3 + 6a^2 - 3a - 6) \\ &= (a+1)\left((a+1)^4 - 7a - 7\right) \\ &= (a+1)^2\left((a+1)^3 - 7\right) \end{aligned}$$

$(a+1)^2 \neq 0$ olduğu için $(a+1)^3 = 7$.

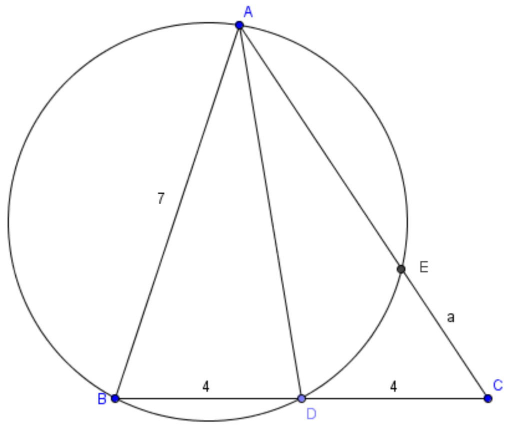
11. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2003

1 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 7$, $|BC| = 8$, $|AC| = 6$ ve $[BC]$ kenarının orta noktası D; A, B ve D noktalarından geçen çemberin AC yi kestiği noktalar A ve E olmak üzere, $|AE|$ nedir?

a) $\frac{2}{3}$ **b)** 1 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** 2 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$



C noktasının çembere göre kuvvetinden

$$|CD| \cdot |CB| = |CE| \cdot |CA|$$

$$4 \cdot 8 = |CE| \cdot 6 \Rightarrow |CE| = \frac{16}{3}$$

ve $|AE| = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$ çıkar.

2 $1 \cdot 2003 + 2 \cdot 2002 + 3 \cdot 2001 + \cdots + 2001 \cdot 3 + 2002 \cdot 2 + 2003 \cdot 1$ sayısının kaç asal böleni vardır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n+1-k) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{2} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \cdot (3n+3-2n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$n = 2003$ için

$$\sum_{k=1}^{2003} k \cdot (2004-k) = \frac{2003 \cdot 2004 \cdot 2005}{6} = 334 \cdot 2003 \cdot 2005 = 2 \cdot 5 \cdot 167 \cdot 401 \cdot 2003.$$

$\boxed{3}$ Hiçbiri bir diğerinin 3 katı olmayan en çok kaç 51 den küçük pozitif tam sayı vardır?

a) 17 **b)** 36 **c)** 38 **d)** 39 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

3 e bölünmeyen sayıları ele alalım. Bu şekilde $50 - \lfloor 50/3 \rfloor = 34$ sayı var.

Bu sayıların her birinden (a_i) başlayarak, $a_i \cdot 3^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ kümelerini oluşturalım.

$\{1, 3, 9, 27\}$

$\{2, 6, 18\}$

$\{4, 12, 36\}$

$\{5, 15, 45\}$

$\{7, 21\}$

$\vdots$

$\{50\}$

Her kümeden bir elemanı rahatlıkla seçebiliriz. $1, 2, 4, 5$ ile başlayan kümelerden ikinci elemanları da seçebiliriz.

Bu durumda $34 + 4 = 38$ elemandan hiçbiri bir diğerinin 3 katı değildir.

$\boxed{4}$ $x^2 - ax - b$ polinomunun köklerinin 5 ten büyük olmamasını sağlayan kaç (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

a) 40 **b)** 50 **c)** 65 **d)** 75 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

a, b pozitif olduğu için denklemin büyük kökü $\dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \leq 5$ dir.

$\sqrt{a^2 + 4b} \leq 10 - a \Rightarrow a^2 + 4b \leq 100 + a^2 - 20a \Rightarrow 5a + b \leq 25$.

$a = 1$ için 20, $a = 2$ için 15, $a = 3$ için 10, $a = 4$ için 5, yani toplamda $20 + 15 + 10 + 5 = 50$ çözüm vardır.

$\boxed{5}$ Bir ABC üçgeninde, C köşesinden AB ye inilen dikmenin ayağı D, yüksekliklerin kesişim noktası H dir. $|CH| = |HD|$ olduğuna göre, $\tan \widehat{A} \cdot \tan \widehat{B}$ nedir?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $3/2$ **d)** $\sqrt{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıtla: $\boxed{E}$

$\angle DHB = \angle A$.

$\tan \angle A = \dfrac{BD}{DH}$.

$\tan \angle B = \dfrac{DC}{BD}$.

$\tan \angle A \cdot \tan \angle B = 2$.

6 2000! sayısının ondalık yazılımının sonunda tam olarak kaç 0 vardır?

a) 222 **b)** 499 **c)** 625 **d)** 999 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$2000! = 10^k \cdot n = 2^m \cdot 5^k \cdot n$

$\left\lfloor \frac{2000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5^4} \right\rfloor = 499.$

7 AAAIEE dizisi ile başlanıp, AIE yerine EA, AE yerine IE, E yerine AI koyma işlemleri istenildiği kadar tekrarlanarak aşağıdaki dizilerden hangisi elde edilemez?

a) AIAIIAI **b)** AIAIAI **c)** AIAAA **d)** AIAA **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Tüm şıklar elde edilebilir. Yollarını gösterelim. Aşağıdaki örnekler AoPS'daki soruya Zimbalono adlı kullanıcının verdiği örnekleridir.

AA(AIE)E $\to$ A(AE)(AE) $\to$ AI(E)I(E) $\to$ AIAIIAI

AA(AIE)E $\to$ A(AE)AE $\to$ (AIE)AE $\to$ (E)AAE $\to$ AIA(AE) $\to$ AIAI(E) $\to$ AIAIAI

AAAI(E)E $\to$ AAAI(AIE) $\to$ AA(AIE)A $\to$ A(AE)AA $\to$ (AIE)AA $\to$ (E)AAA $\to$ AIAAA

AA(AIE)E $\to$ A(AE)AE $\to$ (AIE)AE $\to$ (E)AAE $\to$ AIA(AE) $\to$ AI(AIE) $\to$ (AIE)A $\to$ (E)AA $\to$ AIAA

Dolayısıyla cevap hiçbiridir.

8 P polinomu, her gerçel x için $(x-4)P(2x) = 4(x-1)P(x)$ eşitliğini ve $P(0) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, P nin derecesi nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

der$(R) < n$ olmak üzere; $P(x) = a \cdot x^n + R(x)$ olsun.

$(x-4)(a \cdot 2^n \cdot x^n + R(2x)) = 4(x-1)(ax^n + R(x))$

a^{x+1} li terimlerin katsayılarının eşitliğinden $a2^n = 4a \Rightarrow n = 2$ dir.

$P(x) = A(x-2)(x-4)$ polinomları verilen eşitliği sağlar.

9 İçteğet çemberinin yarıçapı 1 ve her kenar uzunluğu bir tam sayı olan kaç üçgen vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Sonsuz

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bu şekilde tek üçgen $3-4-5$ üçgenidir.

Üçgenin kenarları $a \leq b \leq c$ olsun.

Heron formülünden $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = ur = u \Rightarrow (u-a)(u-b)(u-c) = u$ elde edilir.

$u = \dfrac{a+b+c}{2}$ tam sayı olmalı. Aksi takdirde sol taraf üç tane buçuklu sayının çarpımı iken sağ tarafın ondalık kısmı ,5 olamaz.

Bu durumu şöyle de görmek mümkün. Eşitliğin her iki tarafını 8 ile çarpıp 2 leri içeriye dağıtalım. $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) = 4(a+b+c)$. $a+b+c$ tek olduğu için a, b, c den tam olarak biri ya da üçü tek olmalı. Her durumda sol taraf tek olduğu için, çelişki elde etmiş olduk.

Soruya geri dönersek, $(u-a)(u-b)(u-c) = u = u-a+u-b+u-c \leq 3(u-a) \Rightarrow (u-c)^2 \leq (u-b)(u-c) \leq 3$ olduğu için $u-c=1$ olmalı.

Bu da $u-c=r=1$, yani $\angle C = 90^\circ$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda, $u-b=2$ ya da $u-b=3$ tür.

İki durumda da üçgen $3-4-5$ üçgeni olacaktır.

10 $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \equiv 0 \pmod{25}$ ve $0 \leq x < 25$ koşullarını sağlayan tam sayıların toplamı 25 modunda aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 17 **d)** 22 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x \equiv 2 \pmod 5$ olduğu biraz denemeyle fark edilebilir. $x = 5k+2$ yazıp, mod25 te incelersek

$(5k+2)^3 + 3(5k+2) - 2(5k+2) + 4 \equiv 60k + 8 + 60k + 12 - 10k - 4 + 4 \equiv 10k + 20 \equiv 0 \pmod{25}$

$10k + 20 = 25m \Rightarrow 2k + 4 = 5m \Rightarrow k \equiv 3 \pmod 5$.

Bu durumda $x = 5(5n+3) + 2 = 25n + 17$ olacaktır.

11 ABRAKADABRA kelimesinin harfleri, rastgele sıralandığında ilk A harfinin ilk B harfinden önce gelme olasılığı nedir?

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{5}{7}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{6}{7}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Tüm durumları tekrarlı permütasyonla iki farklı şekilde hesaplayalım:

Birincisi; $\dfrac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$.

İkincisi; A ve B leri C gibi düşünüp önce $CCCCCCCDKRR$ permütasyonunu hesaplayıp sonra çıkan değeri $AAAAABB$ permütasyonu ile çarpmak: $\dfrac{11!}{7! \cdot 2!} \cdot \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Bu iki yolun aynı sonucu verdiğini gördükten sonra, ikinci yoldaki $AAAAABB$ permütasyonunu başta A olmak üzere yeninden hesaplarsak $\dfrac{6!}{4! \cdot 2!}$ elde ederiz.

Bu durumda soruda sorulan olasılığı

$$\frac{\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\dfrac{11!}{7!\cdot 2!}}{\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}\cdot\dfrac{11!}{7!\cdot 2!}}=\frac{5}{7}$$

şeklinde yazabiliriz.

12 $\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y$, $\dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z$, $\dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x$ sistemini tam olarak kaç gerçel (x,y,z) üçlüsü sağlar?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$x=0$ ise $(x,y,z)=(0,0,0)$ dır.

$x\neq 0$ ise

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4z^2}+1$

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4x^2}+1$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4y^2}+1$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4x^2}+1+\dfrac{1}{4y^2}+1+\dfrac{1}{4z^2}+1$

$0=\left(\dfrac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2z}-1\right)^2$

$2x=2y=2z=1\Rightarrow(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

x, y ve z 'den en az biri sıfır ise $(x,y,z)=(0,0,0)$ çözümü olur. Pozitif olduklarında ise

$$x+y+z=\sum_{cyc}\frac{4x^2}{1+4x^2}\overbrace{\leq}^{AGO}\sum_{cyc}\frac{4x^2}{4x}=x+y+z$$

olduğundan denklem sistemi ancak eşitlik durumunda oluşur, dolayısıyla $x=y=z=\dfrac{1}{2}$ olmalıdır.

13 Bir ABC üçgeninde, $|AB|=8$ ve $|AC|=2|BC|$ dir. $[AB]$ kenarına ait yükseklik en fazla kaç olabilir?

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** 5 **d)** $\dfrac{16}{3}$ **e)** 6

Çözüm 1:

(Lokman GÖKÇE)

$|AB| = 2|BC|$ eşitliğini sağlayan C noktalarının geometrik yeri bir çemberdir. (Apollonius çemberi) C noktasında AB ye çizilen iç açıortay ve dış açıortay ayakları sırasıyla C_1 ve C_2 olsun. Açıortay teoremleri yardımıyla $|C_1B| = \frac{8}{3}$ ve $|C_2B| = 8$ bulunur. $|C_1C_2| = \frac{32}{3}$ uzunluğu Apollonius çemberinin çapıdır. $[AB]$ kenarına ait h_c yüksekliğinin en büyük olması için C noktası çember üzerindeki AB ye en uzak nokta olmalıdır. Yani h_c en fazla yarıçap kadardır. $h_c = \frac{16}{3}$

Çözüm 2:

Heron Formülü ile de sonuca gidebiliriz:

$BC = 2x$ diyelim.

$[ABC] = \sqrt{(3x+4)(3x-4)(4+x)(4-x)} = \sqrt{(9x^2-16)(16-x^2)}$

$3[ABC] = \sqrt{(9x^2-16)\cdot 9\cdot(16-x^2)} = \sqrt{(9x^2-16)(9\cdot 16-9x^2)}$

$3\cdot\frac{8\cdot h}{2} = 12h = \sqrt{(9x^2-16)(9\cdot 16-9x^2)}$

Sağ tarafta toplamları sabit olan iki sayının çarpımı söz konusu. O halde, bu çarpım en büyük değerini sayılar eşit olunca alacak: $9x^2-16 = 9\cdot 16-9x^2 = \frac{8\cdot 16}{2} = 64$.

$h_{\max} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$ ■

Çözüm 3:

Bir de geometrik bir çözüm verelim:

$[AC]$ üzerinde $\angle KBC = \angle CAB$ olacak şekilde K noktası alalım. $\triangle CKB \sim \triangle CBA$ olacaktır.

$BC = 2x$ olsun.

$\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

Bu durumda $BK = 4$, $CK = x$ ve $AC = 4x$.

$\frac{8\cdot h}{2} = [ABC] = \frac{4[ABK]}{3} \le \frac{4\max([ABK])}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{AB\cdot BK}{2} = \frac{4}{3}\cdot 16 = \frac{64}{3}$

$h \le \frac{16}{3}$ ■

Çözüm 4:

Lokman Hoca'nın çözümünden soruyu genelleyelim:

Soru: $\triangle ABC$'de $BC = a$ ve $AC/AB = b/c$ oranı sabitten, $[ABC]$ en çok kaç olabilir?

AN_1 iç açıortay AN_2 dış açıortay olsun. N_1N_2 nin orta noktası da M olsun.

$b < c$ kabul edelim.

$CN_1 = \frac{ab}{b+c}$

$CN_2 = \frac{ab}{c-b}$

Maksimum yükseklik için $AM = CN_1 = CN_2 = \frac{N_1N_2}{2} = \frac{abc}{c^2-b^2}$.

Biraz daha düzenlemeyle $h_{\max} = a \cdot \dfrac{1}{\left|\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right|}$.

$[ABC]_{\max} = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\left|\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right|}$ ■

Bir not düşelim: $b = c$ iken üst limit yoktur.

14 $5p(2^{p+1} - 1)$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$p = 2$ olamaz.

$p = 5$ ise $2^{p+1} - 1$ in tam kare olması gerekir ki değil.

$p \neq 5$ ise $2^{p+1} \equiv 1 \pmod p$ olmalı. Fermat'tan $2^p \equiv 2 \pmod p \Rightarrow 2^{p+1} \equiv 4 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p = 3$ tür.

$p = 3$ için $5p(2^{p+1} - 1) = 15 \cdot 15$ olduğu için tek bir asal sayı için söz konusu ifade tam karedir.

15 A ve B isimli Türk takımları Avrupa Kupası'nda son 16 takım arasında yer alıyor. Bu takımların kura ile eşleştirilmesiyle oynanan sekiz maçta yenilen takımlar eleniyor. Kalan takımlar ise yeniden kura ile eşleştirilerek, tek bir takım kalana kadar kupa bu şekilde sürüyor. Her maçta her takımın diğerini yenme olasılığı aynı ise, A ve B takımlarının karşılaşma olasılığı nedir?

a) $\dfrac{1}{32}$ **b)** $\dfrac{1}{16}$ **c)** $\dfrac{1}{8}$ **d)** $\dfrac{1}{4}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Toplam 4 tur olacak.

1. turda A nın diğer 15 takımın her biri ile karşılaşma olasılığı $\dfrac{1}{15}$ tir. Dolayısıyla B ile 1. turda karşılaşma olasılığı $\dfrac{1}{15}$ tir.

1. turda karşılaşmayıp 2. turda karşılaşmaları için ikisinin de ilk tur maçlarını kazanmaları gerekir. Bu ihtimal $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ tür.

O halde aradığımız yanıt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)\right) &= \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{16 + 14}{16 \cdot 15} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Çözüm 2:

p_n ile 2^n takımın karşılaştığı bir turnuvada A ile B nin eşleşme ihtimalini gösterelim.
Açık şekilde $p_1 = 1$.
$p_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}-1} + \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right) \cdot \dfrac{1}{4} \cdot p_n$
$p_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$
$p_3 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
$p_4 = \dfrac{1}{15} + \dfrac{14}{15} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$ çıkacaktır.
Buraya kadarki işlemler soruyu çözmede yeterli.
İster bu aşamada isterse $p_2 = \dfrac{1}{2}$ olduğunu farkettikten sonra tümevarımla $p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}-1} + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot p_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}-1} + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}-1} + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+1} + 2^{n+1} - 2}{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)} \\ &= \frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)} \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

16 t gerçel sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^4 - tx + \dfrac{1}{t} = 0$ denkleminin hiçbir kökü $[1,2]$ aralığında yer almaz?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f(x,t) = x^4 - tx + \dfrac{1}{t}$ olsun.
$t = 6, 7, 8$ için $f(1,t) < 0$ ve $f(2,t) > 0$ olduğu için $(1,2)$ aralığında $f(x,t) = 0$ ın bir kökü vardır.
Bu durumda cevap ya $t = 9$, ya da hiçbiri.
$t = 9$ için denklem $x^4 - 9x + \dfrac{1}{9} = 0$ olacaktır.
$g(x) = x^4 - 9x$ olsun. $y = -\dfrac{1}{9}$ ile $y = g(x)$ fonksiyonlarının $[1,2]$ aralığında kesişip kesişmediklerini araştırıyoruz.
$g(x)$ in kökleri 0 ve $\sqrt[3]{9}$ olduğu için $(0, \sqrt[3]{9})$ aralığında $g(x) < 0$ olacaktır.
$g'(x) = 0$ denkleminin tek çözümü $x = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$ olduğu için $x = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$ noktasında eğri yön değiştirecek. Bu durumda $g(x)$ in $[1,2]$ aralığında en büyük değeri, $\max\{g(1), g(2)\} = g(2) = -2$ dir.
Bu durumda $y = g(x)$ eğrisi ile $y = -\dfrac{1}{9}$ doğrusu $[1,2]$ aralığı dışında kesişirler. (bkz. $g(x)$ in grafiği)

17 Bir C_1 çemberi ile, C_1 in merkezinden geçen ve onu A ve B noktalarında kesen bir C_2 çemberi veriliyor. C_2 çemberine B noktasında teğet olan doğru, C_1 çemberini B ve D noktalarında kesiyor. C_1 in yarıçapı $\sqrt{3}$; C_2 in yarıçapı 2 olduğuna göre $\dfrac{|AB|}{|BD|}$ yi bulunuz.

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ **d)** 1 **e)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

C_1 ile C_2 merkezi sırasıyla O_1 ile O_2 olsun.

$O_1B = O_1A$ olduğu için $\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle DBO_1 = \angle BDO_1 \Rightarrow BD = AB$.

18 $5^n + n^5$ sayısının 11 ile bölünmesini sağlayan 2003 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?

a) 2010 **b)** 2011 **c)** 2012 **d)** 2014 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Öncelikle $n \equiv 0 \pmod{11}$ için $5^n + n^5$ sayısının 11 ile bölünemeyeceğini görelim. $(n, 11) = 1$ için 11 asal olduğundan ve

$$\left(n^5\right)^2 \equiv 1 \pmod{11} \implies n^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

Not: Bu bir teoremdir. Eğer n sayısının ilkel kökü varsa, yani $1, 2, 4, p^a, 2p^a$ formatlarındaysa, $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ denkliğinin çözümleri sadece $x \equiv \pm 1 \pmod{n}$'dir. Sonuç olarak

$$5^n \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

olmalıdır. 5'in 11 modundaki mertebesinin 5 olduğunu görelim, yani

$$5^5 \equiv \left(5^2\right)^2 \cdot 5 \equiv 3^2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{11}$$

olur. 5'ten daha küçük bir mertebesi olamayacağı 5'in asal sayı olmasından bellidir. Ayrıca $5^n \equiv -1 \pmod{11}$ denkliğinin de çözümsüz olduğunu görmek zor değildir. çünkü bu denkliği sağlayan en küçük pozitif n ise $2n$ mertebe olacaktır ama mertebe tek sayıdır.

Dolayısıyla $5^n + n^5 \equiv 0 \pmod{11}$ olması için $5^n \equiv 1 \pmod{11}$ ve $n^5 \equiv -1 \pmod{11}$ olmalıdır.

$$5^n \equiv 1 \pmod{11} \implies n \equiv 0 \pmod{5}$$

olduğundan önce 2005'i sonra 2010'u denemeliyiz. $n = 2005$ için

$$2005^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \equiv 1 \pmod{11}$$

olur ve istenen sağlanmaz. $n = 2010$ için

$$2010^5 \equiv (-3)^5 \equiv -243 \equiv -1 \pmod{11}$$

olur. $\boxed{n = 2010}$ sağlar.

19 Düzlemde 2003 farklı noktayı birleştiren doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümenin en az kaç elemanı olabilir?

a) 2006 **b)** 4001 **c)** 4003 **d)** 4006 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Bu noktalar ikişer ikişer alındığında aralarındaki uzaklık en büyük olan iki nokta A ve B olsun. A'yı diğer $n-1$ nokta ile birleştiren $n-1$ tane doğru parçasının orta noktalan birbirinden farklıdır ve bunların herbiri A'dan en fazla $\frac{|AB|}{2}$ uzaklıktadır. Benzer şekilde B'yi diğer $n-1$ nokta ile birleştiren doğru parçalarının orta noktaları birbirinden farklıdır ve bunlar da B noktasından en fazla $\frac{|AB|}{2}$ uzaklıkta olduğundan birincilerden de farklıdır, sadece $[AB]$ doğru parçasının orta noktası hem birincilerde hem de ikincilerde vardır. Bu durumda işaretlenmiş nokta sayısı en fazla $2(n-1)-1 = 2n-3$'tür.

$n = 2003$ olduğu için sorunun yanıtı $2n-3 = 4003$'tür.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 9.14, Sayfa 222.

$\boxed{20}$ $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=1$ denklemini sağlayan kaç x gerçel sayısı vardır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$4\sqrt{x-3} = 2\sqrt{4x-12}$ ve $6\sqrt{x-3} = 2\sqrt{9x-27}$ yazarsak verilen ifade $\sqrt{x+1-2\sqrt{4x-12}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{9x-27}}$
Burada $4x-12 = 4(x-3)$ ve $x+1 = 4+(x-3)$ olduğundan $\sqrt{x+1-2\sqrt{4x-12}} = |\, 2-\sqrt{x-3}\,|$

Benzer şekilde $9x-27 = 9.(x-3)$ ve $x+6 = 9+(x-3)$ olduğundan $\sqrt{x+6-2\sqrt{9x-27}} = |\, 3-\sqrt{x-3}\,|$
Soruda verilen denklem de $|\, 2-\sqrt{x-3}\,| + |\, 3-\sqrt{x-3}\,| = 1$ olur. Bu eşitlik $3 \geq \sqrt{x-3} \geq 2$ koşulunu sağlayan her x gerçel sayısı için sağlanır. Yani sonsuz tane çözümü vardır.

$\boxed{21}$ C_1 ve C_2 çemberleri bir T noktasında dıştan teğettir. T den geçen bir doğru, C_1 çemberini A, C_2 çemberini de B noktasında kesiyor. C_1 çemberine A da teğet olan doğru, C_2 yi D ve E noktalarında kesiyor. $D \in [AE]$, $|TA| = a$, $|TB| = b$ olduğuna göre $|BE|$ nedir?

a) $\sqrt{a(a+b)}$
b) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$
c) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$
d) $\sqrt{a^2+b^2}$
e) $\sqrt{(a+b)b}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

T deki ortak teğet doğrusu t olsun.

$\angle BET = \angle(BT,t) = \angle TAD$ olduğu için $BE^2 = BT \cdot BA \Rightarrow BE = \sqrt{b(a+b)}$.

$\boxed{22}$ Aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ denkliğini sağlayan en az bir x tam sayısı vardır?

a) 97 **b)** 98 **c)** 99 **d)** 100 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Teorem 1:

p asal sayı ve $(a,b) = \text{OBEB}(a,b) = 1$ olmak üzere $x^n \equiv a \pmod p$ olsun. Eğer $a^{\frac{p-1}{(n,p-1)}} \not\equiv 1 \pmod p$ ise denkliğin çözümü yoktur.

İspat 1 :

$(n,p-1) = d$ olsun. Bu denkliğin çözümlerinden biri u olsun. Ve Fermat teoreminden $u^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv u^{n(\frac{p-1}{d})} \equiv u^{(p-1)(\frac{n}{d})} \equiv 1 \pmod p$$

olacaktır. İspatımız bitmiştir.

Teorem 2:

$a^{\frac{p-1}{(n,p-1)}} \equiv 1$ ise denkliğin çözümü vardır.

İspat 2:

Öyle bir g sayısı alalım ki g sayısının $\text{mod} p$ deki mertebesi $p-1$ olsun. Ayrıca

$$g^j \equiv a \pmod p$$

olsun ve bu denkliği sağlayan en küçük üs j olsun.

$$g^{j(\frac{p-1}{d})} \equiv 1 \equiv g^0 \pmod p$$

$$\frac{j(p-1)}{d} \equiv 0 \pmod{p-1}$$

$$\frac{j(p-1)}{d} = k(p-1)$$

olup d sayısı j sayısını bölecektir.

g nin mertebesi $p-1$ olduğundan $g^0, g^1, \dots, g^{p-1}$ sayıları p modülüne göre bir asal kalan sistemi oluştururlar. O halde $x^n \equiv a \pmod p$ denkliğinin çözümleri $x \equiv g^y \pmod p$ şeklindedir ve vardırlar.

Soru için bizden istenen $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod n$ olması. Seçeceğimiz n sayısı asal olmalı. Şıklarda tek asal sayı 97 dir. $(-1)^{48} \equiv 1 \pmod{97}$.

Çözüm 2:

İfademizi $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x^2 = nk - 1$ şeklinde tanımlayalım. Soruya biraz analizsel yaklaşalım,

Şimdi bir işlem tanımlayacağız. Bu işlemi sevdiğim bir grek harfi olan ψ ile göstereceğiz.

$n_1, n_2, n_3, \dots$ Tanımladığımız ψ işleminin tanım kümesi olmak üzere bu kümeyi şu şekilde gösterelim :

$\psi^{\mathbb{T}} = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$.

Burada $\mathbb{P}$ asal sayılar kümesidir. $\mathbb{P}_{\not\Bbbk \pmod{\not\trianglerighteq}}$ te $4n+1$ formundaki asal sayıları göstermektedir. Göstermemiz gereken herhangi bir $l \in \mathbb{Z}^+$ için, $\psi\{n\} \longrightarrow |\psi^{\mathbb{T}}(1-l) - n| \longrightarrow \mathbb{P}_{\not\Bbbk \pmod{\not\trianglerighteq}}$ eşlemesinin doğru olabildiği. Çünkü eğer bu eşleme doğru ise, tanımladığımız kümedeki sayıları kullanarak, $\psi\{x\} = p - \psi^{\mathbb{T}} l$ şeklinde çözümler elde etmek mümkün ve bunun doğal sonucu olarak ta $n \longrightarrow \mathbb{P}_{\not\Bbbk \pmod{\not\trianglerighteq}}$ olacak. (Tabiki burada p bir asal sayı). Başka bir deyişle, kanıtlamamız gereken tanımladığımız işlemin uygun koşullar altında varlığı.

Bu durumda $\psi\{x\}$ işlemimizin 2 adet doğrudan kökü olacaktır. $avel \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere şemamızı çizelim,

$$\begin{array}{c} \psi\{a\} \longrightarrow |a-\psi^{\mathbb{T}}l| \\ \downarrow \\ |\psi^{\mathbb{T}}(1-l)-a| \end{array}$$

Çizdiğimiz eşleme şeması ise kafamızda canlandırdığımız muhtemel fonksiyon argümanı. Bundan sonraki adımlarımız, bu argümanın doğru olduğunu ispatlamak olacak.

Burada her ne kadar ψ işleminin ürettiği 2 kökü birbirinin eşi gibi görünüyorsa da aslında birbirlerinin tersidir. Genel olarak yol haritamızı açıkladığımıza göre teoremlerimizi vermeye başlayalım.

Tanım 1

Herhangi bir ψ işlemi için, $\psi^{\mathbb{T}}$ bu işlemin tanımlandığı kümedir.

Tanım 2

$\{n_1, n_2, n_3, \dots < k\}$ bir tamsayı kümesi olmak üzere, $\psi^{\mathbb{T}} = \{n_1, n_2, n_3, \dots < k\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3

$\mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ kümesi $4c+1, (c \in \mathbb{Z}^+)$ şeklinde tanımlı asal sayılar kümesidir.

Tanım 4

$\psi(n) \longrightarrow \mathbb{P}$ bir eşlemedir.

Tanım 5

$avel \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$\psi\{a\} \longrightarrow |a-\psi^{\mathbb{T}}l|$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 1

$\psi\{x\}$ işlemimizin en az 2 adet kökü vardır.

İspat: Tanım 5 ten biliyoruz ki işlemimizi, $\psi\{a\} \longrightarrow |a-\psi^{\mathbb{T}}l|$ şeklinde tanımlamak mümkün idi, eğer bu eşleme sorudaki denklemi sağlıyorsa mutlaka $\psi\{a\} \longrightarrow |a(1-l)-\psi^{\mathbb{T}}|$ eşlemesi de doğru olmalıdır çünkü $l=0$ ve $\psi^{\mathbb{T}} \longrightarrow 0$ olması durumunda, $\psi\{a\} \longrightarrow |a-\psi^{\mathbb{T}}l| \longrightarrow |a(1-l)-\psi^{\mathbb{T}}| \longrightarrow a$ olacaktır. Yani bu iki kök birbirini üretebilir çünkü buradaki eşlemeler birebirdir. ■

Tanım 6

Teorem 5'ten dolayı $\psi\{x\} \longrightarrow x$ dir.

Teorem 2

$2\psi^{\mathbb{T}} - n \longrightarrow \mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ eşlemesi doğrudur.

İspat: Aslında burada bu Teoreme örnek olarak $n=97$ için $x = 22 - 97b, b \in \mathbb{Z}^+$ örneğini verebiliriz, bu da bize eşlemenin en az 1 doğrudan kökü olduğunu gösterirdi. Her ne kadar bu örnek mevcut olsa da, bu örneği bulmanın zorluğu dolayısıyla bu ifadeyi genel olarak ispatlamakta fayda görüyorum.

Şimdi varsayalım ki eşlemeyi doğru kılan bir $\psi^{\mathbb{T}}$ grubu ve n tamsayısı olmasın, O halde ifademiz $4c+3$ şeklinde bir asal sayı veya herhangi bir asal olmayan pozitif tamsayıya eşit olabilir.

$|2\psi^{\mathbb{T}} - n| = \xi > k$ olsun, $n = 2\psi^{\mathbb{T}} - \xi$ Buradan $(2\psi^{\mathbb{T}} - \xi)k - 1 = x^2$ olur. $x^2 \geq 0$ olduğundan dolayı, $(2\psi^{\mathbb{T}} - \xi)k - 1 \geq 0$ olmalı. Burayı da işlemimizin tanım kümesini sade bırakacak şekilde düzenlersek,

$\psi^{\mathbb{T}} \geq \dfrac{k\xi+1}{2k}$ şeklinde bir ifadeye eşit olmalıdır. Fakat ispatımıza başlarken yaptığımız tanımdan dolayı bu mümkün değildir. Çelişki! İspat biter. ■

Teorem 3

$\psi\{n\} \longrightarrow \psi\{|\psi^{\mathbb{T}}(1-l)-n|\} \longrightarrow \mathbb{P}_{1 \bmod 4}$ eşlemesi birebirdir.

İspat: Burada $l=2$ alalım. Düzenlersek, $\psi^{\mathbb{T}} + n \longrightarrow \mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ olur. Bu eşlemenin Doğruluğu Teorem 2 den doğrudur. Ayrıca bu eşlemenin birebirliği de Teorem 1 den doğrudur. ■

Teorem 4

$n \longrightarrow \mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ eşlemesi doğrudur.

ispat: Teorem 3 ten $\psi\{n\} \longrightarrow \mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ olduğunu biliyoruz. Teorem 1 in ispatından da $\psi\{n\} \longrightarrow n$ olduğunu ve bu eşlemenin birebir olduğunu biliyoruz. İspat biter. ■

Sonuç olarak n sayımızı $\mathbb{P}_{1 \pmod 4}$ kümesinin içinde almamız gerektiğini anlıyoruz. Böylece Teorem 2 nin ispatında verdiğimiz örneği yineleyerek, cevabımızı 97 olarak işaretliyoruz.

Çözüm 3:

Yanıt: $\boxed{A}$

burada ispatladığımız Teorem 1'den dolayı $n = 97$ asalı için çözüm vardır.

$\boxed{23}$ Ayşe, masanın üstünde duran farklı renklerdeki dokuz topun ağırlıklarının $1, 2, \cdots, 9$ gram olduğunu biliyor, ancak hangi topun hangi ağırlıkta olduğunu bilmiyor. Barış ise, her topun ağırlığını biliyor. Barış, hangi kefenin ağır olduğunu ve kefelerindeki ağırlıkların farkını gösteren bir teraziyi en az kaç kez kullanarak bu bilgisini Ayşe'ye kanıtlayabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Tek ölçümle tüm ağırlıkları bildiğini gösteremeyeceğini görmek zor değildir. İki ölçümle gösterelim. İlk ölçümde $1, 2, 3$ ağırlıklarını bir kefeye $7, 8, 9$ ağırlıklarını bir kefeye koyalım. Aralarındaki ağırlık farkı 18 olarak gösterecektir. Kefeler 3 topla elde edebileceği maksimum ve minimum ağırlıklar alındığında 18 gram fark oluşacağından, Ayşe 18 gram farkı gördüğünde hafif kefede $1, 2, 3$, ağır kefede $7, 8, 9$ olduğunu görecek, kullanılmayan topların ise $4, 5, 6$ olduğunu anlayacaktır. Bu top gruplarına hafif, orta, ağır grup diyelim.

İkinci ölçümde $1, 4, 7$ ve $3, 6, 9$ ağırlıkları farklı kefelere konulursa aralarındaki fark 6 olacaktır. Ayşe, her kefede üç gruptan da birer tane top kullanıldığını biliyor. Aralarındaki fark en fazla 6 olabileceğinden, hafif kefede olabilecek en küçük toplar, ağır kefede ise olabilecek en büyük toplar kullanıldığını anlayacaktır. Örneğin 1'in hem hafif grupta hem de bu grubun en küçüğü olduğunu bildiğinden onun 1 gram olduğunu anlayacaktır. 5'in orta grupta olduğunu ve tartılmadığından grubun ortancası olduğunu bilecek ve 5 gram olduğunu anlayacaktır.

Böylece 2 ölçümle tüm topların ağırlıkları öğrenilebilir.

$\boxed{24}$ $3a = 1 + \sqrt{2}$ ise, $9a^4 - 6a^3 + 8a^2 - 6a + 9$ u aşmayan en büyük tam sayı nedir?

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen eşitlikte $\sqrt{2}$'yi yalnız bırakıp karesini alırsak

$$9a^2 - 6a + 1 = 2 \implies 9a^2 - 6a = 1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$9a^4 - 6a^3 + 8a^2 - 6a + 9 = a^2(9a^2 - 6a) + 8a^2 - 6a + 9 = 9a^2 - 6a + 9 = 1 + 9 = 10$$

bulunur. Dolayısıyla cevap 10'dur.

25 Dar açılı bir ABC üçgeninde, $[AB]$ nin orta noktası D, çevrel çemberin merkezi O dur. ADO üçgeninin çevrel çemberi, $[AC]$ yi A ve E noktalarında kesiyor. $|AE| = 7$, $|DE| = 8$ ve $m(\widehat{AOD}) = 45°$ olduğuna göre ABC üçgeninin alanı nedir?

a) $56\sqrt{3}$ **b)** $56\sqrt{2}$ **c)** $50\sqrt{2}$ **d)** 84 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$AO = OB$ olduğu için $OD \perp AB$ dir.

$ADOE$ kirişler dörtgeni olduğu için $\angle AEO = 90°$ ve $\angle AED = \angle AOD = 45°$ dir.

$AO = OC$ ve $OE \perp AC$ olduğu için $AE = EC$ dir.

Bu durumda, $[ABC] = 4 \cdot [ADE] = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot DE \cdot AE \cdot \sin \angle AED = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 56\sqrt{2}$.

26 n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ sayılarından her birinin kendi ondalık yazılımındaki basamaklar toplamı ile bölünmesini sağlayan ve ondalık yazılımının birler basamağı 8 olan n tam sayılarının onlar basamağı kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

n sayısının birler basamağı verildiğinden diğerlerini de bulabiliriz. Eğer onlar basamağı $a \neq 9$ ise $a + 1 = b$ için

$$\begin{aligned} n &= \cdots a8 \\ n+1 &= \cdots a9 \\ n+2 &= \cdots b0 \\ n+3 &= \cdots b1 \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır ("$\cdots$" kısımları aynıdır). Yani rakamları toplamını $s(n)$ ile gösterirsek $s(n+1) = s(n)+1$, $s(n+2) = s(n) - 7$ ve $s(n+3) = s(n) - 6$ olacaktır. Yani

$$s(n) \mid n$$

$$s(n) + 1 \mid n + 1$$

$$s(n) - 7 \mid n + 2$$

$$s(n) - 6 \mid n + 3$$

olmasını istiyoruz.

Eğer $s(n)$ çiftse n ve $s(n) - 6$ çift olmak zorundadır ancak $n + 3$ tektir ve çift bir sayıya bölünemez.

Eğer $s(n)$ tekse $s(n) + 1$ ve $s(n) - 7$ çifttir ancak $n + 1$ ve $n + 2$ aynı anda çift olamaz. Bu da bir çelişkidir. Demek ki $a \neq 9$ kabulumuz yanlıştır. a sadece 9 olabilir.

Sınav test olduğundan 9 için örnek veya karşıt örnek bulmamıza gerek yoktur ama örnek bulursanız ve eklerseniz sevinirim.

27 1×1 boyutlarında bir karenin içine, çevre uzunlukları toplamı C olan sonlu sayıda çember yerleştirilmiştir. $C = \dfrac{43}{5}, 9, \dfrac{91}{10}, \dfrac{19}{2}, 10$ değerlerinden kaçı için, bu çemberlerden dördünü kesen bir doğrunun varlığını kesin olarak söyleyebiliriz?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

1×1 boyutlarındaki karenin içinde bulunan, çaplarının toplamı 3'ten büyük olan çemberlerin karenin bir kenarına izdüşümleri alındığında, izdüşümlerin uzunlukları toplamı 3'ten büyük olduğundan, bu kenar üzerinde 3'ten fazla sayıda izdüşümün kesiştiği bir nokta bulunacak. Bu noktadan bu kenara çizilen dikme en az 4 çember kesecek. Diğer taraftan $A < 3$ ise, her birinin çapı $\dfrac{A}{3}$ olan 3 çember alıp bunları karenin içine yerleştirdiğimizde 4 çember kesen bir doğru bulunmayacak çünkü sadece 3 çember vardur. Sorudaki C sayılarından $\dfrac{C}{3} > 3$ koşulunu sağlayanlar 2 tanedir: $\dfrac{19}{2}$ ve 10.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 5.84, Sayfa 189.

28 a, x, y, z gerçel sayıları, $ax - y + z = 3a - 1$ ve $x - ay + z = a^2 - 1$ eşitliklerini sağlıyorsa, $x^2 + y^2 + z^2$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** 2 **d)** $\sqrt[3]{4}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen denklemleri birbirinden çıkartalım.

$$(a-1)(x+y) = 3a - a^2$$

elde edilir. $a = 1$ için eşitlik sağlanmadığından $x + y = \dfrac{3a - a^2}{a-1}$ olacaktır. $y = \dfrac{3a-a^2}{a-1} - x$ yazarsak

$$z = 3a - 1 - ax - x + \frac{3a - a^2}{a-1} = -x(a+1) + \frac{2a^2 - a + 1}{a-1}$$

elde edilir. Yani

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \left(x - \frac{3a-a^2}{a-1}\right)^2 + \left(x(a+1) - \frac{2a^2 - a + 1}{a-1}\right)^2$$

Eğer özel olarak $x = 0$ seçersek toplam

$$\frac{(a^2 - 3a)^2 + (2a^2 - a + 1)^2}{(a-1)^2}$$

haline gelecektir. Bizim iddiamız ise bu ifadenin şıklardaki her değere eşit olabileceğidir. Bu ifadeye $f(a)$ dersek $f(0) = 1$ ve $\lim_{a \to 1} f(a) = +\infty$ olduğundan ve $(0, 1)$ aralığında sürekli olduğundan 1'den büyük her ifadeye eşit olabilir. Dolayısıyla tüm şıklar sağlanabilir.

Örnek durum ise $f(a) =$ "İstenen değer" denkleminin $(0, 1)$ aralığındaki bir çözümü t ise $(a, x, y, z) = \left(t, 0, \dfrac{3t - t^2}{t-1}, \dfrac{2t^2 - t + 1}{t-1}\right)$'dir.

29 ABC dik üçgeninde $[AB]$ hipotenüsünün orta noktası D, çevrel çember yarıçapı $\dfrac{5}{2}$ ve $|BC| = 3$ olduğuna göre, ACD üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezi arasındaki uzaklık nedir?

a) $\dfrac{29}{2}$ **b)** 3 **c)** $\dfrac{5}{2}$ **d)** $\dfrac{5\sqrt{34}}{12}$ **e)** $2\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

I, $\triangle BCD$ nin içmerkezi; O, $\triangle ACD$ nin çevrel merkezi olsun.

Basit hesaplarla, $BC = 3$, $AC = 4$ ve $BA = 5$ olduğu fark edilir.

BDC üçgeninde içteğet çember BD ye T de değsin. $DT = 4 - 3 = 1$ dir. Benzerlikten ya da trigonometriden $DI = \dfrac{5}{4}$ olarak hesaplanır.

ACD üçgeninde DC nin orta noktası M olsun. $\triangle DOM \sim \triangle BAC$ olduğu için $DM : DO = 3 : 5$ ve $DO = \dfrac{25}{12}$ olur.

ODI dik üçgeninde dik kenarlar $\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{12} \cdot 3$ ve $\dfrac{25}{12} = \dfrac{5}{12} \cdot 5$ olduğu için $IO = \dfrac{5}{12} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2} = \dfrac{5\sqrt{34}}{12}$ elde edilir.

30 n pozitif tam sayısının ondalık yazılımının basamakları toplamı 111, $7002n$ sayısındaki de 990 ise, $2003n$ sayısının ondalık yazılımının basamakları toplamı nedir?

a) 309 **b)** 330 **c)** 550 **d)** 555 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$S(x)$ ile x sayısının rakamları toplamı gösterilsin.

Sadece 1 lerden oluşan bir sayıyı düşünelim. $S(7002n) = 999$ olacaktır.

$7002n$ yi hesaplarken sadece bir elde işlemi olacak şekilde bir n sayısı seçmeye çalışalım.

$k \geq 3$ olmak üzere; $110 + k$ basamaklı $n = 2\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{111\ldots111}_{\text{109 tane}}$ sayısının rakamları toplamı $S(n) = 111$ dir.

$1000n = 2\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{111\ldots111}_{\text{109 tane}}000$

$7000n = 14\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{777\ldots777}_{\text{109 tane}}000$

$2n = 4\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{222\ldots222}_{\text{109 tane}}$

$7002n = 14004\ \underbrace{0\ldots0}_{\text{k-3 tane}}\ 777\underbrace{999\ldots999}_{\text{106 tane}}222$

9'a tamamlayarak sayarsak $S(7002n) = 110 \cdot 9 = 990$ olacaktır.

$2000n = 4\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{222\ldots222}_{\text{109 tane}}000$

$3n = 6\underbrace{0\ldots0}_{\text{k tane}}\underbrace{333\ldots333}_{\text{109 tane}}$

$2003n = 4006\ \underbrace{0\ldots0}_{\text{k-3 tane}}\ 555\underbrace{555\ldots555}_{\text{106 tane}}333$

5'e tamamlayarak sayarsak $S(2003n) = 111 \cdot 5 = 555$ olacaktır.

Bu aşamada (D) şıkkını işaretleyebiliriz. Çözümün sıhhati açısından devam edeceğiz.

Sonuca giden başka n sayıları da bulabiliriz.

Örneğin; $n = \underbrace{111\ldots111}_{\text{109 tane}}02$ aldığımız durumda da $7002n = 777\underbrace{999\ldots999}_{\text{106 tane}}36204$, $S(7002n) = 990$, $2003n = 222\underbrace{555\ldots555}_{\text{106 tane}}37306$ ve $S(2003n) = 555$ olacaktır.

Önemli olan 7002 tane n sayısını toplarken tam olarak 1 kez elde oluşması.

Dikkat edilirse sadece $7000n$ yi hesaplarken $2 \times 7 = 14$ şeklinde elde oluştu. Örneğimizi verirken başka elde oluşmaması için 1 leri ve sonrasında en az 3 tane 0 ı kullandık.

Bu aşamada bir lemma (iddia) ve corollary (sonuç) paylaşacağım. İspatları için buraya başvurabilirsiniz.

İddia: a, b pozitif tam sayılar ve $a + b$ toplamı hesaplanırken eldelerin sayısı k olmak üzere; $S(a+b) = S(a) + S(b) - 9k$ dir.

Sonuç: a, b pozitif tam sayılar ve $a \times b$ çarpımı hesaplanırken eldelerin sayısı k olmak üzere; $S(a \times b) = S(a) \cdot S(b) - 9k$ dir.

$S(7002n) = S(7002) \cdot S(n) - 9k = 9\dot{1}11 - 9k = 110 \Longrightarrow k = 1$ dir.

n sayısının rakamları arasında birden fazla $d_i \geq 2$ sayısı varsa en az 2 elde oluşacağı için n nin ondalık yazılımında en fazla 1 tane 2 sayısı yer alabilir.

Tamamı 1 ve 0 lardan oluşan bir sayının 2000 katı ile 3 katı toplandığında hiç elde oluşmaz. (1 ve 0 lardan oluşan bir sayının 7002 katı hesaplanırken de hiç elde oluşmaz. Bu durumda aslında bu olasılık mümkün değil.)

Sadece 1, 0 ve bir tane 2 den oluşan bir sayının 2000 katı ile 3 katı toplandığında da hiç elde oluşmaz. (2 ler birbirinin altına gelemeyeceği için $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$ durumu önemsizdir.)

O halde $S(2003n) = S(2003) \cdot S(n) - 9 \cdot 0 = 5 \cdot 111 = 555$ elde edilir.

31 n sayısı n defa kullanılmak koşuluyla, sonsuz bir satranç tahtasının her birim karesine bir pozitif tam sayı yazılmıştır. Ortak kenarı olan herhangi iki karedeki sayıların farkının mutlak değeri k den büyük değilse, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{B}$

1 sayısı bu tahtada 1 adet kullanılacaktır. Eğer $k = 0$ ise 1'in çevresindeki 4 kare de 1 olmalıdır ki bu da 1 adet olmasıyla çelişir. Eğer $k = 1$ ise 1'in çevresine 4 adet 2 koymalıyız fakat sadece 2 adet 2 vardır. Dolayısıyla $k \geq 2$ olmalıdır. $k = 2$ için örnek bulmaya çalışalım. Tekrar eden bir örüntü bulamasam da 1 merkezli 5×5'lik bir kareyi doldurdum. Kare genişletilebilir duruyor.

7	6	4	6	7
6	4	2	4	6
4	2	1	3	5
5	3	3	5	6
7	5	5	6	7

Burada 1'den yukarı ve sola giden yol $1 - 2 - 4 - 6 - \cdots$ gibi, aşağı ve sağa giden yol ise $1 - 3 - 5 - 7 - \cdots$ gibi görünüyor. Yine de arada kalan kısımlar için bir örüntü göremedim.

Not: Verdiğim örnek kare devam ettirilemiyor olabilir ben sadece devamını kontrol etmeden 5×5'in içini doldurdum ve kırmızı yollar dışında kalan 3'ün farklı kullanım yerine göre farklı kareler çıkabilir.

Çözüm 2:

1 sayısının 4 komşusu olduğundan ve tahta üzerinde sadece 2 tane 2 sayısı bulunduğundan $k = 1$ olamayacağı açıktır. $k = 2$ olabileceği aşağıdaki şekilden görünmektedir.

						·	·							
					·	11	10	·						
				·	11	9	8	10	·					
			·	11	9	7	6	8	10	·				
		·	11	9	7	5	4	6	8	10	·			
	·	11	9	7	5	3	2	4	6	8	10	·		
	·	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	·	
		·	10	8	6	4	3	5	7	9	11	·		
			·	10	8	6	5	7	9	11	·			
				·	10	8	7	9	11	·				
					·	10	9	11	·					
						·	11	·						
							·							

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Problem 10.67, Sayfa 246.

Çözüm 3:

Sonsuz satranç tahtasını, sol üstten başlayıp devam ettirdiğimizde başka bir sonuç elde ediliyor.

$k = 0$ için tüm sayıların aynı olması lazım. Sorudaki koşul ile çelişiyor.

$k = 1$ için aşağıdaki gibi bir satranç tahtası oluşturulabilir:

1	2	3	4	...
2	3	4	5	...
3	4	5	6	...
4	5	6	7	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Bu durumda yanıt $\boxed{(a)\ 1}$ oluyor.

Resmi cevap anahtarına göre, yanıt 2 olarak verilmiş.

Sonsuz bir satranç tahtasının sol üst köşesi olmaz diyebilirsek, resmi cevap anahtarı doğru olur. Aksine, sol üst köşesi olan bir sonsuz satranç tahtası oluşturulabilir ise o durumda yanıt (a) oluyor.

32 f fonksiyonu her gerçel x için $f(x) + 3f(1 - x) = x^2$ eşitliğini sağlıyorsa, $S = \{x \mid f(x) = 0\}$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) S sonsuz bir kümedir.

b) $\{0, 1\} \subset S$

c) $S = \phi$

d) $S = \{(3 + \sqrt{3})/2, (3 - \sqrt{3})/2\}$

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$$\begin{aligned} f(x)+3f(1-x) &= x^2 \\ f(1-x)+3f(x) &= (1-x)^2 \\ f(x) &= \frac{3(1-x)^2-x^2}{8} \\ &= \frac{2x^2-6x+3}{8} \end{aligned}$$

$f(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$.

33 Bir ABC üçgeninde kenar ortayların kesişim noktası G, içteğet çemberin merkezi I ve $GI \perp BC$ dir. $|AB|=c$, $|AC|=b$ olduğuna göre, $|BC|$ nedir?

a) $\dfrac{b+c}{2}$ **b)** $\dfrac{b+c}{3}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{3\sqrt{2}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$b=c$ olduğunda her zaman $GI \perp BC$ olacaktır. Bu durumda, $|BC|=a$, $b=c$ den bağımsız olacaktır. Büyük olasılıkla, bundan dolayı resmi cevap anahtarında bu sorunun cevabı (E) olarak verilmiş.

$b\neq c$ olma durumunda ise sorunun cevabı (B) oluyor. Benim tahminim asıl sorulmak istenenin bu olduğu yönünde. Soruyu iptal etmek yerine (E) şıkkını doğru cevap olarak kabul ettiklerini düşünüyorum.

Çözüme dönersek:

M, BC nin orta noktası; H, BC ye ait yüksekliğin ayağı, T, içteğet çemberin BC ye değdiği nokta olsun.

B ve C yi $x-$ekseni üzerinde $B<C$ olarak düşünelim. Bu durumda,

$$\vec{MT}=\vec{MC}+\vec{CT} \text{ ve } \vec{MH}=\vec{MC}+\vec{CH} \tag{1}$$

olacaktır. Kenarortay özelliğinden ve $GI \parallel AH$ olduğundan

$$MG:MA=MT:MH=1:3 \tag{2}$$

olacaktır. (1) ve (2) yi birleştirirsek

$$\begin{aligned} 3\vec{MC}+3\vec{CT} &= \vec{MC}+\vec{CH} \\ 2\vec{BC} &= 3\vec{TC}-\vec{HC} \end{aligned} \tag{3}$$

elde ederiz.

$BC=a$ ve $u=\dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzere; yönlü olarak düşündüğümüzde,

$$TC=u-c=\frac{a+b-c}{2} \text{ ve } HC=\frac{b^2-c^2+a^2}{2a} \tag{4}$$

olarak hesaplanır. Bu değerleri (3) te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} a &= \frac{3a+3b-3c}{2}-\frac{b^2-c^2+a^2}{2a} \\ &= a+\frac{3b-3c}{2}-\frac{b^2-c^2}{2a} \\ &= a+\underbrace{\frac{(b-c)(3a-(b+c))}{2a}}_{=0} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda, $b=c$ veya $3a=b+c$ olmalı.

(i) $b = c$ durumunda, a yı bağlayan tek şey $b + c = 2b > a$ üçgen eşitsizliği.

(ii) $a = \dfrac{b+c}{3}$ durumunda ise üçgen eşitsizliğinin sağlanması için $2b > c$ ve $2c > b$ eşitsizliklerinin sağlanması gerekir.

$\boxed{34}$ m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, m, $m+1$, $\cdots$, $m+n$ sayılarından yalnızca m ve $m+n$ nin ondalık yazılımlarındaki basamakların toplamları 8 ile bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?

a) 12 **b)** 13 **c)** 14 **d)** 15 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$m = \underbrace{99\cdots 9}_{6 \text{ tane } 9}2$ sayısı için $n = 15$ istenileni sağlar. Şimdi bu sayıyı nasıl elde ettiğimizi gösterelim. m sayısının son basamağı 0 veya 1 ise $m+8$ sayısının da rakamları toplamı 8'e bölünecektir. Bu durumda n en fazla 8 olur. $b \geq 2$ için m'nin son basamağı b olsun. b'den önceki basamağı 9 değilse, $m = a_1a_2\ldots a_kb$ için $m+9 = a_1a_2\ldots(a_k+1)(b-1)$ sayısının rakamları toplamı 8'e bölünecektir. Bu durumda da n en fazla 9 olabilir.

$b \geq 2$ ve b'den önceki t adet rakam 9 ise $m = a_1a_2\ldots a_k\underbrace{99\cdots 9}_{t \text{ tane } 9}b$ sayısını ele alalım ($a_k \neq 9$). Rakamları toplamının 8 modunda $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + t + b$'a denktir. Eğer $t + b - 1$'in 8 modunda verdiği kalan A ise $m + A + 10 - b$ sayısı

$$a_1a_2\ldots(a_k+1)\underbrace{00\cdots 0}_{t \text{ tane } 0}A$$

olacaktır. Bu sayının rakamları toplamı da 8'e bölünür. A en fazla 7 ve b en az 2 olacağından bu durumda n en fazla $7 + 10 - 2 = 15$ olabilir. Örnek olarak da $m = \underbrace{99\cdots 9}_{6 \text{ tane } 9}2$ sayısı verilebilir. Dolayısıyla n en fazla 15 olabilir.

$\boxed{35}$ $n + m - 1$ tane birim kare, bir kenarı n, diğer kenarı m kareden oluşan bir L şeklinde dizilmiştir. Ayşe ve Betül, Ayşe'nin başladığı ve sırası gelen oyuncunun, bitişik olarak aynı kenar boyunca sıralanmış istediği pozitif sayıda kareyi aldığı bir oyun oynuyorlar. Son kareyi alan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(n, m) = (2003, 2003)$, $(2002, 2003)$, $(2003, 3)$, $(2001, 2003)$ değerleri için dört kez oynanıyorsa, Ayşe kaç kez oyunu kazanmayı garantileyebilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Soruyu genel şekilde, tüm (n, m) ikilileri için çözelim. $m = n = 1$ ise, Ayşe tek kareyi almak zorunda olduğu için oyunu kaybediyor. Diğer durumlarda Ayşe oyunu kazanmayı garantileyebilir. Genelliği bozmadan $m \leq n$ kabul edebiliriz. L harfinin m kare içeren kenarına M, n kenar içeren kenarına da N diyelim. $m = 1$ ise, Ayşe $n - 1$ kareyi alıp Betül'ü geriye kalan tek kareyi almaya zorlar ve dolayısıyla oyunu kazanır. $m = 2$ ise, Ayşe N kenarındaki tüm kareleri (köşedekiyle birlikte) alarak Betül'ü M kenarında kalan tek kareyi almaya zorlar ve yine kazanır. $m \geq 2$ ise, Ayşe N kenarında köşeden başlayarak ilk $n - m + 1$ kareyi alacak, dolayısıyla N ve M kenarlarının her birinde $m - 1$ kare kalacak. Sonraki adımlarda:

(a) Betül'ün hamlesinden sonra kenarların birinde hiç kare kalmamışsa, Ayşe diğer kenarda bir kare bırakarak geriye kalan tüm kareleri alarak Betül'ü son kareyi almaya zorlayacak.

(b) Betül'ün hamlesinden sonra kenarlardan birinde bir kare kalmışsa, Ayşe diğer kenardakilerin tamamını alarak yine Betül'ü son kareyi almaya zorlayacak.

(c) Betül'ün hamlesinden sonra kenarların her birinde birden fazla sayıda kare kalmışsa, Ayşe daha çok kare olan kenardan fazla kareleri alarak kenarlardaki kare sayılarının eşit olmasını sağlayacak. Her hamleden sonra toplam kare sayısı azaldığından, birkaç adım sonra Betül kenarlardan birinde 0 veya 1 kare bırakmak zorunda kalacak ve Ayşe ilk iki durumdaki gibi oyunu kazanacak.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 8.19, Sayfa 217.

36 $a_1, a_2, \cdots, a_{2003}$ tam sayıları, $|a_1| = 1$ ve $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ $(1 \leq i \leq 2002)$ koşullarını sağlıyorsa, $|a_1 + a_2 + \cdots + a_{2003}|$ en az kaç olabilir?

a) 4 **b)** 34 **c)** 56 **d)** 65 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$$\begin{aligned} a_2^2 - a_1^2 &= 2a_1 + 1 \\ a_3^2 - a_2^2 &= 2a_2 + 1 \\ &\vdots \\ a_{2004}^2 - a_{2003}^2 &= 2a_{2003} + 1 \end{aligned}$$

Taraf tarafa toplarsak

$$a_{2004}^2 - a_1^2 = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2003}) + 2003 \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_{2003} = \frac{a_{2004}^2 - 2004}{2}$$

elde ederiz. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_{2003}|$ ifadesinin en küçük değeri için a_{2004}^2 mümkün olduğunca 2004 e yaklaşmalı. Bunun için $|a_{2004}| = 44$ olmalı. Bu durumda, $\dfrac{a_{2004}^2 - 2004}{2} = -34$ olacaktır.

Geriye sadece $|a_{2004}| = 44$ olacak şekilde bir dizi yolu bulmak kalıyor:

$a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $\ldots$, $a_{1959} = -1$, $a_{1960} = 0$, $a_{1961} = 1$, $a_{1962} = 2$, $\ldots$, $a_{2003} = 43$ sayılarının toplamı gerçekten de -34 tür.

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2004

$\boxed{1}$ Köşeleri, yarıçapı 1 olan çemberin üstünde yer alan düzgün bir n-genin çevre uzunluğunun alanına oranı $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ise, n kaçtır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Çemberin merkezi O, çokgenin ardışık iki köşesi A ve B olsun. $AB = a$ ve O nun AB ye uzaklığı h ise $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{na}{\frac{nah}{2}} = \dfrac{2}{h} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ elde edilir. Bu durumda $\angle ABO = 60°$ ve $n = 6$ olur.

$\boxed{2}$ $2x + 5y = xy - 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 12

Çözüm:

$2x+5y = xy-1$ denklemini düzenleyelim. $x(2-y)+5y = -1$ Eşitliğin sol tarafını $2-y$ parantezine alabilmek için her iki tarafa da -10 ekleyelim.

$x(2 - y) - 5(2 - y) = -11 \Rightarrow (x - 5).(y - 2) = 11$. 11'in tam bölenleri $-11, -1, 1, 11$ olmak üzere 4 tanedir. $x - 5$ ifadesi bu 4 değerden her birine eşit olabilir ve her değer için uygun bir y bulunabilir. Dolayısıyla 4 tane (x, y) tam sayı ikilisi bulunabilir. Cevap C

$\boxed{3}$ Elemanlarının hepsi 102 den küçük olan ve herhangi iki elemanının toplamını içermeyen bir pozitif tam sayı kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?

a) 49 **b)** 50 **c)** 51 **d)** 54 **e)** 62

Çözüm:

$51 + 52 = 103$ olduğundan eğer $51, 52, \dots, 100, 101$ sayılarını alırsak elde edilen en küçük toplam , en büyük elemandan büyük olacağından koşulu sağlar. Bu kümeye 50 elemanını ekleyemeyiz ; çünkü $50 + 51 = 101$ olur ki 101 kümenin elemanıdır. Başka bir ifadeyle eğer 50 kümede olursa 101 olamaz . Sonuç olarak eleman sayısı en fazla $101 - 51 + 1 = 51$ olur. Cevap C.

$\boxed{4}$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$ toplamının alabileceği en büyük değerle en küçük değer arasındaki fark nedir?

a) 20 **b)** 15 **c)** 10 **d)** 5 **e)** 0

Çözüm:

En büyük değeri alması için katsayısı büyük olan terimlere büyük değerler verilmelidir. Yani $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1) = (5, 4, 3, 2, 1)$ olmalıdır.

Buradan en büyük değer $1+2.2+3.3+4.4+5.5 = 1+4+9+16+25 = 55$ olur. En küçük değer için büyük katsayılı terimlere küçük olan değerleri vermeliyiz. Yani $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1) = (1, 2, 3, 4, 5)$ olmalıdır. Buradan en küçük değer $1.5 + 2.4 + 3.3 + 4.2 + 5.1 = 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$ olur. Aradaki fark $55 - 35 = 20$ olur. Cevap A.

5 Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgende $a \leq 2 \leq b \leq 3$ ise, bu üçgenin alanı en çok kaç olabilir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\theta \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$

6 n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan a, b tam sayıları bulunur?

a) 17 **b)** 19 **c)** 29 **d)** 31 **e)** 37

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$a^2 + ab - 6b^2 = (a - 2b)(a + 3b) = n$ ve $(a + 3b) - (a - 2b) = 5b$ olduğu için n nin farkları 5 ile bölünebilen iki sayının çarpımı şekilde yazılabilmesi lazım.

Şıklardan sadece $31 = 31 \cdot 1$ bu şekilde yazılabilir.

$a + 3b = 31$ ve $a - 2b = 1$ sisteminin ortak çözümünden $a = 13$ ve $b = 6$ sayıları denklemi sağlar.

7 Farklı ağırlıktaki dört taş, iki kefeli bir teraziyi en az kaç kez kullanarak hafiften ağıra doğru sıralanabilir?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Farklı sıralama sayısı 4! dir. n tartım yapıldığında 2^n durum olabileceğinden $2^n \geq 24$ eşitsizliğinden $n \geq 5$ elde edilir.

5 tartımda ağırlıkları a, b, c, d olan taşları hafiften ağıra doğru nasıl sıralanabileceğini gösterelim:

Önce a ile b'yi ve c ile d'yi tartalım, sonuç örneğin $a < b$ ve $c < d$ olsun. Sonra a ile c'yi tartalım, sonuç örneğin $a < c$ olsun. Bu durumda $a < d$ olduğundan a ile d'yi tartmaya gerek kalmayacak. Şimdi b ile c'yi ve b ile d'yi tartarsak tüm ikilileri karşılaştırmış olacağız ve böylece 5 tartım ile taşları sıralayabileceğiz. Diğer durumlar da ayn şekilde incelenir.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 1.83, Sayfa 125.

8 $x + y + z = 90$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü için $\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2}$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı vardır?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 9

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2} = \frac{x+y+z}{n+n+1+n+3} = \frac{90}{3(n+1)} = \frac{30}{n+1}$$

$$y = 30,\ x = \frac{30n}{n+1},\ z = \frac{30(n+2)}{n+1}$$

$n > 0$ bir tam sayı olmak üzere; obeb$(n, n+1) = $ obeb$(n+1, n+2) = 1$ olduğu için $n+1 \mid 30$ olur.

30'un 8 pozitif böleni vardır. Bunlardan biri (1), $n = 0$ durumuna yol açar. Bu nedenle cevap $\boxed{(D)\ 7}$ olarak bulunur.

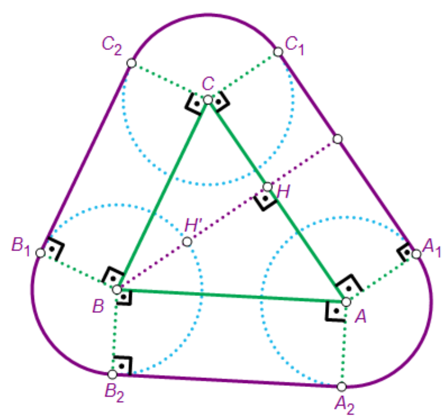
9 Çevresinin uzunluğu π olan bir üçgenin dış bölgesinde kalan ve üçgene olan uzaklığı 1 i aşmayan noktaların oluşturduğu bölgenin alanı nedir?

a) 4π **b)** 3π **c)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **d)** 2π **e)** $\dfrac{3\pi}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

A, B, C merkezli 1 er yarıçaplı çemberler çizelim. Üçgene uzaklığı 1 i aşmayan noktalar kümesi, bu çemberler ve onların ortak dış teğetlerinin aşağıdaki şekildeki gibi sınırladığı bölgedir.



Bu bölgeyi üç dikdörtgen ve üç daire dilimi şeklinde görebiliriz.

Üç dikdörtgenin toplam alanı $BC \cdot 1 + AC \cdot 1 + AB \cdot 1 = \pi$ dir.

Üç daire diliminin açıları toplamı $180° - \angle A + 180° - \angle B + 180° - \angle C = 360°$ olduğu için bunların alanları toplamı bir daire diliminin alanına, yani $\pi \cdot 1^2 = \pi$ ye eşit olacaktır.

Bu durumda, bölgenin toplam alanı $\pi + \pi = 2\pi$ olacaktır.

10 $a_1 = \sqrt{7}$ ve $i \geq 1$ için $b_i = \lfloor a_i \rfloor$, $a_{i+1} = \dfrac{1}{bi - \lfloor b_i \rfloor}$ olsun. b_n nin 4 e bölünmesini sağlayan 2004 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?

a) 2005 **b)** 2006 **c)** 2007 **d)** 2008 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Bu soru iptal edilmiştir.

11 40 satır ve 7 sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Bu yazım sonucu, farklı herhangi iki satırda oluşan diziler birbirinden farklıysa, en çok kaç tane 1 kullanılmış olabilir?

a) 198 **b)** 128 **c)** 82 **d)** 40 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Olabildiğince çok 1 kullanmaya çalışacağız. Bir satırda en fazla 7 tane 1 kullanılabilir.

7 tane 1 kullanılan sadece 1 satır olabilir.

6 tane 1 kullanılan en fazla $\binom{7}{6} = 7$ satır olabilir.

5 tane 1 kullanılan en fazla $\binom{7}{5} = 21$ satır olabilir.

4 tane 1 kullanılan en fazla $\binom{7}{4} = 35$ satır olabilir.

Dolayısıyla en fazla 1 kullanmak için 1 adet 7 tane birli, 7 adet 6 tane birli, 21 adet 5 tane birli ve 11 adet 4 tane birli kullanmalıyız. Toplamda

$$1 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 21 \cdot 5 + 11 \cdot 4 = 198$$

adet 1 kullanılmış olabilir.

12 x bir gerçel sayı olmak üzere $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ çarpımının alabileceği en küçük değer nedir?

a) $-\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** -1 **e)** -2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Sırasıyla 1 ve 4. İfadeyi çarpalım. $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$ elde edilir. $x^2-5x = \alpha$ dönüşümü yapıp açalım, $\alpha^2 + 10\alpha + 24 + 1 - 1 = (\alpha+5)^2 - 1 \Rightarrow (\alpha+5)^2 \geq 0$ ifadenin en küçük değeri -1 dir.

13 Bir üçgenin iç açılarının tanjantları tam sayılarsa, bu sayıların toplamı kaçtır?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Önerme:

Bir üçgenin iç açıları arasında $\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$ bağıntısı vardır.

İspat:

$A+B+C = 180°$ olup $A+B = 180° - C$ olacaktır. Ve $\tan(A+B) = \tan(180° - C)$ olur. Tanjantın toplam formülünü kullanacak olursak

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

O halde sorumuzu çözelim. $a, b, c \in Z$ olmak üzere $\tan(A) = a$, $\tan(B) = b$ ve $\tan(C) = c$ diyelim. Bu durumda

$$a + b + c = abc$$

denkleminin tamsayılarda çözümlerini arıyoruz. Denklem simetrik olduğundan $a \le b \le c$ kabülü yapalım. Bu durumda $a+b+c = abc \le 3c$ olacaktır. Yani $ab \le 3$ olacaktır. $a=1$ $b=2$ $c=3$ veya $a=2$ $b=1$ $c=3$ gibi çözümler, bu denklemin çözümleridir. O halde cevabımız $1+2+3=6$ dır.

14 $i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, $top^2 = iyitop$ ise, $y - i$ kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\left(\overline{top}\right)^2 = \overline{iyi000} + \overline{top}$

$\left(\overline{top}\right)^2 - \overline{top} = \overline{iyi000} \equiv 0 \pmod{1000}$

$\overline{top} \equiv x \pmod{1000}$ olsun.

$x^2 - x \equiv 0 \pmod{1000}$ olması için $x(x-1) \equiv 0 \pmod 8$ ve $x(x-1) \equiv 0 \pmod{125}$ olması gerekir.

$x \equiv 0, 1 \pmod 8$ ve $x \equiv 0, 1 \pmod{125}$ denklem sisteminden 4 çözüm gelir.

$x = 8k = 125m \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{1000}$

$x = 8k+1 = 12m+1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{1000}$

$x = 8k+1 = 125m \Rightarrow 1 \equiv 125m \equiv 5m \pmod 8 \Rightarrow m \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 125(8n+5) \equiv 625 \pmod{1000}$

$x = 8k = 125m+1 \Rightarrow -1 \equiv 125m \equiv 5m \pmod 8 \Rightarrow m \equiv -5 \equiv 3 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 125(8n+3)+1 \equiv 376 \pmod{100}$

$\overline{top} = 625 \Rightarrow 625^2 = 390625 \ne \overline{iyi625}$ sağlamaz.

$\overline{top} = 376 \Rightarrow 376^2 = 141376 \Rightarrow i = 1, y = 4$ ve $y - i = 4 - 1 = 3$ sağlar.

$\overline{top} = \overline{000}$ ve $\overline{top} = \overline{001}$ sayılarının karesinin aldığımızda 6 basamaklı sayılar oluşmaz.

O halde yanıt: $\boxed{D}$

Not: Soruda $\overline{top}$'un 3 basamaklı $\overline{iyitop}$'un da 6 basamaklı sayılar olduğu daha açık bir şekilde belirtilmeliydi. Aksi durumda sorudaki gösterim $t \cdot o \cdot p^2 = i \cdot y \cdot i \cdot t \cdot o \cdot p$ şeklinde de yorumlanabilirdi.

Ayrıca $\overline{000}^2 = \overline{000000}$ da bir açıdan bakıldığında denklemi sağlar. Bunun için 6 basamaklı sayı vurgusu buradaki belirsizliği ortadan kaldırabilir.

15 Dört 0, beş 1, ve bir 2 kullanarak on basamaklı kaç farklı tam sayı yazılabilir?

a) 1260 **b)** 1134 **c)** 756 **d)** 630 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

İlk basamağa 0 lar hariç 6 sayı yazılır. Tekrarlı permütasyondan $\dfrac{6 \cdot 9!}{4! \cdot 5!} = 756$ elde edilir.

Çözüm 2:

2 nin başta olduğu $\dfrac{9!}{5! \cdot 4!}$, 1 lerden birinin başta olduğu $\dfrac{9!}{4! \cdot 4!}$ sayı yazılabilir.

Toplarsak $\dfrac{9!}{4! \cdot 4!}\left(\dfrac{1}{5} + 1\right) = \dfrac{9!}{4!} \cdot \dfrac{6}{5} = 756$ elde ederiz.

Çözüm 3:

Tekrarlı permütasyondan hiçbir şartsız $\dfrac{10!}{5!\cdot 4!}$ sayı yazılabilir.

0 nın başta olduğu $\dfrac{9!}{3!\cdot 4!}$ sayı yazılabilir.

Aradığımız yanıt $\dfrac{10!}{5!\cdot 4!} - \dfrac{9!}{3!\cdot 5!} = \dfrac{9!}{3!\cdot 5!}\left(\dfrac{10}{4} - 1\right) = 9\cdot 8\cdot 7\cdot \dfrac{3}{2} = 756$ dır.

16 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm 1:

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (x^2 + ax + 1).(x^2 + bx + 1)$ şeklinde olabilir. Burada bir tahmin yapmış oldum. Polinom eşitliğini kullanırsak

$a+b = -4$ ve $a.c = 3$ eşitliklerini elde ederiz buradan $a = -3$ ve $b = -1$ bulunur. Yani $x^4-4x^3+5x^2-4x+1 = (x^2 - 3x + 1).(x^2 - x + 1)$ olur.

1) $(x^2 - 3x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$

2) $(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \Delta < 0$ olduğundan reel kök yoktur.

Öyleyse gerçel kökler toplamı 3 olur. Cevap C

Çözüm 2:

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^2 = (x-1)^4 - x^2 = [(x-1)^2 - x][(x-1)^2 + x] =$

$= (x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

17 Kenar uzunluğu 6 olan bir $ABCD$ karesinin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde, $|CR| + |RT| + |TC| = 12$ olacak biçimde sırasıyla R ve T noktaları alınıyor. $tan(\widehat{RAT})$ nedir?

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{1}{3}$ **d)** $\dfrac{1}{2}$ **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

TR üzerinde $DT = TH$ olacak şekilde bir H noktası alalım. $DT+TC = HT+TC = 6 = BC = BR+RC = RH + RC$ olduğu için $HR = BR$ dir.

$AT^2 = AD^2 + DT^2$ ve $AR^2 = AB^2 + BR^2$ olduğu için $AT^2 - AR^2 = DT^2 - BR^2 = TH^2 - RH^2$, yani $AH \perp TR$ olacaktır.

Bu durumda, $\angle DAT = \angle HAT$ ve $\angle HAR = \angle BAR$, yani $\angle RAT = 45°$, $\tan\angle RAT = 1$ olacaktır.

18 Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tam sayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tam sayı içerir?

a) 3 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 10 **e)** 15

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

8'den fazla ardışık tam sayı içeremeyeceğini gösterelim. Eğer 8 ardışık tam sayı varsa bu sayılar 8'e bölündüğünde $0, 1, 2, \ldots, 7$ kalanları verir. 8'e bölündüğünde 4 kalanı veren sayının asal çarpanlarına ayrılmış halinde 2'nin kuvveti 2'dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla en fazla 7 ardışık sayı içerebilir. 7 için örnek durum bulalım.

$$29, \quad 30\ (= 2 \cdot 3 \cdot 5), \quad 31, \quad 32\ (= 2^5), \quad 33\ (= 3 \cdot 11), \quad 34\ (= 2 \cdot 17), \quad 35\ (= 5 \cdot 7)$$

Dolayısıyla en fazla 7 ardışık sayı olabilir.

19 1 ile başlayıp her adımda elimizdeki sayıya 1 ekleyerek veya çarpmaya göre tersinin negatifini alarak, sonlu sayıda adımda aşağıdakilerden hangisini elde edemeyiz?

a) -2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

1 ekleme işlemini a ile, bu işlemin k kez uygulandığını a^k ile, çarpamaya göre tersinin negatifini almayı b ile gösterelim.

$(1, a^n) = n + 1$ olacağı için $(1, a^6) = 7$.

-2 ve $\frac{1}{2}$ sayıları birbirlerinden $(-2, b) = \frac{1}{2}$ elde edilebileceği için cevap ikisi de olamaz. (Yine de örnek vermek gerekirse $(1, aba) = -\frac{1}{2}$ ve $(1, abab) = -2$)

Bu durumda sadece $\frac{5}{3}$ ün elde edilip edilemeyeceğini göstermemiz yeterli.

$(1, a^2ba^2) = \frac{5}{3}$

O halde yanıt, $\boxed{\text{Hiçbiri}}$dir.

20 Tüm x gerçel sayıları için $x^2 \geq C\lfloor x \rfloor(x - \lfloor x \rfloor)$ eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan en büyük C gerçel sayısı nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 9 **e)** 25

Çözüm 1:

(Mustafa Töngemen)

a) x tamsayı ise $x^2 \geq C(x - x) \Rightarrow x^2 \geq 0$ olduğundan eşitsizlik tüm tamsayılar için geçerlidir.

b) x tamsayı değilse, a tamsayı olmak üzere, $a \leq x < a + 1$, $[x] = a$ dır.

$x^2 \geq C(x - a) \Rightarrow x^2 - Cx + Ca \geq 0$ olur, her gerçel sayı için sağlanması $\triangle \leq 0$ plmasıyla mümkündür.

$\triangle = a^2C^2 - 4a^2C \leq 0 \Rightarrow C(C - 4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq C \leq 4$ olur ve C nin en büyük değeri 4 bulunur.

Çözüm 2:

$x = m + t$ dersek $0 \leq t < 1$ olmak üzere

$(m + t)^2 \geq C.m.t \Longrightarrow m^2 + t^2 \geq (C - 2)m.t$

$C = 4$ için ifade doğrudur eşitlik durumu ancak m'yi t'ye çok yaklaştırdığımızda gerçekleşir.

Örnek durum $x = 1,999999999999998$

21 S_1 ve S_2 çemberleri A ve B noktalarında kesişiyor. B den geçen bir doğru S_1 i B dışında D noktasında ve S_2 yi ise yine B dışında C noktasında kesiyor. D den S_1 e çizilen teğet ile C den S_2 ye çizilen teğetin kesişim noktası E ve $|AD| = 15$, $|AC| = 16$, $|AB| = 10$ ise, $|AE|$ kaçtır?

a) 20 **b)** 24 **c)** 25 **d)** 26 **e)** 31

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle DAB = \angle CDE = \angle EAC$ ve $\angle ADB = \angle AEC$ olduğu için $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ dir.

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 15 \cdot 16 = 10 \cdot AE \Rightarrow AE = 24$$

22 Aşağıdaki ifadelerin hangisinin 25 e bölünmesini sağlayan bir x tam sayısı bulunur?

a) $x^3 - 3x^2 + 8x - 1$

b) $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

c) $x^3 + 14x^2 + 3x - 8$

d) $x^3 - 5x^2 + x + 1$

e) Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Şıkları inceleyip düzenleyelim,

$a)(x-1)^3 + 5x \Rightarrow x = 5k$ ise, 25 e bölünmez ,$x = 5k + 1$ ise $5x$ 25 e bölünmeyeceği için ifade bölünmez.

$b)(x+1)^3 - 5x \Rightarrow x = 5k$ ise , $(x+1)^3$, 25 e bölünmez, $x = 5k - 1$ ise, $5x$, 25 e bölünmez.

$c)(x+1)^3 + 11x^2 - 9 \Rightarrow x = 5k + 1$ için , ifade 25 e bölünür.

$d)(x-1)^3 - 2x^2 - 2x - 2 \Rightarrow x = 5k, x = 5k + 1$ için bölünmediği görülür.

23 Sonsuz bir satranç tahtasında 25 kare nasıl seçilirse seçilsin ortak köşesi olmayan n tanesi bulunabiliyorsa, n en çok kaç olabilir?

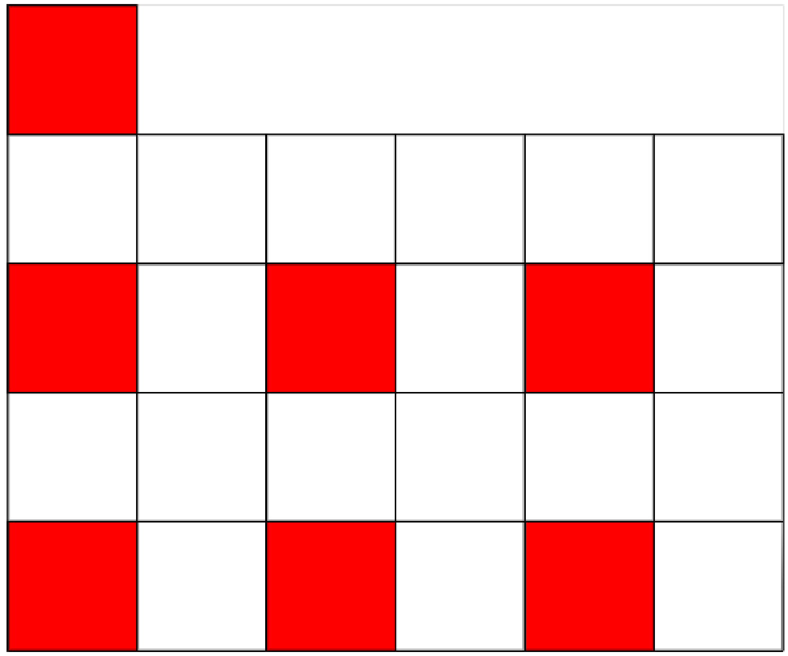
a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 11

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{A}$

Öncelikle $n \le 7$ olduğunu gösterelim. Eğer 25 kareyi 4×6'lık bir dikdörtgen ve bunların dışında kalan bir dikdörtgen olarak seçersek ardışık iki sütunda ikiden fazla kareyi seçemeyeceğimiz görülebilir çünkü bir sütunda ikiden fazla kare seçersek yanındaki sütundan kare seçemeyiz. Eğer bir tane seçersek yan sütundan da 1'den fazla seçemeyiz. Dolayısıyla her ardışık sütun çiftinden en fazla 2 tane kare seçerek toplamda 6 kare seçilebilir ($1-2$ sütun çiftinden 2 tane, $3-4$'den 2 tane $5-6$'dan 2 tane). Dışardaki kareyi de seçersek bu şekilden en fazla 7 kare seçebildiğimizi görebiliriz. Cevap 7'dir.

Şıklardaki en küçük sayı 7 olduğundan test mantığıyla her zaman 7 kare seçebildiğimizi göstermemize gerek yoktur ama bunun ispatı da eklenebilir.

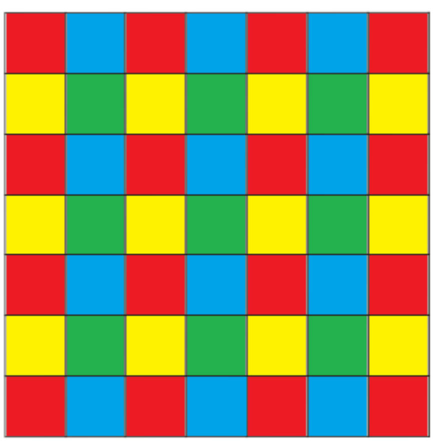


Çözüm 2:

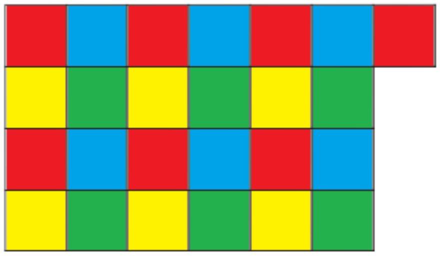
Problem, boyama yöntemi ve güvercin yuvası prensibi beraber kullanılarak çözülebilir.

yanıt: $\boxed{A}$

Önce 4 renk kullanarak sonsuz satranç tahtasını aşağıdaki desende boyayalım.



Aynı renkle boyanmış olan karelerin ortak köşesi olmadığına dikkat edelim. Şimdi bize verilen 25 karenin her biri bu 4 renkten birinde bulunacağı için, güvercin yuvası prensibine göre aynı renge sahip en az $\left\lfloor \dfrac{25}{4} \right\rfloor + 1 = 7$ kare bulunur. Yani daima, ortak köşesi olmayan $n = 7$ kare seçebiliriz. 25 kareden, ortak köşesi olmayan 8 kare seçemeyeceğimiz bir düzenleme örneği de vardır. Aşağıdaki çizimde böyle 25 kare verilmiştir. Bu yüzden $n < 8$ olup $n_{\max} = 7$ dir.



24 $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin küplerinin toplamı nedir?

a) -6 **b)** 2 **c)** 8 **d)** 11 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Denklemin kökleri a, b, c olsun. $a^3 + b^3 + c^3$ toplamını hesaplayacağız. $a^3 = 2a^2 + a - 1$ olur . Bunu b ve c için de yazıp toplarsak $a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 3$ olur. Vieta teoreminden dolayı $a + b + c = 2$ olur. Buradan $a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 1$ olur. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$ özdeşliğini kullanalım. Yine vieta teoreminden $ab + bc + ac = -1$ bulunur. $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 - 2.(-1) = 4 + 2 = 6$ olur. Bunu aradığımız ifadede yerine yazalım. $a^3 + b^3 + c^3 = 2.6 - 1 = 11$ olur. Cevap D.

Not:Denklemin üç kökünün de reel olduğuna dikkat ediniz.

25 Bir ABC üçgeninde, A açısına ait iç açıortayın ayağı D olmak üzere, $[AC]$ kenarı üzerindeki E noktası, $|CE| = |CD|$ ve $|AE| = 6\sqrt{5}$; $[AB$ ışını üzerindeki F noktası da, $|DB| = |BF|$ ve $|AB| < |AF| = 8\sqrt{5}$ koşullarını sağlıyorsa, $|AD|$ nedir?

a) $10\sqrt{5}$ **b)** 8 **c)** $4\sqrt{15}$ **d)** $7\sqrt{5}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ ve $\angle AFD = \beta$ olsun.

Bu durumda, $\angle ABD = 2\beta$, $\angle BCA = 180° - 2\alpha - 2\beta$, $\angle DEC = \alpha + \beta$, $\angle ADE = \beta$, yani $\triangle ADF \sim \triangle AED$ olacaktır.

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AE \Rightarrow AD = 4\sqrt{15}.$$

Çözüm 2:

$AC = b$, $AB = c$, $BD = n$, $DC = m$ olsun.

Açıortay Teoreminden bildiklerimizi

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{n} \tag{1}$$

$$AD^2 = bc - mn \tag{2}$$

birleştirirsek

$$AD^2 = bc - mn + \underbrace{bn - cm}_{0} = b(c + n) - m(c + n) = (b - m)(c + n) \tag{3}$$

elde ederiz. Bu da $AD^2 = AE \cdot AF = 8\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} \Rightarrow AD = 4\sqrt{15}$ anlamına gelmektedir.

26 $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur?

a) 21 **b)** 01 **c)** 11 **d)** 02 **e)** 22

Çözüm:

Aslında bize sorulan soru $2005^{2003^{2004}+3} \equiv ? \pmod 9$ çünkü 3'lük taban da her basamak 3'ün kuvvetlerini belirtir. Son iki basamakta sayının 9 ile bölümünden kalandır.

$2005^{2003^{2004}+3} \equiv 2^{2003^{2004}+3} \pmod 9$

$\phi(9) = 6 \Longrightarrow 2003^{2004} + 3 \equiv (-1)^{2004} + 3 \equiv 4 \pmod 6$

$2^4 \equiv 7 \pmod 9 \Longrightarrow$ 7'nin de 3'lük tabanda yazılışı $(21)_3$ 'dir.

27 İkisinde 1, sekizinde 2, on ikisinde 3, dördünde 4 ve beşinde 5 yazılı otuz bir taştan otuzu herhangi iki satırdaki sayıların toplamı eşit ve herhangi iki sütundaki sayıların toplamı eşit olacak biçimde 5×6 bir satranç tahtasına yerleştirilmişse, kullanılmayan taştaki sayı nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen 31 tane taşın üzerindeki yazıların toplamı 95'dir. Otuz tane taşı dizdikten sonra k yazılı taş kullanılmasın. Satranç tahtası üzerindeki sayıların toplamı $95 - k$ olacaktır. Her sütundaki sayıların toplamı sabit olduğundan ve 6 tane sütun olduğundan $95 - k$ sayısı 6'ın katı olacaktır. Dolayısıyla

$$95 - k \equiv 0 \pmod 6 \Longrightarrow k \equiv 5 \pmod 6 \Longrightarrow k = 5$$

Kullanılmayan taş 5 yazılı taştır.

Not: Sütun sayısı 5, satır sayısı 6 olarak alıp çözmeye çalışırsak da cevap 5 çıkacaktır.

28 x, y gerçel sayıları $4x^2 + 9y^2 = 8$ eşitliğini sağlıyorsa, $8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 23 **b)** 26 **c)** 29 **d)** 31 **e)** 35

Çözüm:

$8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y = 16 + 2x + 3y + 9xy$

O halde $2x + 3y + 9xy$ ifadesinin en büyük değerini bulmalıyız.

Cauchy - Schwarz Eşitsizliği:

$(4x^2 + 9y^2)(1 + 1) \geq (2x + 3y)^2 \Longrightarrow 4 \geq 2x + 3y$

Öte yandan,

$(2x - 3y)^2 \geq 0 \Longrightarrow 8 \geq 12xy \Longrightarrow 6 \geq 9xy$

O halde,

$8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y = 16 + (2x + 3y) + 9xy \leq 16 + 4 + 6 = 26$ bulunur.

Eşitlik durumu $4x^2 + 9y^2$ ve $2x - 3y = 0$ eşitlikleri sağlandığında, yani $2x = 3y$ olduğunda sağlanır. Verilen eşitlikten $x = 1$ ve $y = \dfrac{2}{3}$ olması gerektiği bulunabiliir.

29 $ABCD$ kirişler dörtgeninin AC ve BD köşegenleri M noktasında kesişiyor. $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $m(\widehat{AMB}) = 60°$ ise, dörtgenin çevrel çemberinin yarı çapının uzunluğu nedir?

a) $5\sqrt{3}$ **b)** $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ **c)** 6 **d)** 4 **e)** $\sqrt{34}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$AD' = DC = 3$ olacak şekilde $AD'DC$ ikizkenar yamuğunu çizelim.

$\angle ABD = \angle ACD = \angle CAD'$ ve $\angle BAM + \angle ABM = 120° = \angle BAD'$ dir. $\triangle D'AB$ de Kosinüs Formülünden $BD'^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{-1}{2} \Rightarrow BD' = 7$ elde edilir.

O çevrel merkez olmak üzere; $\angle D'OB = 120°$ ve $OB = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ dir.

30 $p^2 + 23$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 14 olacak şekilde kaç p asal sayısı bulunur?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$p^2 + 23 = a_1^{p_1}.a_2^{p_2}$ olsun . 14 ün çarpanları $1, 7, 14, 2$ olduğundan ,

$p^2 + 23 = a_1^6.a_2$ veya $p^2 + 23 = a_1^{13}$ olabilir.$p = 2$ için denenirse, sağlanmadığı görülür.

$p = 3$ için de sağlanmaz,

$a_n \geq 3$ için denenirse, $p = 13$ bulunur.

$p > 13$ için Sol tarafın P.B sayısı 6. Kuvvet çarpımı olarak yazılamayacağı için çözüm olamaz.

Çözüm 2:

$p > 3$ kabul edelim o zaman $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$ ve $(\text{mod } 4)$ olacağından ifademiz 3 ve 4'e bölünür.

O zaman $p^2 + 23 = 2^6.3$ olmalıdır.

Buradan $p^2 + 23 = 192$ ve $p = 13$ çözümü gelir.

$p < 4$ olan sayıları da denediğimizde çözüm gelmez.Tek çözüm vardır.

31 n tam sayısının kaç farklı değeri için, düzlemde her biri kendi dışındakilerin tam olarak 2004 ü ile kesişen farklı n doğru bulunabilir?

a) 12 **b)** 11 **c)** 9 **d)** 6 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Düzlemde n tane doğrunun Her biri kendi hariç sadece 2004 noktada kesişmesi için 2004 ün bölenlerinden biri olmalıdır , yani cevap 2004 ün pozitif bölen sayısıdır. $2004 = 2^2.3.167 \Rightarrow (2+1)(1+1)(1+1) = 12$ bulunur.

32 a, b, c, d farklı gerçel sayılar olmak üzere, a ve b, $x^2-2cx-5d=0$ denkleminin, c ve d ise, $x^2-2ax-5b=0$ denkleminin kökleriyse, $a+b+c+d$ nedir?

a) 10 **b)** 15 **c)** 20 **d)** 25 **e)** 30

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Vieta formüllerinden $2c=a+b$, $2a=c+d$ ve $-5d=ab$, $5b=cd$ bulunur. 1. denklemden $a+c=b+d$ buluruz yani $2(a+c)$ yi bulmamız yeterli . 2. denklemden d yi yalnız bırakırsak,

$d=-\dfrac{ab}{5}$, $d=-\dfrac{5b}{c}\Rightarrow ac=25$ Buluruz şimdi de $x=a, x=c$ yazıp alt alta toplayalım,

$a^2+c^2-4ac-5(b+d)=0$ $b+d=a+c$ yazıp düzenlersek,

$(a+c+10)(a+c-15)=0$ elde edilir buradan $2(a+c)=30$ bulunur.

33 $|AB|=9$, $|CD|=5$ ve $BC\parallel AD$ koşullarını sağlayan $ABCD$ yamuğunun D açısına ait iç açıortay, A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla M ve N noktalarında; B açısının iç açıortayı ise, yine A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla L ve K noktalarında kesiyor. K noktası $[AD]$ üzerinde ve $\dfrac{|LM|}{|KN|}=\dfrac{3}{7}$ ise, $\dfrac{|MN|}{|KL|}$ nedir?

a) $\dfrac{62}{63}$ **b)** $\dfrac{27}{35}$ **c)** $\dfrac{2}{3}$ **d)** $\dfrac{5}{21}$ **e)** $\dfrac{24}{63}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$AB=AK=9$ ve $DK=DC=5$, $[ABK]/[CKD]=[ALK]/[KND]=9/5=AK/KD$ olduğu için $\triangle KAL$ ve $\triangle KND$ üçgenlerinin AK ve KD kenarlarına ait yükseklikleri eşit yani $LN\parallel AD$ dir. Bu durumda, $MK\cap LN=\{P\}$ dersek $LP/PN=9/5$ ve $LMNK$ kirişler dörtgeninde $LM/KN=LP/KP$ olacaktır. $LP=9k$ dersek, $PN=5k$ ve $PK=21k$ çıkacaktır. Bu durumda $MN/LK=PN/PK=5/21$ olacaktır.

34 n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için $5n^{11}-2n^5-3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tam sayı vardır?

a) 2 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 12 **e)** 18

Çözüm:

$f(2)=5\cdot 2^{11}-2\cdot 2^5-3\cdot 2=5\cdot 2\cdot 1024-64-6=10240-70=10170=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 113.$

O halde 2, 9, 5, 113 sayılarının $f(n)$ yi her zaman bölüp bölmediğini araştıracağız.

$f(n)$ nin çift sayı olduğu kolayca görülür.

Euler'den $n^5\equiv n \pmod 5$ olduğu için $f(n)=5n^{11}-2n^5-3n\equiv -2n-3n\equiv 0 \pmod 5$.

$n\equiv 0 \pmod 3$ iken $9\mid f(n)$.

$n\equiv 1,2 \pmod 3$ iken $(n,9)=1$ ve Euler'den $n^{\varphi(9)}=n^6\equiv 1 \pmod 9$ olacaktır. $f(n)=5n^{11}-2n^5-3n\equiv 5n^5-2n^5-3n\equiv 3n(n^4-1) \pmod 9$ ve $n^4\equiv 1 \pmod 3$ olduğu için $9\mid f(n)$ dir.

2, 9 ve 5 her zaman bölen olduğu için cevabımız 113'ün de bölen olup olmamasına göre $2\cdot 3\cdot 2=12$ ya da $2\cdot 3\cdot 2\cdot 2=24$.

24 şıklarda yer almadığına göre cevabımız $\boxed{12}$.

113 ün bu tip bir sayıyı bölmesi biraz iddialı olurdu.

Yine de bölmediğini biraz işlemle ve karşıt bir örnekle gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} f(3) &= 5\cdot 3^{11} - 2\cdot 3^5 - 3\cdot 3 && \pmod{113} \\ &\equiv 5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3 - 2\cdot 3^5 - 9 && \pmod{113} \\ &\equiv 17\cdot(15\cdot 17 - 2) - 9 && \pmod{113} \\ &\equiv 17\cdot 27 - 9 && \pmod{113} \\ &\equiv 450 && \pmod{113} \\ &\equiv -2 && \pmod{113} \end{aligned}$$

35 Bir çember üzerine, her biri saat yönünde kendisinden sonra gelen iki sayının farkının mutlak değerine eşit ve hepsinin toplamı 94 olacak biçimde n tane tam sayı yerleştirilmesini olanaklı kılan en büyük n sayısı nedir?

a) 188 **b)** 186 **c)** 141 **d)** 100 **e)** 47

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Çember üzerine yerleştirilen tamsayıların negatif olamayacağı açıktır. Bu sayıları $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ile gösterelim. Ayrıca $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 94$ veriliyor. n nin en büyük değerini alabilmesi için bazı i ler için $a_i = 0$ olmalıdır. Aksi halde her i için $a_i \geq 1$ olursa $n \leq 94$ olurdu. Biz bazı i ler için $a_i = 0$ ise n nin 94 ten daha büyük olabileceğini göstereceğiz. Elbette böyle bir durumda ardışık iki tamsayı $a_i = a_{i+1} = 0$ değerini alamaz. Aksi takdirde $a_{i+2} = 0$ olup tüm sayıların 0 olduğu çelişkisi ortaya çıkar. Tüm bunları göz önüne alarak $a_1 = 0$ diyelim. Bu durumda $a_2 = a_3 = c$ dir. $c = 1$ seçerek n nin daha büyük değerler almasını mümkün kılabiliriz. $a_4 = 0$ olup $a_5 = a_6 = 1$ dir. (Aslında $a_4 = 2c$ olabilir gibi görünmekte, ancak bu seçim n nin küçülmesine sebep olur.) Bu şekilde $k = 3m + 1$ formundaki k pozitif tamsayıları için $a_k = 0$; $k = 3m + 2$ ve $k = 3m$ formundaki k tamsayıları için $a_k = 1$ dir. ($m = 1, 2, \dots, n/3$.) Son olarak $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 94$ olduğundan $(2m)\cdot 1 = 94$, buradan $m = 47$ ve $n_{\max} = 3m = 141$ elde edilir.

Bu problemle aynı gibi görünen, ancak ispat tekniği açısından biraz daha zor versiyonu (en büyük değer ilkesi kullanılarak) 2007 yılında sorulmuştur. http://geomania.org/forum/2007-164/tubitak-lise-1-asama-2007-soru-28/ bağlantısını incelemenizi tavsiye ederiz.

36 f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için, $f(x) + f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$ eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

a) -1 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{7}{4}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x \to \sqrt[3]{2}$ koyalım . $f(\sqrt[3]{2}) + f(-1) = 2$ bulunur. (1)

$x \to -1$ koyalım. $f(-1) + f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = -1$ bulunur. (2) Şimdi de

$x \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ koyalım. $f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) + f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{2}$ elde ederiz. (3)

(1) den (2) yi çıkarırsak,$f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) - f(\sqrt[3]{2}) = 3$ bulunur.

Son bulduğumuz ifade ile (3) ü toplarsak, $f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \frac{7}{4}$ bulunur.

(1) de bunu yazarsak, $f(-1) = \frac{1}{4}$ bulunur.

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2005

1 $|AB| = 2$ olmak üzere, A ve B noktalarından geçen 4 yarıçaplı çember, A ve C noktalarından geçen 3 yarıçaplı çembere dıştan teğet olsun. BC doğrusu ikinci çembere teğetse, $|BC|$ kaçtır?

a) 7 **b)** $2 + \dfrac{43}{2}$ **c)** $\dfrac{5}{2}$ **d)** $4 + \sqrt{9}$ **e)** $\sqrt{7}$

Çözüm:

$BE = 4$ olduğu biraz farklı bir yöntemle de gösterilebilir.

$BA = BF = 2$ ve $F \in AD$ olacak şekilde F noktası alalım. $\triangle ABF \sim ADB \quad (AA)$ olacaktır. Bu durumda $AF/AB = AB/AD \Rightarrow AF = 1$ ve $DF = 3$.

$EA = DF = 3$, $AB = FB = 2$ ve $\angle BAE = 180^\circ - \angle BAF = 180^\circ - BFA = \angle BFD$ olduğu için $\triangle BAE \cong BFD \quad (KAK)$ ve $BE = BD = 4$ olur.

Bu durumda $BC = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ olur.

2 $n < 2005$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sayısının, hiçbiri 5 ile bölünmeyen tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayıları için, $a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4$ sayısının 5 ile bölünmesini sağlayan en büyük değeri nedir?

a) 2000 **b)** 2001 **c)** 2002 **d)** 2003 **e)** 2004

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

$(a_i, 5) = 1$ olduğundan küçük Fermat teoreminden $a_i^4 \equiv 1 \pmod 5$ olacaktır. Dolayısıyla

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 \equiv n \equiv 0 \pmod 5$$

olacaktır. 2005'den küçük en büyük 5'in katı sayı 2000'dir.

3 $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ denkleminin en büyük ve en küçük gerçel köklerinin arasındaki fark F ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $0 \le F < 2$ **b)** $2 \le F < 4$ **c)** $4 \le F < 6$ **d)** $6 \le F < 8$ **e)** $0 \le F$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x = 1$ denklemin bir köküdür. Dolayısıyla $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 = (x-1).(x^2 + ax + b)$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. Polinom eşitliği ya da polinom bölmesiyle $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 = (x-1).(x^2 - 5x - 5)$ olduğu görülebilir. Buradan en büyük kök $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$ ve en küçük kök $\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$ olur. Aralarındaki fark ise $F = 3\sqrt{5}$ olur.

4 Tüm basamakları 0 dan farklı olan ve basamaklarındaki rakamlar nasıl sıralanırsa sıralansın oluşan sayıların hepsinin 7 ile bölündüğü kaç tane altı basamaklı pozitif tam sayı vardır?

a) 11 **b)** 77 **c)** 133 **d)** 166 **e)** 255

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$abcdef$ sayısı bu özelliği sağlasın.

$$abcdef \equiv 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10e + f \equiv -2a - 3b - c + 2d + 3e + f \equiv 0 \pmod 7$$

$$\implies 2a + 3b + c \equiv 2d + 3e + f \pmod 7$$

olduğundan eğer a, b, c'nin yerini değiştirmeden e, f, g'yi değiştirirsek $2a + 3b + c$ değeri değişmeyeceğinden

$$2d + 3e + f \equiv 2d + 3f + e \equiv 2e + 3d + f \equiv 2e + 3f + d \equiv 2f + 3d + e \equiv 2f + 3e + d \pmod 7$$

olacaktır. Buradan $d \equiv e \equiv f \pmod 7$ olacaktır. Benzer şekilde $a \equiv b \equiv c \pmod 7$ olacaktır. Eğer $abdcef$ gibi diğer sayılar üzerinden aynı işlemleri yaparsak

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv e \equiv f \pmod 7 \qquad (1)$$

olacaktır. Bu durumu sağlayan herhangi bir $abcdef$ sayısı alalım

$$abcdef \equiv aaaaaa \equiv a \cdot 111111 \equiv 0 \pmod 7$$

olduğundan (1) denkliğinin sağlanması yeterlidir. Eğer bu rakamlar $3, 4, 5, 6, 7$ sayılarından birine denkse bu sayıya eşit olmalıdırlar. Buradan 333333, 444444, 555555, 666666, 777777 sayılarını elde ederiz. Eğer $1, 2, 8, 9$ sayılarından birine denkse her rakam 2 değerden birini alabilir Eğer 1'e denklerse 1 veya 8'e eşit olabilir, eğer 2'e denklerse 2 veya 9'a eşit olabilir. Dolayısıyla a, b, c, d, e, f rakamlarının her biri 2 değer alabilir $2^6 + 2^6 = 2^7 = 128$ tane sayı vardır. 5 adet sayıyı da eklersek 133 tane sayı bulunur.

5 $ABCD$ konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası M olmak üzere, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$. O_1, O_2, O_3, O_4 noktaları sırasıyla, ABM, BCM, CDM, DAM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleriyse, $\text{Alan}(ABCD)/\text{Alan}(O_1O_2O_3O_4)$ nedir?

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

BM, CM, DM, AM doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla M_1, M_2, M_3, M_4 olsun.

O_1 ve O_2, BM doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir, yani O_1, O_2 ve M_1 doğrusaldır.

Benzer şekilde O_2O_3 doğrusu CM nin orta dikmesi, O_3O_4 doğrusu MD nin orta dikmesi, O_4O_1 doğrusu AM nin orta dikmesidir.

$O_1O_2 \perp BM$ ve $O_3O_4 \perp DM$ olduğu için $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Benzer şekilde $O_2O_3 \parallel O_1O_4$ olacağı için $O_1O_2O_3O_4$ bir paralelkenardır. $O_1M_1MM_4$ dörtgeninde iç açılar toplamı 360° olacağı için $\angle O_2O_1O_4 = 180^\circ - \angle BMA = 120^\circ$ ve paralellikten $O_1O_4O_3 = 60^\circ$ dir.

M_1M_3, $O_1O_2O_3O_4$ paralelkenarında O_1O_2 ye ait yüksekliktir. $\dfrac{BD}{2} = M_1M_3 = O_1O_4 \cdot \sin 60^\circ$.

Benzer şekilde $\dfrac{AC}{2} = M_2M_4 = O_3O_4 \cdot \sin 60^\circ$.

$$\frac{[ABCD]}{[O_1O_2O_3O_3]} = \frac{\dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ}{2}}{O_1O_4 \cdot O_3O_4 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{AC \cdot BD}{2 \cdot O_1O_4 \cdot O_3O_4} = \frac{2 \cdot O_3O_4 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 \cdot O_1O_4 \cdot \sin 60^\circ}{2 \cdot O_1O_4 \cdot O_3O_4} = 2\sin^2 60^\circ = \frac{3}{2}$$

$\boxed{6}$ Aşağıdaki sayılardan hangisi $3^{3n+1}+5^{3n+2}+7^{3n+3}$ sayısını her n pozitif tam sayısı için böler?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 11 **e)** 53

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

3 asalı için

$$3^{3n+1}+5^{3n+2}+7^{3n+3} \equiv (-1)^{3n+2}+1 \pmod 3$$

olduğundan eğer n çiftse 2 kalanı verecektir. 3 istenileni sağlamaz.

5 asalı için $3^{3n+1}+5^{3n+2}+7^{3n+3} \equiv (-2)^{3n+1}+2^{3n+3} \pmod 5$ olacaktır. Ancak $n=2$ için bu ifade 0 kalanı vermeyecektir. İstenilen sağlanmaz.

11 asalı için $n=10$ yazarsak küçük Fermat teoreminden

$$3^{31}+5^{32}+7^{33} \equiv 3+5^2+7^3 \equiv 371 \equiv 8 \pmod{11}$$

olacağından istenilen sağlanmaz.

53 asalı için $n=1$ yazarsak

$$3^4+5^5+7^6 \equiv 81+3125+(343)^2 \equiv 26+25^2 \equiv 651 \equiv 15 \pmod{53}$$

olacağından istenilen sağlanmaz.

7 asalı için

$$3^{3n+1}+5^{3n+2}+7^{3n+3} \equiv 3\cdot 27^n+25\cdot 125^n \equiv 3\cdot(-1)^n+25\cdot(-1)^n \equiv 28 \equiv (-1)^n \equiv 0 \pmod 7$$

bulunur. Dolayısıyla verilen ifade her n için 7 ile bölünebilir.

Not: $n=1$ ve $n=2$ yazarak sadece 7'nin ortak bölen olduğu görülebilir ama biraz işlemlerle uğraşmak gerekecektir.

$\boxed{7}$ x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $\sin x\cos y+\sin y\cos z+\sin z\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** 2 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Her a,b gerçel sayısı için doğru olan $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ eşitsizliğinden

$$\sin x\cos y+\sin y\cos z+\sin z\cos x \le \frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y+\cos^2 z+\sin^2 z+\cos^2 x)=\frac{1}{2}(1+1+1)=\frac{3}{2}$$

bulunur. Eşitlik durumu $x=y=z=45^\circ$ iken elde edilebilir.

$\boxed{8}$ $xyz=10^6$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y,z) doğal sayı üçlüsü vardır?

a) 568 **b)** 784 **c)** 812 **d)** 816 **e)** 824

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$x = 2^a \cdot 5^d$, $y = 2^b \cdot 5^e$, $z = 2^c \cdot 5^f$ olsun.

$x \cdot y \cdot z = 10^6 = 2^{a+b+c} \cdot 5^{d+e+f}$

$a + b + c = 6$, $d + e + f = 6$,

a, b, c üçlülerinin sayısı $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ tanedir.

d, e, f üçlülerinin de sayısı $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ tanedir.

Sağlayan $28 \cdot 28 = 784$ tane doğal sayı üçlüsü vardır.

9 Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan ABC üçgeninin, A ve C köşelerinden ve diklik merkezinden geçen çemberin merkezi, üçgenin çevrel çemberi üzerinde yer alıyorsa, $|AC|$ nedir?

a) 2 **b)** 3 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

ABC üçgeninin çevrel merkezi O, diklik merkezi H olsun. ACH üçgeninin çevrel merkezi K olsun.

$\angle ABC = \beta$ dersek $\angle AHC = 180^\circ - \beta$, $\angle AOC = 2\beta$ ve $\angle AKC = 180^\circ - \beta$ olacaktır.

$2\angle AHC + \angle AKC = 360^\circ$ olacağı için $360^\circ - 2\beta + 180 - \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$ dir.

Bu durumda AOC ikizkenar üçgeni bir $30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ üçgeni olacağından $AC = AO \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ tür.

10 Aşağıdaki sayılardan hangisi $n^{2225} - n^{2005}$ sayısını n nin bütün tam sayı değerleri için bölmez?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 11 **e)** 23

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle $n \equiv 0 \pmod{p}$ ise ifade kesin olarak p ile bölünecektir. Dolayısıyla $(n, p) = 1$ olarak incelememiz yeterlidir. Bu koşul altında küçük Fermat teoreminden $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$'dir.

$p = 3$ ise
$$n^{2225} - n^{2005} \equiv n \cdot (n^2)^{1112} - n \cdot (n^2)^{1002} \equiv 0 \pmod{3}$$

$p = 5$ ise
$$n^{2225} - n^{2005} \equiv n \cdot (n^4)^{556} - n \cdot (n^4)^{501} \equiv 0 \pmod{5}$$

$p = 11$ ise
$$n^{2225} - n^{2005} \equiv n^5 \cdot (n^{10})^{222} - n^5 \cdot (n^{10})^{200} \equiv 0 \pmod{11}$$

$p = 23$ ise
$$n^{2225} - n^{2005} \equiv n^3 \cdot (n^{22})^{101} - n^3 \cdot (n^{22})^{91} \equiv 0 \pmod{23}$$

Bu bulduklarımızla cevabın 7 olduğu ortaya çıkar ama aksi örnek bulalım.

$$n^{2225} - n^{2005} \equiv n^5 \cdot (n^6)^{370} - n \cdot (n^6)^{334} \equiv n^5 - n \pmod{7}$$

olacaktır ama $2^5 - 2 \equiv 30 \equiv 2 \pmod{7}$ olduğundan bu ifade $n = 2$ için 7 ile bölünemez.

11 $x^2+y^2+2x-6y=6$ eşitliğini sağlayan (x,y) gerçel sayı ikilileri için, $(x-1)^2+(y-2)^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) 2 **b)** 9 **c)** 16 **d)** 23 **e)** 30

Çözüm:

$x^2+y^2+2x-6y=(x+1)^2+(y-3)^2-10=6 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=16=4^2$ Olur. Yani $A(x,y)$ noktasının $(-1,3)$ noktasına uzaklığı 4 birimdir. O zaman $(x-1)^2+(y-2)^2$ ifadesi de bu noktanın $(1,2)$ noktasına olan uzaklığının karesidir. A noktalarının geometrik yeri $(-1,3)$ merkezli ve 4 birim yarıçaplı çemberdir.$(1,2)$ noktası çemberin içindedir. Dolayısıyla bu uzaklığın en küçük değeri için A noktası $(-1,3)$ ve $(1,2)$'den geçen doğrunun üzerinde olmalıdır. Yarıçap 4 olduğundan A ile $(1,2)$ arasındaki uzaklık $4-\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2}=4-\sqrt{5}$ olur. Öyleyse soruda istenen değerler $(4-\sqrt{5})^2$'den büyük veya eşit olmalıdır. 2 bu koşulu sağlamaz. Cevap A

12 Ördek avına çıkan Ali ile Veli'den her ikisinin de, üstüne ateş ettiği ördeği vurma olasılığı $1/2$ dir. Av sırasında Ali toplam 12, Veli de toplam 13 ördeğe ateş ederse, Veli'nin Ali'den çok ördek vurma olasılığı nedir?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{13}{25}$ **c)** $\frac{13}{24}$ **d)** $\frac{7}{13}$ **e)** $\frac{3}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

İlk 12 atış sonrası eşit sayıda ördek vurmuş olmaları olasılığı p, Ali'nin daha çok vurmuş olma olasılığı $\frac{1-p}{2}$, Veli'nin daha çok vurmuş olma olasılığı $\frac{1-p}{2}$ olacaktır.

13. atış sonrası Veli'nin daha çok ördek vurması için

- ya 12. atış sonrası Veli'nin daha çok ördek vurmuş olması $\left(\frac{1-p}{2}\right)$,
- ya da 12. atış sonrası Ali ile Veli'nin eş sayıda ördek vurmuş olmaları ve Veli'nin 13. atışta ördeği vurması $\left(p\cdot\frac{1}{2}\right)$

gerekmekte. O halde aradığımız yanıt $\frac{1-p}{2}+p\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ dir.

13 $AD \parallel BC$ olmak üzere $ABCD$ ikizkenar yamuğunun köşegen uzunluğu $\sqrt{3}$ ve taban açısı 60° olsun. Bu yamukla aynı düzlemde bulunan bir P noktası, $|PA|=1$ ve $|PD|=3$ koşullarını sağlıyorsa, $|PC|$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) $\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$ **e)** $\sqrt{7}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Soruda AD nin mi BC nin mi taban olduğu verilmemiş. İki durumu da çizerek aşağıdaki eşitsizlikleri uygulayalım.

P,A,D noktaları için üçgen eşitsizliğinden $PD-PA\le|AD|\le PA+AD \Rightarrow 2\le AD\le 4$.

ABD üçgeninde Sinüs Teoreminden $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$, dolayısıyla $AD=2\cdot\sin\angle ABD\le 2$ elde edilir.

İki eşitsizliği birleştirirsek $AD = 2$ çıkar.

Birinci eşitlik için eşitlik durumu P, A, D doğrusal ve $A \in [PD]$ iken sağlanır.

İkinci eşitlik için eşitlik durumu $\angle ABD = 90^\circ$ iken sağlanır.

$\angle ABD = 90^\circ$ ise $\angle BAD = 120^\circ$ olmayacağı için $AD > BC$ dir, yani AD tabandır.

$\triangle ABD$ de $AB = 1$ elde edilir. Ayrıca ikizkenar yamukta $DC = AB = 1$ dir.

$\triangle PDC$ de Kosinüs teoremi uygulayarak $PC^2 = PD^2+DC^2-2\cdot PD\cdot DC\cdot \cos\angle CDP = 3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2} = 7$ ve $PC = \sqrt{7}$ elde edilir.

14 $10^3 < n < 10^6$ koşulunu sağlayan bir n tam sayısına, son üç basamağındaki rakamların toplamı, daha önceki basamaklarındakı rakamların toplamına eşitse, *dengeli sayı* diyoruz. Tüm dengeli sayıların toplamı 13 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) 0 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 11 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$x, y, z, a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ve $k = 1, 2, \dots, 27$ olmak üzere; dengeli sayılar $x+y+z = a+b+c = k$ eşitliğini sağlar.

$a + b + c = k$ olacak şekilde yazılabilecek üç basamaklı abc sayılarının sayısı n_k, toplamı p_k olsun.

$xyz000$ sayılarının sayısı da n_k, toplamı $1000 \cdot p_k$ olacaktır.

Bu durumda her k için dengeli sayıların toplamı $S_k = 1001 \cdot p_k = 13 \cdot 77 \cdot p_k$ olacaktır.

Tüm dengeli sayıların toplamı $S = \sum_{k=1}^{27} S_k = 1001 \sum_{k=1}^{27} p_k$, 13 ile tam bölünecektir.

15 a nın kaç pozitif gerçel değeri için, $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ denkleminin farklı iki tam sayı kökü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Eğer polinomun iki tam sayı köküne m ve n dersek

$$a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = a^2(x-n)(x-m) = a^2x^2 - a^2(m+n)x + a^2mn$$

olur. Yani

$$m + n = -\frac{1}{a}$$
$$mn = \frac{1}{a^2} - 7$$

olacaktır. $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}^+$ olacağından $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $a = \frac{1}{k}$ olacak şekilde bir k vardır. Denklemde yazarsak

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{x}{k} + 1 - \frac{7}{k^2} = 0 \implies x^2 + kx + (k^2-7) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin iki farklı tamsayı kökü olması için $\Delta > 0$ ve tamkare olmalıdır.

$$\Delta = k^2 - 4(k^2-7) = 28 - 3k^2$$

olduğundan $28 > 3k^2$ ve $3 \geq k$ bulunur. $k = 1, 2, 3$ için denersek üçü için de istenilen şartlar sağlanır. Dolayısıyla sadece $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ olabilir.

16 Toplam ağırlığı 500 kg olan 100 taştan her birinin ağırlığı 1 kg, 10 kg veya 50 kg dır. Ağırlığı 10 kg olan taşların sayısının alabileceği kaç değer vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

1 kg olan taşlar x tane,

10 kg olan taşlar y tane,

50 kg olan taşlar z tane olsun.

$x + 10y + 50z = 500$, $x + y + z = 100$'dir ve x'in 10'un katı olduğu görülür. x yerine $10k$ yazalım.

$10k + 10y + 50z = 500$ ve $2k + 2y + 10z = 100$

$x + y + z = 100$ denkleminde x yerine $10k$ yazalım. $10k + y + z = 100$, $y + z = 100 - 10k$

$2k + 2y + 10z = 2k + 2(y + z) + 8z \Rightarrow 100 + 8z = 18k$ $1 \leq z < 10$ ve $18|100 + 8z$ olduğundan z sadece 1 olabilir.

$z = 1$

$\Rightarrow k = 6$

$\Rightarrow x = 60$

$\Rightarrow y = 39$'dır ve tek değer vardır.

17 Bir ABC üçgeninin $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üzerinde, dışa doğru, sırasıyla $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$ kareleri, $[NQ]$ ve $[KP]$ doğru parçaları üzerinde de $NQZT$ ve $KPYX$ kareleri çiziliyor. Alan$(ABMN) -$ Alan$(BCKL) = 1$ ise, Alan$(NQZT) -$ Alan$(KPYX)$ kaçtır?

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{3}$ **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$BC = a, AC = b, AB = c$, $\angle BAC = \alpha$ ve $\angle ACB = \theta$ olsun.

$\angle NAQ = 180° - \alpha$ ve $\angle KCP = 180° - \theta$ olacaktır.

$\triangle ABC$ de a ve c kenarı için Kosinüs Teoremi uygulayalım.

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 \tag{2}$$

(2) den (1) i çıkarırsak

$$2bc\cos\alpha - 2ab\cos\theta = 2c^2 - 2a^2 \tag{3}$$

elde ederiz.

$\triangle NAQ$ de NQ için Kosinüs Teoreminden

$$NQ^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \tag{4}$$

$\triangle KCP$ de KP için Kosinüs Teoreminden

$$KP^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \tag{5}$$

(4) ten (5) i çıkarırsak

$$NQ^2 - KP^2 = c^2 - a^2 + 2bc\cos\alpha - 2ab\cos\theta \tag{6}$$

elde ederiz. (3) teki eşitliği (6) da yerine yazarsak

$$\text{Alan}(NQZT) - \text{Alan}(KPYX) = NQ^2 - KP^2 = 3(c^2 - a^2) = 3 \tag{7}$$

elde edilir.

18 $x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{121}$ ve $0 \le x < 121$ koşullarını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Eğer verilen polinom 121'e bölünüyorsa 11'e de bölünür. Yani $x^5+5x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{11}$ olacaktır. $x \equiv 0 \pmod{11}$ olamayacağı görülebilir. Dolayısıyla

$$x^{10} \equiv (x^5)^2 \equiv 1 \pmod{11} \implies x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

olacaktır.

Eğer $x^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ise

$$x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 5x^2 + x = x(5x+1) \equiv 0 \pmod{11} \implies 5x + 1 \equiv 0 \pmod{11} \implies x \equiv 2 \pmod{11}$$

olur ve $x^5 \equiv -1 \pmod{11}$ sağlanır. 121 modunda $x = 11k + 2$ yazarsak

$$x^5 \equiv (11k+2)^5 \equiv \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{k} (11k)^i \cdot 2^{5-i} \equiv 32 + 16 \cdot 55k \equiv 32 + 880k \equiv 33k + 32 \pmod{121}$$

olduğunu kullanırsak

$$x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 33k + 32 + 5(11k+2)^2 + (11k+2) + 1 \equiv 264k + 55 \equiv 22k + 55 \equiv 0 \pmod{121}$$

$$\implies 2k + 5 \equiv 0 \pmod{11} \implies k \equiv 3 \pmod{11}$$

Eğer $k = 11n+3$ yazarsak $x = 11(11n+3)+2 = 121n+35$ olur. $0 \le x < 121$ olduğundan $\boxed{x = 35}$ olmalıdır.

$x^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ise

$$x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 5x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

denersek $x \equiv -3$ istenileni sağlar. Denklem ikinci dereceden olduğundan en fazla iki tane kök olabilir. İkinci kökü bulmak için Vieta teoremini kullanabiliriz. Diğer kök t olsun. Başkatsayıyı 1 yapmak için 9 ile çarpalım.

$$9(5x^2 + x + 2) \equiv 45x^2 + 9x + 18 \equiv x^2 + 9x + 7 \equiv 0 \pmod{11}$$

ve Vieta teoreminden

$$-3 + t \equiv -9 \pmod{11} \implies t \equiv 5 \pmod{11}$$

bulunur. Denersek denkliği sağladığını görebiliriz. Ancak $x \equiv -3 \pmod{11}$ için $x^5 \equiv 1$ sağlanmamaktadır. Dolayısıyla $x \equiv 5 \pmod{11}$ olmalıdır. Eğer $x = 11k + 5$ yazarsak

$$x^5 \equiv (11k+5)^5 \equiv \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{k} (11k)^i \cdot 5^{5-i} \equiv 5^5 + 5^5(11k) \equiv 100 + 11k \pmod{121}$$

olur ve

$$x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv (11k + 100) + 5(11k+5)^2 + (11k+5) + 1 \equiv 572k + 231 \equiv 88k - 11 \equiv 0 \pmod{121}$$

$$\implies 8k \equiv 1 \pmod{11} \implies k \equiv 7 \pmod{11}$$

olur. Dolayısıyla $k = 11n + 7$ yazabiliriz. Yerine yazarsak $x = 11(11n+7) + 5 = 121n + 82$ olur ve $\boxed{x = 82}$ bulunur.

Toplamda 2 çözüm vardır.

Not: x'in 11 modundaki değerlerini bulduktan sonra 121 moduna yükseltme işleminde birer çözüm çıkacağını görmek için yukarıdaki tüm adımları yapmaya gerek yoktur.

19 $x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3} = 0$ denkleminin en büyük gerçel kökü nedir?

a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Öncelikle $x \neq 0$ olduğunu görelim ve $x = \dfrac{1}{t}$ yazalım. Denklem

$$\frac{3 - 3t - 3t^2 - t^3}{3t^3} = 0 \implies t^3 + 3t^2 + 3t - 3 = 0$$

halini alır. Her tarafa 4 eklersek

$$(t+1)^3 = 4 \implies t + 1 = \sqrt[3]{4} \implies t = \sqrt[3]{4} - 1$$

bulunur. Dolayısıyla $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ olacaktır. Tek gerçel kök bu olduğundan en büyük kök de budur.

20 12345 sayısı ile başlayıp, her adımda iki değişik basamaktaki rakamların yerlerini değiştiriyoruz. Aşağıdaki sayılardan hangisi çift sayıda adımda elde edilemez?

a) 13425 **b)** 21435 **c)** 35142 **d)** 43125 **e)** 53124

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Genelde permütasyon fonksiyonu olarak tanımlanan birebir örten $\sigma : G \to G$ fonksiyonu G'deki elemanların yerlerini değiştirir. Mesela $G = \{1, 2, 3\}$ için $\sigma = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ fonksiyonu 123 sayılarını 312 olarak dizmiştir. Aslında permütasyon fonksiyonları üzerinden grup teorisinde çok kullanılan permütasyon grupları tanımlanabilir (Permutation Group). Bu grup oluşturma yeteneğinin bir getirisi olarak da permütasyon fonksiyonlarının işaretlerinden bahsedebiliyoruz (signature). Eğer yapılan "hamle" sayısı çiftse işaret $+$, tek ise $-$ olarak düşünebiliriz. Buradan da aslında bir diziyi aynı anda tek ve çift sayıda hamle kullanarak elde edemeyeceğimizi anlıyoruz. Sonuç olarak,

$$1(2)(3)45 \to 13(2)(4)5 \to 13425$$

çift sayıda hamleyle elde edilir.

$$(1)(2)345 \to 21(3)(4)5 \to 21435$$

çift sayıda hamle ile elde edilir.

$$(1)2(3)45 \to 3(2)14(5) \to 35142$$

çift sayıda hamle ile elde edilebilir.

$$(1)234(5) \to 5(2)(3)41 \to 53(2)4(1) \to 531(4)(2) \to 53124$$

çift sayıda hamle ile elde edilebilir.

$$(1)23(4)5 \to 4(2)(3)15 \to 43(2)(1)5 \to 43125$$

tek sayıda hamle ile elde edilir. Cevap $\boxed{43125}$ olmalıdır.

Test mantığıyla sadece denemeleri yapmak yetecektir.

21 Kenar uzunluğu 1 olan $ABCD$ karesinin merkezinden, A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{3}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Karenin merkezine O, $[BC]$'nin orta noktasına E diyelim. Yarıçapı istenilen çember, AOE'nin çevrel çemberidir. $m(\widehat{AOE}) = 135°$ olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca ABE üçgeninde Pisagor teoremi uygularsak $|AE| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur. Sinüs teoreminden, istenilen yarıçapa r dersek,

$$\frac{|AE|}{\sin(\widehat{AOE})} = 2r \implies r = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

bulunur.

22 k sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^2 - y^2 = k$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 2005 **b)** 2006 **c)** 2007 **d)** 2008 **e)** 2009

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y) = k$ Yani çarpanları toplamı çift olmalı. $(x - y + x + y = 2x)$ dir. $2005 = 2005 \cdot 1$ ve $2005 + 1 = 2006$ dir. Benzer şekilde seçeneklerdeki tek sayılar k olabilir. $2008 = 1004 \cdot 2$ ve $1004 + 2 = 1006$ olduğundan $k = 2008$ çift sayısı için de çözüm vardır. Geriye kalan tek seçenek B dir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

Modülo 4 te inceleme yapılırsa her x tamsayısı için $x \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ olup $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ tür. $x^2 - y^2 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$ elde edilir. Asla $x^2 - y^2 \equiv 2 \pmod 4$ olamaz.

23

$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2} = \frac{y-2}{xy-4}$$

denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$b + d \neq 0$ için $k = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ise $k = \dfrac{a+c}{b+d}$ olduğunu kullanalım (kesir sayısı istenildiği kadar arttırılabilir). $(xy-3) + (7-x^2-y^2) + (xy-4) = 2xy - x^2 - y^2 = -(x-y)^2 \neq 0$ ise bu oran

$$\frac{(x-1) + (3-x-y) + (y-2)}{(xy-3) + (7-x^2-y^2) + (xy-4)} = 0$$

sonucuna eşit olur. Yani $x-1=3-x-y=y-2=0$ olacaktır. $\boxed{(x,y)=(1,2)}$ elde edilir ve yerine koyarsa eşitlik sağlanır.

Eğer $-(x-y)^2=0$ ise $x=y$ olacaktır. Yerine yazarsak

$$\frac{x-1}{x^2-3}=\frac{3-2x}{7-2x^2}=\frac{x-2}{x^2-4}$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü kesiri eşitleyip içler dışlar çarpımı yapalım

$$(x-1)(x^2-4)=(x-2)(x^2-3) \implies x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$$

olur. $x=y=2$ için üçüncü kesir tanımsız olur. $\boxed{(x,y)=(-1,-1)}$ ise eşitlikleri sağlar. Toplamda 2 çözüm vardır.

24 20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir altkümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu altkümeye bir komite diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

a) 120 **b)** 380 **c)** 570 **d)** 1020 **e)** 1140

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

20 kişinin içinden İngilizce bilen 10 kişiyi ayırırsak kalan 10 kişi içinde hiç İngilizce bilen kalmadığı için bunlar arasından seçilen üçer kişilik gruplar komite oluşturamaz. Tüm 3 kişilik grupların sayısı $\binom{20}{3}$ olduğundan en fazla $\binom{20}{3}-\binom{10}{3}=1140-120=1020$ farklı komite oluşabilir.

Şimdi komite sayısının 1020 olduğu bir örnek bulalım: İngilizce, Almanca, Fransızca bilenler aynı 10 kişi olsun. Diğer 10 kişi bu üç dili de bilmiyorsa, komite oluşması için dil bilenlerin kümesinden en az 1 kişi seçilmelidir. Bu ise $\binom{20}{3}-\binom{10}{3}=1020$ dir.

25 Bir $ABCD$ dikdörtgeninde, E, F, G noktaları, sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BF|=|FG|$, $m(\widehat{FGE})=90^\circ$, $|BC|=4\sqrt{3}/5$ ve $|EF|=\sqrt{5}$ koşulları sağlanıyorsa, $|BF|$ kaçtır?

a) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sqrt{3}-1$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}$ **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$BF=FG=x$ olsun. $BE=EG=\sqrt{5-x^2}$ ve $FC=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}-x$ olacaktır.

$\angle FEB=\alpha$ dersek, $\angle GEF=\alpha$ ve $\angle GFC=2\alpha$ olacaktır.

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ eşitliğini yazarsak $\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{5}-x}{x}=1-2\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2$ elde ederiz. Biraz düzenlemeyle $x^3-5x+2\sqrt{3}=0$ denklemi elde edilir.

$x=\sqrt{3}$ bu denklemin bir köküdür.

$x^3-5x+2\sqrt{3}=(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}\cdot x-2)$ olacağı için diğer kökler $x_{2,3}=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2}$ dir.

$BF < BC$ olması gerektiğinden $\sqrt{3} > \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ olduğu için $x_1 = \sqrt{3}$ bir çözüm olarak gelmez.

Geriye pozitif tek bir kök kalıyor. $x_2 = \dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{4\sqrt{3}}{5} > \dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 8\sqrt{3} > 5\sqrt{11} - 5\sqrt{3} \Rightarrow 13\sqrt{3} > 5\sqrt{11} \Rightarrow 169 \cdot 3 > 25 \cdot 11$ doğru olduğu için tek çözüm $x = \dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}$ dir.

26 Her n pozitif tam sayısı için, $f(2n+1) = 2f(2n)$, $f(2n) = f(2n-1)+1$ ve $f(1) = 0$ ise, $f(2005)$ sayısının 5 e bölümünde elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Tek sayılar arasında bir örüntü yakalamaya çalışalım.

$$f(2n+1) = 2f(2n) = 2f(2n-1) + 2$$

olduğundan $f(2n-1) = a_n$ ve $f(1) = a_1 = 0$ indirgemeli dizisini tanımlayabiliriz.

$$a_{n+1} = 2a_n + 2$$

olacaktır. 2'yi yok etmek için

$$a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1} \implies a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$$

kuralını kullanalım. Bu dizinin karakteristik denklemi $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ olacağından dizinin elemanları

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B2^n$$

formatındadır. $a_2 = 2$ olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için

$$A + 2B = 0$$

$$A + 4B = 2$$

denklemleri elde edilir. Çözülürse $B = 1$, $A = -2$ bulunur. Yani $a_n = 2^n - 2$ formatındadır.

$$f(2005) = a_{1003} = 2^{1003} - 2$$

bulunur. $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan

$$2^{1003} - 2 \equiv 2^3 - 2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$$

bulunur.

27 a, b, c hepsi birden sıfır olmayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ bx^2 + cx + a &= 0 \\ cx^2 + ax + b &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin en büyük gerçel kökü ile en küçük gerçel kökü arasındaki fark en çok kaç olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** Üst sınır yoktur

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Tüm denklemleri toplarsak $(a+b+c)(x^2+x+1)=0$ elde edilir. $x^2+x+1=0$ denkleminin gerçel kökü olmadığından $a+b+c=0$'dır. Dolayısıyla $x=1$ verilen sistemin bir çözümüdür. Eğer a,b,c'den biri sıfırsa denklemlerden biri linear olacağından sistemin tek çözümü $x=1$ olur. $a,b,c\neq 0$ için başka bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu çözüm $t\neq 1$ olsun. O halde polinomlar

$$a(x-1)(x-t)=0$$

$$b(x-1)(x-t)=0$$

$$c(x-1)(x-t)=0$$

olarak yazılabilir. Sabit terimleri verilen sistemdekilere eşitlersek

$$at=c$$

$$bt=a$$

$$ct=b$$

bulunur. Bunları taraf tarafa çarparsak da $abct^3=abc$ elde edilir. $abc\neq 0$ olduğundan $t=1$ olacaktır ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla sistemin $x=1$ dışında çözümü yoktur. En büyük ve en küçük kök kendisi olacağından farkları 0'dır.

$\boxed{28}$ a,b,c; 1 den büyük tam sayılar olmak üzere, $a!=b!c!$ denkleminin kaç çözümü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 6 **d)** 8 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Eğer $n\geq 3$ için $a=n!$, $b=n$, $c=n!-1$ seçersek eşitlik sağlanır ve $a,b,c>1$ olur. Dolayısıyla sonsuz çözüm vardır.

$\boxed{29}$ Bir üçgenin, uzunlukları 5 ve $2\sqrt{6}$ olan kenarlarına ait yüksekliklerin uzunlukları sırasıyla h_1 ve h_2 olmak üzere, $5+h_1\leq 2\sqrt{6}+h_2$ ise, bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu kaçtır?

a) 5 **b)** 7 **c)** $2\sqrt{6}$ **d)** $3\sqrt{6}$ **e)** $5\sqrt{3}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Üçgenin alanı $S=\dfrac{5h_1}{2}=\dfrac{2h_2\sqrt{6}}{2}$ olduğundan $h_1=\dfrac{2S}{5}$ ve $h_2=\dfrac{2S}{2\sqrt{6}}$ olacaktır. Eşitsizlikte yerine yazarsak

$$5+\frac{2S}{5}\leq 2\sqrt{6}+\frac{2S}{2\sqrt{6}} \implies 2\sqrt{6}(25+2S)\leq 5(24+2S) \implies 50\sqrt{6}-120\leq S(10-4\sqrt{6}) \implies S\geq 5\sqrt{6}$$

Bir kenara ait yükseklik diğer kenarlardan her zaman küçük veya eşit olacağından $h_1\leq 2\sqrt{6}$'dır ve

$$h_1=\frac{2S}{5}\leq 2\sqrt{6} \implies S\leq 5\sqrt{6}$$

bulunur. Yani eşitlik durumu olmalıdır. Buradan $h_1=2\sqrt{6}$ bulunur. Başka bir deyişle üçgen dik üçgendir ve verilen iki kenar birbirine diktir. Pisagor teoreminden üçüncü kenar $\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=7$ olarak bulunur.

30 Bir n tam sayısı için, n^2+1 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$n=2$ için $n^2+1=5$ olur ve pozitif 2 böleni vardır.

$n=3$ için $n^2+1=10$ olur ve pozitif 4 böleni vardır.

$n=7$ için $n^2+1=50$ olur ve pozitif 6 böleni vardır.

$n=13$ için $n^2+1=170=2\cdot 5\cdot 7$ olur ve pozitif 8 böleni vardır.

Dolayısıyla cevap "Hiçbiri"dir.

31 a,b,c,d gerçel sayılar ve $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= 0 \\ f(x)-(g(x))^3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin birden çok gerçel kökü varsa, $f(x)g(x)=0$ denkleminin en çok kaç farklı gerçel kökü olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen eşitlikleri birbirinden çıkartalım.

$$(g(x))^3+g(x)=g(x)\left((g(x))^2+1\right)=0$$

denkleminin de birden fazla çözümü olmalıdır. $(g(x))^2+1\neq 0$ olduğundan verilen denklem sisteminin çözümleri $g(x)=0$'ın da çözümleridir. g, ikinci dereceden bir polinom olduğundan en fazla 2 kökü vardır. Denklem sisteminin kökleri aynı zamanda g'nin de kökleri olduğundan sistemin de tam olarak iki kökü vardır. İlk denklemden bu iki kökün aynı zamanda f'in de kökleri olduğunu anlarız. Buradan f ve g'nin ikişer kökleri olduğunu ve aynı polinom olduklarını anlarız. Dolayısıyla $f(x)g(x)=(g(x))^2=0$ denkleminin de 2 tane kökü vardır.

32 Ali, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan birini seçip, bu taşı Betül'ün göremeyeceği biçimde işaretliyor ve taşları karıştırıyor. Betül, her hamlede mevcut taşları hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyor. Ali, işaretlediği taşı içermeyen iki öbekten, varsa daha çok taştan oluşanını, her ikisi de aynı sayıda taştan oluşuyorsa, herhangi birini oyundan çıkartıyor ve geri kalan taşları yeniden karıştırıyor. Sıra tekrar Betül'e geliyor ve oyun iki taş kalana kadar bu şekilde sürüyor. İki taş kalınca, Ali, Betül'e hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. Betül, işaretli taşı en az kaç hamlede bulmayı garantileyebilir?

a) 11 **b)** 13 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 19

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Betül'ün herhangi bir hamlesinden önce taş sayısı $n=2k$ gibi bir çift sayı ise Betül en fazla $k-1$ tane taşın oyundan çıkarılmasını garantileyebilir. Gerçekten daha fazla sayıda taşın oyundan çıkması için Betül'ün en az k taş içeren bir öbek ayırması gerekir, fakat işaretli taş bu öbekte ise, diğer öbeklerin her birinde en fazla $k-1$ taş olduğundan oyundan çıkarılan taş sayısı da en fazla $k-1$ olacak. Benzer şekilde $n=2k+1$ ise

Betül en fazla k taşın çıkarılmasını garantileyebilir. O halde Betül aşağıdaki stratejiyi uygularsa en az hamle sayısına ulaşır: Taş sayısı $2k+1$ ise bunları $k, k, 1$ taş içeren üç öbeğe, taş sayısı $2k$ ise $k, k-1, 1$ taş içeren üç öbeğe ayırır. Birinci durumda en az k, ikinci durumda da en az $k-1$ taş oyundan çıkarılacak. 2005 taş için en "kötü" durumda taş sayısı şöyle değişecek:

$2005 \to 1003 \to 502 \to 252 \to 127 \to 64 \to 33 \to 17 \to 9 \to 5 \to 3 \to 2.$

Böylece Betül en az 11 hamlede işaretli taşı bulmayı garantileyebilir.

Kaynak: Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe, 2006. Problem No: 6.46, Sayfa 203.

33 K, $ABCD$ kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası olmak üzere, $|AB| = |BC|$, $|BK| = b$ ve $|DK| = d$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\sqrt{d^2+bd}$ **b)** $\sqrt{b^2+bd}$ **c)** $\sqrt{2bd}$ **d)** $\sqrt{2(b^2+d^2-bd)}$ **e)** $\sqrt{bd}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle BAC = \angle BCA = \angle BDA$ olduğu için $\triangle BAK \sim \triangle BDA \quad (AA)$.

$BA/BD = BK/BA \Rightarrow BA^2 = BD \cdot BK = (b+d)b = b^2+bd \Rightarrow BA = \sqrt{b^2+bd}$.

34 $xyz = 510510$ ve $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Genelliği bozmadan $x \geq y \geq z$ olsun. O halde $x^2y = \dfrac{x^2yz}{z} = \dfrac{510510x}{z}$ olacaktır. Diğer terimler için de aynısını yazarsak

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$$

olacaktır. $\dfrac{x}{z} = a \geq 1$, $\dfrac{y}{x} = b \leq 1$ ve $\dfrac{z}{y} = c \leq 1$ dersek $abc = 1$ ve

$$m = a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = ab+ac+bc$$

olacaktır. Eğer

$$P(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+ac+bc)t - abc = t^3 - mt^2 + mt - 1$$

polinomu tanımlarsak a, b, c rasyonel sayıları bu polinomun kökü olacaktır. $P(1) = 0$ olduğundan $t = 1$ bu polinomun bir köküdür. Dolayısıyla a, b, c'den birisi 1 olmalıdır. Bu da x, y, z'den en az ikisinin eşit olduğu anlamına gelir.

$$510510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$

olduğundan 510510'un tek tamkare böleni 1'dir. Bu da eşit olan sayıların 1'e eşit olduğu anlamına gelir. 1'den daha küçük pozitif tamsayı olmadığından $(x, y, z) = (510510, 1, 1)$ olmalıdır. Bunun verilen ikinci eşitliği de sağladığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla permütasyonları ile birlikte 3 adet çözüm üçlüsü vardır.

35 a, b ve c, $a < b$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, her x gerçel sayısı için, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ise, $\dfrac{a+b+c}{b-a}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ **b)** 2 **c)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **d)** 3 **e)** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Eğer $a = 0$ ise her x için $bx + c \geq 0$ olmasının tek yolu bu doğrunun eğimsiz olmasıdır. Yani $b = 0$ olmalıdır fakat bu $a < b$ ile çelişir.

$a \neq 0$ ise

Eğer $ax^2 + bx + c$ polinomunun farklı kökleri varsa polinom, bu iki kök arasında ve aralığın dışında farklı işaretli değerler alacaktır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ olmalıdır. Ayrıca bu durumda polinom her zaman başkatsayının işaretiyle aynı işaretli değerler alacağından $b > a > 0$ olmalıdır. $c \geq \dfrac{b^2}{4a}$ yazarsak

$$\frac{a+b+c}{b-a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{(2a+b)^2}{4a(b-a)}$$

olacaktır. Eğer $b = a + k$ dersek, $a, k > 0$ için

$$\frac{(2a+b)^2}{4a(b-a)} = \frac{(3a+k)^2}{4ak} \geq_{AGO} \frac{(2\sqrt{3ak})^2}{4ak} = \boxed{3}$$

olacaktır. Eşitlik durumu $3a = k$ yani $b = 4a$ ve $b^2 = 4ac$ iken sağlanır yani $t > 0$ için $(a, b, c) = (t, 4t, 4t)$ eşitlik durumudur.

36 n güreşçinin katıldığı bir turnuvada, farklı herhangi iki güreşçi aralarında tam olarak bir kez güreşiyor. Her karşılaşma sonucunda kazanan 2, kaybeden 0 puan alıyor; beraberlik durumunda ise, her iki güreşçiye de 1er puan veriliyor. Turnuva sonucunda en çok toplam puana sahip olan güreşçi, turnuva boyunca en az galibiyet almış olan güreşçi ise, n en az kaç olabilir?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Her güreşçi toplamda $n-1$ maç yapmıştır. Toplamda $\dfrac{n(n-1)}{2}$ maç yapılmıştır ve her maçta tam olarak 2 puan dağıtıldığından herkesin puanlarının toplamı $n(n-1)$'dir. Eğer birinci olan güreşçi hiç maç kazanmadıysa en fazla $n-1$ puanı olacaktır. Diğer herkesin $n-1$'den az puanı olacağından toplamda $n(n-1)$ puana ulaşılamaz. Yani birinci kişi en az bir maç kazanmıştır. k defa kazansın ve m defa ise berabere kalsın. Toplam puanı $2k+m$ olacaktır. Diğer herkes en az $k+1$ maç kazandığından en az $2k+2$ puanı vardır, yani $m > 2$'dir. Ayrıca

$$n(n-1) \geq 2k + m + (n-1)(2k+2) > n(2k+2) \implies n - 1 > 2k + 2 \implies n \geq 2k + 4$$

olmalıdır. $k \geq 1$ olduğundan $n \geq 6$ olacaktır.

$n = 6$'ya örnek durum için güreşçilere A, B, C, D, E, F diyelim, A en çok puanı kazansın. Eşitlik durumu $k = 1$ için gerçekleştiğinden A'nın tam olarak 1 defa kazanması gerekir. Diğer herkes en az ikişer galibiyet almalıdır. Eğer 3 galibiyet olan varsa A'yı geçeceğinden, herkes 2 maç kazanmıştır. Genelliği bozmadan A'nın yendiği kişi B olsun, geri kalan maçları berabere bitsin. Bu durumda,

$A \to 1$ galibiyet (B), 4 beraberlik (C, D, E, F), toplamda 6 puan,

$B \to 3$ mağlubiyet (A, C, D), 2 galibiyet (E, F), toplamda 4 puan,

$C \to 2$ mağlubiyet (D, E), 2 galibiyet (B, F), 1 beraberlik (A), toplamda 5 puan,

$D \to 2$ mağlubiyet (E, F), 2 galibiyet (B, C), 1 beraberlik (A), toplamda 5 puan,

$E \to 2$ mağlubiyet (B, F), 2 galibiyet (C, E), 1 beraberlik (A), toplamda 5 puan,

$F \to 2$ mağlubiyet (B, C), 2 galibiyet (D, E), 1 beraberlik (A), toplamda 5 puan durumu istenilen sağlanır.

14. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2006

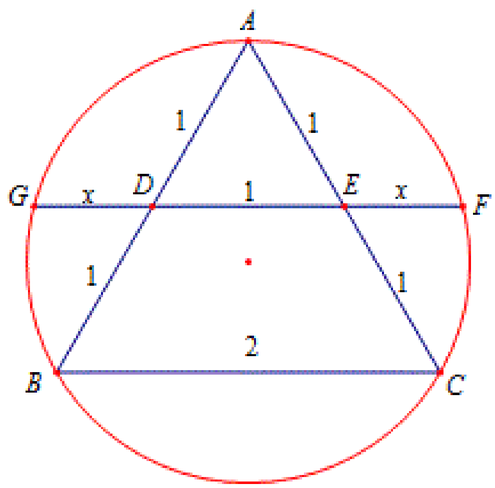
1 Bir ABC eşkenar üçgeninde $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E; $[DE$ ışınının çevrel çemberi kestiği nokta da F olmak üzere, $\dfrac{|DE|}{|DF|}$ nedir?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}(\sqrt{3}-1)$ **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

ABC eşkenar üçgeninin bir kenar uzunluğu 2 olsun. $DE \parallel BC$ olduğundan ADE üçgeni de eşkenardır. $|DE| = |AE| = |EC| = 1$ dir. DE doğrusunun çevrel çemberi kestiği ikinci nokta G olsun. $|EF| = |DG| = x$ diyelim. E noktasının çembere göre kuvvetinden $|EA| \cdot |EC| = |EF| \cdot |EG|$ olup $1 \cdot 1 = x \cdot (x+1)$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ bulunur. $|DF| = x+1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ve $\dfrac{|DE|}{|DF|} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir.



2 p ve p^2+2 asal sayılarsa, p^3+3 sayısının en çok kaç asal böleni olabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$p = 3$ asalı için $p^2+2 = 9+2 = 11$ asaldır. Bu durumda $p^3+3 = 27+3 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ şeklinde 3 farklı asal çarpan elde edilir.

$p \neq 3$ durumunda çözüm olmadığını gösterelim. Fermat teoreminden $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ olur. Bu halde $p^2+2 \equiv 1+2 \equiv 0 \pmod 3$ tür. Yani $3 | p^2+2$ olup p^2+2 sayısı bileşiktir.

3 $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ise, a_{2006} kaçtır?

a) -2 **b)** -1 **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Dizinin birkaç terimini hesaplayarak periyodik olduğunu gösterelim. $n \geq 1$ için $(a_n) = (-1, 2, -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1, 2, \dots)$ olup $a_7 = a_1$ ve $a_8 = a_2$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla (a_n) dizisi periyodik olup, periyot 6 dır. $2006 \equiv 2 \pmod 6$ olduğundan $a_{2006} = a_2 = 2$ elde edilir.

$\boxed{4}$ Kenar uzunlukları 1 olan 27 tane küpten her birinde, iki karşılıklı yüz birer nokta, başka iki karşılıklı yüz ikişer nokta, geri kalan iki karşılıklı yüz de üçer nokta ile işaretleniyor. Bu 27 küp ile $3 \times 3 \times 3$ boyutlarında bir küp oluşturursak, bu küpün yüzleri üstünde işaretlenmiş toplam nokta sayısı en az kaç olabilir?

a) 54 **b)** 60 **c)** 72 **d)** 90 **e)** 96

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Küpün 8 köşesi, 6yüzeyi, 12 ayrıtı vardır.

8 köşede $1, 2, 3$ tane noktanın her biri görülür. $8 \cdot (1+2+3) = 48$. 12 ayrıtın her birinin ortasındaki küplerde 1 ve 2 noktalı yüzeyler görülecek şekilde yerleştirebiliriz. $12 \cdot (1+2) = 36$. 6 yüzeyin her birinin merkezini oluşturan küpleri 1 noktalı yüzey görülecek biçimde yerleştirebiliriz. $6 \cdot 1 = 6$. Toplam $48 + 36 + 6 = 90$ bulunur.

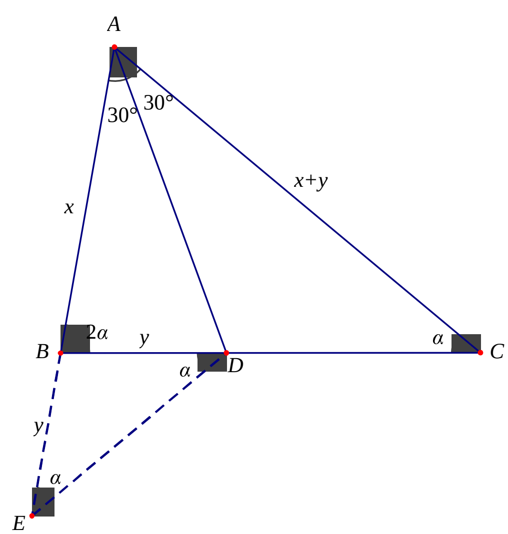
$\boxed{5}$ Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB|+|BD| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ olacak biçimde bir D noktası bulunuyorsa, $m(\widehat{ACB})$ nedir?

a) 30° **b)** 40° **c)** 45° **d)** 48° **e)** 50°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$|AB| = x, |BD| = y, |AC| = x + y$ ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ diyelim. $[AB$ ışını düzerinden $|AE| = |AC| = x + y$ olacak şekilde E noktası alalım. $|BE| = |BD| = y$ dir. Böylece $AEDC$ iç bükey deltoid olur. $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{AED}) = m(\widehat{BDE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$ olur. ABC üçgeninin iç açılar toplamından $\alpha = 40^\circ$ bulunur.



6 $3+3^2+3^{2^2}+3^{2^3}+\cdots+3^{2^{2006}}$ toplamı, 11 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 5 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Önce $n=1,2,3,\dots$ değerleri için 3^n ifadesinin mod 11 deki değerlerini inceleyelim. $3^n \equiv 3,9,5,4,1 \pmod{11}$ olduğundan 3^n nin periyodu 5 tir.

O halde $m=0,1,2,\dots$ için 2^m ifadesinin mod 5 deki değerlerini incelememiz gerekir. $2^m \equiv 1,2,4,3,1 \pmod{11}$ olduğundan 2^m nin periyodu 4 tür. Dolayısıyla bize verilen toplam mod 11 de, $3^{5k_1+1}+3^{5k_2+2}+3^{5k_3+4}+3^{5k_4+3}$ şeklinde 4 lü gruplar halinde tekrar eder. $3^{5k_1+1}+3^{5k_2+2}+3^{5k_3+4}+3^{5k_4+3} \equiv 3+9+4+5 \equiv 10 \pmod{11}$ Bu toplamda 2007 tane terim vardır ve $2007 = 501\cdot4+3$ olduğundan istenen değer $501\cdot10+3+9+4 \equiv 10 \pmod{11}$ bulunur.

7 $\left\lfloor \dfrac{m}{11} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{m}{10} \right\rfloor$ eşitliğini sağlayan kaç pozitif tam sayı vardır?

a) 44 **b)** 48 **c)** 52 **d)** 54 **e)** 56

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\left\lfloor \dfrac{m}{11} \right\rfloor = n = \left\lfloor \dfrac{m}{10} \right\rfloor$ olsun. $n \le \dfrac{m}{11} < n+1$ ve $n \le \dfrac{m}{10} < n+1$ eşitsizlikleri beraber sağlanmalıdır. Buradan $11n \le m < 10n+10$ elde edilir. Bu eşitsizlikte $0 \le n < 10$ olduğu açıktır.

$n=0$ için $m \in \{0,1,2,\dots,9\}$ olup 10 değer vardır. (Fakat $m \ne 0$ olduğunu unutmayalım)

$n=1$ için $m \in \{11,12,13,\dots,19\}$ olup 9 değer vardır.

$\vdots$

$n=9$ için $m \in \{99\}$ olup 1 değer vardır.

Toplam $10+9+\cdots+1 = \dfrac{10\cdot9}{2} = 55$ dir. Son olarak $m=0$ durumu çıkarılırsa $55-1=54$ elde edilir.

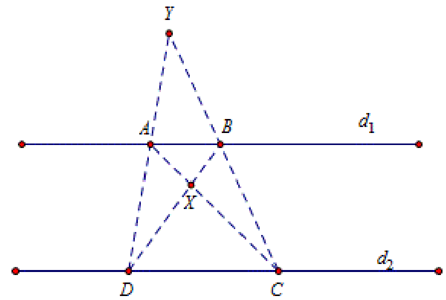
8 d_1 ve d_2 bir düzlem üzerinde birbirine paralel iki farklı doğru olmak üzere, d_1 üstünde 11 siyah nokta, d_2 üstünde de 16 beyaz nokta işaretleniyor. Siyah ve beyaz noktaları birleştiren doğru parçalarının, d_1 ve d_2 doğruları arasındaki şeridin iç bölgesinde bulunan kesişim noktalarının sayısı en çok kaçtır?

a) 5600 **b)** 5650 **c)** 6500 **d)** 6560 **e)** 6600

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

d_1 üstünden alınan temsilci iki nokta A,B; d_2 üstünden alınan temsilci iki nokta C,D olsun. A,B,C,D noktalarının saatin dönme yönünde sıralanmış olduğunu varsayalım. Bu noktalar ikişerli olarak birleştirilirse, $\{DA,CB\}$ ikilisinin kesişiminden bir Y noktası elde edilir. Ancak bu nokta şerit bölgenin dışındadır. $\{AC,BD\}$ ikilisinin kesişiminden bir X noktası elde edilir. Bu nokta şerit bölgenin içinde yer alır. Dolayısıyla A,B,C,D gibi seçilen her 4 noktadan en fazla 1 tane X noktası elde edilebilir. Bu A,B,C,D noktalarının seçim sayısı $\binom{16}{2}\binom{11}{2} = 120\cdot55 = 6600$ bulunur.



9 Kenar uzunlukları $|AB| = 6$, $|BC| = 7$ ve $|AC| = 8$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait iç açıortay BC yi D noktasında kesiyor. E noktası $[AC]$ üstünde olmak üzere $|CE| = 2$ ise, $|DE|$ kaçtır?

a) 3 **b)** $\dfrac{17}{5}$ **c)** $\dfrac{7}{2}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** $3\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

İç açıortay teoreminden $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{6}{8}$ olup $|BD| = 3$ ve $|DC| = 4$ tür. $|AE| = 6 = |AB|$ olduğundan $BAD \cong EAD$ (kenar-açı-kenar) eşliği vardır. Buradan kolayca $|DE| = |BD| = 3$ bulunur.

10 5^n nin $\dfrac{2006!}{(1003!)^2}$ sayısını bölmesini sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 500

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

De Polignac formülüne göre 2006! içindeki 5 çarpanlarının sayısı
$\left\lfloor \dfrac{2006}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2006}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2006}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2006}{625} \right\rfloor = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$ olur.
1003! içindeki 5 çarpanlarının sayısı
$\left\lfloor \dfrac{1003}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{1003}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{1003}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{1003}{625} \right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$ olur.
O halde aranan en büyük n tam sayısı $n = 500 - 249 - 249 = 2$ dir.

11 $4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$ denkleminin farklı gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) -1 **b)** -2 **c)** -3 **d)** -4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = (4x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ şeklinde çarpanlara ayrıldığını varsayarak a, b, c, d tam sayılarını bulmayı deneyelim. Polinomların eşitliğinden

$$4c + a = 0$$

$$4d + b + ac = -3$$

$$ad + bc = 7$$

$$bd = -3$$

İlk denklemden $a = -4c$ dir. Bunu üçüncü denklemde yazarsak $c(b - 4d) = 7$ olur. $c|7$ dir. $c = 1$ için denklemler incelenirse çözüm gelmediği görülür. $c = -1$ için incelenirse $a = 4, b = -3, d = 1$ elde edilir. Bu durumda

$$4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = (4x^2 + 4x - 3)(x^2 - x + 1)$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. $x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin diskriminantı negatif olduğundan reel çözümü yoktur. $4x^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin diskriminantı pozitiftir ve x_1, x_2 şeklinde iki farklı kökü vardır. Vieta formülünden $x_1 + x_2 = -1$ dir.

12 $\{1, 2, \ldots, 2006\}$ kümesi, boş olmayan ve hiçbiri ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

a) $3^{2006} - 3 \cdot 2^{2006} + 1$ **b)** $2^{2005} - 2$ **c)** 3^{2004} **d)** $3^{2005} - 1$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Önce 1 i yerleştirelim, sonra da 2 yi. 3 ve sonraki sayılar için her zaman 2 farklı seçenek olacaktır. Bu durumda 2^{2004} farklı şekilde dağıtım yapılabilir. Sorudaki kısıtlamadan dolayı 3. kümenin hiç kullanılmadığı durumu çıkarmamız gerekmekte: $2^{2004} - 1$. ■

13 $|AB| = |AC|$ olan ikizkenar bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üstünde alınan bir D noktasından BC ye çizilen paralel AC yi E noktasında kesiyor. $m(\widehat{A}) = 20°$, $|DE| = 1$, $|BC| = a$ ve $|BE| = a + 1$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $2a$ **b)** $a^2 - a$ **c)** $a^2 + 1$ **d)** $(a + 1)^2$ **e)** $a^2 + a$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$BE \cap CD = \{F\}$ olsun. $EF/BF = DE/BC = 1/a \Rightarrow EF = 1, BF = a$.

$BCED$ ikizkenar yamuk olduğu için $DF = 1$ ve $CF = a$, yani $\angle EBC = \angle DCB = 60°$.

$\angle ABE = 20° = \angle BAE$ olduğu için $AD = AE = EB = a + 1$ dir.

$DE \parallel BC$ olduğu için $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow \dfrac{a+1}{AB} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow AB = a^2 + a$.

14 $A, B \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ olmak üzere, on tabanındaki yazılımı $AABB$ şeklinde olan sayılardan kaç tanesi tam karedir?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\overline{AABB} = 11 \cdot \overline{A0B} \Rightarrow \overline{A0B} = 11 \cdot T^2$

11 ile bölünebilme kuralı gereğince $A + B = 11$ olmalı.

T^2 nin birler basamağı B dir. Bu durumda, $B = 1, 4, 5, 6, 9$ olabilir.

Bu iki şart birlikte düşünüldüğünde $(A, B) = (2, 9), (5, 6), (6, 5), (7, 4)$ ikililerinden bir tek $(7, 4)$ için $(704 = 11 \cdot T^2 = 11 \cdot 8^2)$ T^2 tam karesi bulunur.

O halde sadece $AABB = 7744$ sayısı bir tam karedir.

15 $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ denkleminin kaç farklı gerçel kökü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = x^2 - 6x + 9 + x - 4\sqrt{x} + 4 = (x-3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$ denkleminin gerçel çözümü yoktur.

16 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{13} \leq 2006$ eşitsizliğini sağlayan kaç $(x_1, x_2, \ldots, x_{13})$ pozitif tam sayı on üçlüsü vardır?

a) $\dfrac{2006!}{13! \cdot 1993!}$ **b)** $\dfrac{2006!}{14! \cdot 1992!}$ **c)** $\dfrac{1993!}{12! \cdot 1981!}$ **d)** $\dfrac{1993!}{13! \cdot 1980!}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{13} \leq 2006$ Burada x_i'ler pozitif olmalıdır. Bu koşuldan kurtulmak için $x_i = a_i + 1$ dönüşümünü yapalım. $a_i \geq 0$ olur. Soruda verilen ifadeyi düzenlersek $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{13} \leq 1993$ ifadesini elde ederiz. Öyleyse $a_1 + a_2 + \ldots + a_{13} + a_{14} = 1993$ Olacak şekilde bir a_{14} vardır. Bu denklemini de sağlayan $\binom{2006}{13}$ tane tam sayı üçlüsü vardır.

17 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 2$, $|DC| = 6$ olacak şekilde bir D noktası bulunmaktadır. $|AB| = 4$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{BAD})$ nedir?

a) 10° **b)** 18° **c)** 20° **d)** 22° **e)** 25°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|BA|^2 = |BD| \cdot |BC|$ çemberde kuvvet bağıntısı sağlandığı için BA doğrusu, ADC üçgeninin çevrel çemberinin bir teğetidir. Dolayısıyla aynı yayı gören teğet-kiriş açı ve çevre açının eşitliğinden $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ACD}) = 20^\circ$ olur.

18 $S = \{n : n3^n + (2n+1)5^n \equiv 0 \pmod 7\}$ ise, her $n \in S$ için, $n + k \in S$ olmasını sağlayan en küçük pozitif k tam sayısı nedir?

a) 6 **b)** 7 **c)** 14 **d)** 21 **e)** 42

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$n \in S$ olan herhangi bir n alalım ve $n \equiv a \pmod 7$ olsun. $a \not\equiv 0$ olmalıdır aksi takdirde kümenin şartı olan denklik sağlanmaz. Dolayısıyla 7 modunda a'nın tersi vardır ve

$$-(2a+1)5^n \equiv a3^n \pmod 7 \implies -a^{-1}(2a+1) \equiv -2 - a^{-1} \equiv \left(3 \cdot 5^{-1}\right)^n \equiv (3 \cdot 3)^n \equiv 2^n \pmod 7$$

olacaktır. 2^n ifadesi 7 modunda sadece $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ için $1, 2, 4$ değerlerini alabilir. Bu değerlerin her biri için de a^{-1}'e bağlı lineer bir denklem çıkacağından tam olarak bir tane a değeri çıkacaktır. Yani n'nin 3'e bölümünden kalana göre 7'e bölümünden kalan değişecektir ve çin kalan teoreminden her durum için mod 21'de tam olarak bir çözüm çıkacaktır. Yani her 21 eklendiğinde yine çözüm gelecektir. $k = 21$ olmalıdır.

Not: Bu kümenin elemanı olan n sayıları şu şekildedir,

$$n \equiv 8, 9, 19 \pmod{21}$$

19 $x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 4xyz$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 10 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Aritmetik orta-geomerik orta eşitsizliği uygulanırsa $x^4 + y^4 + z^4 + 1^4 > 4xyz$. Tabii, eşit de olabilir. Ki bu durum ancak ve ancak x, y, z nin mutlak değerlerinin eşit olmasıyla sağlanır. Dolayısıyla çözümler, -1 ve 1'in sıralanışlarından elde edilir. Bunlar da 4 tanedir.

20 Bir kareyi k tane kareye ayırabiliyorsak, k tam sayısına *iyi sayı* diyelim. 2006 dan büyük olmayan kaç iyi sayı vardır?

a) 1003 **b)** 1026 **c)** 2000 **d)** 2003 **e)** 2004

Çözüm:

$n = 4$ için kenarların ortalarından çıkan doğru parçaları birleştirilerek yapılır. $n > 4$ ve n çift ise kareleri kenarlara yakın bir şekilde yan yana dizersek istenen yine doğrulanmış olur. $n > 5$ ve tek ise yukarıdaki gibi çift durumunu oluşturu ardından en büyük kareyi 4 eşit şekilde parçalarız (kare yaparız). Dolayısıyla $n = 2$, 3 ve 5 için istenen yapılamaz. Bu basit bir çizim ile rahatlıkla görülebilir. Cevap 2003 bulunur.

21 Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 70^\circ$ dir. İçteğet çemberinin merkezi I olmak üzere, $|BC| = |AC| + |AI|$ olduğuna göre, $m(\widehat{B})$ nedir?

a) 35° **b)** 36° **c)** 42° **d)** 45° **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Problemi daha genel halde çözelim ve $m(\widehat{CBA}) = \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2}$ olduğunu ispatlayalım. CA doğrusunun A yönündeki uzantısı üzerinden $|DA| = |AI|$ olacak şekilde bir D noktası alalım. (Yani, A noktası C ile D nın arasındadır.) AID üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan

$$m(\widehat{ADI}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{4} \dots (1)$$

dir. Ayrıca $|CD| = |CA| + |AD| = |CA| + |AI| = |BC|$ olduğundan BCD üçgeni de ikizkenardır. Böylece

$$m(\widehat{ADI}) = m(\widehat{CBI}) \dots (2)$$

olur. BI nın, ABC üçgeninde bir iç açıortay olduğunu da kullanırsak (1) ve (2) den $m(\widehat{CBA}) = \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2}$ elde edilir.

Şimdi $m(\widehat{BAC}) = 70°$ için $m(\widehat{CBA}) = \dfrac{70°}{2} = 35°$ bulunur.

$\boxed{22}$ $0 \le x < 165, 0 \le y < 165$ ve $y^2 \equiv x^3 + x \pmod{165}$ koşullarını sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 80 **b)** 99 **c)** 120 **d)** 315 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ olduğundan denkliği 3, 5 ve 11 modunda çözmeliyiz.

$$y^2 \equiv x^3 + x \equiv x + x \equiv 2x \equiv -x \pmod{3}$$

olduğundan her y değeri için tam olarak bir tane x değeri gelecektir. Mod 3'te 3 tane çözüm vardır. Mod 5 için

$$y^2 \equiv x(x^2 + 1) \pmod{5}$$

olduğundan $x \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ için denersek sadece $x \equiv 0, 2, 3$ için çözüm geleceğini ve bu üç değer için de $y \equiv 0$ olduğunu görürüz. Mod 5'te de 3 tane çözüm vardır.

Mod 11 için $x \equiv 0$ ise $y \equiv 0$'dır. $y \equiv 0$ başka bir x değeri için elde edilemez çünkü $x^2 + 1 \equiv 0$ olamaz. Şimdi mod 11 için karekalan olan ve olmayan değerleri bulalım. $1, 3, 4, 5, 9$ kalanları karekalanken $2, 6, 7, 8, 10$ kalanları değildir. y^2 tanımı gereği karekalan olduğundan $x^3+x = x(x^2+1)$ de karekalan olmalıdır. Dolayısıyla x karekalan ise x^2+1 de karekalandır fakat x karekalan değilse x^2+1 de karekalan değildir. Bunu kullanarak x değerlerini deneyebiliriz. $x \equiv 5, 7, 8, 9, 10$ kalanları istenilen şartları sağlar. Her biri için de $y \not\equiv 0$ olacağından y ve $11 - y$ olmak üzere 2 çözüm gelecektir. $(0, 0)$ çözümünü de katarsak 11 çözüm elde edilir.

Çin kalan teoreminden mod 165'de $3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$ çözüm vardır.

$\boxed{23}$ $\left(1 + \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}\right)^{10}$ sayısını aşmayan en büyük tam sayı kaçtır?

a) 2 **b)** 10 **c)** 21 **d)** 32 **e)** 36

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}\right)^{10} &= \left(1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}\right)^{10} \\ &= \left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{10} \\ &= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{10} \\ &= (\sqrt{2})^{10} \\ &= 32\end{aligned}$$

24 n takımın katıldığı bir hentbol turnuvasında, her takım, kendi dışındaki her takımla tam olarak bir maç yapıyor. Her maçta kazanan 2, kaybeden 0 puan alırken, beraberlik durumunda iki takım da 1 er puan kazanıyor. Turnuvanın bitiminde tüm takımların puanları farklı olup, sonuncu olan takım ilk üç sırada yer alan takımların hepsini yenmiş ise, n en az kaç olabilir?

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Her takım, diğer $n-1$ takımla maç yapacağından toplamda $\dfrac{n(n-1)}{2}$ maç yapılacaktır. Her maçta toplamda 2 puan dağıtıldığında turnuva bittiğinde tüm takımların puanları toplamı $n(n-1)$ olacaktır. Sonuncu takım en az üç maç kazandığından en az 6 puana sahiptir. Tüm puanlar farklı olduğundan en az $6+7+\cdots+(n+5) = \dfrac{(n+5)(n+6)}{2} - 15$ puan toplanabilir. Toplam puan $n(n-1)$ olduğundan

$$n(n-1) \geq \frac{(n+5)(n+6)}{2} - 15 \implies n^2 - 13n \geq 0$$

olacaktır. Yani $n \geq 13$ olacaktır. Cevap hiçbiridir.

25 Kenar uzunlukları $|AB| = 7, |BC| = 6$ ve$|AC| = 5$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası E dir. A köşesinden çizilen iç açıortaya E den inilen dikmenin AB yi kestiği nokta D ise, $|AD|$ nedir?

a) 5 **b)** 6 **c)** $\dfrac{9}{2}$ **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

C den geçen DE ye paralel olan doğru AB yi F de kessin. Paralellikten CF doğrusu A açısının iç açıortayına diktir. Bu durumda, $AF = AC = 5$ ve $BF = 2$ dir.

Paralellikten ve $BE = EC$ den dolayı $BD = DF = 1$ ve $AD = 6$ dır.

26 Kaç p asal sayısı için, $m^3 + 3m - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ ve $m^2 + 4m + 5 \equiv 0 \pmod{p}$ koşullarını sağlayan bir m tam sayısı bulunur?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Öncelikle $p = 2$ için $m \equiv 1 \pmod 2$'nin istenilen denklikleri sağladığını görelim. Diğer p'leri bulmak için $p \neq 2$ kabul edelim.

$$m^3 + 3m - 2 - m(m^2 + 4m + 5) \equiv -4m^2 - 2m - 2 \equiv 0 \pmod p \implies 2m^2 + m + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$2(m^2 + 4m + 5) - (2m^2 + m + 1) \equiv 7m + 9 \equiv 0 \pmod p$$

$p = 7$ olursa $9 \equiv 0 \pmod 7$ olur ki bu da çelişkidir. Dolayısıyla $m \equiv -9 \cdot 7^{-1} \pmod p$'dir. ($7^{-1}$ sayısı 7'nin p modundaki tersidir.) Buradan da

$$m^2 + 4m + 5 \equiv 81 \cdot \left(7^{-1}\right)^2 - 36 \cdot 7^{-1} + 5 \equiv 0 \pmod p \implies 81 - 36 \cdot 7 + 5 \cdot 7^2 \equiv 74 \equiv 0 \pmod p$$

$74 = 2 \cdot 37$ ve $p \neq 2$ olduğundan $p = 37$ olmalıdır. $m \equiv -9 \cdot 7^{-1} \equiv 4 \pmod{37}$ istenilen denklikleri sağlar. $p = 2$ ve 37 olmak üzere iki tane çözüm vardır.

27 x, y, z pozitif gerçel sayıları $xy + yz + zx = 5$ koşulunu sağlıyorsa, $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** $3\sqrt{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen ifadenin alabileceği 2 tane değer bulursak, bu ifade iki değerin arasındaki tüm değerleri alacaktır çünkü ifadeler süreklidir ve polinomaldir. Öncelikle $x = y = z = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ denersek

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} < 3$$

olacaktır. Diğer değer için $x = y = \epsilon > 0$ çok küçük bir sayı olsun. Bu durumda $z = \dfrac{5 - \epsilon^2}{2\epsilon}$ olacaktır.

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = \frac{9\epsilon^2}{4} - \frac{5}{2} + \frac{25}{4\epsilon^2} - \frac{\epsilon(5 - \epsilon^2)}{2}$$

olacaktır. $\dfrac{25}{4\epsilon^2}$ ifadesinden dolayı ϵ'u ne kadar küçük seçersek ifade o kadar büyür (sonsuza gider). Dolayısıyla ifade için üst sınır yoktur. 3'den küçük bir değer de olabileceğini gösterdiğimizden, ifademiz 3 veya daha büyük her sayı olabilir.

28 10 şekeri olan Ali, her gün en az bir şeker yiyorsa, şekerlerinin tümünü günlere dağılımı itibariyle kaç değişik biçimde yiyebilir?

a) 64 **b)** 126 **c)** 243 **d)** 512 **e)** 1025

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Ali şekerleri en az 1, en fazla 10 günde yiyebilir. k günde kaç farklı şekilde yiyebileceğine bakalım. Bu soru ile

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 10, \quad x_i \geq 1$$

dağılım sorusu denktir. $x_i = y_i + 1$ dönüşümü yaparsak

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = 10 - k, \quad y_i \geq 0$$

olur. Bu dağılım sorusunun çözüm sayısı $\binom{10-k+k-1}{k-1} = \binom{9}{k-1}$'dır. $k = 1, 2, \ldots, 10$ için hesaplayıp toplarsak

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \cdots + \binom{9}{9} = 2^9 = 512$$

elde edilir.

$\boxed{29}$ Bir ABC üçgeninde içteğet çemberinin merkezi I; $[BC]$ ye değen dış teğet çemberinin merkezi J olmak üzere, $m(\widehat{B}) = 45°, m(\widehat{A}) = 120°$ ve $|IJ| = \sqrt{3}$ ise, $|BC|$ kaçtır?

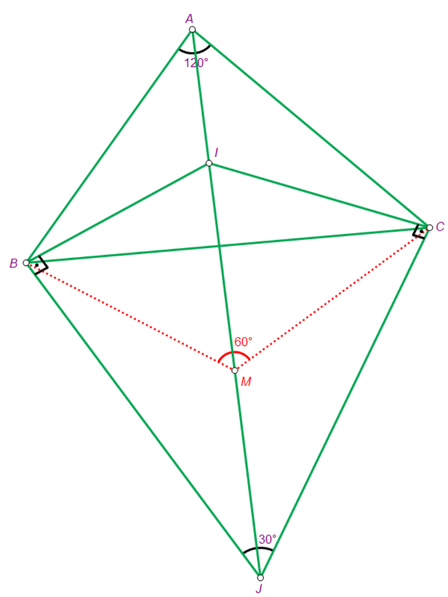
a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **e)** $\sqrt{3} - 1$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle IBJ = \angle ICJ = 90°$ ve $\angle BJC = 90° - \frac{\angle BAC}{2} = 30°$ dir.

$IBJC$ kirişler dörtgeninin çevrel merkezi M, IJ nin orta noktasıdır ve $\angle BMC = 2 \cdot \angle BJC = 60°$ dir. $\triangle BMC$ eşkenar üçgen olup $BC = BM = \frac{IJ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir.



NOT:

Genel olarak Sinüs teoreminden $\frac{BC}{\sin \angle BJC} = IJ \Rightarrow BC = IJ \cdot \sin(90° - \angle A/2) = IJ \cdot \cos(\angle A/2)$ elde edilir.

30 $0 \leq x < 13, 0 \leq y < 13, 0 \leq z < 13$ olmak üzere

$$\begin{array}{lcll} x - yz^2 & \equiv & 1 & \pmod{13} \\ xz + y & \equiv & 4 & \pmod{13} \end{array}$$

denklik sistemini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

a) 10 **b)** 23 **c)** 36 **d)** 49 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

İlk denklikten $x \equiv yz^2 + 1 \pmod{13}$ bulunur. Bunu ikinci denklikte yazarsak

$$y(z^3 + 1) \equiv 4 - z \pmod{13}$$

olacaktır. Öncelikle bu denkliğin çözümü olan her (y, z) çifti için tam olarak bir tane x çözümü geleceğini görelim. Dolayısıyla bizim sadece ikinci denkliğin çözüm sayısını bulmamız gerekiyor. Burada ise eğer $z^3+1 \not\equiv 0 \pmod{13}$ ise her z değeri için bir adet y değeri elde edilecektir. Eğer $z^3 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ ama $4 - z \not\equiv 0 \pmod{13}$ ise çözüm gelmeyecek, eğer $z^3 + 1 \equiv 4 - z \equiv 0 \pmod{13}$ ise her y değeri çözüm olacaktır.

$$z^3 + 1 \equiv 0 \pmod{13} \iff z \equiv 4, 10, 12 \pmod{13}$$

olduğundan $z \equiv 10, 12$ iken çözüm gelmez, $z \equiv 4$ iken 13 çözüm gelir, geri kalan 10 adet z değeri için de birer tane çözüm gelir. Toplamda $10 + 13 = 23$ çözüm vardır.

31 a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomu $P(1) \geq 2$ ve $P(3) \leq 31$ koşullarını sağlıyorsa, $P(4)$ ün alabileceği kaç tam sayı değer vardır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen bilgilerden

$$A = P(1) - 1 = a + b + c \geq 1$$

$$B = P(3) - 27 = 9a + 3b + c \leq 4$$

şeklindedir. Bizim ise $C = P(4) - 64 = 16a + 4b + c$ ifadesinin alabileceği değerleri bulmamız lazım. Üç değişkenli üç lineer denklemi matris ile çözebiliriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Matrisin tersini hesaplarsak

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{3} \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yani

$$A - 3B + 2C = 6a$$

$$-7A + 15B - 8C = 6b$$

$$2A - 2B + C = c$$

olur. $a, b, c > 0$ olduğunu kullanırsak C'yi üstten ve alttan sınırlayabiliriz.

$$\frac{15B - 7A}{8} > C > \max\left\{2B - 2A, \frac{3B - A}{2}\right\}$$

Öncelikle $B = 9a + 3b + c > a + b + c = A$ olduğundan alt sınır kesinlikle pozitiftir. Dolayısıyla $C \geq 1$ olacaktır. Üst sınır için

$$\frac{15 \cdot 4 - 7}{8} = 6.625 \geq \frac{15B - 7A}{8}$$

olduğundan $6 \geq C$ olacaktır. Eğer $C = 1$ ise $1 \geq \frac{3B - A}{2}$ olacağından $\frac{2 + A}{3} \geq B > A$ olur. Ancak $A \geq 1$ olduğundan üst sınır alt sınırdan küçük olur. Bu bir çelişkidir. $C = 2, 3, 4, 5, 6$ değerlerini alabilir yani $P(4) = 66, 67, 68, 69, 70$ olabilir.

Örnek durumlar için $A = 1$ seçilerek C değerlerine uygun B'ler bulunabilir.

32 "$\{1, 2, \cdots, 9\}$ kümesinin 5 elemanlı hangi 6 altkümesini alırsak alalım, bunlardan en az bir ortak elemana sahip k tanesi bulunur" önermesinin doğru olmasını sağlayan en büyük k tam sayısı nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$5 \cdot 6 = 30$ eleman bulunur. Güvercin yuvası prensibine göre, $30 : 9 > 3$ olduğu için k nın en büyük değeri 4 olur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

$k = 5$ tane alt küme için istenen koşulun gerçekleşmeyebileceğini gösterelim.

$\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ alt kümelerinden herhangi beşinin kesişimi boş kümedir. $k < 5$ olmalıdır. $k_{\text{max}} = 4$ olduğunu, önceki çözümde gösterildiği gibi kanıtlayabiliriz. 5 elemanlı 6 alt kümede toplam $6 \cdot 5 = 30$ eleman vardır. Güvercin yuvası prensibi gereğince, en az $\left\lceil \frac{30}{9} \right\rceil = 4$ eleman aynı olmalıdır. Bu da kesişimi boş küme olmayan 4 farklı alt kümenin seçilebileceğini gösterir.

33 Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{ABD}) = 40°, m(\widehat{DBC}) = 70°, m(\widehat{BDA}) = 80°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 50°$ ise $m(\widehat{CAD})$ nedir?

a) 25° **b)** 30° **c)** 35° **d)** 38° **e)** 40°

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{B}$

$[AB$ ve $[AC$ yi uzatalım ve bu ışınların üzerinde $|AB|$ ve $|AC|$ doğru parçaları üzerinde olmayacak şekilde sırasıyla E ve F noktaları alalım. O zaman $\angle EBD = \angle CBD = 70°$ ve $\angle BDC = \angle CDF = 50°$ olur. Yani $|BC|$ ve $|DC|$ dış açıortaydır. İki dış ve bir iç açıortay noktadaş olduğu için $|AC|$ de $\angle BAD$ nin açıortayıdır. O zaman $\angle CAD = \frac{\angle BAD}{2} = 30°$ dir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

Kirişler dörtgeni oluşturmaya çalışacağız.$ABP = 50°$ olacak şekilde DC üzerinde P noktası alınsın. Buna göre $ABPD$ kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $\angle BDP = 50°, \angle DAP = 10°, \angle APB = 80°$ elde edilir. Ayrıca $\triangle BPC$ eşkenar, $\triangle APB$ ise ikizkenardır. Dolayısıyla $BC = BP = PC = AP$ belirlenir. Buna göre $\triangle APC$ de ikizkenardır. $\angle APC = 140°$ olduğundan $\angle CAP = 20° \iff \boxed{\angle CAD = 30°}$ bulunur.

34 1000 den küçük olan ve 2 veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tam sayı vardır?

a) 6 **b)** 10 **c)** 26 **d)** 68 **e)** 72

Çözüm:

Yazılamayan sayılar 2^n formundadır. 1000'den küçük olduğu için 10 sayı bulunur.

35 a, b, c gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2+bx+c$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı 1, $P(P(P(x)))$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı da 3 ise, abc ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) -3 **b)** -2 **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$P(x)$ polinomunun gerçel kök sayısı 1 olduğundan $P(x) = a(x-k)^2$ formatındadır. $k = 0$ ise $P(P(P(x))) = a^7x^8$ olacağından 3 farklı kökü olmayacaktır. Dolayısıyla $k \neq 0$'dır. Şimdi $P(P(x))$'i hesaplayalım.

$$P(P(x)) = a\left(P(x) - k\right)^2 = a\left(a(x-k)^2 - k\right)^2$$

$P(x) = 0 \iff x = k$ olduğundan

$$P(P(P(x))) = 0 \iff a\left(a(x-k)^2 - k\right)^2 = k$$

olacaktır. $Q(x) = a\left(a(x-k)^2 - k\right)^2 - k$ polinomu 4. derecedendir fakat 3 kökü olmasını istiyoruz. O halde tam olarak bir kökü katlı köktür. Yani bu kök, $Q'(x)$'in de köküdür. Dolayısıyla

$$Q'(x) = 4a^2\left(a(x-k)^2 - k\right)(x-k) = 0$$

$k \neq 0$ olduğundan $\left(a(x-k)^2 - k\right) \neq 0$'dır aksi takdirde bu katlı kök için $Q(x_0) = 0$ olacağından $k = 0$ bulunur. Yani katlı kök $x_0 = k$'dır. Bunu $Q(x)$'de yazarsak $ak^2 = k$ ve $k = \dfrac{1}{a}$ bulunur. Yani $P(x) = a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2$ formatındadır. Bu ifadeyi açarsak $b = -2$ ve $c = \dfrac{1}{a}$ bulunur. Yani $\boxed{abc = -2}$ olacaktır.

Örnek durum $a = 1$ konularak bulunabilir. Denememiş olmamla beraber her $a \neq 0$ gerçel sayısının da bu özelliği sağladığını düşünüyorum.

36 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sorudan oluşan bir sınavda, her soru en az bir öğrenci tarafından doğru yanıtlanıyor. Ayrıca hem her öğrenci çift sayıda soruyu doğru yanıtlıyor, hem de herhangi iki öğrenci için, her ikisinin de doğru yanıtladığı ortak soru sayısının çift olduğu gözleniyor. n nin alamayacağı değerlerin sayısı nedir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Öncelikle $n = k$ olabiliyorsa $k+2$ de olabileceğini görelim çünkü $n = k$ durumuna ek olarak 2 soru ve sadece 1 öğrenci ekler ve bu iki soruyu sadece o öğrenciye çözdürerek $n = k+2$ için örnek durum bulabiliriz. $n = 2$ için tek öğrenci yeterlidir, bu öğrencinin iki soruyu da çözdüğü durum istenilen şartları sağlar. Dolayısıyla, n çift herhangi bir sayı olabilir. Tek sayılar için iddiamız ise $n \geq 7$ olan herhangi bir tek sayı olabileceğidir. Bunun için $n = 7$ için göstermemiz yeterlidir. Soruları $1, 2, \ldots, 7$ olarak numaralandırıp öğrencilere A, B ve C dersek

$$A \to 1, 2, 3, 4$$

$$B \to 1, 2, 5, 6$$

$$C \to 1, 3, 5, 7$$

sorularını çözmesi halinde her soru çözülmüş, herkes çift sayıda soru çözmüş ve herhangi iki kişinin ortak çözdüğü soru sayısı 2 olmuş olur. Yani n, 7 veya daha büyük herhangi bir tek sayı olabilir.

Geriye sadece $n = 1, 3, 5$ için istenilenin sağlanamayacağını göstermek kalır. $n = 1$ çok basittir.

$n = 3$ için soru çözmemiş öğrencinin hiçbir katkısı olmayacağından onları yokmuş gibi sayabiliriz. Herkes çift sayıda soru çözeceğinden hepsi tam olarak 2 tane soru çözmelidir. İki kişinin ortak çözdüğü soru sayısı ya 2 ya da 0 olmalıdır. Eğer 2 ise bu iki kişinin çözdüğü sorular tamamen aynıdır. Bu yüzden üç veya daha fazla kişinin ortak çözdüğü soru sayısı 1 olamaz çünkü ortak soru çözmüş kişiler tamamen aynı soruları çözmüş olmalıdır. Dolayısıyla içerme dışarma prensibi gereğince

$$(\text{Öğrencilerin çözdüğü soru sayılarının toplamı }) - (\text{Herhangi iki öğrencinin çözdüğü ortak soru sayılarının toplamı })$$

$$+(\text{Herhangi üç öğrencinin çözdüğü ortak soru sayılarının toplamı }) - \cdots = 3$$

doğru olamaz çünkü sağ taraf tek sayıyken sol taraftaki tüm toplamlar çifttir. Bu bir çelişkidir. $n = 3$ olamaz.

$n = 5$ için her öğrenci çift sayıda soru çözeceğinden 2 veya 4 soru çözmüş olmalıdır. Eğer tam olarak 2 soru çözmüş biri varsa bu kişi diğer herhangi biriyle ya hiç ortak soru çözmemiştir ya da iki sorusu da ortaktır. Bu kişiyi ve çözdüğü soruları atarsak geriye kalan öğrenciler ve sorular da $n = 3$ durumunu sağlar çünkü herkesten çift sayıda soru eksilir ve ortak çözülen soru sayısı da her öğrenci ikilisi için 2 veya 0 azalır. Bu yüzden herkes tam olarak 4 soru çözmelidir. Başka bir deyişle herkes tam olarak bir soruyu çözmemiştir. herhangi bir A kişisini alalım, genelliği bozmadan bu kişi ilk soruyu çözmesin. İlk soruyu çözen herhangi bir B kişisi alırsak bu kişi A'nın çözdüğü sorulardan tam olarak bir tanesini çözmemiş olmalıdır. Yani A ve B'nin ortak çözdüğü soru sayısı 3 olacaktır. Bu bir çelişkidir. $n = 5$ olamaz.

n'nin alamayacağı 3 değer vardır, bunlar $n = 1, 3, 5$'dir.

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2007

$\boxed{1}$ Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90°, |AB| = 4, |AC| = 3$ ve A köşesinden $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı D olmak üzere, $[BD]$ üstünde bir P noktası için $5|AP| = 13|PD|$ ise, $|CP|$ nedir?

a) $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{5}$ **b)** $\dfrac{56}{15}$ **c)** $\dfrac{14}{5}$ **d)** $\dfrac{37}{13}$ **e)** $\dfrac{3+5\sqrt{5}}{5}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|PD| : |DA| : |AP| = 5 : 12 : 13$ ve üçgende ki alan eşitliğinden, $|AD|.5 = 4.3 \Rightarrow |AD| = \dfrac{12}{5}, |PD| = 1$ dir.
Ayrıca öklit bağıntısı kullanarak $3^2 = |DC|.5 \Rightarrow |DC| = \dfrac{9}{5}$ bulunur, o halde $|CP| = \dfrac{14}{5}$ dir.

$\boxed{2}$ $10 \cdot 3^{195} \cdot 49^{49}$ sayısının dört tabanına göre yazımının son üç basamağı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 112 **b)** 130 **c)** 132 **d)** 212 **e)** 232

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

mod 64 ten inceleme yapmalıyız. Euler'in ϕ fonksiyonundan, $\phi(64) = 32$ dir. $(3, 64) = (7, 64) = 1$ olup Euler teoremine göre $3^{32} \equiv 7^{32} \equiv 1 \pmod{64}$ olur.

$10 \cdot 3^{195} \cdot 7^{98} \cdot \equiv 10 \cdot (3^{32})^6 \cdot 3^3 \cdot (7^{32})^3 \cdot 7^2 \equiv 10 \cdot 27 \cdot 49 \equiv 46 \pmod{64}$ olur. $46 = (232)_4$ elde edilir.

$\boxed{3}$ $a < b < c < d$ tam sayılar olmak üzere, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 9 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 7$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

a) 14 **b)** 21 **c)** 28 **d)** 42 **e)** 63

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x = 7$ için $(7-a)(7-b)(7-c)(7-d) = 9$ olur. 9 sayısını birbirinden farklı dört tam sayının çarpımı olacak şekilde, $9 = (-3).(-1).1.3$ biçiminde yazabiliriz.

Bu çarpanların toplamı sıfır olduğundan, $(7-a) + (7-b) + (7-c) + (7-d) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 28$ dir.

$\boxed{4}$ Bir matematik dersinde ögretmen tahtaya yazdığı soruyu, Ali, Betül, Cem, Çağla, Dursun, Emre ve Fatma'nın gruplar halinde çözmesini istiyor. Her grup iki veya üç kişiden oluşacaksa, bu yedi öğrenci kaç farklı biçimde gruplara ayrılabilir?

a) 70 **b)** 105 **c)** 210 **d)** 280 **e)** 630

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$7 = 2 + 2 + 3$ şeklinde parçalanır. Ancak 2 li gruplar ayırtedilemez olduğundan $\dfrac{1}{2!}$ çarpanı kullanırız.
$\dfrac{1}{2!}\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 105$ bulunur.

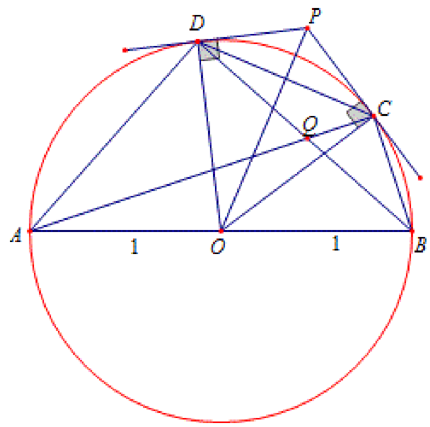
$\boxed{5}$ O merkezli AB çaplı yarım çember üstünde C ve D noktaları, $ABCD$ bir dışbükey dörtgen olacak biçimde alınıyor. $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesişim noktası Q, yarım çembere C ve D noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası P olmak üzere, $m(\widehat{AQB}) = 2m(\widehat{COD})$ ve $|AB| = 2$ ise, $|PO|$ nedir?

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$m(\widehat{COD}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{COD}) = 2\alpha$ olur. Çemberde iç açı özelliğinden $2\alpha = \dfrac{180^\circ + \alpha}{2}$ olup $\alpha = 60^\circ$ elde edilir. $|OC| = |OD| = 1$ dir. $[OC] \perp [PC]$, $[OD] \perp [PD]$ olduğundan $m(\widehat{COP}) = m(\widehat{DOP}) = 30^\circ$ dir. PDO dik üçgeninden $|PO| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ elde edilir.



$\boxed{6}$ $n!(2n+1)$ ve 221 sayılarının aralarında asal olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$221 = 13 \cdot 17$ olduğundan $n \geq 13$ için $n!(2n+1)$ ile 221 aralarında asal olmaz. O halde $n \leq 12$ dir. Ancak $n = 8$ için $2n+1 = 17$ olduğundan bu halde de $n!(2n+1)$ ile 221 aralarında asal olmaz. Sonuç olarak $12 - 1 = 11$ tane n değeri bulunur.

$\boxed{7}$ $\left\lfloor \dfrac{6x+5}{8} \right\rfloor = \dfrac{15x-7}{5}$ eşitliğini sağlayan gerçel sayıların toplamı kaçtır?

a) 2 **b)** $\dfrac{81}{90}$ **c)** $\dfrac{7}{15}$ **d)** $\dfrac{4}{5}$ **e)** $\dfrac{19}{15}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

a bir tam sayı olmak üzere $\dfrac{15x-7}{5} = a$ dır. $x = \dfrac{5a+7}{15}$ olur. Buna göre $\dfrac{6x+5}{8} = \dfrac{6\frac{5a+7}{15}+5}{8} = \dfrac{10a+34}{40}$ olur. Tam değer fonksiyonunun tanımından $a \le \dfrac{10a+34}{40} \le a+1$ dir. Bu kombine eşitsizlik çözülürse $a \in \{0,1\}$ bulunur. $a=0$ için $x = \dfrac{7}{15}$, $a=1$ için $x = \dfrac{12}{15}$ olup bu değerlerin toplamı $\dfrac{19}{15}$ dir.

$\boxed{8}$ 123456789 sayısı ile başlanarak, her adımda, her ikisi de sıfırdan farklı bitişik iki rakamın değerleri birer azaltılarak yerleri kendi aralarında değiştiriliyor. Sonlu sayıda adım sonucunda elde edilebilecek en küçük sayının rakamları toplamı nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 5 **e)** 9

Çözüm:

Değişmez (invariant) kavramı ile ilgili bir problem,

Yanıt: $\boxed{D}$

9 basamaklı sayının soldan sağa doğru n inci basamağındaki sayı a_n olsun. a_n ile a_{n+1} in pariteleri farklıdır. Yani bunlardan biri tek sayı iken diğeri çift sayıdır. Bitişik rakamların değerlerini birer azaltıp yerlerini kendi aralarında değiştirme işlemi sonucunda n inci sayının paritesi **değişmez**. Örneğin a_n tek sayı iken a_{n+1} çift sayıdır ve bu rakamların yeri değiştirilince $\dots(a_n)(a_{n+1})\dots$ sıralaması yerine $\dots(a_{n+1}-1)(a_n-1)\dots$ gelir. n inci basamakta $a_{n+1}-1$ tek sayısı, $n+1$ inci basamakta a_n-1 çift sayısı bulunur. Sonuç olarak elde edilebilecek en küçük sayı 101010101 dir. (Bu sayıyı veren hamleleri yazmak kolaydır) Dolayısıyla 101010101 sayısının rakamları toplamı 5 olarak bulunur.

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninde $|AB| = 3$ ve C ye ait yüksekliğin uzunluğu 2 ise, diğer iki yükseklik uzunluklarının çarpımı en fazla kaç olabilir?

a) $\dfrac{144}{25}$ **b)** 5 **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** 6 **e)** Hiçbiri

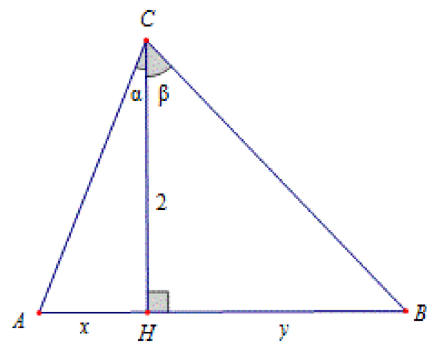
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

ABC üçgeninin kenarları a,b,c ve yükseklikleri h_a,h_b,h_c olmak üzere $Alan(ABC) = \dfrac{a\cdot h_a}{2} = \dfrac{b\cdot h_b}{2} = \dfrac{c\cdot h_c}{2}$ alan eşitliklerinden $a\cdot h_a = 6$, $b\cdot h_b = 6$ yazılır. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa $(a\cdot b)\cdot h_a\cdot h_b = 36$ olur. $a\cdot b\cdot \sin C = 6$ olduğundan

$$h_a \cdot h_b = 6\cdot \sin C \dots (1)$$

elde edilir.



(1) eşitliğinde $\sin C$ maksimum olduğunda $h_a \cdot h_b$ çarpımı da maksimum değerine ulaşacaktır. ilk akla gelen yaklaşımlardan biri "$m(\widehat{C}) = 90°$ için $\sin C = 1$ maksimum olur, bu nedenle cevap 6 dır" şeklinde olabilir. Fakat bu yaklaşım maalesef doğru değildir, sırf bu nedenle bile çeldiriciliği yüksek bir sorudur. $[AB]$ çaplı çemberi çizersek yarıçapı $3/2$ olduğundan C noktası bu çemberin dışındadır. Böylece C açısının dar olduğunu anlarız.

Şimdi doğru çözüm yoluna geçelim. C noktasından AB doğrusuna çizilen yükseklik ayağı H olsun. $|AH| = x$, $|BH| = y$ dersek $x + y = 3$ tür. $m(\widehat{ACH}) = \alpha$, $m(\widehat{BCH}) = \beta$ dersek $\sin(\alpha+\beta)$ nın maksimum değerini bulmalıyız. Bunun için $\tan(\alpha+\beta)$ nın maksimum değerini bulmak işimizi kolaylaştırabilir. Toplam formülünden $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \dfrac{(x/2)+(y/2)}{1-(xy)/4} = \dfrac{6}{4-xy}$ yazabiliriz. $x + y = 3$ olduğundan aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğinden $xy \le \dfrac{9}{4}$ olup $\tan(\alpha+\beta) \le \dfrac{24}{7}$ elde edilir. $7 - 24 - 25$ dik üçgeninden dolayı $\sin(\alpha+\beta) \le \dfrac{24}{25}$ olup $h_a \cdot h_b \le 6 \cdot \dfrac{24}{25} = \dfrac{144}{25}$ bulunur. Eşitlik durumu $x = y = \dfrac{3}{2}$ iken vardır.

$\boxed{10}$ Bir tam sayının karesinin iki katına ve bir tam sayının küpünün üç katına eşit olup, 10^6 dan küçük olan kaç pozitif tam sayı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$n = 2x^2 = 3y^3$ ve $n < 10^6$ dır. $2|y^3$ ve $3|x^3$ olup $y = 2a$, $x = 3b$ yazılabilir. Buradan $3b^2 = 4a^3$ olur. Benzer muhakeme ile $b = 2c$, $a = 3d$ dir. $c^2 = 9d^3$ olup $c = 3e$ dir. Buradan $e^2 = d^3$ olur ve e bir tam küp, d bir tam kare olmalıdır. $e = m^3$ dersek $d = m^2$ dir. $c = 3m^3$, $b = 6m^3$, $a = 3m^2$, $x = 18m^3$, $y = 6m^2$ dir. $n = 2x^2 = 648m^6$ dır. O halde $648m^6 < 10^6$ eşitsizliğini sağlayan m pozitif tam sayılarını belirleyelim. $\dfrac{1000000}{648} = 1543,2\ldots$ olduğundan $m^6 \le 1543$ tür. $3^6 = 729$, $4^6 = 4096$ olduğundan $m \in \{1,2,3\}$ olup 3 değer bulunur.

$\boxed{11}$ Farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir kümenin en büyük iki elemanının çarpımının $8/19$ u, geriye kalan elemanların toplamından büyük değilse, kümedeki sayılardan en büyüğünün alabileceği en küçük değer nedir?

a) 8 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 19 **e)** 20

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

n farklı pozitif tam sayı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olsun. $a_n \leq n$ dir. En büyük sayı en az $a_n = n$ olabilir. Bu durumda her k için $a_k = k$ şeklide olur. Şimdi n yi olabildiğince küçük seçmeliyiz. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} \geq \frac{8}{19} a_{n-1} a_n$ eşitsizliğini $1+2+\cdots+(n-2) \geq \frac{8}{19}(n-1)n$ şeklinde yazabiliriz. $\frac{(n-2)(n-1)}{2} \geq \frac{8}{19}(n-1)n$ eşitsizliğinden $n \geq 13$ olarak çözülür. $n = 13$ için en büyük sayının en küçük değeri $a_{13} = 13$ bulunur.

$\boxed{12}$ 10 farklı kitap üç raflı bir kitaplığa, hiçbir raf boş kalmayacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

a) $36 \cdot 10!$ **b)** $50 \cdot 10!$ **c)** $55 \cdot 10!$ **d)** $81 \cdot 10!$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{A}$

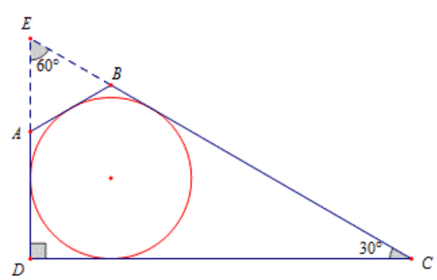
10 farklı kitap 10! şekilde sıralanır. Bunları ayıracak olan iki ayraç da 9 yerden ikisine $\binom{9}{2}$=36 farklı şekilde gelebilir. Cevap 36.10! dir.

$\boxed{13}$ Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 120°, m(\widehat{C}) = 30°$ ve $|BC| = 2$ ise, $|AD|$ nedir?

a) $\sqrt{3} - 1$ **b)** $2 - \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ **d)** $2 - \sqrt{2}$ **e)** $3 - \sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



AD ile BC nin kesişim noktası E olsun. ABE eşkenar üçgen olduğundan $|AB| = |BE| = |AE| = 2x$ diyelim. CDE dik üçgeninin kenarları arasında $1 : \sqrt{3} : 2$ orantısı olduğundan $|ED| = 1 + x$, $|CD| = \sqrt{3} + \sqrt{3}x$, $|AD| = 1 - x$ dir. $ABCD$ teğetler dörtgeninde $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ olduğundan $2x + \sqrt{3} + \sqrt{3}x = 2 + (1 - x)$ denklemi elde edilir. Buradan $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ olarak çözülür. $|AD| = 1 - x = 1 - \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$ bulunur.

$\boxed{14}$ 3^n nin, $(100^2 - 99^2)(99^2 - 98^2) \cdots (3^2 - 2^2)(2^2 - 1^2)$ çarpımını bölmesini sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?

a) 49 **b)** 53 **c)** 97 **d)** 103 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{A}$

İfadeye T deyip düzenleyelim:

$T = 199.197.195.........7.5.3 = \dfrac{199!}{198.196.194........6.4.2} = \dfrac{199!}{2^{99}.(99!)}$

2^{99} da hiç 3 böleni olmadığından $\dfrac{199!}{99!}$ deki 3 böleninin sayısına bakmamız yeterli.

$\dfrac{199}{3} = 66, ...$, $\dfrac{66}{3} = 22$, $\dfrac{22}{3} = 7, ...$, $\dfrac{7}{3} = 2, ...$; $\Longrightarrow 66 + 22 + 7 + 2 = 97$ tane 3 böleni var. (payda)

$\dfrac{99}{3} = 33$, $\dfrac{33}{3} = 11$, $\dfrac{11}{3} = 3, ...$, $\dfrac{3}{3} = 1$; $\Longrightarrow 33 + 11 + 3 + 1 = 48$ tane 3 böleni var. (paydada)

O zaman cevap $97 - 48 = 49$ dur.

$\boxed{15}$ a, b, c, d, e, f, g, h farklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $ab + cd = ef + gh$ ise, $ab + cd$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 34 **b)** 33 **c)** 32 **d)** 31 **e)** 30

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$n = (ab + cd)(ef + gh)$ diyelim. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden $n > 2\sqrt{abcd}$ ve $n > 2\sqrt{efgh}$ dır. Taraf tarafa çarpılırsa $n^2 > 4\sqrt{abcdefgh} \geq 4\sqrt{8!}$ olur. Buradan $n > 28$ elde edilir.

$n = 29$ durumuna bakalım. $\min\{a, b, c, d\} = a$, $\min\{e, f, g, h\} = e$ alınırsa $ab + cd = 29$ dan $a \leq 3$ bulunur. Benzer şekilde $a \leq 3$ tür. 29 tek sayı olduğundan $ab + cd = 29 = ef + gh$ eşitliğinde ya ab, ef çift sayılar; cd, gh tek sayılar olmalıdır ya da ab, ef tek sayılar; cd, gh çift sayılar olmalıdır. $a, e \leq 3$ ve şartından dolayı yalnızca $a = 1, e = 3$ durumu incelenir. Bu halde $3f + gh = 29$ olur. f tek sayısı için $f \geq 5$ olduğu kullanılırsa bir çelişki elde edilir.

$n = 30$ durumuna bakalım. Yine $\min\{a, b, c, d\} = a$, $\min\{e, f, g, h\} = e$ alınırsa $ab + cd = 30$ dan $a, e \leq 3$ bulunur. Bu durum da incelenirse çelişkiye ulaşılır. (Bu kısım biraz zamanınızı alabilir, kendi kendinize incelemeyi detaylıca yapmanız faydalı olacaktır).

$n = 31$ durumunda $a = 1, b = 7, c = 4, d = 6, e = 2, f = 8, g = 3, h = 5$ için eşitlik sağlanır.

$\boxed{16}$ $x, y, z \leq 9$ pozitif tam sayılar olmak üzere, her (x, y, z) üçlüsü için, bu sayılardan en büyüğü ile en küçüğünün toplamına bu üçlünün gücü diyoruz. Bu tür tüm (x, y, z) üçlülerinin güçlerinin toplamı kaçtır?

a) 9000 **b)** 8460 **c)** 7290 **d)** 6150 **e)** 6000

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Simetri fikrinden faydalanmak çözümü kolaylaştıracaktır. Her (x, y, z) üçlüsüne karşılık bir $(10 - x, 10 - y, 10 - z)$ üçlüsü karşılık getirilebilir. Örneğin $x \leq y \leq z$ sıralaması olsun. $x \leq y \leq z \Longleftrightarrow 10 - x \geq 10 - y \geq 10 - z$ olduğundan (x, y, z) ve $(10 - x, 10 - y, 10 - z)$ üçlülerinin güçlerinin toplamı sabit olarak $x + z + (10 - x) + (10 - z) = 20$ dir. Tüm (x, y, z) üçlülerinin sayısı 9^3 olduğundan tüm üçlülerin güçlerinin toplamı $\dfrac{1}{2} \cdot 9^3 \cdot 20 = 7290$

17 $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberine C noktasında teğet olan doğru ile AB doğrusunun kesişimi K noktasıdır.

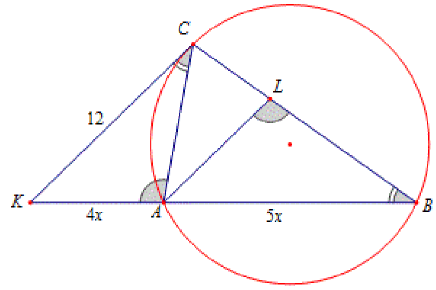
$L, [BC]$ kenarı üstünde bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{ALB}) = m(\widehat{CAK}), 5|LC| = 4|BL|$ ve $|KC| = 12$ ise, $|AK|$ nedir?

a) $4\sqrt{2}$ **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Aynı yayı gören çevre açı ve teğet kiriş açıların eşitliğinden $m(\widehat{KCA}) = m(\widehat{CBA})$ dır. Dolayısıyla $m(\widehat{CKA}) = m(\widehat{LAB})$ olup $KC \parallel AL$ dir. $\dfrac{KA}{AB} = \dfrac{CL}{LB} = \dfrac{4}{5}$ dir. Buna göre $|KA| = 4x, |AB| = 5x$ diyebiliriz. K noktasının çembere göre kuvvetini yazarsak $|KC|^2 = |KA| \cdot |KB|$ eşitliğinden $12^2 = 4x \cdot 9x$ olur. Buradan $x = 2$, $|AK| = 4x = 8$ dir.



18 $n^3 + 8$ sayısının en çok üç pozitif böleninin bulunmasını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bir pozitif böleni olan sayılar 1 ve -1 dir. $n^3 + 8 = 1$, $n^3 + 8 = -1$ denklemlerinin tam sayı çözümü yoktur.

p bir asal sayı olmak üzere iki pozitif böleni olan sayılar p ve $-p$ dir. $n^3 + 8 = p$ ve $n^3 + 8 = -p$ denklemlerini inceleyelim. $n^3 + 8 = (n+2)(n^2 - 2n + 4)$ şeklinde çarpanlara ayrılır. Ayrıca $n^2 - 2n + 4 = (n-1)^2 + 3 \geq 3$ olduğunu göz önüne alırsak $n + 2 = 1$, $n^2 - 2n + 4 = p$ olabilir. Bu halde $n = -1$ için $p = n^2 - 2n + 4 = 3$ asal sayı elde edilir. $n^3 + 8 = -p$ durumu incelenirse $n + 2 = -1$, $n^2 - 2n + 4 = p$ olabilir. Buradan $n = -3$ için $p = n^2 - 2n + 4 = 19$ asal sayısı elde edilir.

Son olarak üç pozitif böleni ola sayıları inceleyelim. Bu sayılar p^3 ve $-p^2$ şeklindedir. $n^3 + 8 = p^2$ durumunda $n + 2 = p$, $n^2 - 2n + 4 = p$ olup $n^2 - 2n + 4 = n + 2$ denkleminden $n = 1$, $n = 2$ çözümleri bulunur. $n = 1$ için $p = n + 2 = 3$ asal sayıdır. $n = 2$ için $p = n + 2 = 4$ asal değil. $n^3 + 8 = -p^2$ durumunda $n + 2 = -p$, $n^2 - 2n + 4 = p$ olup $n^2 - 2n + 4 = -n - 2$ dir. Bu denklemin tamsayı çözümü yoktur. Sonuç olarak $n \in \{-3, -1, 1\}$ şeklinde 3 değer alabilir.

19 $x_1 = 5, x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için

$$x_n = x_{n-2} - \frac{1}{x_{n-1}}$$

ise, m nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 406 **b)** 2005 **c)** 2006 **d)** 2007 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x_m = 0$ iken x_{m+1} tanımsız olmaktadır. Bu sebeple $x_m = 0$ olmasını sağlayan ilk m pozitif tam sayısını bulmalıyız. Verilen indirgeme bağıntısını $x_n x_{n-1} - x_{n-1}x_{n-2} = -1$ şeklinde teleskopik hale getirelim. Şimdi $n = 3, 4, \dots, m$ için toplam oluşturalım:

$\sum_{n=3}^{m} (x_n x_{n-1} - x_{n-1}x_{n-2}) = (-1) \cdot (m-2)$

olup $x_m x_{m-1} - x_2 x_1 = 2 - m$ dir. Buradan $m = 2007$ elde edilir.

20 9 ardışık bölümden oluşan bir şeridin her bölümü kırmızı veya beyaza boyanıyor. Herhangi bitişik iki bölüm birlikte beyaza boyanamıyorsa, bu boyama kaç değişik biçimde yapılabilir?

a) 34 **b)** 89 **c)** 128 **d)** 144 **e)** 360

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Problemi genel halde n ardışık bölme için indirgemeli dizi yöntemiyle çözelim. Herhangi bitişik iki bölümün beyaza boyanmadığı durumların sayısı a_n olsun. Kolayca görüleceği üzere $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ tür. Biz a_9 değerini bulmalıyız. n ardışık bölmenin n inci hanesi için iki boyama seçeneği olduğundan tüm durumların sayısını iki alt durumun toplamı olarak ifade edeceğiz.

n inci hane kırmızı ise, $n-1$ inci hane ve daha öncesini a_{n-1} yolla boyayabiliriz.

n inci hane beyaz ise, $n-1$ inci hane mutlaka kırmızıdır. $n-2$ inci hane ve daha öncesini a_{n-2} yolla boyayabiliriz.

Böylece toplamda $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ şeklinde bulunur. Fibonacci dizisinin indirgeme bağıntısını elde ettiğimize dikkat edilebilir. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ olduğunu kullanarak $(a_n) = (2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$ yazabiliriz. $a_9 = 89$ bulunur.

21 $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dörtgeninin $[DC]$ kenarının orta noktası M ile gösterilmek üzere, $AC \perp BM$, $|DC| = 12$ ve $|AB| = 9$ ise $|AD|$ nedir?

a) 4 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

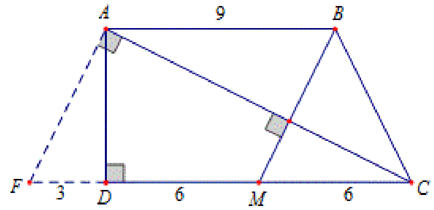
Yanıt: $\boxed{B}$

AC ile BM nin kesişim noktasına E diyelim. $MC//AB$ olduğu için $|CE| = 2x$ ve $|EA| = 3x$ tir. $ADME$ çemberseldir. C noktasının bu çembere kuvvetini alırsak $2x.5x = 6.12$ den $|AC| = 5x = 6\sqrt{5}$ bulunur. ADC üçgeninde pisagor yapılırsa $|AD| = 6$ bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

$ABMF$ paralelkenarını inşa edelim. $|DF| = 3$ olur. $BM \perp AC$ olduğundan $FA \perp AC$ dir. AFC dik üçgeninde Öklid bağıntısı uygulanırsa $|AD|^2 = |FD| \cdot |DC|$ olup $|AD|^2 = 3 \cdot 12 = 36$, $|AD| = 6$ bulunur.



22 n ve m tam sayılar olmak üzere,$n \leq 2007 \leq m$ ve $n^n \equiv -1 \equiv m^m \pmod 5$ ise, $m-n$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Her k tam sayısı için $1^k \equiv 1 \pmod 5$ ve $5^k \equiv 0 \pmod 5$ tir. $k = 1,2,3,4$ için $2^k \equiv 2,-1,3,1 \pmod 5$, $3^k \equiv 3,-1,2,1 \pmod 5$, $4^k \equiv -1,1,-1,1 \pmod 5$ olur.

$m-n$ nin en küçük değerini bulmak için n nin en büyük değeri ile m nin en küçük değerini belirlemeliyiz. $n = 2007, 2006, \ldots$ değerleri geriye doğru denenirse ilk olarak $n = 2002$ için $2002^{2002} \equiv 2^2 \equiv -1 \pmod 5$ elde edilir. $m = 2007, 2008, \ldots$ değerleri ileriye doğru denenirse ilk olarak $m = 2009$ için $2009^{2009} \equiv 4^1 \equiv -1 \pmod 5$ elde edilir. Dolayısıyla $m - n = 2009 - 2002 = 7$ bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$.

$x^x \equiv -1 \pmod 5$ denkliğini sağlayan x tam sayılarını belirleyelim. $x \not\equiv 0,1 \pmod 5$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca üslerin 4 ile bölümüne bakacağız, yani Fermat Teoremi'ni kullanacağız.

- $x = 5k+2 \iff (5k+2)^{5k+2} \equiv 2^{k+2} \equiv -1 \pmod 5 \iff k \equiv 0 \pmod 4$

olur. Dolayısıyla buradan $x \equiv 2 \pmod{20}$ çözümü gelir.

- $x = 5k+3 \iff (5k+3)^{5k+3} \equiv 3^{k+3} \equiv -1 \pmod 5 \iff k \equiv 3 \pmod 4$

olur. Dolayısıyla buradan $x \equiv 18 \pmod{20}$ çözümü gelir.

- $x = 5k+4 \iff (5k+4)^{5k+4} \equiv 4^{k} \equiv -1 \pmod 5 \iff k \equiv 1,3 \pmod 4$

olur. Dolayısıyla buradan $x \equiv 9,19 \pmod{20}$ çözümü gelir.

Bundan ötürü $x^x \equiv 4 \pmod 5$ denkliğinin çözümü $x \equiv 2,9,18,19 \pmod{20}$ iken sağlanır. Soruda istenen aralıkta $m-n$ ifadesini minimum yapan sayılar ise modulo 20 de denkliği sağlayan 2002 ve 2009 sayılarıdır.

Çözüm 3:

2 sayısı 5 modunda ilkel köktür. $(a,5) = 1$ olan her sayı 5 modunda 2'nin kuvveti olarak yazılabilir. $m \equiv 2^{m_0}$ yazarsak,

$$m^m \equiv 2^{m_0 m} \equiv -1 \pmod 5$$

olacağından $mm_0 \equiv 2 \pmod 4$ olmalıdır. m ve m_0'dan biri tek sayı diğeri $4k+2$ formatında olmalıdır.

$m \equiv 2 \pmod 4$ ise $m_0 \equiv 1, 3 \pmod 4$ olabilir. $m \equiv 2^{m_0} \equiv 2^1, 2^3 \equiv 2, 3 \pmod 5$ olacaktır. Çin kalan teoreminden birleştirirsek, $m \equiv 2, 18 \pmod{20}$ bulunur.

$m \equiv 1 \pmod 2$ ise $m_0 \equiv 2 \pmod 4$, yani $m \equiv 2^{m_0} \equiv 4 \pmod 5$'dir. Çin kalan teoreminden birleştirirsek, $m \equiv 9 \pmod{10}$ bulunur. Sonuç olarak

$$m \equiv 2, 9, 18, 19 \pmod{20}$$

bulunur. max $n = 2002$ ve min $m = 2009$ olduğundan $m - n$ en az 7'dir.

23 Birim kenarlı bir eşkenar üçgenle başlanarak her kenarın orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Sonra, elde edilen çokgenin her kenarının orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Böylece bu işlem sonsuz kez tekrarlandığında elde edilen şeklin alanı nedir?

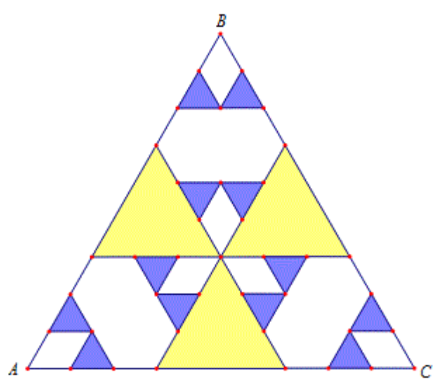
a) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ **d)** $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Çözüme geçmeden önce sorunun ifadesinin hatalı olduğunu belirtelim. İlk adımda çıkarılan alanlar sarı ile, ikinci adımda çıkarılan alanlar mavi ile renklendirilmiştir. Bundan sonra aralarda oluşan altıgenlerin kenarlarına eşkenar üçgen çizme işlemi tatbik edilmemiş, yalnızca oluşan eşkenar dörtgenlerin kenarlarına eşkenar üçgenler çizilmiştir. Bu yolla $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ sonucuna ulaşılabilir.

Şimdi çözüme geçelim:



Kenar uzunluğu 1 olan eşkenar üçgenin alanı $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ olur. İlk adımda çıkarılan parçanın alanı $\dfrac{3}{9}S$, ikinci adımda çıkarılan parçanın alanı $\dfrac{3 \cdot 4}{9^2}S$, üçüncü adımda çıkarılan parçanın alanı $\dfrac{3 \cdot 4^2}{9^3}S, \ldots$ olur. Çıkarılan alanların toplamı $\dfrac{1}{3}S\left[1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4^2}{9^2} + \ldots\right] = \dfrac{1}{3}S \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \dfrac{2S}{5}$ olur. Geriye kalan alan ise$S - \dfrac{2S}{5} = \dfrac{3S}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$ bulunur.

24 Aşağıdaki n sayılarından hangisi için, 1 den n ye kadar olan tam sayılar bir çemberin ertafına, her sayı, her iki yanındaki sayıların farkına bölünecek biçimde dizilebilir?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 9 **e)** 13

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

İlk olarak şu birkaç gözlemi yapalım:

1) 1 in her iki yanındaki sayılar ardışık olmak zorundadır.

2) n bir asal sayı ise n nin her iki yanındaki sayılar ardışık olmak zorundadır. Böylece bunların farkı 1 olup n yi böler.

3) n den küçük bir p asalının her iki yanındaki sayılar ya ardışıktır ya da $\{p+1,1\},\{p+2,2\},\dots$ gibi farkları p ye eşittir.

$n=5$ alalım. 5 in yanındaki sayılar $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ikilileri olabilir. Bu durumlar incelenirse hiçbirinde uygun bir konfigürasyon oluşmadığı görülebilir.

$n=6$ alalım. 5 in yanındaki sayılar $\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,6)\}$ ikilileri olabilir. Bu durumlardan da uygun bir konfigürasyon elde edilemez.

$n=7$ alalım. 7 nin yanındaki sayılar $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$ ikilileri olabilir. 7 nin yanına gelecek $\{3,2\}$ için uygun bir konfigürasyon vardır. $\{3,7,2,6,5,1,4\}$ dairesel dizilimi yazılabilir.

NOT: Muhtemelen daha güzel bir çözümü vardır.

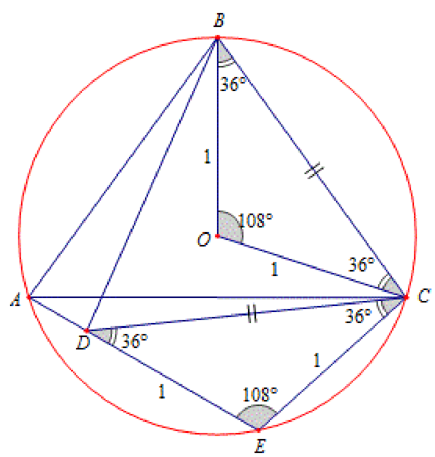
25 Birim çember üstünde $|AB|=|BC|$ ve $m(\widehat{ABC})=72^\circ$ olacak şekilde A,B,C noktaları alınıyor. BCD bir eşkenar üçgen olacak şekilde çemberin iç bölgesinde alınan bir D noktası için, AD doğrusu çemberi ikinci kez E noktasında kesiyorsa, $|DE|$ nedir?

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\sqrt{3}-1$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olmak üzere $m(\widehat{OBC})=m(\widehat{OCB})=36^\circ$ dir. $|BA|=|BD|=|BC|=|DC|$ olduğundan D noktası, B merkezli ve $|AB|$ yarıçaplı çember üstündedir.



Aynı yayı gören merkez açı – çevre açı ilişkisinden $m(\widehat{ABD})=2m(\widehat{ACD})=12^\circ$, $m(\widehat{CBD})=2m(\widehat{CAD})=60^\circ$ dir. Buna göre $m(\widehat{EDC})=m(\widehat{ECD})=36^\circ$ olur. $EDC\cong OBC$ (açı-kenar-açı eşliği) olduğundan $|ED|=|OB|=1$ dir.

26 c, a ve b nin pozitif ortak katlarının en küçüğünü ve d de, ortak bölenlerinin en büyüğünü göstermek üzere,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

a) 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$d=(a, b)$ ise $a=dx$, $b=dy$ ve $(x, y)=1$ olacak şekilde x, y pozitif tamsayıları vardır. Bu halde $c=dxy$ dir. Bu değerleri verilen denklemde yazalım: $\frac{1}{dx}+\frac{1}{dy}+\frac{1}{d}+\frac{1}{dxy}=1$ olup payda eşitledikten sonra d yi yalnız bırakırsak $d=1+\frac{x+y+1}{xy}$ dir. Buradan $d>1$ olduğu görülüyor. $x=y=1$ özel halini incelersek $d=4$ bulunur. Bu halde $(a, b)=(4,4)$ çözümüne ulaşırız. Şimdi simetriden dolayı $1 \leq x<y$ kabul edebiliriz. $d=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$ ifadesi $x=1$ ve $y=2$ için maksimum değerine ulaşır. Bu değerleri yazarsak $d=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ olup $d \leq 3$ buluruz.

Açıkça $d=3$ durumu yalnızca $x=1$, $y=2$ iken vardır. Buradan $(a, b)=(3,6),(6,3)$ çözümleri elde edilir. $d=2$ durumunda $2=1+\frac{x+y+1}{xy}$ denkleminden $xy-x-x=1$ olur. Her iki tarafa 1 eklersek $(x-1)(y-1)=2$ elde edilir. Bu denklemin çözümü $x=2$, $y=3$ tür. Bu halde $(a, b)=(4,6),(6,4)$ çözümlerine ulaşılır. Toplamda 5 tane (a, b) çözüm çifti bulunur.

27

$$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)=\frac{45}{32}$$

denkleminin gerçel çözümlerini toplamı kaçtır?

a) 0 **b)** -1 **c)** $-\frac{3}{2}$ **d)** $-\frac{5}{4}$ **e)** $-\frac{7}{12}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Birinci ile ikinci ve üçüncü ile dördüncü parantezlerin çarpımından, $\left(x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}\right)=\frac{45}{32}$ olur. $x^2+\frac{5}{4}x=a$ değişken değiştirmesi ile, $\left(a+\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{3}{8}\right)=\frac{45}{32}$ yazılır ve bu denklemi düzenleyerek $16a^2+10a-21=0$ denklemine ulaşırız. Son denklemi çarpanlarına ayırarak köklerini bulalım; $(8a-7)(2a+3)=0$ ifadesindeki herbir çarpanın sıfıra eşit olması durumunda köklerini inceleyelim. $x^2+\frac{5}{4}x-\frac{7}{8}=0$ ve $x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}=0$ denklemlerinin gerçel kökler toplamı ikinci denklemin diskriminantı sıfırdan küçük olduğundan birinci denklemden gelmektedir. Bu toplam $-\frac{5}{4}$ dür.

28 Bir çember etrafında yazılı n tam sayıdan her biri, kendisini saat yönünde izleyen iki sayının farkının mutlak değerine eşit olup, tüm sayıların toplamı 278 ise, n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 139 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

En büyük sayı x, onu saat yönünde takip eden sayı da $y < x$ olsun. y den bir sonraki sayı $x + y$ olmalı. Bu durumda $x + y > x$ olacaktır.

Bu durumun istisnaları $y = 0$ veya $y = x$ olup her iki durumda da çemberdeki dizilim saat yönünde $0, x, x, \dots, 0, x, x$ şeklinde olur. O halde çemberde $n = 3m$ sayı vardır.

$2 \cdot x \cdot m = 278 \Rightarrow x \cdot m = 139$ eşitliğinden $m \in \{1, 139\}$ çıkar.

29 Bir $ABCD$ karesinin sırasıyla $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üstünde alınan M ve N noktaları için $|BM| = 21, |DN| = 4$ ve $|NC| = 24$ ise, $m(\widehat{MAN})$ nedir?

a) 15° **b)** 30° **c)** 37° **d)** 45° **e)** 60°

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{D}$

$ABCD$ kare olduğu için bütün kenarlar 28 dir. Gerekli pisagorlar yapılırsa $|AM| = 35$, $|AN| = 20\sqrt{2}$ ve $|MN| = 25$ bulunur. NAM üçgeninde $\angle NAM$ ye Kosinüs teoremi uygulanırsa $\angle NAM = 45°$ bulunur.

Çözüm 2:

ADN üçgenine eş olan ABK üçgenini K köşesi karenin dış bölgesinde kalacak şekilde inşaa edelim. $BK = DN = 4$ ve $MN = 25$ olduğundan, $MK = MN$ dir. Ayrıca $AK = AN$ olduğundan, $AKMN$ deltoit olup $\angle KAM = \angle NAM$ dir. $\angle NAK = \angle BAD = 90° \Rightarrow \angle NAM = 45°$ dir.

Genel durumda; $ABCD$ karesinin BC ve CD kenarları üstünde alınan M ve N noktaları için $MN = BM + DN \Rightarrow \angle NAM = 45°$ dir.

Burada A köşesi MCN üçgeninin MN ye teğet olan dış çemberinin merkezidir.

30 Her $n \geq 1$ için $a_{n+48} \equiv a_n \pmod{35}$ koşulunun sağlandığı bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisinde i ve j sırasıyla, her $n \geq 1$ için, $a_{n+i} \equiv a_n \pmod 5$ ve $a_{n+j} \equiv a_n \pmod 7$ bağıntılarını sağlayan en küçük pozitif tamsayılarsa, (i, j) ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $(16, 4)$ **b)** $(3, 16)$ **c)** $(8, 6)$ **d)** $(1, 48)$ **e)** $(16, 18)$

Çözüm:

Periyod kavramı ile ilgili bir problem,

Yanıt: $\boxed{E}$

$a_{n+48} \equiv a_n \pmod{35}$ olduğundan $a_{n+48} \equiv a_n \pmod 5$ ve $a_{n+48} \equiv a_n \pmod 7$ yazabiliriz. Bu denkliklere göre a_n dizisinin mod 5 ve mod 7 deki bir periyodu 48 dir. Üstelik a_n nin aynı modlardaki en küçük periyodu sırasıyla i ve j dir. Dolayısıyla $i|48$ ve $j|48$ olmalıdır. $j = 18$ için $j|48$ sağlanmadığından $(i, j) \neq (16, 18)$ dir.

31 Kare şeklindeki bir arazi, sınırlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen şeklindeki n tarlaya bölünüyor. Tarlaların çevre uzunluklarının toplamı, arazinin çevre uzunluğunun 100 katıysa, n en çok kaç olabilir?

a) 10000 **b)** 20000 **c)** 50000 **d)** 100000 **e)** 200000

Çözüm:

Yanıt: A

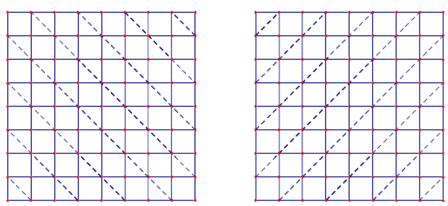
Karenin bir kenar uzunluğu a ise, çevresi $4a$ olur. Şimdi kare arazinin yatay kenarına paralel $m-1$ tane doğru çizerek m dilime ayıralım. Kare arazinin düşey kenarına paralel $k-1$ tane doğru çizerek k dilime ayıralım. Oluşan dikdörtgenlerin sayısı $n = m \cdot k$ dır. Oluşan dikdörtgenlerin çevreleri toplanırken $m-1$ tane kenar ikişer kez, 2 kenar birer kez hesaplanır. Yine $k-1$ tane kenar ikişer kez, 2 kenar birer kez hesaplanır. Toplam çevre $2(m-1)a + 2a + 2(k-1)a + 2a = 2a(m+k)$ olup bu değer karenin çevresinin 100 katına eşit olduğundan $2a(m+k) = 100 \cdot 4a$ dır. $m + k = 200$ bulunur. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden $\sqrt{n} = \sqrt{m \cdot k} \le \dfrac{m+k}{2} = 100$ olup $n \le 100^2$ dir. Eşitlik durumu $m = k = 100$ iken sağlanır.

32 8×8 bir satranç tahtasının birim karelerinden her birinin merkezine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Her satır, her sütun ve iki köşegenden birine paralel olup birim karelerin merkezlerinden geçen her doğru üstündeki sayıların toplamları çift ise, tahtaya yazılı bütün sayıların toplamı en fazla kaç olabilir?

a) 32 **b)** 48 **c)** 52 **d)** 56 **e)** 64

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$



Kesikli çizgilerle gösterilen köşegenlere paralel doğruların geçtiği karelerin sayısı $1, 3, 5, 7$ şeklinde tek sayılardır. Örneğin 5 karenin merkezinden geçen bir doğruyu göz önüne alalım. Bu karelerdeki sayıların toplamının çift sayı olması için karelerden en az birinde 0 yazmalıdır. Bu yolla 16 tane doğru için, içine 0 yazılan en az 16 kare bulunur. Dolayısıyla tüm karelerdeki sayıların toplamı $\le 64 - 16 = 48$ dir. Toplamın 48 e eşit olduğu maksimum duruma örnek vardır. En uzun iki köşegendeki karelere 0 yazmak yeterlidir.

33 Bir A noktasından C çemberine çizilen teğetlerin değme noktaları M ve N dir. $[AN]$ üstünde alınan bir P noktası için MP ile C nin ikinci kesişim noktası Q, P den geçen ve MA ya paralel olan doğru ile MN nin kesişim noktası R olmak üzere, $|MA| = 2, |MN| = \sqrt{3}$ ve $QR \parallel AN$ ise, $|PN|$ nedir?

a) $\dfrac{3}{2}$ **b)** 1 **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\triangle PNR \sim \triangle ANM$ olduğundan $|PN| = 2x$ dersek $|NR| = \sqrt{3}x$ ve $|AP| = 2 - 2x$ olur. $2 - 2x > 0$ olduğundan $x < 1$ olmalıdır. $\triangle PNM \sim \triangle QRM$ olduğundan $\dfrac{|PQ|}{|PM|} = \dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = x$ dir. $|PQ| = |PM|x$ yazılır. P noktasının çembere göre kuvveti: $|PN|^2 = |PQ| \cdot |PM|$ olduğundan $|PM|^2 = 4x$ elde edilir. MAP üçgeninin kenarları x e bağlı olarak belirlidir. MAN üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $\cos A = \dfrac{5}{8}$ bulunur. Şimdi de MAP üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $|PM|^2 = |PA|^2 + |MA|^2 - 2|PA| \cdot |MA| \cdot \dfrac{5}{8}$ olup $4x = (2-2x)^2 + 4 - 2 \cdot (2-2x) \cdot 2 \cdot \dfrac{5}{8}$ denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse $4x^2 - 7x + 3 = 0$ olup $(4x-3)(x-1) = 0$ yazılır. $x = 1$ veya $x = \dfrac{3}{4}$ tür. $x < 1$ şartından dolayı $x = \dfrac{3}{4}$ alınır ve $|PN| = 2x = x = \dfrac{3}{2}$ elde edilir.

34 15 ten küçük kaç p asal sayısı için,

$$\begin{aligned} m+n+k &\equiv 0 \pmod p \\ mn+mk+nk &\equiv 1 \pmod p \\ mnk &\equiv 2 \pmod p \end{aligned}$$

sistemini sağlayan (m,n,k) tamsayı üçlüsü vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

m, n, k sayıları 3. dereceden $x^3 - bx^2 + cx - d \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin kökleri olarak düşünülebilir. Vieta teoreminden $b \equiv 0 \pmod p$, $c \equiv 1 \pmod p$, $d \equiv 2 \pmod p$ olur. $x^3 + x - 2 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 1$ olduğundan $x - 1$ çarpanı bulunur. Polinom bölmesi ile $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$ yazılabilir. $k \equiv 1 \pmod p$ alabiliriz. m, n sayıları $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin kökleridir. Bu denkliği 4 ile genişletirsek $(2x+1)^2 \equiv -7 \pmod p$ şeklinde düzenleyebiliriz. Şimdi p ye değerler verelim.

$p = 2$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 1 \pmod 2$ olup 1 sayısı, mod 2 de bir kare kalandır. (Yani çözüm vardır, bu çözümlerin $x \equiv 0, 1 \pmod 2$ olduğunu görmek zor değildir).

$p = 3$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 2 \pmod 3$ olup 2 sayısı, mod 3 de bir kare kalan değildir, çözüm yoktur.

$p = 5$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 3 \pmod 5$ olup 3 sayısı, mod 5 de bir kare kalan değildir, çözüm yoktur.

$p = 7$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 0 \pmod 2$ olup 0 sayısı, mod 7 de bir kare kalandır. Yani çözüm vardır ve $x \equiv 3 \pmod 7$ çözümdür. $m = n = 3$ alınabilir.

$p = 11$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 4 \pmod 2$ olup 4 sayısı, mod 7 de bir kare kalandır. Çözüm vardır .

$p = 13$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 5 \pmod 2$ olup 5 sayısı, mod 13 de bir kare kalan değildir. mod 13 de kare kalanlar $0, 1, 3, 4, 9, 10, 12$ dir.

Sonuç olarak $p \in \{2, 7, 11\}$ elde edilir.

35 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ sayısının ondalık yazılımında virgülden sonra üçüncü basamaktaki rakam nedir?

a) 8 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, $a == \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, = b\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ diyelim. $x = a+b$ olur. $a^3+b^3 = 4$ ve $ab = -1$ dir.

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ özdeşliğine göre $x^3 = 4+3\cdot(-1)\cdot x$ olup $x^3+3x-4 = 0$ denkleminin gerçel kökü $x = 1$ dir. Diğer kökler gerçel sayı değildir. Dolayısıyla $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ olup bir tam sayının ondalıklı açılımında virgülden sonraki tüm rakamları 0 dır.

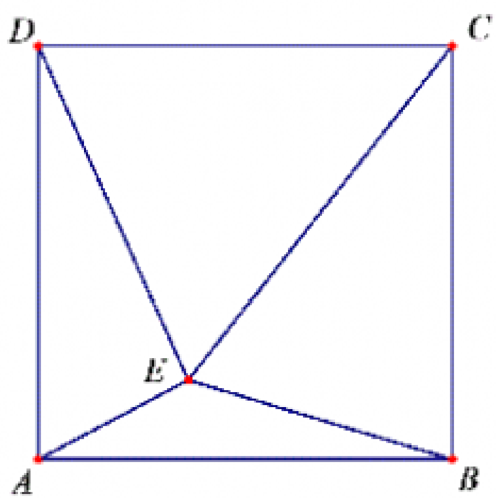
$\boxed{36}$ Herhangi üçü bir doğru üstünde bulunmayan beş noktadan bazılarını köşe kabul eden dışbükey çokgenlerin sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 16

Çözüm:

Bu soru iptal edilmiştir.

Soru iptal edilmiş ancak doğru çözüm şu şekilde olabilir.



5 noktayı A, B, C, D, E ile gösterelim. Herhangi üçü doğrusal olmayan 5 nokta ile daima $\binom{5}{3} = 10$ üçgen oluşturulabilir. Oluşan dörtgen ve beşgen sayısını küçük tutmaya çalışalım. Örneğin A, B, C, D bir karenin köşeleri olsun. $ABCD$ karesinin ağırlık merkezi de O noktası olsun. AOB üçgeninin iç bölgesinde kalan bir noktayı E olarak seçersek $ABED$ ve $ABCE$ dörtgenleri içbükey olur. $\binom{5}{4} - 2 = 3$ tane dışbükey dörtgen oluşur. Ayrıca $ABCDE$ beşgeni de dışbükey değildir. Toplam dışbükey çokgen sayısı en az $10+3 = 13$ olabilir. Bu ise seçeneklerde verilmediği için soru iptal edilmiş olabilir.

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2008

1 ABC üçgeninde AD kenarortay olmak üzere, $m(\widehat{ADB}) = 45°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ ise $\widehat{ABC}$ açısı kaç derecedir?

a) 75 **b)** 90 **c)** 105 **d)** 120 **e)** 135

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{\text{C}}$

B den AC doğrusuna çizilen dikmenin ayağı E olsun. BEC üçgeni $30-60-90$ üçgeni olduğundan $|BD| = |CD| = |ED| = |BE|$ olur. $\angle ADE = \angle DAE = 15°$ olduğundan $|AE| = |ED| = |BE|$ dir. Buradan da $\angle ABE = 45°$ ve böylece $\angle ABC = 105°$ elde ederiz.

Kaynak: Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri

Çözüm 2:

$BD = DC = x$ diyelim. Buna göre Sinüs Teoreminden $AD = \dfrac{x \cdot \sin 30°}{\sin 15°}$ olur. $\angle ABC = \alpha$ için $\angle BAD = 135° - \alpha$ dır. ABD üçgeninde Sinüs Teoreminden

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(135° - \alpha)} \iff \frac{\sin\alpha}{\sin(135° - \alpha)} = \frac{\sin 30°}{\sin 15°} = \frac{\cos 15°}{\sin 30°} = \frac{\sin 105°}{\sin 30°}$$

elde edilir ve $\angle ABC = \alpha = 105°$ bulunur.

2 $3m^2n = n^3 + A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır?

a) 301 **b)** 403 **c)** 415 **d)** 427 **e)** 481

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Öncelikle seçeneklerde verilen A değerlerinin 3 ile bölünemediğini gözlemleyelim.

$n(3m^2 - n^2) = A$ yazalım. $n^2 \equiv 0,1 \pmod 3$ olduğundan $3m^2 - n^2 \equiv 0,2 \pmod 3$ olur. A sayısı 3 e bölünmediğinden $3m^2 - n^2 \equiv 2 \pmod 3$ mümkündür. O halde A sayısının pozitif bölenlerinden biri $3k + 2$ formunda olmalıdır. Şimdi seçenekleri inceleyelim.

$301 = 7 \cdot 43$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 301$

$403 = 13 \cdot 31$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 403$

$415 = 5 \cdot 83$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni vardır. $n(3m^2 - n^2) = 5 \cdot 83$ eşitliğinde $3m^2 - n^2 = 83$ ve $n = 5$ için $m = 6$ bulunur.

$427 = 7 \cdot 61$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 427$

$481 = 13 \cdot 37$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 481$

3 $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + x^{18} - x^{19}$ polinomu verilsin. $Q(x) = P(x-1)$ şeklinde tanımlanan Q polinomunda x^2 nin katsayısı kaçtır?

a) 840 **b)** 816 **c)** 969 **d)** 1020 **e)** 1140

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{E}$

$P(x) = -\dfrac{x^{20}-1}{x+1}$

$P(x-1) = -\dfrac{(x-1)^{20}-1}{x-1+1}$

$-(x-1)^{20}-1$'da x^3'ün katsayısını bulursak $-\dfrac{(x-1)^{20}-1}{x-1+1}$'da x^2'nin katsayısını buluruz.

x^3'lü ifade şudur: $\binom{20}{3} \cdot x^3 \cdot (-1)^{17} = -1140$

Başta $(-)$ olduğu için katsayısı pozitiftir.

$\boxed{4}$ YARIŞMA sözcüğünün harfleriyle, her harf bu sözcükte olduğu sayıda kullanılmak üzere, anlamlı veya anlamsız, iki kelimeden oluşan kaç cümle yazılabilir?

a) 2520 **b)** 5040 **c)** 15120 **d)** 20160 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

$YARIŞMA$ sözcüğünün harfleri $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ şekilde sıralanır. İki sözcüğü ayıracak olan ayraç 6 farklı yere gelebilir. Bu yüzden cevap $2520.6 = 15120$ dir.

$\boxed{5}$ Bir üçgenin kenarları a, b, c olsun, eğer a^2, b^2, c^2 uzunluğundaki doğru parçaları bir üçgen oluşturuyorsa bu üçgene iyi üçgen diyoruz. Aşağıda açıları verilen üçgenlerden kaç tanesi iyi üçgendir?

(i) $40°, 60°, 80°$
(ii) $10°, 10°, 160°$
(iii) $110°, 35°, 35°$
(iv) $50°, 30°, 100°$
(v) $90°, 40°, 50°$
(vi) $80°, 20°, 80°$

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{B}$

Eğer bir üçgen oluşuyorsa üçgen eşitsizliğinden $a^2 + b^2 > c^2$ dir. O zaman bu üçgen dar açılıdır. O yüzden sadece (i) ve (vi) iyi üçgendir.

$\boxed{6}$ Eğer n pozitif tamsayısına bölünen her tamsayı, basamaklarının yerleri nasıl değiştirilirse değiştirilsin yine n ye bölünüyorsa, n ye "iyi" sayı diyelim. Kaç iyi sayı vardır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 12 **e)** Sonsuz Sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Bir basamaklı sayılarda şartı sağlayan sayıların yalnızca $1, 3, 9$ olduğunu görmek kolaydır.

En az iki basamaklı n sayısının şartı sağladığını kabul edelim.

i) n sayısının son basamağı 0 olsun. Bu durumda n nin basamaklarının yerini değiştirip son basamağı 0 olmayan bir n' sayısı oluşturursak $10 \mid n \mid n'$ olur. Ancak n' nün son basamağı 0 olmadığından $10 \nmid n'$. Çelişki

ii) n sayısının son basamağı $a \neq 0$ olsun. Diğer tüm basamaklarını da K ile gösterelim. $n = Ka = 10K + a$

$n \mid Ka0, n \mid K0a \Longrightarrow n \mid Ka0 - K0a \Longrightarrow n \mid 9a$

a bir rakam olduğundan şartı sağlayan n sayısı $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$ sayılarının bölenlerinden biri olabilir.

Bu sayıların en az iki basamaklı bölenlerinin kümesi $\{18, 27, 12, 36, 15, 45, 54, 21, 63, 24, 72, 81\}$ dir. Ancak bu sayılardan hiçbiri, basamaklarının yerleri değiştirilince meydana gelen iki basamaklı sayıyı bölmez.

Yani şartı sağlayan en az iki basamaklı sayı yoktur.

Dolayısıyla şartı sağlayan yalnızca üç pozitif tamsayı vardır: $1, 3, 9$.

$\boxed{7}$ $a = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$ olduğuna göre, $\left(\dfrac{4-a}{a}\right)^6$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\dfrac{4}{a} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \dfrac{4\left(\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1\right)} = \dfrac{4\left(\sqrt[3]{3}+1\right)}{4} = \sqrt[3]{3} + 1$ olup $\dfrac{4}{a} - 1 = \sqrt[3]{3}$ elde edilir. Bu eşitliği kullanalım:

$\left(\dfrac{4-a}{a}\right)^6 = \left(\dfrac{4}{a} - 1\right)^6 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$ sonucuna ulaşılır.

$\boxed{8}$ 10×10 bir satranç tahtasının birinci satırının karelerine sırasıyla $0, 1, 2, \ldots, 9$, ikinci satırının karelerine sırasıyla $10, 11, \ldots, 19, \ldots$, onuncu satırının karelerine sırasıyla $90, 91, \ldots, 99$ sayıları yazılmıştır. Sayıların bazılarının önüne, her satır ve her sütunda tam olarak beş tane olacak şekilde eksi işaretleri ekleyerek tüm sayıların toplamı en az kaç yapılabilir?

a) -10 **b)** -2 **c)** 2 **d)** 10 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{\text{E}}$

İşaretlerin yerlerinden bağımsız olarak tüm sayıların toplamı her zaman 0 oluyor.

Her sütunda tam olarak beş tane eksi işaret olduğuna göre, tüm sayıların birler basamaklarının toplamı sıfıra eşittir. Her satırda tam olarak beş tane eksi işaret olduğuna göre, tümm sayıların onlar basamaklarının toplamı sıfıra eşittir. Buna göre, tüm sayıların toplamı her zaman sıfıra eşittir.

Kaynak: Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri

9 $ABCD$ karesinin dışında bir E noktası verilmiştir. $m(\widehat{BEC}) = 90°$, $F \in [CE], [AF] \perp [CE], |AB| = 25$, ve $|BE| = 7$ olduğuna göre, $|AF|$ kaç birimdir?

a) 29 **b)** 30 **c)** 31 **d)** 32 **e)** 33

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

EB yi B yönünde uzatalım ve bu doğruya A dan dik indirelim. Dikmenin ayağına G diyelim. Açılar yazıldığında AGB üçgeni ile BEC üçgeninin benzer olduğunu görürüz. Ve ikisinin de hipotenüsü 25 tir yani bu üçgenler eştir. O zaman $|BE| = 7$ ise $|AG| = 7$ dir. Pisagor yapılırsa $|GB| = 24$ bulunur. Ve $|GE| = 31$ olur. $AGEF$ bir dikdörtgen olduğu için $|AF|$ de 31 dir.

10 $\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane (x, y) çözüm ikilisi vardır?

a) 8 **b)** 18 **c)** 72 **d)** 2130 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denklemini $\sqrt{x}\left(71 - \sqrt{y}\right) = 30$ şeklinde yazalım. Burada hem $\sqrt{x}$, hem de $71 - \sqrt{y}$ çarpanlarının birer tam sayı olması gerekir. Aksini varsayalım, $\sqrt{x} = a\sqrt{b}$ şeklinde a, b pozitif tam sayıları bulunduğunu varsayalım. b, 1 den büyük tam kare çarpan içermeyecek şekilde olduğunu düşünebiliriz. (Böyle sayılara *free-square* denir). Bu durumda $71 - \sqrt{y} = c\sqrt{b}$ şeklide olması gerekir ama öyle değildir, çelişki.

O halde $\sqrt{x}\left(71 - \sqrt{y}\right) = 30$ denklemini çözmek $n(71 - m) = 30$ denklemini çözmekle eşdeğerdir. 30 un pozitif bölen sayısı kadar, yani 8 tane çözüm vardır.

11 Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1, a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır?

a) 895 **b)** 900 **c)** 905 **d)** 910 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\sum_{2}^{n-1}(a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1}) = a_n - a_{n-1} + a_1 - a_2 = 7(n-2)$$

$$a_n - a_{n-1} = 7n - 10$$

$$\sum_{2}^{17}(a_n - a_{n-1}) = a_{17} - a_1 = 7(2 + 3 + \cdots + 17) - 10.(17 - 2 + 1) \Rightarrow a_{17} = 1 + 7.152 - 160 = 905$$

12 Yedi renk kullanılarak her yüzeyi farklı bir renge boyanmış kaç küp oluşturulabilir?

a) 154 **b)** 203 **c)** 210 **d)** 240 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{C}$

$\binom{7}{6} = 7$ şekilde kullanacağımız renkleri seçelim.

İlk yüzeyi ne boyadığımız önemsizdir çünkü döndürerek aynı şekli elde edebiliriz.

İlk yüzeyin karşısını 5 farklı renke boyayabiliriz. Boyadıklarımız alt ve üst tabanımız olsun.

Kalan 4 yüzü boyamayı yuvarlak masa etrafına oturacak 4 kişi gibi düşünebiliriz çünkü hiçbiri döndürme ile elde edilemez.

$7 \cdot 5 \cdot 6 = 210$

13 C açısı geniş açı olan ABC üçgeninde $D \in [AB]$ ve $[DC] \perp [BC]$ dir. $m\left(\widehat{ABC}\right) = \alpha, m\left(\widehat{BCA}\right) = 3\alpha$ ve $|AC| - |AD| = 10$ olduğuna göre $|BD|$ kaç birimdir?

a) 10 **b)** 14 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 22

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$[BD]$ nin orta noktasına E diyelim. $\angle BED = 90^\circ$ olduğundan $|BE| = |ED| = |CE|$ dir. Buna göre, $\angle CBE = \angle BCE = \alpha$ olup $\angle ACE = \angle AEC = 2\alpha$ olur. Buradan $|AC| = |AE| = |AD| + |DE| \Rightarrow |DE| = |AC| - |AD| = 10$ dur. Sonuç olarak $|BD| = 2|DE| = 20$ dir.

14 $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606}$ sayısının son üç rakamı nedir?

a) 001 **b)** 081 **c)** 561 **d)** 721 **e)** 961

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{C}$

Sayıyı asal çarpanlarına ayırırsak $7^{606} \cdot 11^{606} \cdot 13^{606} \cdot 3^{808}$ elde ederiz.

Son 3 basamağı öğrenmek için $\pmod{1000}$'de incelemeliyiz.

$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 \equiv 1 \pmod{1000}$

$7^{606} \cdot 11^{606} \cdot 13^{606} \equiv 1^{606} \equiv 1 \pmod{1000}$

Euler Teoreminden $3^{400} \equiv 3^{800} \equiv 1 \pmod{1000}$ olduğunu görürüz.

Sayımız $\pmod{1000}$'de 3^8'e eşittir.

$3^8 = 6561 \equiv 561 \pmod{1000}$

15 $a_1 = \dfrac{1}{3}$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + 13a_n^2}}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin $a_k < \dfrac{1}{50}$ koşulunu sağlayan en büyük terimi a_k ise k kaçtır?

a) 194 **b)** 193 **c)** 192 **d)** 191 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Verilen denklemin karesini alırsak

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{1+13a_n^2} \implies \frac{1}{a_{n+1}^2} = 13 + \frac{1}{a_n^2}$$

olur. Yani $b_n = \dfrac{1}{a_n^2}$ olarak tanımlarsak b_n dizisi ortak farkı 13 olan bir aritmetik dizi olacağından

$$b_n = b_1 + 13(n-1) = \frac{1}{a_1^2} + 13n - 13 = 13n - 4 \implies a_n = \frac{1}{\sqrt{13n-4}}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$a_k < \frac{1}{50} \implies 50 < \sqrt{13k-4} \implies \frac{50^2+4}{13} < k \implies 193 \leq k$$

olur. a_n ifadesi bariz bir şekilde azalan olduğundan en büyük a_k değeri k en ufakken elde edilir. Yani $k = 193$ olmalıdır.

16 50 kişilik bir sınıfta yapılan 4 soruluk bir sınavda, herhangi 40 kişiden en az 1 kişi tam olarak 3 soruyu, en az 2 kişi tam olarak 2 soruyu, en az 3 kişi tam olarak 1 soruyu doğru, en az 4 kişi ise bütün soruları yanlış çözmüştür. Tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı en az kaçtır?

a) 18 **b)** 24 **c)** 26 **d)** 28 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

40 kişilik grupta 3 doğru yapan en az 1 kişi olması için 3 doğru yapan kişi sayısı ≥ 11 olmalıdır.

40 kişilik grupta 2 doğru yapan en az 2 kişi olması için 2 doğru yapan kişi sayısı ≥ 12'dan büyük olmalıdır.

40 kişilik grupta 1 doğru yapan en az 3 kişi olması için 1 doğru yapan kişi sayısı ≥ 13'dan büyük olmalıdır.

40 kişilik grupta 0 doğru yapan en az 4 kişi olması için 1 doğru yapan kişi sayısı ≥ 14'dan büyük olmalıdır.

Topladığımızda 50 ettiği için en küçük değerleri almalıdır

1 ve 3 doğru yapan kişi sayısı 24'tür.

17 B açısı dik olan ABC üçgeninin A ve C köşeleri, B merkezli 20 birim yarıçaplı çeyrek çemberin üzerindedirler. Bu çeyrek çemberin iç bölgesine $[AB]$ çaplı bir yarım çember çizilmiştir. C noktasından yarım çembere çizilen teğetin değme noktası B'den farklı bir D noktası ve CD doğrusunun çeyrek çemberi kestiği nokta F dir. Buna göre $|FD|$ kaç birimdir?

a) 1 **b)** $\dfrac{5}{2}$ **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 4. $[AB]$ nin orta noktası E olsun. E noktası yarım çemberin merkezi olduğundan $|ED| = 10$ ve $ED \perp DC$ dir. CB ve CD doğruları çeyrek çembere teğet olduğundan $|CB| = |CD| = 20$ dir. F noktası çeyrek çember üzerinde olduğundan $|BF| = 20$ dir. $\angle BCE = \alpha$ olsun. $\angle ECD = \alpha$ olur. BFC üçgeni eşit iki açısı 2α olan ikizkenar bir üçgen olduğundan $|CF| = 2|BC|\cos 2\alpha$ olur. BEC dik üçgen olduğundan Pisagor teoreminden $|EC| = 10\sqrt{5}$ ve buradan da $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ elde edilir. Buradan da $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 3/5$ ve böylece $|CF| = 24, |FD| = 24 - 20 = 4$ olur.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

18 Kaç tane n pozitif tam sayısı için $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ tam sayıdır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ sayısının tam sayı olabilmesi için $\sqrt{n}$ sayısının tam sayı olması gerekir.

Dolayısıyla n sayısının k pozitif bir tam sayı olmak üzere $n = k^2$ şeklinde olması gerekir. n yerine k^2 yazalım. İçeride kalan $k^2 + k$ ifadesinin eşiti $k(k+1)$ olduğundan bu ifadeyi tam kare yapacak bir k pozitif tam sayısı yoktur.

19 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in (0,\infty)$ için,

$$10 \cdot \frac{x+y}{xy} = f(x) \cdot f(y) - f(xy) - 90$$

denklemini sağlıyorsa, $f\left(\frac{1}{11}\right)$ kaçtır?

a) 1 **b)** 11 **c)** 21 **d)** 31 **e)** Tek türlü bulunamaz

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x \Rightarrow y \Rightarrow 1$ koyalım.

$110 = f(1)(f(1) - 1)$ eşitliğinden $f(1) = 11$ bulunur. Şimdi de $y \Rightarrow \frac{1}{11} x \Rightarrow 1$ koyalım.

$210 = (f(\frac{1}{11})(f(1) - 1)$ eşitliğinden $f(\frac{1}{11}) = 21$ bulunur.

20 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2008}$ tam sayılarından her biri en az 1 en çok ise 5 tir. (a_n, a_{n+1}) ikilisine, $a_n < a_{n+1}$ ise artan ikili, $a_n > a_{n+1}$ ise azalan ikili diyelim. Dizideki artan ikili sayısı 103 tane ise azalan ikili sayısı en az kaçtır?

a) 21 **b)** 24 **c)** 36 **d)** 102 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{E}$

Azalan ikili sayısını az tutmak için ardarda olan artan ikililerin sayısını olabildiğince çok yapmalıyız.

$1, 2, 3, 4, 5$ dizisi ardarda olan artan ikililerin sayısının en fazla olduğu dizidir ve bu sayı 4'tür. (5'ten sonra mecburen 5 veya 5'ten küçük bir sayı geleceği için başka artan ikili olmayacaktır..)

Azalan ikili sayısının en az olduğu durumda 4 artan ikiliye 1 tane azalan ikili gelmektedir.

$\left[\left| \frac{103}{4} \right| \right] = 25$ tane azalan ikili vardır.

Son artan ikili $a_{128} - a_{129}$'dur Sonrası için $a_{129} = a_{130} = \cdots = a_{2008}$ şeklinde yazarsak istenilen duruma ulaşırız

21 ABC dik üçgeninde $m\left(\widehat{A}\right) = 90°$ olsun. $P \in [AC], Q \in [BC], R \in [AB]$ olacak şekildeki $APQR$ karesinin alanı 9, $N, K \in [BC], M \in [AB]$ ve $L \in [AC]$ olacak şekildeki $KLMN$ karesinin alanı da 8 ise $|AB| + |AC|$ kaçtır?

a) 8 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 14 **e)** 16

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 12. $|AB| = x, |BC| = y$ olsun. $\triangle QRB \sim \triangle CAB$ olduğundan $(x-3)/x = 3/y$ ve buradan da $xy = 3(x+y)$ olur. A dan geçen yüksekliğin ayağı E olsun. $\triangle MNB \sim \triangle AEB$ ve $\triangle ALM \sim \triangle ACB$ benzerliklerini kullanarak $|MB|/|AB| = |MN|/|AE|$ ve $|MA|/|AB| = |ML|/|BC|$ elde ederiz. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayıp $|BC| = \sqrt{x^2+y^2}$ ve $|AE| = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ eşitliklerini kullanarak $\sqrt{2}/4 = 1/\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}/xy$ denklemini buluruz. $x+y = a$ dersek $xy = 3a$ ve $\sqrt{x^2+y^2} = a^2 - 6a$ olacağından son denklem $\sqrt{2}/4 = 1/\sqrt{a^2-6a} + \sqrt{a^2-6a}/(3a)$ şeklindedir. Bu denklemi düzenlersek $4(a-3) = 3\sqrt{2a^2-12a}$ elde ederiz. Buradan da her iki tarafın karesini alarak $(a-12)(a+6) = 0$ ve $a > 0$ olduğundan $|AB| + |BC| = a = 12$ buluruz.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

22 Kaç $a \geq b$ şartını sağlayan (a, b) pozitif tam sayı ikilisi için $a^2 + b^2$ ifadesi $a^3 + b$ ve $a + b^3$ ifadelerini böler?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 1. Bir p asal sayısı ve bir $s \geq 1$ tam sayısı için, ebob(a, b) nin p^x şeklindeki en büyük çarpanı p^s olsun. O zaman $a^3 + b$ ve $a + b^3$ ifadelerinin en az birinde p^x şeklindeki en büyük çarpan da p^s olacaktır. $p^{2s} \mid a^2 + b^2$ olduğuna göre, bu $a^2 + b^2$ nin $a^3 + b$ ve $a + b^3$ ifadelerini bölmesi ile çelişir. Demek ki a ve b sayıları aralarında asaldır. $a^2 + b^2$ sayısı $a\left(a^2+b^2\right) - \left(a^3+b\right) = b(ab-1)$ sayısını bölüyor. b ve $a^2 + b^2$ aralarında asal olduğuna göre, $a^2 + b^2$ sayısı $ab - 1$ sayısını bölüyor. $ab > 1$ olursa, $a^2 + b^2 \geq 2ab > ab - 1$. Demek ki tek seçenek $a = b = 1$ olur.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

23 a, b, c, d gerçel sayıları $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \dfrac{2}{5} = 0$ eşitliğini sağlıyorsa a kaçtır?

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{1}{5}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

Birinci Yol: Verilen ifadeyi tamkarelerin toplamı olarak yazmaya çalışalım.

$$a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + c^2 + d^2 - bc - cd - d + \frac{2}{5} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} - bc + \frac{c^2}{3} + \frac{2c^2}{3} + d^2 - cd - d + \frac{2}{5}$$

$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 + \frac{2c^2}{3} - cd + \frac{3}{8}d^2 + \frac{5}{8}d^2 - d + \frac{2}{5}$$

$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}d - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$$

olacaktır. Dolayısıyla bu ifade 0 ise

$$a - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{\sqrt{3}}c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}d - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0$$

Bu eşitliklerden $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{5}$ ve $d = \frac{4}{5}$ olacaktır.

İkinci Yol: Verilen denklemi a'ya bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünelim. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta_1 = b^2 - 4\left(b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - d + \frac{2}{5}\right) = -3b^2 - 4c^2 - 4d^2 + 4bc + 4cd + 4d - \frac{8}{5}$$

Bu diskriminant negatif olmamalıdır. Bu diskriminantı da b'e bağlı ikinci dereceden denklem olarak düşünürsek, başkatsayısı negatif olduğundan b değeri bu denklemin iki kökünün arasında değer almalıdır. Yani bu denklemin de kökü olmalıdır. Bu da diskriminantının negatif olmaması demektir.

$$\Delta_2 = 16c^2 + 12\left(-4c^2 - 4d^2 + 4cd + 4d - \frac{8}{5}\right) = -32c^2 - 48d^2 + 48cd + 48d - \frac{96}{5}$$

Benzer şekilde bu denklemi de c'ye bağlı ikinci dereceden denklem olarak düşünürsek diskriminantı negatif olmamalıdır. 16'ya bölüp diskriminantını alalım.

$$\Delta_3 = 9d^2 + 8\left(-3d^2 + 3d - \frac{6}{5}\right) = -15d^2 + 24d - \frac{48}{5} = -15\left(d - \frac{4}{5}\right)^2$$

Bu diskriminantın negatif olmaması için $d = \frac{4}{5}$ olmalıdır. Bunu önce Δ_2'de sonra da Δ_1'de yazarsak $b = \frac{2}{5}$ ve $c = \frac{3}{5}$ olacaktır. Bu değerleri ana denklemde yazınca da $a = \frac{1}{5}$ olacaktır.

Birinci yol daha kolay olsa da iki yol da çözüm olarak incelenmeli.

Çözüm 2:

$f(a,b,c,d) = \frac{\left(a-\frac{1}{5}\right)^2+\left(b-a-\frac{1}{5}\right)^2+\left(c-b-\frac{1}{5}\right)^2+\left(d-c-\frac{1}{5}\right)^2+\left(d-\frac{4}{5}\right)^2}{2} = 0$

$a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{2}{5}$, $d = \frac{4}{5}$.

Kaynak: AoPS

Çözüm 3:

Bu tür soruların çözümünde kolaylık sağladığını düşündüğüm ve kullandığım yöntem şöyledir:

Dördüncü Yol: $S = a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}$ ifadesine bakalım. Buradaki a,b,c,d bilinmeyenleri arasında en az sayıda terimde bulunan var mı diye bakalım.

a için bakarsak: $a^2, -ab$ terimlerinin sayısı 2 dir.

b için bakarsak: $b^2, -ab, -bc$ terimlerinin sayısı 3 tür. Diğer bilinmeyenler için de bu sayı 3 tür.

O halde a bilinmeyeni ile tam kareye tamamlama işlemine başlıyorum. (Hepsinden eşit sayıda, örneğin 3'er tane olursa hangi bilinmeyenden başladığınız çözüm yolunun kolaylık/zorluk durumuna etki etmez. O durumda katsayılar arasında çözümü kolaylaştırıcı başka özellikler yakalamayı denerim.) a^2-ab var elimizde. $\frac{b^2}{4}$ ekleyip çıkaracağız. $S = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + \cdots$ olur.

Bizi işlem hatalarından koruyabilecek bir başka kullanışlı püf noktamız da şudur: $\frac{3b^2}{4} - bc$ ifadesini tam kareye tamamlarken önce $\frac{3}{4}\left(b^2 - \frac{4}{3}bc\right)$ yazalım ve şimdi parantezin içine $\frac{4c^2}{9}$ ekleyip çıkaralım. Yani

$\frac{3}{4}\left(b^2-\frac{4}{3}bc+\frac{4c^2}{9}-\frac{4c^2}{9}\right)=\frac{3}{4}\left(b-\frac{2c}{3}\right)^2-\frac{1}{3}c^2$ olur. Köklü ifadelerden kaçınmış olduk. $S=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2c}{3}\right)^2+\frac{2}{3}c^2-cd+d^2-d+\frac{2}{5}$ olur.

Bizi köklü ifade yazma sıkıntısından kurtaran bu püf noktasını tekrar uygulayalım: $\frac{2}{3}c^2-cd=\frac{2}{3}\left(c^2-\frac{3}{2}cd\right)=\frac{2}{3}\left(c^2-\frac{3}{2}cd+\frac{9}{16}d^2\right)-\frac{3}{8}d^2$ dir. $S=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2c}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(c-\frac{3d}{4}\right)^2+\frac{5}{8}d^2-d+\frac{2}{5}$ olur.

Son olarak $\frac{5}{8}d^2-d+\frac{2}{5}=\frac{5}{8}\left(d^2-\frac{8}{5}d+\frac{16}{25}\right)=\frac{5}{8}\left(d-\frac{4}{5}\right)^2$ biçiminde tam kareye tamamlarsak,

$$S=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2c}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(c-\frac{3d}{4}\right)^2+\frac{5}{8}\left(d-\frac{4}{5}\right)^2$$

elde edilir. $S=0$ olması için gerek ve yeter şart tam kare ifadelerin 0 a eşit olmasıdır. $d=\frac{4}{5}$ olur. Bunu kullanarak $c=\frac{3}{5}$, $b=\frac{2}{5}$, $a=\frac{1}{5}$ değerlerine ulaşılır.

Not: Bu türdeki çok bilinmeyenli bir denklemde, bilinmeyenlerden birini çözmemiz isteniyorsa tam kareler toplamı 0 a eşitlenmiş bir ifade aramamız gerektiğini hissedebiliriz. Örneğin $x^2+2y^2+5z^2=1$ türündeki bir denklem uzayda elipsoid yüzeyi belirttiği için yüzey üzerinde sonsuz çoklukta nokta vardır. "x kaçtır?" şeklinde bir soru sormak mantıklı değildir. Fakat $x^2+2y^2+5z^2=0$ türündeki bir denklem uzayda nokta belirtir ve $(x,y,z)=(0,0,0)$ tek çözümdür. "x kaçtır?" gibi bir soru sormak artık mantıklıdır.

24 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ve a_6 sayıları $\{-1,0,1\}$ kümesinin elemanları olmak üzere,

$$a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3+a_4\cdot5^4+a_5\cdot5^5+a_6\cdot5^6$$

ifadelerine bakalım.Bu ifadelerin kaç tanesi negatif değer alır?

a) 121 **b)** 224 **c)** 275 **d)** 364 **e)** 375

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{D}$

$5^1+5^2+5^3+5^4+5^5<5^6$ olduğu için 5^6 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3+a_4\cdot5^{43}+a_5\cdot5^5<|-5^6|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^5 değer alır.

Eğer 1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3+a_4\cdot5^4+a_5\cdot5^5<5^6$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise $5^1+5^2+5^3+5^4<5^5$ olduğu için 5^5 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3+a_4\cdot5^4<|-5^5|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^4 değer alır.

Eğer 1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3+a_4\cdot5^4<5^5$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise $5^1+5^2+5^3<5^4$ olduğu için 5^4 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3<|-5^4|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^3 değer alır.

Eğer 1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5^3<5^4$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise $5^1+5^2<5^3$ olduğu için 5^3 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2<|-5^3|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^2 değer alır.

Eğer 1 ise $a_1\cdot5^1+a_2\cdot5^2<5^3$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise $5^1<5^2$ olduğu için 5^2 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $a_1 \cdot 5^1 < |-5^2|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^1 değer alır.

Eğer 1 ise $a_1 \cdot 5^1 < 5^2$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise $0 < 5^1$ olduğu için 5^1 katsayısı üzerinden gidelim.

Eğer -1 ise $0 < |-5^1|$ olduğu için sayı her zaman negatiftir. 3^0 değer alır.

Eğer 1 ise $0 < 5^1$ olduğu için sayı her zaman pozitiftir.

Eğer 0 ise ifademizde 0 olur.

Sonuç:$3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 = \dfrac{3^6 - 1}{3 - 1} = 364$

$\boxed{25}$ O merkezli çemberde $[AB]$ çaptır.C ve D noktaları çember üzerinde $[AB]$ çapına göre farklı yarım çemberler üzerindedir.B den $[CD]$ ye inen dikmenin ayağı H olsun.$|AO| = 13$, $|AC| = 24$ ve $|HD| = 12$ olduğuna göre, DCB açısı kaç derecedir?

a) 30 **b)** 45 **c)** 60 **d)** 75 **e)** 80

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 30. ACB dik üçgen olup Pisagor teoreminden $|BC| = 10$ olur. $\angle CAB = \angle CDB$ olduğundan $\triangle ACB \sim \triangle DHB$ olur. Buradan da $|HB|/12 = 10/24$ ve $|HB| = 5$ olur. CHB dik üçgeninde $|HB| = |BC|/2$ olduğundan $\angle DCB = \angle HCB = 30°$ bulunur.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

$\boxed{26}$

$$A = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{3! \cdot 4!} + \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{4! \cdot 5!} + \frac{4^2 + 3 \cdot 4 + 1}{5! \cdot 6!} + \cdots + \frac{10^2 + 3 \cdot 10 + 1}{11! \cdot 12!}$$

toplamı için $11! \cdot 12! \cdot A$ sayısını 11 e bölünce kalan nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 8 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

İfademiz genel olarak $\dfrac{k^2 + 3k + 1}{(k+1)!(k+2)!}$ şeklindedir.

Düzenlersek;

$\dfrac{k^2 + 3k + 1 + 1 - 1}{(k+1)!(k+2)!} \Rightarrow \dfrac{(k+1)(k+2) - 1}{(k+1).k!.(k+2).(k+1)!} \Rightarrow 11!.12!.A \equiv \dfrac{11!.12!}{2!.3!} - 1 \equiv 10 \pmod{11}$ bulunur.

$\boxed{27}$ Bir üçgenin açıları olan α, β, γ bir aritmetik dizi oluşturuyorlar. $\sin 20\alpha$, $\sin 20\beta$ ve $\sin 20\gamma$ da aritmetik dizi oluşturuyorsa, α kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Soruda α, β, γ için bu sırada aritmetik dizi oluşturup oluşturmadığını söylemediğinden herhangi bir sırada oluşturabildiklerini düşünüyorum.

Genelliği bozmadan $\alpha \le \beta \le \gamma$ diyelim, daha sonra bulgular üzerinden diğer durumlar için de sonuç bulabiliriz. $\alpha = \beta - x$ ve $\gamma = \beta + x$ yazarsak, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ olduğundan $\beta = \frac{2\pi}{3}$ bulunur. Açılar üçgen açıları olduğundan $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$ olmalıdır.

$$\sin 20\beta = \sin \frac{40\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eğer $\sin 20\alpha + \sin 20\gamma = 2 \sin 20\beta$ ise

$$\sin\left(\frac{40\pi}{3} + 20x\right) + \sin\left(\frac{40\pi}{3} - 20x\right) = 2\sin\frac{40\pi}{3}\cos 20x$$

olduğundan

$$2\sin 20\beta = \sin\frac{40\pi}{3} = 2\sin\frac{40\pi}{3}\cos 20x \implies \cos 20x = 1 \implies 20x = 2\pi n \implies x = \frac{\pi n}{10}$$

olarak bulunur ($n \in \mathbb{Z}$). $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$ olduğunu göz önünde bulundurursak

$$0 \le \frac{\pi n}{10} < \frac{2\pi}{3} \implies 0 \le n < \frac{20}{3} \implies 0 \le n \le 6$$

Dolayısıyla en az 7 adet n değeri ve burada gelen 7 adet x değeri vardır. Cevap her türlü hiçbiri olacağından diğer durumlara bakmaya gerek yoktur. 7'den fazla çözüm vardır.

28 8×8 bir satranç tahtasının bir köşesinden bir birim kare kesilip atıldığında kalan şekli eşit alanlı üçgenlere bölmek için en az kaç üçgen gerekir?

a) 17 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 21 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 18. Üçgenlerden birinin bir kenarı kesilip atılmış birim karenin bir kenarının üzerinde yerleşecektir. Bu nedenle üçgenlerin alanları en fazla $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 = \frac{7}{2}$ olacaktır. Buna göre, en az $63 \cdot \frac{2}{7} = 18$ üçgen gerekiyor. 18 üçgen örneğini vermek için satranç tahtasının kalan kısmını 9 tane 1×7 dikdörtgene ayırıp bu dikdörtgenlerin her birini iki eşit üçgene bölmek gerekiyor.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

29 $ABCD$ konveks dörtgeninde $[AB]$ ile $[CD]$ paralel değildir. $[AD]$ nin orta noktası $E, [BC]$ nin orta noktası F dir. $|CD| = 12, |AB| = 22$ ve $|EF| = x$ olduğuna göre, x in alabileceği tam sayı değerlerin toplamı kaçtır?

a) 110 **b)** 114 **c)** 118 **d)** 121 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 121. $[AC]$ kösggeninin orta noktası G olsun. $EG \parallel DC$ ve $FG \parallel AB$ olur. Buradan da $|EG| = 6, |GF| = 11$ dir. AB ile CD paralel olmadığı için E, G, F doğrusal olamaz. Buradan da EGF üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $5 < x < 17$ elde ederiz. Bu aralıktaki her x tam sayısı için şartları sağlayan bir dörtgen çizilebilir. x in alabileceği değerler $6, 7, \ldots, 16$ olup bu sayıların toplamı 121 dir.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

$\boxed{30}$ İlk terimi pozitif tam sayı olan bir dizide, her terime en büyük rakamı eklenerek bir sonraki terim elde ediliyor. Bu dizinin en çok kaç ardışık terimi tek sayı olabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 5. $\{857, 865, 873, 881, 889\}$ dizisinin istenilen koşulu sağladığı açıktır. Dizimizde 6 tane ardışı terimin tek sayı olamayacağını gösterelim, aksini varsayalım. Dizinin ardışık üç elemanı a, b, c tek sayılarını alalım. a ve b nin en büyük rakamları x ve y olsun. x ve y çift sayılar olduğundan, a ve b nin son basamakları olamazlar. Ek olarak, a ve b nin tüm rakamları 9 dan küçüktür, bu da a ve b nin son iki basamak haricinde aynı olduğunu gösterir.

- $x < y$ ise, y rakamı b nin son iki rakamından biri olmak zorundadır. b sayısı tek sayı olduğundan y rakamı b nin sondan ikinci rakamı olur. Diğer taraftan, x ve y çift sayılar olduğundan $x \le y - 2$ olur. a nın sondan ikinci rakamı en fazla x olabileceğinden $x = b - a > 10$ olup çelişki elde ederiz.
- $x > y$ ise, x rakamı a nın son iki rakamından biri olmak zorundadır. a sayısı tek sayı olduğundan x rakamı a nın sondan ikinci rakamı olur. $x \le 8$ olduğundan, b nin sondan ikinci rakamı x veya $x + 1$ olup, $x > y$ koşulu ile çelişir.

Buradan, dizimizin ardışık 6 tek sayı terimi bir aritmetik dizi oluşturmak zorundadır, ortak farka d diyelim. $d \le 8$ olduğundan dizimizin ilk beş teriminin son rakamları $\{1, 3, 5, 7\}$ olabilir. Güvercin yuvası prensibinden, ilk beş terim arasında son rakamları aynı olan iki terim elde ederiz. Dolayısıyla, iki terim arasındaki olası farkların oluşturduğu $\{d, 2d, 3d, 4d\}$ kümesinden en az bir sayı 10 ile bölünmelidir, bu da d nin 5 ile bölünmesini gerektirir. d sıfırdan farklı çift bir rakam olduğundan bu imkansızdır. Sonuç olarak, dizimizde en fazla 5 ardışık terim tek sayı olabilir.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

$\boxed{31}$ $xy = 1$ koşulunu sağlayan her x, y gerçel sayıları için,

$$\left((x+y)^2+4\right)\left((x+y)^2-2\right) \ge A.(x-y)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, A sayısının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

a) 12 **b)** 14 **c)** 16 **d)** 18 **e)** 20

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

$x + y = m$ diyelim. Bizim $\left((x+y)^2+4\right)\left((x+y)^2-2\right) \ge A.[(x+y)^2-4]$ göstermemiz gerekir. $(x+y)^2 \ge 4xy = 4$ biliyoruz. O halde $(x+y)^2 = m^2 = N$ için $\dfrac{(N+4)(N-2)}{N-4}$ en küçük değerini bulmalıyız. $10 + (N - 4 + \dfrac{16}{N-4}) \ge^{A.G.O}$ 18 dir. Eşitlik $x = y = \sqrt{17} + 4$ için sağlanır. $A \le 18$ idir.

Çözüm 2:

$(x-y)^2 = t$ diyelim. Buna göre eşitsizlik şuna dönüşür:

$$(t^2+8)(t^2+2) \geq A \cdot t^2$$

eşitsizliğini her x ve y için sağlayan maksimum A değerini bulmaya dönüşür. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'nden $(t^2+8)(2+t^2) \geq 18t^2$ olduğundan $A \leq 18$ dir. Eşitlik durumu $(x,y) = (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$ iken sağlanır.

32 $n \geq 4$ kişilik bir partide, her 3 kişinin tam olarak 1 ortak arkadaşı varsa n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{A}$

Kişilerimiz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olmak üzere a_1 ile a_2 arkadaş olsun.

$a_1 - a_2 - a_k$ üçlüsünde hiçbir a_k, a_1 ile arkadaş değildir. $k = 3$ için bakalım.

$a_1 - a_3 - a_l$ üçlüsünde $l \neq 2$ olmak üzere a_1 ile hiçbir a_l arkadaş değildir. O zaman a_3 ile her a_l arkadaştır. (a_3, a_1 ve a_2 dışındaki kişiler ile arkadaştır.)$l = 4$ için bakalım.

Elimizde a_1, a_2, a_3, a_4 kişileri var.

Eğer $a_3 - a_4 - a_m$ üçlüsüne bakacak olursak a_3 ile a_4 arkadaş olduğu için a_m ile a_3 arkadaş değildir.

a_3 ile arkadaş olmayan sadece a_1 ve a_2 olduğu için a_m bunlardan biridir.

En fazla 4 kişi olacağını görürüz.

Koşulumuza olan $n \geq 4$'a uyarsak n sadece 4'tür.

33 E noktası $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde olmak üzere, $|AE| = |EB|$, $m(\widehat{EAB}) = 12°$ ve $m(\widehat{DAE}) = 72°$ dir. Buna göre, $m(\widehat{CDE})$ kaç derecedir?

a) 64 **b)** 66 **c)** 68 **d)** 70 **e)** 72

Çözüm:

F noktası $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde olmak üzere, EAB üçgenine eş olan FDA üçgenini oluşturalım. $\angle FAE = 60°$ ve $|AF| = |AE|$ olacağından AEF üçgeni eşkenar üçgendir. Yani $|FD| = |FE|$ olacaktır. $\angle FDE = \angle FED = 18°$ olduğunu ADE üçgeninin iç açılarından bulabiliriz. Buna göre $\angle ADE = 30°$ dir. $AB \parallel DC$ olduğundan $\angle BAD + \angle ADC = 180°$ olur. O halde $\angle CDE = 66°$ dir.

34 Ondalık yazılımında 0 dan farklı olan tüm rakamlarına bölünen pozitif bir tam sayıya "özel sayı" diyelim. En fazla kaç ardışık özel sayı vardır?

a) 9 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

13'den fazla olamayacağını gösterelim. Aksini varsayalım. n, $n+1, \ldots,$ $n+13$ sayıları özel sayıysa bunlar arasında son basamağı $3, 4, 6, 7, 8, 9$ olan sayılar vardır ama bu sayılardan birer tane olmalıdır çünkü k ile $k+10$ sayılarının ikisinin de son aynı basamağı aynıdır ve ikisinin de özel sayı olması için son basamağı sıfır veya 10'un bir böleni olmalıdır. Dolayısıyla en uzun ardışık sayı dizisi için son basamaklar $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2$ veya bunların çembersel permütasyonu olmalıdır. 14 adet ardışık sayıya ulaşılamaz, bu bir çelişkidir. Yani en fazla 13 tane ardışık sayı olabilir.

Örnek bulmaya çalışalım. $n = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ adet } 1}000$ formatında olsun. Eğer k'yı 9'un katı alırsak $n+7$ haricinde sorun olmayacaktır. $7 \mid n+7$ veya denk olarak $7 \mid \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ adet } 1}$ olacak şekilde bir $9 \mid k$ seçmeye çalışmalıyız.

$$\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ adet } 1} \equiv \frac{10^k-1}{9} \equiv 0 \pmod 7 \implies 10^k \equiv 3^k \equiv 1 \pmod 7 \implies k \equiv 0 \pmod 6$$

olduğundan $k = 18$ seçersek $n, n+1, \ldots,$ $n+12$ sayıları özel sayı olacaktır.

35 x bir gerçel sayı ise $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) $\sqrt{39}$ **b)** 6 **c)** $\frac{43}{6}$ **d)** $2\sqrt{2}+\sqrt{13}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58} = \sqrt{(x-3)^2+2^2}+\sqrt{(x-7)^2+3^2}$ olarak yazalım. Analitik düzlemde x ekseni üzerindeki değişken bir $P(x,0)$ noktası ve sabit $A(3,2)$, $B(7,3)$ noktalarını gözönüne alalım. $|PA| = \sqrt{(x-3)^2+2^2}$ ve $|PB| = \sqrt{(x-7)^2+3^2}$ olduğundan $f(x) = |PA|+|PB|$ olur. B noktasının x eksenine göre simetrisi $C(7,-3)$ olsun. $|PB| = |PC|$ olduğundan $f(x) = |PA|+|PC|$ yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden $|PA|+|PC| \le |AC| = \sqrt{41}$ dir. Eşitlik hali A, P, C doğrusal iken sağlanır. Yani $f_{\min} = \sqrt{41}$ dir.

36 Üst üste dizilmiş 2008 madeni paranın bulunduğu bir beyaz masa ve iki boş siyah masadan başlayarak, her hamlede herhangi bir masadaki en üst pozisyondaki parayı alıp herhangi bir boş masaya veya herhangi bir masadaki en üst pozisyona yerleştirerek, en az kaç hamlede tüm paralar beyaz masaya ters sırada yerleştirilebilir?

a) 6016 **b)** 6017 **c)** 6022 **d)** 6023 **e)** 6024

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 6022. n tane madeni para için cevabın $3n-2$ olduğunu kanıtlayacağız. İlk olarak bunun için $3n-2$ hamlenin yeterli olduğunu gösterelim. Beyaz masa B, diğer masalar S_1 ve S_2 olsun. En üstteki parayı S_1 e, kalan paraları S_2 ye, S_1 deki parayı B ye, S_2 deki $n-1$ tane paranın $n-2$ tanesini S_1 e, S_2 deki tek parayı B ye ve S_1 deki paraları B ye yerleştirirsek paralar $1+(n-1)+1+(n-2)+1+(n-2) = 3n-2$ hamle sonucunda beyaz masaya ters sırada yerleşmiş olur. Şimdi gereken hamle sayısının $3n-2$ den az olamayacağını gösterelim. Her madeni paraya hamle uygulanacağı için 2 den az hamle uygulanmış madeni para yoktur. Toplam hamle sayısı $3n-2$ den az olursa, 2 hamle uygulanmış en az 3 madeni para olacaktır. Bu 3 madeni paranın ikisi aynı siyah masaya taşınmıştır ve demek ki hamleler bittiğinde bu iki paranın B masasındaki sıraları değişmemiştir, çelişki.

Kaynak: Tübitak 16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2008

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2009

$\boxed{1}$ $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üstünde bir E noktası ve $[ED]$üstünde bir F noktası için $|DF| = |BF|$ ve $|EF| = |BE|$ ise $m\left(\widehat{DFA}\right)$ nedir?

a) 45° **b)** 60° **c)** 75° **d)** 80° **e)** 85°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$m\left(\widehat{FBD}\right) = m\left(\widehat{FDB}\right)$ ve $m\left(\widehat{EBF}\right) = m\left(\widehat{EFB}\right) = 2.m\left(\widehat{FBD}\right)$ dir. Buradan, $m\left(\widehat{EFB}\right) = 30°$ dir. $ABFD$ deltoit olduğundan $m\left(\widehat{DFA}\right) = m\left(\widehat{BFA}\right) = 75°$ dir.

$\boxed{2}$ $a^2 + b^4 = 5^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, n) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$a = 2\cdot 5^{2x}, b = 5^x$ alırsak $4\cdot 5^{4x}+5^{4x} = 5.5^{4x} = 5^{4x+1} = 5^n \Rightarrow n = 4x+1$ olup $x \in \mathbb{Z}^+$ için $(2\cdot 5^{2x}, 5^x, 4x+1)$ olacak şekilde sonsuz çözüm vardır.

Çözüm 2:

$3^2 + 2^4 = 5^2$ olduğu için $(3, 2, 2)$ bir çözüm. k negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere; her tarafı 5^{4k} ile çarparsak, $(3\cdot 5^{2k}, 2\cdot 5^k, 4k+2)$ üçlüsü de bir çözüm olacak.

$\boxed{3}$ $x = \sqrt[3]{11+\sqrt{337}} + \sqrt[3]{11-\sqrt{337}}$ olduğuna göre $x^3 + 18x$ kaçtır?

a) 24 **b)** 22 **c)** 20 **d)** 11 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$a+b+c = 0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$ özdeşliğini kullanalım. $\sqrt[3]{11+\sqrt{337}} + \sqrt[3]{11-\sqrt{337}} + (-x) = 0$ olduğundan, $(11+\sqrt{337})+(11-\sqrt{337})+(-x^3) = 3(-x).(\sqrt[3]{11+\sqrt{337}}).(\sqrt[3]{11-\sqrt{337}}) = 3.(-x).(-6) = 18x$. Buna göre $x^3 + 18x = 22$ dir.

$\boxed{4}$ Biri 5 diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük tam sayı kaçtır?

a) 82 **b)** 47 **c)** 45 **d)** 42 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$A = 5k + 7m$ olacak şekilde k ve m sayma sayılarını arayacağız ; fakat bileşik olması gerektiğinden k ve m 1'den büyük olmalıdır.

82 ve 45 sayıları koşula uygun olarak yazılabilir. 47 ve 42 ise yazılamaz. Öyleyse cevap ya 47 ya da hiçbiri olacaktır. 42 olamaz ; çünkü 47 daha büyüktür. Eğer cevap 47 ise 47'den büyük tüm doğal sayılar yazılabilir. Eğer $48, 49, 50, 51, 52$ sayılarını $5k + 7m$ şeklinde yazarsak cevap 47 olur ; çünkü 48 yazılabilirse 53 de yazılabilir tek yapılması gereken k'yi 1 artırmaktır. Benzer mantıkla $49 + 5 = 54, 50 + 5 = 55, 51 + 5 = 56, 52 + 5 = 57$ yazılabilir . Bu işleme devam edilerek 47'den büyük tüm doğal sayılar yazılabilir.

$48 = 5.4 + 7.4$, $49 = 5.7 + 7.2$, $50 = 5.3 + 7.5$, $51 = 5.6 + 7.3$ ve $52 = 5.2 + 7.6$ olduğundan gerçekten de 47'den büyük tüm doğal sayılar koşula uygun olarak yazılabilir. Cevap B

5 Bir dik üçgenin hipotenüse ait dış teğet çemberinin yarıçapı 30 ise, bu üçgenin çevresinin uzunluğu kaçtır?

a) 40 **b)** 45 **c)** 50 **d)** 60 **e)** 75

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

ABC üçgeninde A ya nazaran dış teğet çemberin yarıçapı r_a ve $Ç(ABC) = 2u$ olmak üzere, $\tan\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{r_a}{u}$ olur. $m(\widehat{A}) = 90°$ alınırsa $r_a = u \Rightarrow Ç(ABC) = 2r_a = 60$ olur..

6 $a^2b + ab^2 = 2009201020092010$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Denklem düzenlenirse , $ab(a + b) \equiv 1 \pmod 3$ elde edilir. Burada $a \equiv 0, 1 \pmod 3$ ise çözüm gelmez.

$a \equiv 2 \pmod 3$ ise, $b \equiv 2 \pmod 3$ olması gerekir. Fakat denklemde. Yerine yazılırsa $\pmod 3$ te kalanın 7 olduğu görülür ve buradan da çözüm gelmez. Yani denklemin çözümü yoktur.

7 $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 15$ ve $x^3 + 4x^2 - x - 10$ polinomlarının ortak olmayan gerçel köklerinin çarpımı kaçtır?

a) -4 **b)** 4 **c)** -6 **d)** 6 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3)(x^2 + 2x - 5)$ ve $x^3 + 4x^2 - x - 10 = (x + 2)(x^2 + 2x - 5)$ olup polinomların ortak olmayan kökleri $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2$ dir. Bu değerlerin çarpımları 6 dır.

8 $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi iki alt kümeye nasıl ayrılırsa ayrılsın, alt kümelerden en az birindeki iki farklı elemanın toplamı bir tam kare oluyorsa, n en az kaçtır?

a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 16 **e)** 17

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

A ve B gibi iki küme alalım.

Bu kümelere elemanları şu kuralla yerleştireceğiz. Bir kümeye yerleştirdiğimiz elemanı toplamda tam kare yapan en küçük elemanı diğer kümeye alacağız.

1' i A kümesine alırsak 3'ü B kümesine almalıyız. 3 elemanı B de ise 6 da A kümesinde olmalıdır. Benzer şekilde 10 , B de ve 15 de A da olur ki A kümesindeki 1 elemanı ile birlikte tam kare oluştururlar.

O halde en az $n = 15$ de istenen sağlanmaktadır.

$n = 14$ için örnek durum, $A = \{1, 2, 4, 6, 9, 11, 13\}$, $B = \{3, 5, 7, 8, 10, 12, 14\}$ şeklindedir.

9 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası E olmak üzere, AEB, BEC, CED ve DEA üçgenlerinin çevre uzunlukları

birbirlerine eşittir. AEB, BEC ve CED üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla, $3, 4$ ve 6 ise, DEA üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı kaçtır?

a) $\frac{9}{2}$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** $\frac{13}{3}$ **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Bahsi geçen üçgenlerin alanları arasında $A(AEB) \cdot A(CED) = A(BEC) \cdot A(DEA)$ eşitliği geçerlidir.

Bir üçgenin alanı yarı çevresi ile, iç teğet çember yarıçapının çarpımına eşittir.

Üçgenlerin çevreleri eşit verildiğine göre yarıçapları çarpımı da eşit olacaktır. Bu sebepten aranan yarıçap r olmak üzere;

$4 \cdot r = 3 \cdot 6 \Rightarrow r = 9/2$

10 n tam sayısının kaç farklı değeri için, $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$ sayısı asaldır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7 = (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + 5n + 7)$ şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz.

$n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0, n = 1$ olup verilen ifade 7 ve 13 olur.

$n^2 + 5n + 7 = 1 \Rightarrow n = -2, n = -3$ olup verilen ifade 7 ve 13 olur.

İfadelerin -1 e eşit olduğu durumlarda, $\Delta < 0$ olacağı için, oradan çözüm çıkmaz.

O halde n in $-3, -2, 0, 1$ değerleri için verilen ifade asal olmaktadır.

11 Her n pozitif tam sayısı için $a_n \neq 0$ ve $a_n a_{n+3} = a_{n+2} a_{n+5}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinde $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 = 6$ ise, $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{41}a_{42}$ toplamı kaçtır?

a) 21 **b)** 42 **c)** 63 **d)** 882 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Deneme yanılma tarzı sayılabilecek bir çözüm şöyle olabilir:

$a_{2k} = 2$ ve $a_{2k-1} = 1$ olsun. O zaman soruda verilen iki koşul da sağlanır. İstenen toplam da $2 + 2 + \ldots + 2$ olur. Burada 21 tane 2 var. Öyleyse cevap $21.2 = 42$ olur. Cevap B.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

$a_n a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+5}$ ifadesinde n yerine $n+1$ ve $n+2$ koyarak

$$a_n a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+5}$$

$$a_{n+1}a_{n+4} = a_{n+3}a_{n+6}$$

$$a_{n+2}a_{n+5} = a_{n+4}a_{n+7}$$

olup bu üç eşitliği taraf tarafa çarparsak

$a_n a_{n+1} = a_{n+6}a_{n+7}$ olur. Dolayısıyla $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 = a_7a_8 + a_9a_{10} + a_{11}a_{12} = \cdots = a_{37}a_{38} + a_{39}a_{40} + a_{41}a_{42} = 6$ dır. Buna göre

$a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{41}a_{42} = 6 \cdot 7 = 42$ dir.

12 Tam olarak yedi farklı rakamın kullanıldığı kaç tane sekiz basamaklı sayı vardır?

a) $\binom{9}{3}^2 \cdot 6! \cdot 3$ **b)** $\binom{8}{3}^2 \cdot 7!$ **c)** $\binom{8}{3}^2 \cdot 7! \cdot 3$ **d)** $\binom{7}{3}^2 \cdot 7!$ **e)** $\binom{9}{4}^2 \cdot 6! \cdot 8$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

0 ların durumuna göre inceleme yapacağız.

Eğer hiç 0 yoksa, 9 rakamdan 7 tanesini $\binom{9}{7}$ farklı biçimde, ilk basamağı $\binom{7}{1}$ şekilde, ve geri kalanlan rakamları da Tekrarlı permütasyonla, $\dfrac{8!}{2!}$ şeklinde seçmek mümkün. Toplam

$$\binom{9}{7} \cdot \binom{7}{1} \cdot \frac{8!}{2!}$$

şeklinde dizmek mümkün.

Şimdi de bir tane 0 olan durumlara bakacağız.

0 ı seçtiğimiz için geri kalan 6 farklı rakamı $\binom{9}{6}$ farklı biçimde seçebiliriz. İlk basamakta 0 olamayacağından, ilk basamaktaki rakamı $\binom{6}{1}$ farklı şekilde seçebiliriz. Benzer düşünceyle tekrarlı permütasyonla geri kalan rakamları $\dfrac{7!}{2!}$ şeklinde dizebiliriz. toplam:

$$\binom{9}{6} \cdot \binom{6}{1} \cdot \frac{7!}{2!}$$

şeklinde dizebiliriz.

Eğer 2 tane birden 0 var ise, 7 farklı rakamdan geriye kalan 6 rakamı $\binom{9}{6}$ farklı biçimde dizelim. 0 lar hariç diğer rakamları dizelim. Bunu 6! şeklinde yapabiliriz. Rakamların sağ taraftlarında kalan 6 farklı boşluğa 6 farklı şekilde 0 rakamını yerleştirebiliriz. Elimizde 1 tane daha 0 var. Bunu da 7 farklı yere koyarız fakat ilk koyduğumuz 0 rakamının iki tarafına 0 koyarsak, farklı bir dizilim elde edemeyiz, o zaman ikiye bölmeliyiz. O halde toplam :

$$\binom{9}{6}.6!\frac{6.7}{2}$$

farklı şekilde gerçekleştirebiliriz.

Bizden istenen dizilim $\binom{9}{7}.\binom{7}{1}.\frac{8!}{2!}+\binom{9}{6}.\binom{6}{1}.\frac{7!}{2!}+\binom{9}{6}.6!\frac{6.7}{2}=\binom{9}{7}.7.\frac{8!}{2!}+\left[\binom{9}{3}.\frac{6.7.6!}{2!}+\binom{9}{3}.\frac{6.7.6!}{2}\right]$

$\Rightarrow \binom{9}{3}.6.7.6!+\binom{9}{2}.\frac{7.8.7.6!}{2!}\Rightarrow \frac{9.8.7}{3.2.1}.6.7.6!+\frac{9.8.7}{3.2.1}.\frac{8!}{2!}.3\Rightarrow \binom{9}{3}.6!.3\left(\frac{8.7}{2!}+7.7+7\right)=\binom{9}{3}^2.3.6!$

bulunur.

13 $AB \parallel CD$ ve $m\left(\widehat{CAB}\right) < 90^\circ$ olan $ABCD$ yamuğunda, $|AB|=5, |CD|=3$ ve $|AC|=15$ ise, $|BD|$ nin alabileceği farklı tam sayı değerlerin toplamı nedir?

a) 101 **b)** 108 **c)** 111 **d)** 125 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$[AB$ üzerinde seçilen bir E noktası için $BDCE$ paralelkenar olsun.

ACE üçgeninde $|AE|=8, |AC|=15$ ve $m\left(\widehat{EAC}\right)<90^\circ$ olduğundan $|EC|<17$ ve üçgen eşitsizliğinden $|EC|>7$ dir.

$|BD|=|EC|$ olduğundan, $7<|BD|<17$ aralığındaki tam sayı değerleri toplamı 108 dir.

14 Kaç (m,n) pozitif tam sayı ikilisi için $2008\cdot 2009\cdot 2010$ sayısı mn ile bölünür?

a) $2\cdot 3^7\cdot 5$ **b)** $2^5\cdot 3\cdot 5$ **c)** $2^5\cdot 3^7\cdot 5$ **d)** $2^3\cdot 3^5\cdot 5^2$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$m\cdot n\cdot p = 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 41\cdot 67\cdot 251$

4 portakal, 2 elma, 1 muz, 1 kiraz, 1 karpuz, 1 domates, 1 patates; 3 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılır:

$\binom{4+3-1}{3-1}\binom{2+3-1}{3-1}\binom{1+3-1}{3-1}^5=\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2}^5=15\cdot 6\cdot 3^5=2\cdot 3^7\cdot 5$

15 $|x|+|y|=13$ eşitliğin sağlayan (x,y) gerçel sayı ikilileri için, $x^2+7x-3y+y^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) 208 **b)** $15\sqrt{2}$ **c)** $\frac{35}{2}$ **d)** 37 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

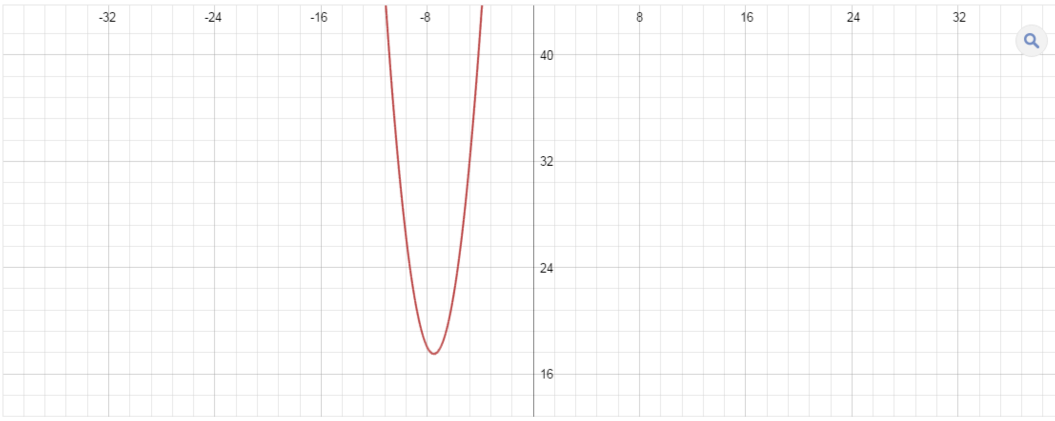
Yanıt: $\boxed{E}$

$|x|+|y|=13$ denklemini inceleyelim. $x<0$ ve $y>0$ ise $y=x+13$ denklemi elde edilir. Bunu Ana denklemde yazarsak,

$x^2+7x-3x-39+x^2+26x+169=2x^2+30x+130$ elde edilir. Bu denklem aşağıdaki parabol grafiği olduğundan kolları yukarı doğrudur,tepe noktası formülünden,

$y = 2(-\frac{15}{2})^2 - 30.(\frac{15}{2}) + 130 = \frac{35}{2}$ bulunur. Yani Parabol en küçük $\frac{35}{2}$ değerini alır.

Seçeneklerin hepsi $\frac{35}{2}$ den büyük veya eşit olduğundan cevap Hiçbiridir.



16 $x + 19y \equiv 0 \pmod{23}$ ve $x + y < 69$ koşullarını sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

a) 100 **b)** 102 **c)** 105 **d)** 109 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 100. $69 = 3 \cdot 23$ olduğuna göre, $x = 23$ ve $x = 46$ sayılarının her biri için $x + 19y \equiv 0 \pmod{23}$ denkliğini sağlayan tam olarak iki $1 \leq y < 69$ sayısı bulunuyor. Benzer şekilde, her $1 \leq x < 69, x \neq 23, 46$ için $x + 19y \equiv 0 \pmod{23}$ denkliğini sağlayan tam olarak üç $1 \leq y < 69$ sayısı bulunuyor. Sonuç olarak $x + 19y \equiv 0 \pmod{23}$ ve $1 \leq x < 69, 1 \leq y < 69$ koşullarını sağlayan (x, y) ikililerinin sayısı $68 \cdot 3 - 2 = 202$ olur. Bu ikililerden $x + y > 69$, $x + y = 69$ ve $x + y < 69$ koşuluna uyanları sirasıla, 1.,2. ve 3. gruba ayıralım. 1. ve 3. grupların eleman sayıları aynıdır: 1. gruptaki her (x, y) ikilisine karşılık olarak 3. gruptan $(69 - x, 69 - y)$ ikilisi gösterilebilir. 2. grupta sadece 2 ikili bulunuyor: $x + y = 69$ ise, $23 \mid 69 - y + 19y$ ve $23 \mid 18y$. Buna göre, $y = 23, 46$. Demek ki, koşulları sağlayan (x, y) ikili sayısı $\frac{202 - 2}{2} = 100$ olur.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

17 ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası, $|AD| = 8, |BD| = 13$ ve $m\left(\widehat{ADC}\right) = 120°$ koşullarını sağlıyorsa $|CD|$ kaçtır?

a) 12 **b)** 13 **c)** 14 **d)** 15 **e)** 16

Çözüm:

$\triangle ADB \cong AEC$ olacak şekilde üçgenin dışında bir E noktası alalım.

$AE = AD = ED = 8$ ve $\angle EDC = \angle ADC - \angle ADE = 120° - 60° = 60°$ dir.

$\triangle EDC$ de kosinüs teoreminden DC yi bulabileceğimiz gibi E den DC ye yükseklik indirerek de çözüme gidebiliriz.

E den inen yüksekliğin ayağı H olsun. $DH = 4$ ve $EH = 4\sqrt{3}$.

$\triangle EHC$ de Pisagordan $EC = \sqrt{13^2 - (4\sqrt{3})^2} = 11$ ve $DC = 11 + 4 = 15$ tir.

Not:

Bu soru tipinin genel çözümü Lise 1. Aşama 2011/17 in çözümünde verilmiştir.

18 $1 \leq n \leq 455$ ve $n^3 \equiv 1 \pmod{455}$ koşullarını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 9 **b)** 6 **c)** 3 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$455 = 5.7.13$ olduğundan, **Çinlilerin Kalan Teoremi** gereği sırasıyla $\pmod{5, 7, 13}$ te inceleme yapacağız.

$\pmod{5}$ te inceleyelim.

$n^3 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{5}$ çözümü elde edilir.

$\pmod{7}$ de inceleyelim.

$n^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ çözümleri elde edilir.

$\pmod{13}$ te inceleyelim.

$n^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv 1, 3, 9 \pmod{13}$ çözümleri elde edilir.

Toplam $1.3.3 = 9$ tane n tamsayısı elde edilir.

Dikkat: Çözümleri bulurken, $n \equiv 1, 2, 3 \ldots k-1 \pmod{k}$ gibi değerler vererek tek tek sağlayıp sağlamadıklarına bakmamız gerekiyor.

19 a bir gerçel sayı; x_1 ve x_2, $x^2 + ax + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü; x_3 ve x_4 de, $(x-a)^2 + a(x-a) + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü olmak üzere, $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$ ise $x_4 - x_2$ nedir?

a) $\frac{a}{2}$ **b)** $\frac{a}{3}$ **c)** $\frac{2a}{3}$ **d)** $\frac{3a}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Denklemleri düzenleyelim

$$x^2 + (a-1)x + 2 = 0$$

$$x^2 - (a+1)x - a^2 - 2 = 0$$

Bu denklemlerdeki kökler toplamından $x_1 + x_2 = 1 - a$ ve $x_3 + x_4 = 1 + a$ olur ve buradan $x_3 - x_1 + x_4 - x_2 = 2a$ bulunur. Problemde verilen bilgiyi de kullanarak $4(x_4 - x_2) = 2a \Rightarrow x_4 - x_2 = \frac{a}{2}$ elde edilir.

20 İlk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı A ve ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı B ise, $A - B$ kaçtır?

a) 5000 **b)** 4640 **c)** 3200 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 5000. İk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı

$$\binom{5}{1}\left(\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right) \cdot 5^4 = 25000,$$

ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı

$$\binom{4}{1}\left(\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right) \cdot 5^4 = 20000$$

olur. Buna göre cevap $A - B = 5000$.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

21 ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $m\left(\widehat{BAC}\right) = 80°$ dir. ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir E noktası, $|AE| = |EC|$ ve $m\left(\widehat{EAC}\right) = 10°$ koşullarını sağlıyorsa, $m\left(\widehat{EBC}\right)$ nedir?

a) 10° **b)** 15° **c)** 20° **d)** 25° **e)** 30°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\triangle AEC$ yi AB kenarı üzerine üçgenin içerisine doğru yapıştıralım. $E \to E'$ noktası olsun.

$AE' = BE' = AE$ ve $\angle E'AE = 60°$ olduğu için $\triangle AE'E$ eşkenar olup, E' noktası $\triangle ABE$ nin çevrel merkezidir. $\angle ABE = \dfrac{\angle AE'E}{2} = 30°$ olur. Bu durumda $\angle EBC = 20°$ dir.

Çözüm 2:

Bu soru, burada bahsedilen 4.7 numaralı modelin bir örneğidir.

Model 4.7 nin çözümü bu iletide ayrıntılı şekilde verilmiştir.

Bu çözümlerden birini yaptığımızda $\angle EBA = 30°$ ve $\angle EBC = 20°$ çıkacaktır.

Not:

Bu tip soruların ait oldukları modelleri Buradaki javascript programı ile belirleyebilirsiniz.

Örneğin programı $70, 10, 10, 40$ değerleri için çalıştırdığımızda bu sorunun

Model 3 t=10 :(t, 60-4t, 60+t):(3t,30-2t,30+t)

Model 4 t=20 :(t, 30-t, 90-t):(2t,30-t,30)

modellerine ait olduğu öğreniriz.

Yani bu soru, aynı zamanda, burada bahsedilen 3.6 numaralı modelin bir örneğidir. Model 3.6 çözümlerinin hepsi bu soru için de çalışacaktır.

Ek olarak, sorudaki bazı değerlerden dolayı, **model ailelerinden farklı özel çözümler** de gelebilir.

22 Her $n \geq 0$ için, $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tam sayı dizisinin terimlerinin 11 e bölümünden kalanların oluşturduğu kümenin en çok kaç elemanı vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 3.

$a_n \equiv 1 \pmod{11}$ ise $a_{n+1} \equiv 2 \pmod{11}$ ve $a_n \equiv 2 \pmod{11}$ ise $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{11}$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla $a_0 \equiv 1, 2 \pmod{11}$ ise en fazla 2 elemanlı bir küme elde ederiz. $B = \{0, 3, 7\}$ olmak üzere, a_n sayısı 11 modunda B kümesinden bir elemana denk ise, $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{11}$ elde ederiz, bu da a_0 sayısının 11 modunda B kümesinden bir elemana denk olması durumunda tek elemanlı bir küme elde edeceğimizi gösterir. $C = \{4, 5, 9, 10\}$ olmak üzere, a_n sayısı 11 modunda C kümesinden bir elemana denk ise, a_{n+1} sayısı B kümesinden bir elemana denk olur. Dolayısıyla a_0 sayısının 11 modunda C kümesinden bir elemana denk olması durumunda 2 elemanlı bir küme elde ederiz. Son olarak, $a_0 \equiv 6 \pmod{11}$ olması durumunda $\{6, 10, 0\}$ ve $a_0 \equiv 8 \pmod{11}$ olması durumunda $\{8, 4, 3\}$ kümelerini elde ederiz, bu da cevabın 3 olduğunu gösterir.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

23 x bir gerçel sayı olmak üzere, $x(x+4)(x+8)(x+12)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -240 **b)** -252 **c)** -256 **d)** -260 **e)** -280

Çözüm:

$x(x+12) = x^2+12x = a$ diyelim. $(x+4)(x+8) = x^2+12x+32 = a+32$ olur. Dolayısıyla $x(x+4)(x+8)(x+12) = a(a+32)$ olduğundan biz $f(a) = a^2+32a$ ifadesinin minimum değerini bulmalıyız. Bu min değeri, isterseniz parabol fonksiyonun tepe noktası formülünden $a=-16$ yazarak $f_{min} = f(-16) = (-16)(-16+32) = -256$ şeklinde hesaplayabilirsiniz, isterseniz de tam kareye tamamlayarak $a^2+32a = (a^2+32a+16^2)-16^2 = (a+16)^2-256$ biçiminde yazıp $(a+16)^2 \geq 0$ aşikar eşitsizliğini kullanarak $f_{min} = -256$ elde edebilirsiniz.

UYARI: Elbette, bu min değeri elde edebilmek için $x^2+12x = -16$ denkleminin reel çözümünün var olduğunu görmek gerekir.

24 $xy-$ düzlemine, m mavi ve k kırmızı dikdörtgen, kenarları eksenlere paralel olacak, eksenlerden herhangi birine paralel olan hiçbir doğru aynı renkte birden fazla dikdörtgeni kesmeyecek ve farklı renkte hangi iki dikdörtgen alınırsa alınsın, yalnızca bunları kesen ve eksenlerden birine paralel olan bir doğru bulunacak biçimde yerleştirilmişse, (m,k) tam sayı ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $(1,7)$ **b)** $(2,6)$ **c)** $(3,4)$ **d)** $(3,3)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: (m,k) ikilisi $(1,7),(2,6),(3,4),(3,3)$ değerlerinin hepsini alıyor.

Aşağıda her durum için birer örnek vereceğiz.

Koordinat sisteminde köşelerinin koordinatları (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4) olan dikdörtgeni rengine göre $M\left((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)\right)$ veya $K\left((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)\right)$ olarak işaretleyelim.

$(1,7)$: Mavi dikdörtgen $M\left((0,0),(13,0),(13,1),(0,1)\right)$

ve $i=0,1,\ldots,6$ olmak üzere, kırmızı dikdörtgenler $K_i\left((2i,2i+2),(2i+1,2i+2),(2i+1,2i+3),(2i,2i+3)\right)$.

$(2,6)$: Mavi dikdörtgenler $M_1((0,0),(11,0),(11,1),(0,1))$, $M_2((12,2),(13,2),(13,13),(12,13))$

ve $i=0,1,\ldots,5$ olmak üzere, kırmızı dikdörtgenler $K_i((2i,2i),(2i+1,2i),(2i+1,2i+1),(2i,2i+1))$.

$(3,4)$: Mavi dikdörtgenler $M_1((0,0),(3,0),(3,3),(0,3))$, $M_2((4,4),(7,4),(7,7),(4,7))$,

$M_3((8,8),(11,8),(11,11),(8,11))$ ve kırmızı dikdörtgenler $K_1((0,6),(1,6),(1,9),(0,9))$,

$K_2((2,10),(5,10),(5,11),(2,11))$, $K_3((6,0),(9,0),(9,1),(6,1))$, $K_4((10,2),(11,2),(11,5),(10,5))$.

$(3,3)$ örneği $(3,4)$ örneğindeki kırmızı dikdörtgenlerin herhangi birinin atılmasıyla elde ediliyor.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

25 ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC, AC ve AB kenarlarına sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1 noktalarında teğettir. AA_1 doğrusu, iç teğet çemberi ikinci kez Q noktasında kesiyor. A_1C_1 ve A_1B_1 doğruları, A noktasından geçen ve BC ye paralel olan doğruyu sırasıyla, P ve R noktalarında kesiyor. $m(\widehat{PQC_1}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{RQB_1}) = 65^\circ$ ise, $m(\widehat{PQR})$ nedir?

a) 110 **b)** 115 **c)** 120 **d)** 125 **e)** 130

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\angle C_1A_1B = \angle APC_1 = \angle C_1QA_1 \Rightarrow A, P, C_1, Q$ çemberseldir. Benzer şekilde A, R, B_1, Q çemberseldir.
$\angle QC_1B_1 = \angle RPQ = \angle QB_1C_1$ ve $\angle QB_1A = \angle PRQ = \angle QC_1B_1$. Bu durumda, $\angle PQR = \angle B_1QC_1 = \alpha$.
Q tam açısını yazarsak $2\alpha + 45° + 65° = 360° \Rightarrow \alpha = 125°$ elde ederiz.

26 Her $0 \le i \le 17$ için a_i sayısı, $-1, 0$ ve 1 olmak üzere,

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

eşitliğini sağlayan kaç $(a_0, a_1, \cdots, a_{17})$ on sekizlisi vardır?

a) 9 **b)** 8 **c)** 7 **d)** 4 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 8. Eşitliğin sağ tarafının çift olması nedeniyle $a_0 = 0$ dır. O zaman her iki tarafı 2 ile böldükten sonra benzer şekilde $a_1 = 0$ elde ederiz. Bu şekilde devam edersek $a_0 = a_1 = \cdots = a_9 = 0$ gelir:

$$2^{10}a_{10} + 2^{11}a_{11} + 2^{12}a_{12} + \cdots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

$a_i \ne 0$ olan en büyük $i = k$ olsun:

$$2^{10}a_{10} + 2^{11}a_{11} + 2^{12}a_{12} + \cdots + 2^{k}a_{k} = 2^{10}.$$

Eşitliğin sağ tarafının pozitif olması nedeniyle $a_k = 1$ olacaktır. $k = 10$ ise, $a_{10} = 1$ ve tüm diğer katsayılar sifir olacaktır. $k > 10$ ise, $a_{10} = a_{11} = \cdots = a_{k-1} = -1$ olmak zorundadır, sadece bu durumda

$$\begin{gathered} -2^{10} - 2^{11} - \cdots - 2^{k-1} + 2^k \\ = -2^{10}\left(1 + 2 + \cdots + 2^{k-10-1}\right) + 2^k = -2^{10}\left(2^{k-10} - 1\right) + 2^k = 2^{10} \end{gathered}$$

oluyor. Demek ki, her $10 \le k \le 17$ değeri için sorudaki eşitliği sağlayan tek bir $(a_0, a_1, \ldots, a_{17})$ on sekizlisi bulunuyor.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

27 $f(x) = \dfrac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1}$ ve $1 \le i \le 2009$ için $x_i = \dfrac{i}{2009}$ ise
$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009})$ toplamı kaçtır?

a) 1000 **b)** 1005 **c)** 1010 **d)** 2009 **e)** 2010

Çözüm:

Çözüm: $f(x) = \dfrac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1} = \dfrac{x^5}{-x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1 + x^5} = \dfrac{x^5}{x^5 - (x-1)^5}$ yazılabilir. Bu durumda $f(x) + f(1-x) = \dfrac{x^5 - (x-1)^5}{x^5 - (x-1)^5} = 1$ olup $1 \le i \le 2008$ için $f(x_i) + f(x_{2009-i}) = 1$ dir. $f(x_{2009}) = f(1) = 1$ dir. Dolayısıyla $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009}) = \dfrac{2008}{2} + 1 = 1005$ elde edilir.

$\boxed{28}$ Tüm tam sayılar kümesi, farkları asal bir sayıya eşit olan herhangi iki tam sayı aynı alt kümeye düşmeyecek biçimde, n alt kümeye ayrılabiliyorsa, n en az kaçtır?

a) 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

En az 4 alt kümeye ayırmak zorunda olduğumuzu da gösterelim.

$0, 2, 5, 7$ elemanlarından herhangi ikisinin farkı asal olduğundan bu 4 eleman farklı alt kümelerde olmak zorundadır. Dolayısıyla ayrımdaki alt küme sayısı en az 4 olmak zorundadır.

Örnek:

$S_1 = \{x : x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$S_2 = \{x : x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

$S_3 = \{x : x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$

$S_4 = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\boxed{29}$ $ABCD$ kirişler dörtgeninin $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri, P noktasında kesişiyor. APB ve CPD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri $ABCD$ dörtgeninin çevrel çemberinin üstünde ve $|AC| + |BD| = 18$ ise, $ABCD$ dörtgeninin alanı nedir?

a) 36 **b)** $\frac{81}{2}$ **c)** $\frac{36\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

APB ve CPD üçgenlerinin çevrel çember merkezleri sırasıyla T ve R olsun. Bu durumda $ATBP$ ile $CRDP$ merkezil dörtgen $ATBD$ ile $CRDA$ kirişler dörtgenidir. Bu dörtgenlerin açısal özelliklerinden,

$$\angle ATB + 2\angle APB = 360^\circ, \angle CRD + 2\angle CPD = 360^\circ$$

ve

$$\angle ADB + \angle ATB = 180^\circ, \angle CAD + \angle CRD = 180^\circ$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitliklerden $\angle ADB = \angle CAD = \alpha, \angle ATB = \angle CRD = 180^\circ - \alpha$ ve $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ açı bağıntıları bulunur. Buradan $2\alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ dir. Ayrıca ATB ile CRD yaylarının eşitliğinden $BC \parallel AD$ dir ve $ABCD$ dörtgeni bir ikizkenar yamuk olup köşegenleri $|AC| = |BD| = 9$ dur.

Buna göre; $[ABCD] = \dfrac{9.9.\sin 60^\circ}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{30}$ $11^2 + 13^2 + 17^2, 24^2 + 25^2 + 26^2, 12^2 + 24^2 + 36^2, 11^2 + 12^2 + 132^2$ sayılarından kaçı bir tam sayının karesine eşittir?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{D}$

İlk ifade $\pmod 4$ te 3 kalanı veriyor ama tamkarelerde bu durum olamaz. ÇELİŞKİ.

İkinci ifade $\pmod 3$ te 2 kalanı veriyor ama tamkarelerde bu durum olamaz. ÇELİŞKİ.

Üçüncü ifadeyi düzenleyelim. $(12^2)(1 + 4 + 9) = 144.14$ bir tamkare değildir.

Dördüncü ifadeyi düzenleyelim. $11^2 + 12^2 + 132^2 = 265 + 132^2 = 132^2 + 132.2 + 1 = (132 + 1)^2 = 133^2$

O zaman sadece dördüncü ifade bir tamkaredir.

31 $|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| \geqslant 2x^2$ eşitsizliğini , $|x| \geqslant n$ koşulunu sağlayan her x gerçel sayısı için doğru kılan n tam sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 9 **b)** 8 **c)** 7 **d)** 6 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Çözüm 1: Test mantığıyla $x = -8$ koyarsak $|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| = 59$, $2x^2 = 128$ olacağından istenilen sağlanmaz. Eğer yeterince küçük $\epsilon > 0$ için $x = -8 - \epsilon$ seçersek $|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| < 2x^2$ olmasını sağlayabiliriz çünkü $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 33x - 3|$ ve $g(x) = 2x^2$ fonksiyonları süreklidir (Örneğin $\epsilon = 0.1$ için $g(-8.1) = 131.22 > f(-8.1) = 70.311$ olacaktır). Dolayısıyla $n > 8$ olmalıdır. Bunu sağlayan tek şık A'dır.

Çözüm 2: Klasik bir sınavmış gibi çözüm bulalım. Mutlak değerden kurtulalım

$$|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| \geq 2x^2 \iff x^3 + 3x^2 - 33x - 3 \geq 2x^2 \quad \text{veya} \quad -2x^2 \geq x^3 + 3x^2 - 33x - 3$$

Yani eşitsizliği sağlayan en geniş x'lerin kümesi

$$x^3 + x^2 - 33x - 3 \geq 0 \tag{1}$$

eşitsizliğini x'lerin kümesi ve

$$0 \geq x^3 + 5x^2 - 33x - 3 \tag{2}$$

eşitsizliğini sağlayan x'lerin kümesinin birleşimidir. Polinomların işaretleri kökleri arasında değişir. $P(x) = x^3 + x^2 - 33x - 3$ ve $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 33x - 3$ polinomlarını tanımlayalım.

$$P(-7) = -66, \quad P(-6) = 15, \quad P(-1) = 30 \quad P(0) = -3, \quad P(5) = -18 \quad P(6) = 51$$

olduğundan $P(x)$'in $(-7, -6)$, $(-1, 0)$, $(5, 6)$ aralığında birer kökü vardır.

$$Q(-9) = -30, \quad Q(-8) = 69, \quad Q(-1) = 34 \quad Q(0) = -3, \quad Q(3) = -30 \quad Q(4) = 9$$

olduğundan $Q(x)$'in $(-9, -8)$, $(-1, 0)$, $(3, 4)$ aralığında birer kökü vardır. Her iki polinomun da üçer kökü olduğunu biliyoruz. $P(x)$'in kökleri $a < b < c$ olsun. $Q(x)$'in kökleri $d < e < f$ olsun. (1) eşitsizliğini sağlayan x'lerin kümesi $[a, b] \cup [c, \infty]$ ve (2) eşitsizliğini sağlayan x'lerin kümesi $[-\infty, d] \cup [e, f]$ olacaktır. Dolayısıyla bizim aradığımız x'lerin kümesi

$$[-\infty, d] \cup [e, f] \cup [a, b] \cup [c, \infty]$$

Bulduğumuz kök aralıklarından dolayı $d < a < b, e < f < c$ olduğunu biliyoruz (b ile e arasındaki ilişkiyi yukarıdaki aralıklardan çıkartamayız). Eğer her $|x| \geq n$ için

$$x \in [-\infty, d] \cup [e, f] \cup [a, b] \cup [c, \infty]$$

ise $n \geq |d|, |c|$ olmalıdır çünkü aksi taktirde $x = \lfloor d \rfloor + 1$ veya $x = \lfloor c \rfloor$ için istenilen sağlanmayacaktır. c ve d'nin aralıklarından dolayı $n \geq 9$ olmalıdır.

32 Her biri dört elemanlı n kümeden, hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümeden yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme, başlangıçdaki n kümeden birine eşitse, n en çok kaçtır?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 15 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

7 küme için önceki gönderide verilen örnek durumda küçük değişiklikler yapılırsa örnek doğru olacaktır.

Doğru örnek durum: $\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\{2,4,5,7\},\{2,3,6,7\},\{1,4,6,7\}$

En fazla 7 küme olabileceğini de gösterelim.

Kümelerden hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümeden yalnızca birine ait olan elemanların kümesi başlangıçtaki kümelerden birine eşit, aynı zamanda başlangıçtaki kümelerin her biri de 4 elemanlı olduğuna göre; bu kümelerden hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümenin kesişimi 2 elemanlı olmak zorundadır.

Kümelerden biri $K_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ olsun. Diğer tüm kümelerin K_1 ile tam olarak 2 ortak elemanı olması gerektiğini biliyoruz.

İddia: Diğer kümelerden iki farklı kümenin K_1 kümesiyle ortak olarak bulundurduğu eleman ikilisi aynı olamaz.

İspat: Aksini varsayalım. $K_2 = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$ ve $K_3 = \{a_1, a_2, a_7, a_8\}$ olsun. K_2 ve K_3 kümelerinden yalnızca birine ait olan elemanların kümesi $\{a_5, a_6, a_7, a_8\}$ olur, yani bu küme de başlangıçtaki kümelerden biri olmak zorundadır. Ancak bu kümenin K_1 kümesiyle ortak elemanı yoktur. Çelişki.

O halde diğer kümelerin her birinin K_1 ile ortak bulundurdukları eleman ikilileri birbirlerinden farklıdır.

K_1 kümesinin $\binom{4}{2} = 6$ farklı eleman ikilisi bulunduğundan, diğer kümelerin sayısı en fazla 6, toplam küme sayısı en fazla 7 olabilir.

$\boxed{33}$ ABC üçgeninin $[AL]$ ve $[BM]$ kenarortayları K noktasında kesişiyor. C, K, L, M noktaları çembersel ve $|AB| = \sqrt{3}$ ise $[CN]$ kenarortayının uzunluğu nedir?

a) 1 **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$\triangle ABC \sim \triangle MLC$ benzer üçgenlerinin kenarları karşılıklı olarak paralel olduğundan C merkezli ve $1/2$ oranlı bir homotetiye sahiptirler. D ve N noktaları homotetik eşlenik olduklarından dolayı N nin $[AB]$ üzerinde yaptığı işi D noktası $[ML]$ üzerinde yapar. Yani D, $[ML]$ nin orta noktasıdır. $|MD| = |DL| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ olur. K noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğu için $|KD| = x$ dersek $|KN| = 2x$, $|DC| = 3x$ olur. D noktasına göre çemberde kuvvet bağıntısını yazarsak $x \cdot 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ olup $x = \dfrac{1}{4}$ bulunur. Buradan $|CN| = 6x = \dfrac{3}{2}$ elde edilir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{E}$

$|AL| = 3t, |BM| = 3s$ olmak üzere çemberde kuvvetten $6s^2 = 2|BL|^2$ ve $6t^2 = 2|AM|^2$, dolayısıyla da $BL = LC = s\sqrt{3}$ ve $AM = MC = t\sqrt{3}$ olur. Ayrıca $|LM| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olduğu açıktır. Buna göre $CLKM$ kirişler dörtgeninde Batlamyus Teoremi'ne göre

$$|KM|.|LC| + |MC|.|LK| = |KC|.|LM| \iff \sqrt{3}\left(s^2 + t^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.|KC|$$

elde edilir. Öte taraftan, AL için Kenarortay Teoremi'ni kullandığımızda

$$2|AL|^2 = 18t^2 = 3 + 12t^2 - 6s^2 \iff s^2 + t^2 = \frac{1}{2}$$

belirlenir. Uygulanan Batlamyus'a konduğunda $|KC| = 1 \iff |CN| = \dfrac{3}{2}$ olarak bulunur.

34 x ve y farklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $(x + y^2)(x^2 - y)/(xy)$ ifadesinin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değer nedir?

a) 3 **b)** 8 **c)** 14 **d)** 15 **e)** 17

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$x + y^2 > 0$ ve $xy > 0$ olduğundan ifadenin pozitif olması için $x^2 > y$ olmalıdır. Dolayısıyla $x > 1$ olmalıdır. Eğer $y = 1$ ise $x \mid (x + 1)(x^2 - 1)$ olacağından $x \mid 1$ olmalıdır fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x, y > 1$'dir ve bu yüzden asal bölenleri vardır. $p \mid x$ olsun. $p \mid (x + y^2)(x^2 - y)$ olacağından $p \mid y^3$ ve $p \mid y$ olacaktır. Benzer şekilde $q \mid y$ olan bir q asalı alırsak, $q \mid x$ olacaktır. Dolayısıyla x ve y'nin asal bölenleri aynıdır. $x = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$ ve $y = p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_n^{b_n}$ şeklinde asal çarpanlarına ayıralım. $(x+y^2)(x^2-y)$'nin xy'e bölünmesi için gerekli ve yeterli şart $v_p(n)$'yi n'yi bölen en büyük p kuvvetinin üssü olarak tanımlarsak,

$$v_{p_i}(x + y^2) + v_{p_i}(x^2 - y) \geq v_{p_i}(xy) = a_i + b_i$$

olmasıdır. $v_{p_i}(x + y^2) = \min\{a_i, 2b_i\}$ ve $v_{p_i}(x^2 - y) = \min\{2a_i, b_i\}$ olduğunu kullanırsak

$$\min\{a_i, 2b_i\} + \min\{2a_i, b_i\} \geq a_i + b_i$$

olmalıdır. Kesirin olabildiğince küçük olmasını istediğimizden $i = 1$ olarak seçmeliyiz. Dolayısıyla $x = p^a$ ve $y = p^b$ için

$$\min\{a, 2b\} + \min\{2a, b\} \geq a + b$$

olmasını istiyoruz. $x^2 > y$ olduğundan $2a > b$'dir. Yani $\min\{2a, b\} = b$'dir ve

$$\min\{a, 2b\} \geq a \iff 2b \geq a$$

olmalıdır. a ve b'yi olabildiğince küçük seçmeye çalışalım. $a = 1$ ise $b = 1$ olur fakat $x \neq y$'dir. $a = 2$ ise $4 > b$ ve $2b \geq 2$ olmalıdır. Yani $x = p^2$ ve $y = p$ seçebiliriz. Bu durumda

$$\frac{(x^2 - y)(x + y^2)}{xy} = \frac{(p^4 - p)(p^2 + p^2)}{p^3} = 2(p^3 - 1)$$

olacaktır. p'yi en küçük 2 seçebileceğimizden ifadenin en küçük değeri $2(2^3 - 1) = 14$'dür.

35 Her $n \geqslant 2$ için, $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}/n$ ise, $a_2a_3\cdots a_k > 3$ eşitsizliğinin sağlanması için k pozitif tam sayısının en az kaç olması gerekir?

a) 100 **b)** 102 **c)** 104 **d)** 106 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Verilen dizi $(a_n) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{n-1}{n}\right)}$ şeklinde düzenlenebilir.

$\prod_{n=2}^{k}(a_n) > 3 \Rightarrow \sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{k+1}{k}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{k-1}{k}\right)} > 3$

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{k} > 27 \Rightarrow k\,(k-106)+1>0$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük k pozitif tam sayısı 106 dır.

36 Yüz kenti olan bir ülkedeki bazı kentler arasında yapılan tek yönlü uçak seferleri, başkentten başlayıp, ülkedeki her kentten en az bir kez geçerek, yeniden başkente dönmeyi mümkün kılan en az bir sefer dizisi bulunacak biçimde düzenlenmiştir. Böyle bir düzenlemede, bu şekildeki uçak seferi dizilerinden sefer sayısı en az olanın sefer sayısı, bütün bu tür düzenlemeler arasında en çok kaç olabilir?

a) 1850 **b)** 2100 **c)** 2550 **d)** 3060 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Sorunun ifadesi benim için anlaşılır olmamakla beraber cevaba göre bir çözüm vereceğim. Böylece problemde bizden istenenin ne olduğu anlamış olacağımızı ümit ediyorum.

Öncelikle bir tanım verelim. $A_1, A_2, \dots, A_n$ şehirleri için $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A_1$ seferi varsa buna n uzunluğunda bir döngü diyelim. Soruda verilen ifadelerden, bütün şehirlerden başkente dönmek mümkün ve başkentten de bütün şehirlere ulaşmanın mümkün olduğunu anlıyoruz. Yani her bir şehir ile başkent arasında (en az) birer döngü vardır. Başkentten geçen bu döngüler arasında en uzun döngünün uzunluğu n olsun. Bunu bir çember üzerindeki n nokta gibi düşünebilirsiniz. Bu döngüyle n sefer yaparak başkentten başlayıp tam n şehir dolaşıp tekrar başkente dönmüş oluyoruz. Geriye kalan $100-n$ şehir var. Başkentten bu şehirlerin her birine gidip gelmek en fazla n seferle mümkündür. Çünkü başkentten başlayan döngülerin uzunluğunun en fazla n olduğunu varsaymıştık. Dolayısıyla en çok $n(100-n)$ sefer daha elde edilir. Bu döngülerin oluşturduğu seferlerin toplamı en fazla $T = n + n(100-n)$ olup $T = n(101-n)$ dir. Şimdi bu T değerleri arasından da en büyüğünü seçeceğiz. $n = 50$ ya da $n = 51$ için $T_{\max} = 50 \cdot 51 = 2550$ elde edilir.

Peki sefer sayısı en az olanın ifadesiyle ne anlatılmak isteniyor? Çünkü sanki bunu çözümümde hiç kullanmadım gibi. "Sefer sayısı en az olanın" ifadesiyle aradığımız sefer dizisinde birbirinin aynı olan alt döngüler bulunmasını kısıtlamak amacı taşınmış olmalı. Yani $A_1 \to A_2 \to A_1 \to A_2 \to \dots$ biçiminde $\{A_1 \to A_2 \to A_1\}$ döngüsünü 1.000.000 defa tekrarlamamız engellenmek istenmiş.

Yine de çözüm tam sayılmaz. Çünkü 2250 kenardan oluşan bir sefer dizisi örneği bulmalıyız ve bu sefer dizisi içindeki herhangi iki döngü birbirinin aynısı olmamalı. $n = 50$ durumunda $T = 2550$ olduğuna örnek verelim. Şehirlerimiz $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ ve A_1 başkent olsun. Aşağıdaki farklı döngüleri inceleyelim.

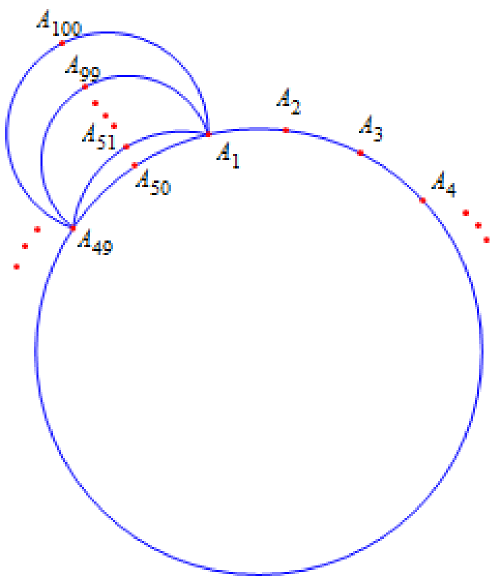
$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{49} \to A_{50} \to A_1$

$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{49} \to A_{51} \to A_1$

$\vdots$

$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{49} \to A_{99} \to A_1$

$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{49} \to A_{100} \to A_1$



Bu 51 tane döngünün her birinin uzunluğu 50 dir. İlk döngü A_{50} den geçiyor ve bu döngüden başkası da A_{50} den geçmiyor. İkinci sıradaki döngü ise A_{51} den geçiyor ve bu döngüden başkası A_{51} den geçmiyor ...vs. Son sıradaki döngü de A_{100} den geçiyor ve bu döngüden başkası A_{100} den geçmiyor. Yani tüm şehirleri dolaşabilmek için yapılması gereken $50 \cdot 51 = 2550$ sefer örneğini de bulduk. Şekille göstermek istersek, tüm çember yaylarını saatin dönme yönünde yönlendirmek yeterlidir.

Çözüm 2:

Cevap: 2550.

Kentler $A_1, \ldots, A_{100}$ olmak üzere, uçuşlar:

her $i = 1, \ldots, 49$ için A_i den A_{i+1} e

her $i = 51, \ldots, 100$ için A_{50} den A_i ye

her $i = 51, \ldots, 100$ için A_i den A_1 e

düzenlenmiş olsun. Bu durumda her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergah en az $51 \cdot 50 = 2550$ uçak seferi içermektedir.

Şimdi ise başkentten başlayıp, ülkedeki her kentten en az bir kez geçerek, yeniden başkente dönmeyi mümkün kılan her uçuş düzenlemesinde her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçak seferi içeren kapalı güzergahın en fazla 2550 uçak seferi içerdiğini gösterelim. Her A_i ve A_j kent ikilisi için A_j den A_i ye varmak için yapılması gereken en az uçuş sayısı $d(A_i, A_j)$ olmak üzere, $\max_{i,j} d(A_i, A_j) = d(A_l, A_m) = p$ olsun. p uçuş içeren $A_l \to A_m$ güzergahı, A_l den A_m ye en kısa güzergah olduğundan A_l dışında p farklı kent içeriyor. A_m den bu p kentten farklı yeni bir kente en fazla p uçuş kullanarak gidilebiliyor. Daha sonra tüm kalan kentlere her yeni kent için en fazla p uçuş kullanarak birer birer uğrarsak her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergahın toplam uçuş sayısı en fazla

$$p + p(100 - p) = p(101 - p) \leq \frac{(101 - p + p)^2}{4} = 2550.25$$

olacaktır.

Kaynak: Tübitak 17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2009

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2010

1 Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 5°$ ve dış bölgesindeki bir E noktası içinde, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ACE}) = 5°$ ise, $m(\widehat{EDC})$ kaçtır?

a) 45° **b)** 40° **c)** 35° **d)** 30° **e)** 25°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

ABD ile ACE eş üçgenlerdir.Bu eşliğe göre $AD = AE$ dir. $\angle DAE = 60°$ olduğundan ADE eşkenar üçgen olur. Buna göre $DE = EC$ ve $\angle DEC = 110°$olduğundan $\angle EDC = 35°$ dir.

2 $y^2 - x^2 = 2y + 7x + 4$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Eşitliğin her iki tarafını 4 ile çarpalım:

$4y^2 - 8y = 4x^2 + 28x + 16$

$(2y - 2)^2 = (2x + 7)^2 - 29$

$(2x + 7)^2 - (2y - 2)^2 = 29$

x, y pozitif olmak üzere $(2x + 2y + 5)(2x - 2y + 9) = 29 \Rightarrow 2x + 2y = 24$ ve $2x - 2y = -8$ ise;

$x = 4, y = 8$ denklemin tek çözümüdür.

3

$$x^2 + 2y = 2xy$$
$$x^3 + x^2y = y^2$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

İlk denklemden y'yi çekelim:

$y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ olur. İkinci denklemde yerine yazalım

$x^3 + \dfrac{x^4}{2(x-1)} = \dfrac{x^4}{4(x-1)^2}$ olur.

$x = 0, y = 0$ değilken $1 + \dfrac{x}{2(x-1)} = \dfrac{x}{4(x-1)^2}$ ifadesini düzenlersek;

$6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 4)(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 4/3$ ve $x = 1/2$ değerlerini

Ana denklemlerde x'in yerine yazarsak y'yi buluruz.(x, y) ikilileri;

$(0, 0), (1/2, -1/4), (4/3, 8/3)$ olmak üzere 3 tanedir.

Çözüm 2:

$$x^3 + x^2y = y^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{y} \tag{1}$$

$$x^2 + 2y = 2xy \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{2}{y} = \frac{2x}{y} \tag{2}$$

(1) ve (2) den

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} = 0 \tag{3}$$

elde edilir. (3) denkleminde $\frac{x}{y} = a$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$2a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \tag{4}$$

olur.Bu denklem $a.(2a-1).(a+2) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Buna göre (4) denkleminin kökleri $0, \frac{1}{2}, -2$ dir.

Buradan bulunan $x = 0, y = 2x$ ve $y = -\frac{x}{2}$ ifadelerini sistemde kullanarak $(0,0), (1/2, -1/4), (4/3, 8/3)$ çözümlerine ulaşırız.

$\boxed{4}$ Rakamlarının faktöriyellerinin toplamı kendisine eşit olan 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Sayının 2000 ile 2010 arasında olamayacağı barizdir.

i) Sayımız 1 basamaklı ise sadece $1, 2$ sağlar.

ii) Sayımız 2 basamaklı ise bu sayı ab olsun.

$ab = a! + b!$ olmalı, $a, b \leq 4$'dür. $a = 4$ ise,

$40 + b = 24 + b! \Rightarrow 16 + b = b!$ olur fakat bunu sağlayan b yoktur. $b = 4$ ise,

$10a + 4 = a! + 24 \Rightarrow 10(a-2) = a!$ olur fakat bunu sağlayan a yoktur. $a, b \leq 3$ için,

$ab = a! + b! \leq 3! + 3! = 12$ olacağından $a = b = 1$ veya $a = 1, b = 0$ olmalı fakat sağlamaz.

iii) Sayımız 3 basamaklı ise bu sayı abc olsun.

$abc = a! + b! + c!$ olacağından $a, b, c \leq 6$ olmalı fakat $6! = 720$ olduğundan $a, b, c \leq 5$ olmalı.

$a! + b! + c! \leq 5! \cdot 3 = 360$ olur. Buradan $a \leq 3$ bulunur. $a! + b! + c! \leq 3! + 5! \cdot 2 = 246$ olduğundan $a \leq 2$ olmalı.

$a = 2$ ise $b = c = 5$ olmalı çünkü aksi taktirde $a! + b! + c! \leq 2! + 4! + 5! = 146$ olur ve bu çelişkidir. Fakat $(a, b, c) = (2, 5, 5)$ şartı sağlamaz.

$a = 1$ ise b ve c den en az biri 5 olmalı çünkü aksi taktirde $a! + b! + c! \leq 1! + 4! + 4! = 49$ olur.

Eğer $b = 5$ ise $150 + c = 121 + c! \Rightarrow 29 = c! - c$ olur, bunun sağlaması için $29 \mid c$ olmalı fakat bu sağlamaz.

$c = 5$ ise $105 + 10b = 121 + b! \Rightarrow 10b = 16 + b!$ olur buradan $(a, b, c) = (1, 4, 5)$ bulunur yani 145 bu şartı sağlar.

iv) Sayımız $2000 \geq 1abc \geq 1000$ ise ,

$a, b, c \leq 6$ olmalı fakat $a, b, c < 5$ olursa $1abc = 1! + a! + b! + c! < 361$ olur ve sağlamaz.a, b, c 'den en az biri 6 olmalı.

iva) $a = 6$ ise $1600 + bc = 721 + b! + c! \Rightarrow 879 + bc = b! + c!$ olur. b ve c 'den en az biri 6 olmalı. $b = 6$ ise $939 + c = 720 + c! \Rightarrow 219 + c = c!$ olur fakat bu sağlanmaz.

$c = 6$ ise $885 + 10b = 720 + b! \Rightarrow 165 + 10b = b!$ olur fakat bu sağlanmaz.

ivb) $b = 6$ ise $1060 + a0c = 721 + a! + c! \Rightarrow 339 + a0c = a! + c!$ olur.a ve c'den en az biri 6 olmalı fakat $a = 6$ için çözüm yoktu. $c = 6$ için $1066 + 100a = a! + 720 \Rightarrow 346 + 100a = a!$ olur fakat buradan çözüm gelmez.

ivc) $c = 6$ ise $1006 + ab0 = 721 + a! + b! \Rightarrow 285 + ab0 = a! + b!$ olur.$a = 6$ ve $b = 6$ için çözüm olmadığından $a, b \leq 5$ olmalı fakat $285 < a! + b!$ ile çelişir. Buradan da çözüm gelmez.

Şartı sağlayan sayılar $1, 2, 145$ olmak üzere 3 tanedir.

$\boxed{5}$ Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde, $|AB| = 10, |CD| = 3\sqrt{6}, m\left(\widehat{ABD}\right) = 60°, m\left(\widehat{BDC}\right) = 45°, |BD| = 13 + 3\sqrt{3}$ ise $|AC|$ nedir?

a) 20 **b)** 18 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

A ve C den BD ye çizilen dikme ayakları sırasıyla E ve F olsun. ABE ve CDF dik üçgenlerinden $|BE| = 5, |AE| = 5\sqrt{3}, |DF| = |FC| = 3\sqrt{3}$ bulunur ve $|EF| = 8$ olur. İki kenarı $[EF]$ ve $[FC]$ olacak şekilde $EFCG$ dikdörtgeni oluşturursak AGC dik üçgeninde $|AG| = 8\sqrt{3}, |GC| = 8$ olup pisagor teoreminden $|AC| = 16$ bulunur.

$\boxed{6}$ $2011y^2 = 2010x + 3$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikiisi vardır?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Eşitliği $\pmod 5$ de incelersek $y^2 \equiv 3 \pmod 5$ olur ki, bir tamkare 5 modunda 3 kalanını vermez. O halde eşitliği sağlayan tam sayılar yoktur.

$\boxed{7}$ r metre yarı çaplı daire biçiminde bir adacığın merkezinde duran bir kurbağa $1/2$ metrelik bir atlayışla başlayıp, her seferinde $90°$ sağa veya sola dönerek bir öncekinin yarısı uzunluğunda bir atlayış yapıyor. Sonlu sayıda atlayışta kurbağanın suya varamamasını sağlayan en küçük r değeri nedir?

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{19}}{6}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{3}{4}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Kurbağa n. atlayışında $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ metrelik bir atlayış yapıyor. Kurbağanın başlangıç noktasını orijin kabul edersek ve ilk atlayışını yaptığı yerle orijini birleştiren doğruyu x-ekseni olarak alırsak, kurbağanın $(2k-1)$. atlayışını x ekseni üzerinde veya paralel yapacağını $(2k)$. atlayışını y ekseni üzerinde veya paralel yapacağını görürüz. Bu durumda $a_i = 1$ veya -1 olmak üzere kurbağanın koordinatları

$$\left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + a_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots, a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right)$$

şeklinde olacaktır. Kurbağanın merkezden gidebileceği en uzak mesafe için a_i'lerin hepsinin aynı parite içerisinde 1 veya hepsinin -1 olması gerekir. Genelliği bozmadan hepsi 1 olsun diyebiliriz. Bu durumda kurbağanın sonsuz adım atsa bile gidebileceği en uzak mesafeli koordinat

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}, \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right)$$

olacaktır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

olduğundan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}, \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

olur. Yani kurbağa $\sqrt{\dfrac{2^2+1^2}{3^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ metreden daha uzağa gidemez. r en az $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ olmalıdır.

$\boxed{8}$ İlk 2010 pozitif tam sayının rakamlarının toplamı kaçtır?

a) 30516 **b)** 28068 **c)** 25020 **d)** 20100 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

2010'a kadar olan pozitif tamsayıların;

Birler basamaklarının toplamı $201(1+2+\cdots+9)$

Onlar basamaklarının toplamı $200(1+2+\cdots+9)+1$

Yüzler basamaklarının toplamı $200(1+2+\cdots+9)$

Binler basamaklarının toplamı $1000+22$

Hepsini toplarsak sonuç 28068 olur.

Ayrıca soru mod9 da incelenirse C ve D şıklarının olamayacağı da kolayca görülür.

$\boxed{9}$ Bir $ABCD$ karesinin dışındaki bir E noktasının AC doğrusuna uzaklığı 6, BD doğrusuna uaklığı 17 birimdir. E noktasının karenin en yakın köşesine uzaklığı 10 birim ise, karenin alanı nedir?

a) 200 **b)** 196 **c)** 169 **d)** 162 **e)** 144

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$BD \cap AC = \{M\}$ olsun.

E den AC ve BD ye inilen dikmelerin ayakları sırasıyla F ve G olsun. E yi C ye yakın alalım.

ECF dik üçgeninde $EC = 10$, $EF = 6$ olduğu için $CF = 8$ dir. $EG = FM = 17$ olduğu için $CM = 9$ ve $[ABCD] = 162$ dir.

10 $0 \leqslant n < 840$ koşulunu sağlayan kaç tam sayı için, $n^8 - n^4 + n - 1$ sayısı 840 ile bölünür?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$n^8 - n^4 + n - 1 = (n-1)(n^4(n^2+1)(n+1)+1)$

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sırayla mod8, mod3, mod5, mod7 de inceleyelim:

Eşitliğin sağ tarafı tek olduğu için $n \equiv 1 \pmod 8$ olmalıdır.

Eşitliğin sağ tarafını mod3 ve mod5 de incelersek de aynı şekilde $n \equiv 1 \pmod 3$ ve $n \equiv 1 \pmod 5$ olması gerektiği görülür.

Fakat mod7 de incelendiğinde $n \equiv 3 \pmod 7$ veya $n \equiv 1 \pmod 7$ olur.

O halde $n \equiv 1(\mod 840)$ veya $n \equiv 241(\mod 840)$ olur. n'in iki değeri bulunur.

11 xy-düzleminde $\left(\sqrt{20}, \sqrt{10}\right)$ merkezli bir çemberin üstünde koordinatları tam sayı olan en çok kaç tane nokta bulunabilir?

a) 8 **b)** 4 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

En fazla bir noktanın şartı sağlayabileceğini gösterelim,

Sadece bir noktanın bulunabileceği barizdir. Farz edelim ki (x, y) ve (a, b) bu şartı sağlayan farklı noktalar olsun. Bu noktaların merkeze olan uzaklıkları eşit olacağından,

$$(x - \sqrt{20})^2 + (y - \sqrt{10})^2 = (a - \sqrt{20})^2 + (b - \sqrt{10})^2$$

olmalı. İfadeyi açarsak,

$$x^2 + 20 - 4x\sqrt{5} + y^2 + 10 - 2y\sqrt{10} = a^2 + 20 - 4a\sqrt{5} + b^2 + 10 - 2b\sqrt{10}$$

olacaktır. $x, y, a, b \in \mathbb{Z}$ olduğundan,

$4x\sqrt{5} = 4a\sqrt{5}$ ve $2y\sqrt{10} = 2b\sqrt{10}$ olmalı fakat (x, y) ve (a, b) farklı iki nokta olduğundan bu imkansızdır.Dolayısıyla en fazla bir nokta bulunabilir.

12 $0 \leqslant a, b, c, d < 7$ olmak üzere, 7 nin $ab - cd$ yi bölmesini sağlayan kaç (a, b, c, d) dörtlüsü vardır?

a) 412 **b)** 385 **c)** 294 **d)** 252 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt $\boxed{B}$

Modülo 7 de çarpım tablosunu oluşturalım. Aşağıdaki tabloda yeşil bölgedeki her bir eleman 0 a denktir. 7 asal sayı olduğundan modülo 7 de, 0'ın atılmasıyla oluşan çarpım sisteminde asla 0 elde edilemez ve sarı ile renklendirilmiş bölgede her bir satırda her bir eleman yalnızca bir kez görülür.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Dolayısıyla $ab \equiv 0 \pmod 7$ ve $cd \equiv 0 \pmod 7$ olmasını sağlayan $13 \cdot 13 = 169$ tane (a, b, c, d) dörtlüsü vardır.

$ab \equiv cd \equiv 1 \pmod 7$ olmasını sağlayan $6 \cdot 6 = 36$ tane (a, b, c, d) dörtlüsü vardır.

$ab \equiv cd \equiv 2 \pmod 7$ olmasını sağlayan $6 \cdot 6 = 36$ tane (a, b, c, d) dörtlüsü vardır...Benzer biçimde

$ab \equiv cd \equiv 6 \pmod 7$ olmasını sağlayan $6 \cdot 6 = 36$ tane (a, b, c, d) dörtlüsü vardır.

Toplam $169 + 6 \cdot 36 = 385$ tane (a, b, c, d) dörtlüsü elde edilir.

13 $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde sırasıyla, D ve E noktaları alınıyor. BC doğrusu üstünde de C noktası, B ile F arasında kalacak biçimde bir F noktası alınıyor. $|BE| = |CF|, |AD| = |AE|$ ve $m(\widehat{BEC}) = 60^\circ$ ise, $m(\widehat{DFB})$ kaçtır?

a) 45° **b)** 40° **c)** 35° **d)** 30° **e)** 25°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$AD = AE$ ve $AB = AC$ olduğu için $BE = DC = CF$ ve $\angle EBC = \angle DCB = 2 \cdot \angle DFB = 50^\circ$ dir. Bu durumda $\angle DFB = 25^\circ$ dir.

14 Gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak, her adımda doğru boyunca istediği yönde 364 veya 715 birim sıçrayan bir çekirgenin konduğu noktaların 2010 noktasına uzaklığı en az ne kadar olabilir?

a) 5 **b)** 8 **c)** 18 **d)** 34 **e)** 164

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{A}$

Görüldüğü üzere 364 ve 715, 13 e tam bölünüyor. O zaman çekirgenin konduğu noktalar 13 e tam bölünür. 2002 ve 2015, 13 e tam bölündüğü için uzaklık en az 5 olabilir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

OBEB$(364, 715) = 13$ tür. Çekirge x defa 364 birim, y defa 715 birim zıplasın. (x, y birer tamsayıdır). O halde $364x + 715y = z$ şeklindeki z noktalarına ulaşılabilir. $z = 13(28x + 55y)$ dir. $28x + 55y = 1$ doğrusal Diyofant denkleminin tam sayılar kümesinde çözümü vardır. Dolayısıyla tüm tam sayıları $28x+55y$ şeklinde ifade edebiliriz. $z = 13(28x + 55y)$ ile 13 ün katı olan tüm tam sayıları gösterebiliriz, bunun dışındaki tam sayıları ise $13(28x+55y)$ şeklinde yazamayız. $2002 = 13 \cdot 154$ ve $2002 = 13 \cdot 155$ tir. 2010 noktası 2015 e 2002 den daha yakındır. Aranan en kısa uzaklık $2015 - 2010 = 5$ tir.

15 x, y, z gerçel sayıları $\dfrac{xyz}{x+y} = -1$, $\dfrac{xyz}{y+z} = 1$, $\dfrac{xyz}{x+z} = 2$ eşitliklerini sağlıyorsa, xyz aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

a) $-\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ **b)** $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ **c)** $-8\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **d)** $\dfrac{7}{\sqrt{15}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$xyz = -x - y$, $xyz = y$+z , $xyz = 2x + 2z$ eşitliklerinden,

$-x - y = y + z$ ve $-x - y = 2x + 2z$ yapılırsa

$z = -x - 2y$ olur $-x - y = 2x + 2z$ de z gördüğümüz yere yazarsak $x = 3y$ ve $z = -5y$ olur, ilk denklemde yerine yazarak $y = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$ buluruz.

Bu durumda $xyz = -4y = -\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ dir.

16 11 farklı bir kitap üç raflı bir kitaplığa, en çok bir raf boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

a) $75 \cdot 11!$ **b)** $62 \cdot 11!$ **c)** $68 \cdot 12!$ **d)** $12 \cdot 13!$ **e)** $6 \cdot 13!$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

(Tüm Durumlar) − (İstenmeyen Durumlar) = (İstenen Durumlar)

Tüm Durumlar;

11 kitabı yan yana dizelim. 2 özdeş ayraç ile böldüğümüzde ilk kısım birinci raf, ikinci kısım ikinci raf, üçüncü kısım üçüncü rafa yerleştirilsin. $\dfrac{13!}{2!} = 78 \cdot 11!$ şekilde yerleştirilecektir.

İstenmeyen Durumlar; (2 Rafın Boş Olması)

Kitapları yerleştireceğimiz rafı seçilim[$\binom{3}{1}$]. Rafa kitapları dizelim[11!].

$3 \cdot 11!$ tane istenmeyen durum vardır.

İstenen Durumlar ise $78 \cdot 11! - 3 \cdot 11!$ tanedir.

17 Uzayda yer alan A, B, C, D noktaları için, $|AB| = |AC| = 3, |DB| = |DC| = 5, |AD| = 6$ ve $|BC| = 2$ dir. BC doğrusunun D noktasına en yakın noktası P ve ABC üçgeninin bulunduğu düzlemin D noktasına en yakın noktası Q ise, $|PQ|$ kaçtır?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ **c)** $\dfrac{57}{2\sqrt{11}}$ **d)** $\dfrac{9}{2\sqrt{11}}$ **e)** $2\sqrt{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$|AD|^2 > |PD|^2 + |PA|^2$ olduğundan $m(DPA) > 90°$ dir. Buna göre, D nin izdüşümü olan Q noktası ABC üçgeninin dış bölgesindedir.

Sırasıyla DQP ve DQA dik üçgenlerinde pisagor teoremleri uygulayarak $|PQ|$ değerini bulacağız.

$$|DQ|^2 + |PQ|^2 = 24 \quad (1)$$

$$|DQ|^2 + |PQ|^2 + 4\sqrt{2}|PQ| = 28 \quad (2)$$

(1) ve (2) den $|PQ| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

18 1000 elemanlı bir kümenin 500 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşağıdaki sayılardan hangisine bölünmez?

a) 3 **b)** 5 **c)** 11 **d)** 13 **e)** 17

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$T = \dbinom{1000}{500} = \dfrac{1000!}{(500!)^2}$ dir. $1000! = p^a.A$ ve $500! = p^b.B$ iken $a = 2b$ olursa $p \nmid T$ dir.

$p = 11$ için $1000! = 11^{98}.A$ ve $500! = 11^{49}.B$ olduğundan $11 \nmid T$ dir.

19 $x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomunun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** -2 **d)** 6 **e)** -17

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$P(x) = x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomunun muhtemel rasyonel kökleri olan $\pm1, \pm2, \pm3 \pm 6$ değerlerini deneyerek $P(-1) = P(2) = 0$ olduğunu bulabiliriz.

$P'(-1) = 0$ olduğundan -1 iki katlı köktür.

Bu gözlemlerin sonucunda $x^5 - 2x^2 - 9x - 6 = (x-2)(x+1)^2(x^2+3)$ olup , gerçel kökler toplamı 1 dir.

20 0 sayısı ile başlanıp, her adımda bir önceki sayının 1 fazlası veya 2 katı alınarak, aşağıdaki sayılardan hangisini en az sayıda adımda elde edilir?

a) 2011 **b)** 2010 **c)** 2009 **d)** 2008 **e)** 2007

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Çözüm 1: Soruyu çözmek için verilen sayılardan 1 çıkartarak veya 2'ye bölerek 0'a ulaşmaya çalışabiliriz. Eğer sayı tekse 1 çıkarmak zorundayız. Çift sayıda ise ikiye bölmenin daha avantajlı olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım ve çift $2n$ sayısından $2k$ defa 1 çıkardıktan sonra 2'ye bölmenin daha avantajlı olduğunu kabul edelim (çift sayıda 1 çıkarmamız gerektiği barizdir). Bu durumda $2k+1$ hamle yaparak $n-k$ sayısına ulaşmış oluruz. Onun yerine önce 2'ye bölseydik ve k adet 1 çıkarsaydık $k+1$ hamlede $n-k$'ya ulaşacaktık. Yani çift sayı denk gelirse 2'ye bölmeliyiz.

$2011 \to 2010 \to 1005 \to 1004 \to 502 \to 251 \to 250 \to 125 \to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

$2010 \to 1005 \to 1004 \to 502 \to 251 \to 250 \to 125 \to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

$2009 \to 2008 \to 1004 \to 502 \to 251 \to 250 \to 125 \to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

$2008 \to 1004 \to 502 \to 251 \to 250 \to 125 \to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

$2007 \to 2006 \to 1003 \to 1002 \to 501 \to 50 \to 250 \to 125 \to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

Sonuç olarak en az hamleyle 2008 elde edilebilir.

Çözüm 2: Eğer 2 tabanında düşünürsek 1 eklemek son basamağı 0'dan 1'e çevirmek ve 2 ile çarpmak sona bir adet 0 eklemek olacaktır. Bu durumda olası en küçük hamle sayısı $n = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_2$ için a_i'lerdeki 1 sayısı t ise $k+t-1$ olacaktır. Verilen sayıları 2 tabanında yazarsak en küçük hamle sayısını bulabiliriz.

21 Merkezleri aynı ve yarıçapları 10 ve 20 birim olan iki düzlemdeş daireyi sırasıyla taban kabul eden, her biri 10 birim yüksekliğinde bir dik silindir ve bir dik koni düzlemin aynı tarafında kalacak biçimde alınıyor.Koninin silindirin içinde kalan kısmının hacminin,silindirin dışında kalan kısmının hacmine oranı nedir?

a) 3 **b)** 2 **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Koninin tabanının merkezi A olsun. Koninin AC yarıçapı, silindiri B de terk etsin. Yani AB silindirin taban yarıçapı olsun. $AB = BC$ olduğu için koni silindiri tam yanal ayrıtının orta noktasında keser. Koninin silindirin üst kısmında kalan bölgesinin hacmine V dersek, koni haciminde silindirden farklı olarak $\frac{1}{3}$ olduğu için, silindirin üst yarısı $3V$ hacminde olacak. Bu durumda, koninin silindirin içinde kalan hacmi $V+3V = 4V$ olacaktır.

Diğer taraftan koninin silindirin üst yarısında kalan kısmı ile konin tamamı arasında $\frac{1}{2}$ benzerlik oranı vardır. Bu durumda hacimler oranı $\frac{1}{8}$ olacağı için koninin toplam hacmi $8V$ olacaktır. $\dfrac{4V}{4V} = 1$.

22 $\dfrac{x}{y+7} + \dfrac{y}{x+7} = 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 18 **b)** 17 **c)** 15 **d)** 14 **e)** 11

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{C}$

İfadeyi x' e bağlı ikinci dereceden denklem olarak düzenlersek $x^2 - yx + y^2 - 49 = 0$ olur. Tam sayı çözümler için denklemin diskriminantının tamkare olmasını sağlayan y değerlerini bulmalıyız.

$$\Delta = 14^2 - 3y^2 = k^2 \Rightarrow 3y^2 = (14-k)(14+k)$$

$p, q \in \mathbb{Z}$ ve $y^2 = p \cdot q$ için $3p + q = 28$ olur. y^2 pozitif olduğundan p, q sayıları aynı işaretlidir. Bu halde sadece pozitif durumu incelemek yeterlidir.

Çarpımları tamkare olan (p, q) ikililerini bulalım. $(p, q) = \{(9, 1), (4, 16), (1, 25), (0, 28)\}$. Buradan bulunan y değerlerinin kümesi $y = \{-8, -5, -3, 0, 3, 5, 7, 8\}$ dir.

Kümedeki 0 dışında ki her y değeri için iki tane x değeri bulunabilmektedir. Yani toplamda 15 tane (x, y) tamsayı ikilisi bulunur.

Bu değerler:

$\{(-5,-8), (-3,-8), ((-8,-5), (3,-5), (-8,-3), (5,-3), (7,0), (-5,3), (8,3), (-3,5), (8,5), (0,7), (7,7), (3,8), (5,8)\}$

23 $1 \leq n \leq 2010$ koşulunu sağlayan kaç tane n tam sayısı için $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$ sayısı 2010 ile bölünür?

a) 9 **b)** 8 **c)** 7 **d)** 6 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$T = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$ diyelim.

$2010 \mid T$ ise $2010 \mid -T$ dir.

İki kare farkı özdeşliğini kullanarak $-T$ ifadesini $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1)$ şeklinde yazabiliriz. Bu toplam $n(2n+1)$ dir.

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ olduğundan,

$n(2n+1) \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 2$

$n(2n+1) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 3, n \equiv 1 \pmod 3$

$n(2n+1) \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 5, n \equiv 2 \pmod 5$

$n(2n+1) \equiv 0 \pmod{67} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{67}, n \equiv 33 \pmod{67}$

olup çin kalan teoremine göre $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ çözüm vardır.

24 On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 11 ile bölünen kaç tane yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır?

a) 900 **b)** 854 **c)** 818 **d)** 726 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$a \neq 0$ için şartı sağlayan herhangi bir sayıyı *abcdcba* olarak yazabiliriz. Bu sayıyı mod 11'de incelersek

$$a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a \equiv a - b + c - d + c - b + a \equiv 2a + 2c - 2b - d \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\iff 2a + 2c - 2b \equiv d \pmod{11}$$

Burada her (a, b, c) üçlüsü için $0, 1, \ldots 10$ kalanlarından tam olarak bir tanesi 11 modunda d'ye denk olacaktır ve d'i tek şekilde bulmuş olacağız. Ancak $d = 10$ olamayacağından bu durumu çıkartmalıyız. Tüm durum toplamda $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$'dür ($a$'nın alabileceği 10 değil 9 değer vardır). Şimdi $2a + 2c - 2b \equiv 10 \pmod{11}$ olan üçlüleri çıkartalım. Denkliği ikiye bölersek

$$a + c - 5 \equiv b \pmod{11}$$

olacaktır. Yine aynı şekilde her (a, c) çifti için tam olarak bir tane b değeri vardır ama $b = 10$ olamaz. Yani $900 - 9 \cdot 10 = 810$'a $b = 10$ olan durumları geri eklemeliyiz. $b = 10$ olması için

$$a + c \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$$

olmalıdır. $a = 0$ ve $a = 5$ haricindeki her a değeri için tam olarak 1 tane c vardır. Yani 8 tane (a, c) çifti vardır. Bu durumda $810 + 8 = 818$ tane yedi basamaklı sayı bulmuş oluruz.

25 $m(\widehat{BAC}) = 90°, |AB| = 1$ ve $|AC| = \sqrt{2}$ olan bir ABC üçgeniyle aynı düzlemde yer alan P ve Q noktaları $|PB| = 1 = |QB|, |PC| = 2 = |QC|$ ve $|PA| > |QA|$ koşullarını sağlıyorsa $|PA|/|QA|$ oranı nedir?

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b)** $5 - \sqrt{6}$ **c)** $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{6} + 1$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Soruyu çizelim.

P ve Q noktaları C merkezli 2 yarıçaplı çember üzerindedir.

P ve Q noktaları, aynı zamanda, B merkezli 1 yarıçaplı çember üzerindedir.

Bu durumda, P ve Q noktaları B merkezli bir çember ile C merkezli bir çemberin kesişim noktalarıdır.

ABC üçgeninde pisagordan $BC = \sqrt{3}$ çıkar. $\triangle QBC$ üçgeninde kenarlar $1 - \sqrt{3} - 2$ dir. Bu durumda $\angle QBC = 90°$. Benzer şekilde $\angle PBC = 90°$ dir. Bu durumda, B noktası QP üzerinde olacaktır.

$PA/QA = x$ ve $\angle QPA = \alpha$ dersek $\tan\alpha = 1/x$ olacaktır.

$2 \cdot \angle QPA = \angle QBA = \angle ACB = 2\alpha$ dır. $\tan 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olduğunu biliyoruz.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

olacaktır. $x^2 - 2x\sqrt{2} - 1 = 0$ denklemini çözdüğümüzde $x = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ çıkacaktır. Negatif değer eleneceğinden $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ tür.

26 m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?

a) 16 **b)** 14 **c)** 12 **d)** 10 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$i)$ $m = 8$ için $x = y = z = 2$ alırsak eşitlik sağlar.

$ii)$ $m = 12$ için ifadeyi mod 4 'de incelersek $3x^2 - 5z^2 \equiv 0 \pmod 4$ olur.Buradan x ve z çift bulunur. $x = 2a$ ve $z = 2b$ yazarsak ifade $3a^2 + y^2 - 5b^2 = 3$ olur. $y = b = 3c$ alalım. İfade, $a^2 - 12c^2 = 1$ olur. $(a, c) = (7, 2)$ sağlar. Buradan $(x, y, z) = (14, 6, 12)$ çözümü bulunur.

$iii)$ $m = 14$ için $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ alırsak sağlar.

$iv)$ $m = 16$ için $x = z$ alalım. İfade $2y^2 - x^2 = 8$ olur.$(x, y) = (8, 6)$ sağlar, buradan $(x, y, z) = (8, 6, 8)$ çözümü bulunur.

$v)$ $m = 10$ için ifadeye mod 5'de bakarsak x ve y'nin 5'in katı olduğu görülür.$x = 5a$ ve $y = 5b$ yazarsak ifade $15a^2 + 20b^2 - z^2 = 2$ bulunur. Fakat mod 5'te bu imkansızdır. Çözüm gelmez.

27 Katsayılarının her biri 1 veya -1 ve tüm kökleri gerçel sayılar olan bir polinomun derecesi en çok kaç olabilir?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Aradığımız en büyük dereceli $P(x)$ polinomun baş katsayısının 1 olduğunu kabul edebiliriz. $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ diyelim. Her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $a_i \in \{-1, 1\}$ dir. $P(x) = 0$ polinomunun tüm kökleri gerçel sayı verildiğinden bu kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile gösterelim. Vieta teoreminden

Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ veya -1

Kökler toplamı $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ veya -1,

Köklerin ikişerli çarpımlarının toplamı $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n = 1$ veya -1 dir. Ancak $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n = -1$ olması halinde

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n)$$

tam kare özdeşliğinden $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = -1$ çelişkisi elde edilir. O halde $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n = 1$ olup

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 3$$

elde edilir. Aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğinden $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2}$ dir. Böylece $n \leq 3$ bulunur.

$n = 3$ durumuna uygun bir polinom örneği vermeliyiz: $P(x) = (x-1)^2(x+1) = x^2 - x^2 - x + 1$ polinomunun tüm kökleri gerçel sayıdır.

28 2010 kişinin yaşadığı bir köyde her ikisi de aynı arkadaş sayısına sahip olan bir tek ikili varsa, bu sayı kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 2.

Her kişinin arkadaş sayısı $0, 1, \ldots, 2019$ sayılarından birine eşittir ve bir kişinin 0 (2009) arkadaşı varsa kimsenin 2009 (0) arkadaşı olamaz.

Durum 1: 2009 arkadaşı olan bir kişi var. O zaman 0 arkadaşı olan kimse yoktur ve arkadaş sayısı $1, 2, \ldots, 2009$ olan kişiler vardır. 2009 arkadaşı olan kişiyi köyden atıp tüm arkadaşlıklarını da iptal edersek kalan 2009 kişi arasında arkadaş sayısı $0, 1, \ldots, 2007$ olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 2008 olan kişi olmayacaktır. 0 arkadaşı olan kişiyi köyden atalım. Kalan 2008 kişi arasında arkadaş sayısı $1, 2, \ldots, 2007$ olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 0 olan kişi olmayacaktır. Arkadaş sayısı 2007 olan kişiyi köyden atıp tüm arkadaşlıklarını da iptal edersek kalan 2007 kişinin arasında arkadaş sayısı $0, 1, \ldots, 2005$ olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 2006 olan kişi olmayacaktır. Benzer şekilde devam edersek sonunda birbiriyle arkadaş olan iki kişi kalacaktır. Köyden atılan kişileri de dikkate alırsak bu iki kişinin her birinin başlangıçtaki arkadaş sayısı 1005 olmalıdır.

Durum 2: 0 arkadaşı olan bir kişi var. Birinci durumdaki gibi hareket edersek en son köyde aralarında arkadaş olmayan iki kişi kalacaktır. Köyden atılan kişileri dikkate alırsak bu iki kişinin başlangıçtaki arkadaş sayısı 1004 olmalıdır.

Buna göre, köyde her ikisi de aynı arkadaş sayısına sahip olan iki kişinin her birinin ya 1004, ya da 1005 arkadaşı bulunuyor.

Kaynak: Tübitak 18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2010

29 Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası I ve $[AC]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezi de O noktasıdır.

$|BI| = 12, |IO| = 18$ ve $|BC| = 15$ ise, $|AB|$ kaçtır?

a) 16 **b)** 18 **c)** 20 **d)** 22 **e)** 24

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$\angle OAI = \angle OCI = 90^\circ$ olduğu için $OAIC$ kirişler dörtgenidir.

$\angle IAC = \angle IOC = \angle BAI$ ve $\angle ABI = \angle IBC$ olduğu için (AA) dan $\triangle COB \sim \triangle IAB$ dir.

$$\frac{AB}{OB} = \frac{BI}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{30} = \frac{12}{15} \Rightarrow AB = 24.$$

30 $N = \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{5} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{2009}}{5} \right\rfloor$ ise 2^{2010} un N ile bölümünden kalan nedir?

a) 5034 **b)** 5032 **c)** 5031 **d)** 5028 **e)** 5024

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$$
\begin{aligned}
N &= \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{2010}}{10} \right\rfloor \\
&= \frac{2^2-4}{10} + \frac{2^3-8}{10} + \frac{2^4-6}{10} + \frac{2^5-2}{10} \\
&\quad + \frac{2^6-4}{10} + \frac{2^7-8}{10} + \frac{2^8-6}{10} + \frac{2^9-2}{10} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{2^{2010}-4}{10} \\
&= \frac{2^2+2^3+\cdots+2^{2010} - 502\cdot(4+8+6+2) - 4}{10} \\
\Longrightarrow 10N &= 2^{2011} - 2^2 - 502\cdot 20 - 4 \\
\Longrightarrow 5N &= 2^{2010} - 502\cdot 10 - 4 \\
\Longrightarrow 5N + 5024 &= 2^{2010}
\end{aligned}
$$

31 Aşağıdaki (A, B) ikililerinden hangisi için

$$x^2 + xy + y = A$$

$$\frac{y}{y-x} = B$$

denklem sisteminin gerçel çözümü yoktur?

a) $(1/2, 2)$ **b)** $(-1, 1)$ **c)** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **d)** $(1, 1/2)$ **e)** $(2, 2/3)$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

İkinci eşitlikten elde ettiğimiz $y = \dfrac{Bx}{B-1}$ değerini ilk eşitlikte yerine yazarsak $(2B-1)x^2 + Bx + A - AB = 0$ ikinci dereceden denklemini elde ederiz. $\Delta < 0$ olması gerektiği için $B^2 - 4A(1-B)(2B-1) < 0$ elde etmemiz gerek. $(1-B)(2B-1)$ ifadesine yoğunlaşırsak, $B = 1$ veya $B = \dfrac{1}{2}$ değerleri için eşitsizliğin sağlanmadığını, dolayısıyla cevabın (B) ya da (D) olamayacağını görürüz. (A) ve (C) şıklarında $A > 0$ ve B değerleri de $(1-B)(2B-1)$ ifadesini negatif yaptığı için bu şıklar da eşitsizliği sağlamaz. Geriye tek bir ikili, yani $(2, 2/3)$ kalıyor. Yerine yazarsak $\dfrac{4}{9} - 4\cdot 2\cdot \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = -\dfrac{4}{9} < 0$ olduğunu görürüz.

32 1001 kişilik bir okulda herhangi üç öğrenciden en az ikisi arkadaştır. Bu okulda en çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, $334, 412, 450, 499$ değerlerinden kaçını alabilir?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

En büyük - en küçük değer prensibi ile ilgili bir problem, çözelim :)

En çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden biri a olsun. a nın arkadaş sayısı da n olsun. Geriye kalan 1000 kişiden a ile arkadaş olan kişilerin kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a ile arkadaş olmayan kişilerin kümesi $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{1000-n}\}$ olsun. Seçilen herhangi 3 kişiden ikisi arkadaş olduğundan $i \neq j$ için her $\{b_i, b_j, a\}$ üçlüsü için b_i ile b_j arkadaş olmak zorundadır. Yani B kümesindeki herkes birbiriyle arkadaştır. O halde B kümesindeki birinin en az $999 - n$ arkadaşı vardır. Bu sayı, a nın arkadaş sayısı olan n den daha büyük değildir. $999 - n \leq n$ eşitsizliğinden $n \geq 500$ bulunur. Yani n sayısı $334, 412, 450, 499$ değerlerinden hiçbirini alamaz.

Çözüm 2:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{E}$

A ve B arkadaş olmayan iki kişi olsun. Herhangi üç kişiden ikisi arkadaşmış. O zaman A ve B nin dışındaki öğrenciler ya A ya da B den sadece biriyle arkadaştır. O zaman A veya B den birinin en az 500 arkadaşı vardır. Yani o değerlerden hiçbirini alamaz.

33 $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ ve $|AC| = 10$ olan bir ABC üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D olmak üzere, $[AD]$ ve $[BD]$ nin orta dikmeleri E noktasında, $[BD]$ ve $[CD]$ nin orta dikmeleri de F noktasında kesişiyor. $|EF| = 13$ ise, $|AB|$ aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

a) $20\sqrt{\frac{2}{13}}$ **b)** $15\sqrt{\frac{2}{13}}$ **c)** $10\sqrt{\frac{2}{13}}$ **d)** $5\sqrt{\frac{2}{13}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$ED \parallel BC$ ve $DF \parallel AB$ dir. Yani $\angle EDF = 90^\circ$.

BD nin orta noktası M olsun. $AD = DC = BD = 2 \cdot DM = 5$ tir.

EF nin orta noktası O olsun. EDF dik üçgeninde $DO = 13/2$ dir.

MDO üçgeni bir $5 - 12 - 13$ üçgenidir. Bu durumda, $DM = 5/2$ ve $MF = 6 + 13/2 = 25/2$ olur.

$\angle DMF = \angle DCB$ olduğu için $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DM}{MF} = \dfrac{1}{4}$ tür.

$\triangle ABC$ bir $x - 4x - x\sqrt{26}$ üçgenidir. $x\sqrt{26} = 10$ dersek $x = 5\sqrt{\dfrac{2}{13}}$ ya da $x = 25\sqrt{\dfrac{2}{13}}$.

34 Aşağıdaki sayılardan hangisi $2^{2^{2010}} + 2^{2^{2009}} + 1$ sayısını böler?

a) 19 **b)** 17 **c)** 13 **d)** 11 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$2^{2^{2009}} = t$ ise $2^{2^{2010}} = t^2$ dir. Buna göre verilen ifade $t^2 + t + 1$ biçimindedir. $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$ olduğundan öyle bir p sayısı için $p \mid t^2 + t + 1 \Rightarrow p \mid t^3 - 1$ dir.

fermat teoremine göre; $(2, 13) = 1 \Rightarrow 2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan $t^3 - 1 = \left(2^{2^{2009}}\right)^3 - 1 = \left(2^{12}\right)^{2^{2007}} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur.

35 Aşağıdaki ifadelerden hangisi $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ koşullarını sağlayan tüm x, y gerçel sayıları için $x^3 + y^5$ ten küçük değildir?

a) x^2y **b)** x^2y^2 **c)** x^2y^3 **d)** x^3y **e)** xy^4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Şıklardan giderek bir çözüm yapalım:

$\max(x^2y, x^2y^2, x^2y^3, x^3y) = x^2y$ dir. A, B, C, D şıkları arasından $x^3 + y^5$ ten küçük olmayacak biri varsa o da, bunların en büyüğü x^2y dir.

$y = 2x$ alırsak $x^3 + (2x)^5 \leq x^2 \cdot 2x \implies 32x^5 \leq x^3 \implies x^2 \leq \dfrac{1}{32} \implies x \leq \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ elde ederiz. O halde $y = 2x \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ için $x^2y \geq x^3 + y^5$ olacaktır.

36 Başlangıçta $n \times n$ bir satranç tahtasının yalnızca sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırayla hamle yaparak, her hamlede taşı bulunduğu karenin hemen sağındaki, hemen üstündeki veya hemen sağ üst çaprazındaki kareye kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun, $6\times7, 6\times8, 7\times7, 7\times8$ ve 8×8 tahtalarda birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 4.

8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine, oyun bu birim kareden başladığı durumda birinci oyuncu kazanıyorsa 1, ikinci oyuncu kazanıyorsa 0 yazalım. Bu işlemi sağ üst birim kareden başlatalım. Elde edilen tablo aşağıya çıkarılmıştır:

1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Bu tabloya göre, oyunu $6 \times 7, 6 \times 8, 7 \times 8$ ve 8×8 tahtalarında birinci, 7×7 tahtasında ikinci oyuncu kazanacaktır.

Kaynak: Tübitak 18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2010

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2011

$\boxed{1}$ Aşağıdakilerden hangisi, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri $[AC]$ köşegini üstünde bir noktada kesişen her $ABCD$ dışbükey dörtgeni için doğrudur?

a) $|BA| + |AD| \leqslant |BC| + |CD|$ **b)** $|BD| \leqslant |AC|$ **c)** $|AC| \leqslant |BD|$
d) $|AD| + |DC| \leqslant |AB| + |BC|$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

AB ile CD orta dikmeleri E de kesişsin. $AE = EB$ ve $EC = ED$ dir. B, E, D noktaları için üçgen eşitsizliğinden

$$BD \leq BE + ED = AE + EC = AC$$

eşitsizliği her zaman sağlanır.

$\boxed{2}$ $(x+1)^{65}$ polinomunun kaç katsayısı 65 e bölünmez?

a) 20 **b)** 18 **c)** 16 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

(Lokman GÖKÇE)

$\binom{65}{0} = \binom{65}{65} = 1$ sayısı 65 ile tam bölünemez. $\binom{65}{r} = \binom{65}{65-r}$ olduğundan $1 \leq r \leq 32$ durumunda bulduğumuz sonucu 2 ile çarpabiliriz. $65 = 5 \cdot 13$ olduğundan $\binom{65}{r} = \dfrac{65 \cdot 64 \cdots (66-r)}{1 \cdot 2 \cdots r}$ kesrinin paydasında 5 veya 13 çarpanları olursa bunlar 65 ile sadeleşeceğinden dolayı $\binom{65}{r}$ ifadesi 65 in tam katı olamaz.

Daha iyi anlaşılması için $\binom{65}{10} = \dfrac{65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$ kombinasyonunu incelemek faydalı olacaktır.

$\binom{65}{10}$ sayısında 5 çarpanı olmadığından 65 ile bölünemez. Bununla beraber $\binom{65}{20} = \dfrac{65 \cdot 64 \cdots 50 \cdots 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 20}$ kombinasyonunun payında $50 = 2 \cdot 25$ çarpanı olduğundan bu ifade 65 ile tam bölünebilir.

Sonuçta 8 tane değer vardır. $r \in \{0, 5, 10, 13, 15, 25, 26, 30\}$ için $\binom{65}{r}$ ifadesi 65 in tam katı olamaz. Toplamda, $8 + 8 = 16$ değer elde edilir.

Çözüm 2:

Bu sorunun genel hali, Lucas Teoremi olarak bilinir. Lucas Teoreminin ispatı, Tübitak Lise Takım Seçme 1999 Soru 1 de verilmiştir.

Özetle, $n = (65) = (230)_5$ için, m sayısının 5 tabanında yazılımında herhangi bir basamaktaki sayı n sayısının 5 tabanındaki ilgili basamağındaki sayıdan büyükse $5 \mid \binom{65}{m}$ olacaktır.

Tersini düşünürsek, $m = (0)_5, (10)_5, (20)_5, (30)_5, (100)_5, (110)_5, (120)_5, (130)_5, (200)_5, (210)_5, (220)_5, (230)_5$ sayıları için $5 \nmid \binom{65}{m}$ olacaktır.

Benzer şekilde $n = (50)_{13}$ için, m sayısının 13 tabanında yazılımında hiçbir basamaktaki sayı, n sayısının ilgili basamağındaki sayıdan büyük değilse; $13 \nmid \binom{65}{13}$ olacaktır. Bu sayılar, $m = (0)_{13}, (10)_{13}, (20)_{13}, (30)_{13}, (40)_{13}, (50)_{13}$ dir.

$(0)_5 = (0)_{13}$ ve $(230)_5 = (50)_{13}$ olduğu için bu şekilde $12 + 6 - 2 = 16$ sayı vardır.

3 $1+\sqrt{n^2-9n+20} > \sqrt{n^2-7n+12}$ eşitsizliğini sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$n^2-9n+20=(n-4)(n-5)$ ve $n^2-7n+12=(n-3)(n-4)$.

$n \geq 5$ için, eşitsizliğin her iki tarafı da pozitif olduğu için, iki tarafın da karesini alırsak

$$1+n^2-9n+20+2\sqrt{n^2-9n+20} > n^2-7n+12$$

$$2\sqrt{n^2-9n+20} > 2n-9 > 0$$

$$4n^2-36n+80 > 4n^2-36n+81$$

olduğu için $n \geq 5$ için eşitsizlik sağlanmaz.

$n=4$ için, $1>0$.

$n=3$ için, $1+\sqrt{2}>0$.

$n=2$ için, $1+\sqrt{6}>\sqrt{2}$

$n=1$ için, $1+\sqrt{12}>\sqrt{6}$

4 $\{1,2,\cdots,20\}$ kümesinin 8 elemanlı alt kümelerinden kaçı ardışık sayılar içermez?

a) $\binom{13}{8}$ **b)** $\binom{13}{9}$ **c)** $\binom{14}{8}$ **d)** $\binom{14}{9}$ **e)** $\binom{20}{15}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0	

şeklideki 13 boşluğa 8 tane 1, $\binom{13}{8}$ farklı şekilde yerleştirilir.

	0		0		0	1	0	1	0		0	1	0	1	0	1	0	1	0		0	1	0	1

Yerleştirmeden sonra 0 ve 1 lerden oluşan 20 basamaklı sayı,

	1		2		3	4	5	6	7		8	9	10	11	12	13	14	15	16		17	18	19	20
	0		0		0	1	0	1	0		0	1	0	1	0	1	0	1	0		0	1	0	1

8 elemanlı alt kümede hangi sayıların yer alıp almadığını ifade eder.

Örneğin, yukarıdaki altküme, $\{4,6,9,11,13,15,18,20\}$ kümesidir. Herhangi iki 1 arasında en az bir 0 olacağından, bu şekilde oluşturulan 8 elemanlı altkümelerin hiçbirinde ardışık iki sayı yer almaz.

5 $m\left(\widehat{ABC}\right)=90^\circ$ olmak üzere, ABC üçgeninin $[AB]$ kenarını çap alan çember $[AC]$ kenarını D noktasında, çembere D de teğet olan doğru da BC yi E noktasında kesiyor. $|EC|=2$ ise, $|AC|^2-|AE|^2$ nedir?

a) 18 **b)** 16 **c)** 12 **d)** 10 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

AB çap olduğu için $\angle ADB = 90^\circ$. E den AB çaplı çembere çizilen teğetler, EB ve ED olduğu için, $EB = ED$. BDC dik üçgeninde $EB = ED$ olduğu için, $EV = ED = EC = 2$. Bu durumda, $AC^2 - AE^2 = BC^2 - BE^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

$\boxed{6}$ Kaç p asal sayısı için, $\left|p^4 - 86\right|$ sayısı da asaldır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$p = 5$ ise $5^4 - 86 \equiv 0 \pmod 7$ olduğu için sağlanmaz.

$p > 5$ ise, $p^4 - 86 \equiv 1 - 86 \equiv 0 \pmod 5$ olduğu için sağlanmaz.

$p = 2$ için, $|2^4 - 86| = 70$ sağlamaz.

$p = 3$ için, $|3^4 - 86| = 5$ sağlar.

$\boxed{7}$ x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + 5x - 7 = 0$ denkleminin farklı gerçel kökleri ise, $x_1^3 + 5x_1^2 - 4x_1 + x_1^2 x_2 - 4x_2$ nedir?

a) -15 **b)** $175 + 25\sqrt{53}$ **c)** -50 **d)** 20 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x_1 + x_2 = -5$ ve $x_1^3 + 5x_1^2 - 4x_1 + x_1^2 x_2 - 4x_2 = x_1^2(x_1 + x_2 + 5) - 4(x_1 + x_2) = 20$.

$\boxed{8}$ Pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her kümenin toplamları 6 ile bölünen altı elemanı bulunabiliyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 13 **b)** 12 **c)** 11 **d)** 10 **e)** 9

Çözüm:

$x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 1$, $x_6 = x_7 = \cdots = x_{10} = 6$ alındığında 10 pozitif tam sayı arasından herhangi 6 tanesinin toplamı 6 ile bölünmüyor.

3 tam sayı arasından, ikisinin 2 ye bölümünden kalan aynı olacağı için, bu ikisinin toplamı 2 ile bölünür.

5 tam sayının 3 ile bölümünden 3 farklı kalan elde ediliyorsa, bu kalanları veren birer sayı (toplamda 3) toplanarak elde edilen sayı ($0 + 1 + 2 = 3$ olduğu için) 3 ile bölünür. 5 tam sayının 3 ile bölümünden elde edilen farklı kalanlar 3 ten az sayıda ise, güvercin yuvası gereği en az $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$ tanesi aynı olacak. Bu 3 aynı kalanlı sayıyı topladığımızda, toplam 3 ile bölünecek.

$11 > 3$ sayıdan toplamları 2 ile bölünen iki tanesi bulunabilir. Bu sayılar, x_1 ve x_2 olsun. $2 \mid y_1 = x_1 + x_2$.

Geri kalan $9 > 3$ sayıdan aynı şekilde $2 \mid y_2 = x_3 + x_4$, geri kalan $7 > 3$ sayıdan aynı şekilde $2 \mid y_3 = x_5 + x_6$, geri kalan $5 > 3$ sayıdan aynı şekilde $2 \mid y_4 = x_7 + x_8$, geri kalan 3 sayıdan aynı şekilde $2 \mid y_5 = x_9 + x_{10}$ olacak şekilde sayılar bulunur.

$y_1/2$, $y_2/2$, $y_3/2$, $y_4/2$, $y_5/2$ sayılarından öyle 3 ü vardır ki, toplamları 3 ile bölünür. Bunlar $y_1/2$, $y_2/2$, $y_3/2$ olsun. Bu durumda, $3 \mid \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{2}$, dolayısıyla $6 \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_6$ olur.

Kaynak:

Mathematical miniatures, Svetoslav Savchec-Titu Andreescu, Sayfa 179.

$\boxed{9}$ $m\left(\widehat{ADC}\right) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde D den geçen ve BC ye paralel olan doğru AB doğrusunu E noktasında kesiyor. $m\left(\widehat{DAC}\right) = m\left(\widehat{DAE}\right)$, $|AB| = 3$ ve $|AC| = 4$ ise, $|AE|$ nedir?

a) $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 1 **e)** $\frac{3}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$[BA$ ile $[CD$, F de kesişsin. $\triangle FAC$ de, AD hem açıortay hem de yüksekik olduğu için, $FD = DC$ ve $AC = AF = 4$.

$ED \parallel BC$ ve $FD = DC$ olduğu için, $BE = EF = 7/2 \Rightarrow AE = 1/2$.

$\boxed{10}$ $0 \leqslant x, y, z < 2011$ olmak üzere, $xy + yz + zx \equiv 0 \pmod{2011}$ ve $x + y + z \equiv 0 \pmod{2011}$ koşullarını sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

a) 2010 **b)** 2011 **c)** 2012 **d)** 4021 **e)** 4023

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{D}$.

$x = 0$ olsun, $yz \equiv 0 \pmod{2011}$ ve $y + z \equiv 0 \pmod{2011}$ olduğundan $y = z = 0$ olur. Bu durumda tek çözüm $(0, 0, 0)$olur.

$1 \leq x \leq 2010$ olsun. $x + y + z \equiv 0 \pmod{2011}$ olduğundan $y + z \equiv -x \pmod{2011}$ olur. $x(y + z) + yz \equiv 0 \pmod{2011} \Longrightarrow -x^2 + yz \equiv 0 \pmod{2011} \Longrightarrow yz \equiv x^2 \pmod{2011}$.

$z \equiv \frac{x^2}{y} \pmod{2011}$ olur.

$y+z \equiv -x \pmod{2011} \Longrightarrow y+\frac{x^2}{y} \equiv -x \pmod{2011} \Longrightarrow x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod{2011} \Longrightarrow (2y+x)^2 \equiv -3x^2 \pmod{2011}$.

$-3 \pmod{2011}$ de kare kalan olduğu için $-3x^2$ de kare kalandır.

Öyleyse $2y + x \pmod{2011}$ de 2 değer alabilir $\Longrightarrow$ y 2 değer alabilir.

x in alabileceği 2010 değerden herbiri için y 2 değer alabilir. Öyleyse bu durumda $2010 \cdot 2 = 4020$ tane (x, y, z) üçlüsü vardır.

Toplam $4020 + 1 = 4021$ tane (x, y, z) üçlüsü vardır.

$\boxed{11}$ $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2$ polinomunun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** -2 **e)** 7

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$P(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2$ ve $Q(x) = (x - 1)P(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (x^6 + x^5 - 4x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 2x) - (x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2) \\
&= x^6 - 5x^4 - 3x^3 + 5x + 2 \\
&= x^6 - 3x^3 + 2 - 5x(x^3 - 1) \\
&= (x^3 - 2)(x^3 - 1) - 5x(x^3 - 1) \\
&= (x^3 - 1)(x^3 - 5x - 2) \\
&= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 - 5x - 2) \\
P(x) &= (x^2 + x + 1)(x^3 - 5x - 2)
\end{aligned}$$

$R(x) = x^3 - 5x - 2$ polinomunun türevinin $R'(x) = 3x^2 - 5 = 0$ iki gerçel kökü olduğu için, $R(x)$ in üç kökü de gerçeldir. Bu durumda, $P(x)$ in gerçel kökleri ile $R(x)$ in gerçel kökleri aynıdır. O halde, gerçel kökler toplamı $R(x)$ te x^2 li terimin katsayısı 0 olduğu için 0 dır.

12 Bir okuldaki 100 öğrenciden her biri aynı okuldaki istediği 50 öğrenciye mesaj yollamıştır. Karşılıklı olarak mesajlaşmış öğrenci çiftlerinin sayısı en az kaç olabilir?

a) 100 **b)** 75 **c)** 50 **d)** 25 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$50 \cdot 100 = 5000$ adet mesaj var.

100 kişi arasında tek yönlü en fazla $\binom{100}{2} = 4950$ (100 nokta kaç doğru parçası belirtir?) mesaj olabilir.

O halde, en az $5000 - 4950 = 50$ adet çift karşılıklı mesajlaştı.

13 Dar açılı bir ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, D, E, F dir. $|DF| = 3, |FE| = 4, |DE| = 5$ ise DE ye teğet olan C merkezli çemberin yarıçapı nedir?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle EDC = \angle BAC = \angle FDB$ olduğu için, $\triangle DEF$ de , DC doğrusu, $\angle D$ açısına ait dış açıortaydır. Benzer şekilde, EC de $\triangle DEF$ de $\angle E$ ye ait dış ortaydır. Bu durumda, C notkası, $\triangle DEF$ de D ye karşı dış merkezdir. C den DF, DE, EF doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, X, Y, Z olsun. $DX = DY$, $EY = EZ$, $FZ = FX$ ve $FX + FZ = 3 + 4 + 5 = 12$ olduğu için $FX = 6$ dır. $\angle CFX = 45°$ olduğu için de $XC = FX = 6$ dır.

14 $2011^{\left(2011^{\left(2011^{\left(2011^{2011}\right)}\right)}\right)}$ sayısının 19 ile bölümünden kalan nedir?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$(2011, 19) = 1$ ve $\varphi(19) = 18$ olduğu için $2011^{\left(2011^{\left(2011^{2011}\right)}\right)} = 18k_1 + a_1$ i bulmamız gerekiyor.

$(2011, 18) = 1$ ve $\varphi(18) = 6$ olduğu için $2011^{\left(2011^{2011}\right)} = 6k_2 + a_2$ yi bulmamız gerekiyor.

$2011^{\left(2011^{2011}\right)} \equiv 1^{\left(2011^{2011}\right)} \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow a_2 = 1.$

$2011^{\left(2011^{\left(2011^{2011}\right)}\right)} \equiv 2011^{6k_2+1} \equiv 2011 \equiv 13 \pmod{18} \Rightarrow a_1 = 13.$

$2011^{\left(2011^{\left(2011^{\left(2011^{2011}\right)}\right)}\right)} \equiv 2011^{18k_1+13} \equiv 16^{13} \pmod{19}.$

$1 \equiv 16^{13} \cdot 16^5 \equiv 16^{13} \cdot (-3)^5 \pmod{19}$

$16^{13} \cdot 3^4 \cdot 3 \equiv 18 \pmod{19}$

$16^{13} \cdot 5 \equiv 6 \equiv 25 \pmod{19} \Rightarrow 16^{13} \equiv 5 \pmod{19}.$

15 Aşağıdaki (a, b) ikililerinden hangisi için, $x + 2y < a$ ve $xy > b$ eşitsizliklerini sağlayan hiçbir (x, y) pozitif gerçel sayı ikilisi yoktur?

a) $\left(\frac{15}{7}, \frac{4}{7}\right)$ **b)** $\left(\frac{18}{11}, \frac{1}{3}\right)$ **c)** $\left(\frac{5}{7}, \frac{1}{16}\right)$ **d)** $\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{11}\right)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x + 2y = a \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$

$xy = b \Rightarrow y = \frac{b}{x}$ eğrisine teğet olan $-\frac{1}{2}$ eğimli doğru $y = -\frac{x}{2} + n$ olsun. Ortak çözümde $\Delta = 0$ olmalı.

$$-\frac{x}{2} + n = \frac{b}{x} \Rightarrow x^2 - 2nx + 2b \Rightarrow \Delta = 4n^2 - 8b = 0 \Rightarrow n = \sqrt{2b}$$

$y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$ ile $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{2b}$ doğrusu birbirine paraleldir. $\frac{a}{2} > \sqrt{2b}$ olduğu sürece eşitsizlik sisteminin çözümü vardır.

Biraz düzenlersek $a^2 > 8b$ olan şıklarda çözüm vardır.

Bu aşamadan sonra her şıkkı denemek zorundayız. Ne yazık ki tüm şıklar da a^2 ile $8b$ sayısı birbirlerine çok yakın. Yine de gerekli işlemleri yaptığımızda tüm şıklar için $a^2 > 8b$ eşitsizliğinin sağlandığını görürüz.

Çözüm 2:

$$a = x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} > 2\sqrt{2b}$$

olduğundan $a^2 > 8b$ dir. Şıklar denendiğinde ise tüm ikililerin bu koşulu sağladığı görülür.

16 Ağırlıkları pozitif tam sayılar olan herhangi 2011 taş, biri diğerinin iki katı ağırlıkta iki taş içermeyen n öbeğe ayrılabiliyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 102 **b)** 51 **c)** 12 **d)** 11 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{E}$

Taşların ağırlıkları $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ olsun. b_i ler tek pozitif tam sayı olacak şekilde $a_i = 2^{k_i}.b_i$ dir. Şimdi eğer k_i tek pozitif tam sayı ise a_i yi birinci kümeye, k_i çift pozitif tam sayı ise a_i yi ikinci kümeye koyalım. O zaman şartlar sağlanmış olur. Bir küme olamayacağı için cevap ikidir.

17 ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için, $|AD| = \sqrt{2}, |BD| = 3$ ve $|CD| = \sqrt{5}$ ise, $m\left(\widehat{ADB}\right)$ nedir?

a) 120° **b)** 105° **c)** 100° **d)** 95° **e)** 90°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bu klasik sorunun genel halini çözelim.

$AD = x$, $BD = y$ ve $CD = z$ olsun.

$\triangle ADC$ üçgenini AB üzerine üçgenin dışına doğru $\triangle AD'B \cong \triangle ADC$ olacak şekilde yapıştıralım. Eşlikten $AD' = AD = x$ ve $D'B = DC = z$.

$\angle D'AB = \angle DAC$ olduğu için $\angle D'AD = \angle BAC = 60^\circ$. Bu durumda, $\triangle ADD'$ eşkenar. $\angle D'DA = 60^\circ$ ve $DD' = x$.

$\triangle D'DB$ de Kosinüs teoreminden $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \angle D'DB = z^2$. Yani $\angle D'DB = \arccos\left(\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)$.

Bu durumda $\angle ADB = \angle ADD' + \angle D'DB = 60^\circ + \arccos\left(\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)$ dir.

Soruda verilen $x = \sqrt{2}$, $y = 3$ ve $z = \sqrt{5}$ değerlerini yerine yazarsak,

$$\angle ADB = 60^\circ + \arccos\left(\frac{6}{6\sqrt{2}}\right) = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$$

elde ederiz.

18 Kaç pozitif tam sayı $n\left(n^2-1\right)\left(n^2+3\right)\left(n^2+5\right)$ ifadesini n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için böler?

a) 16 **b)** 12 **c)** 8 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$f(n) = n(n^2-1)(n^2+3)(n^2+5)$ olsun.

$f(2) = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ ve $f(3) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$ dir.

Bu durumda her n pozitif tam sayısı için $k \mid f(n)$ ise $k \mid \text{obeb}\left(f(2), f(3)\right) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ olmalı.

$f(n)$ nin her zaman çift olduğu açıktır. Geriye $f(n)$ yi mod7 ve mod9 da incelemek kalıyor.

n	$n^2 \mod 7$	$f(n) \mod 7$
0	0	0
1	1	0
2	4	0
3	2	0
4	2	0
5	4	0
6	1	0

n	$n^2 \mod 9$	$f(n) \mod 9$
0	0	0
1	1	0
2	4	0
3	0	0
4	7	0
5	7	0
6	0	0
7	4	0
8	1	0

olduğu için her n pozitif tam sayısı için $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \mid f(n)$.

Bu durumda $k \mid 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ olacak şekilde $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ pozitif tam sayı bulunur.

19 Aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin xy-düzleminde tanımladığı bölge ile kesişimi tam olarak iki noktadan oluşan bir doğru bulunur?

a) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ **b)** $|x+y| + |x-y| \leqslant 1$ **c)** $|x|^3 + |y|^3 \leqslant 1$

d) $|x| + |y| \leqslant 1$ **e)** $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} \leqslant 1$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

(e) şıkkının karesini alalım: $|x| + |y| + 2\sqrt{|xy|} \le 1$

$x + y = 1$ olduğu zaman $|x| + |y| \ge |x + y| = 1$ olacağı için $xy = 0$ olmalı. $x + y = 1$ ve $xy = 0$ sisteminin ise iki çözümü vardır. $(0, 1)$ ve $(1, 0)$.

Eşitsizliğin Wolfram Alpha Grafiği incelendiğinde iç bükey bir bölge görülür. Bu bölge ile iki noktada kesişen dört doğru bulunur.

Diğer şıkları da inceleyelim:

(a) şıkkı bir çember denklemidir. Bu durumda bir doğru ile kesişim kümesi $0, 1, \infty$ elemanlı olabilir. Grafik

(b) şıkkındaki $|x + y| + |x - y| = 1$ denklemi bir kare belirtir. Grafik

(c) şıkkı için $x^3 + y^3 = 1$ i 1. bölgede incelediğimizde çembere benzeyen bir dış bükey eğri elde ederiz. Diğer eksenler için simetrik durum söz konusudur. Wolfram'a grafiği çizdirdiğimizde tüplü televizyon vari bir şekille karşılaşırız.

(d) şıkkının grafiğinin bir kare olduğu açıktır.

20 100 öğrencinin girdiği bir sınavda 5 soru sorulmuş ve her soruyu tam olarak 50 öğrenci çözmüştür. Çözdüğü soru sayısı ikiyi aşmayan öğrencilerin sayısı en az kaç olabilir ?

a) 21 **b)** 18 **c)** 17 **d)** 16 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Lokman Gökçe)

Tam olarak $0, 1, 2, 3, 4, 5$ soru çözmüş öğrenci sayıları sırasıyla $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ olsun. $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ ve toplam çözülen soru sayısı $5 \cdot 50 = 250$ olduğundan $0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 250$ elde edilir. $x_0 + x_1 + x_2$ toplamının minimum olması için $x_3 + x_4 + x_5$ toplamının maksimum olması gerekir. $3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5$ ifadesinde en küçük katsayı x_3 teriminde olduğundan x_3 ü olabildiğince büyük seçmeliyiz. $3 \cdot x_3 \le 250$ eşitsizliğinden $x_3 \le 83$ elde edilir. $x_3 = 83$ için $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot 83 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 250$ ya da $x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 1$ olur. Bu denklemde $x_1 = 1, x_2 = x_4 = x_5 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $x_0 = 16$ dır. $(x_0 + x_1 + x_2)_{min} = 16 + 1 + 0 = 17$ elde edilir.

21 Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde yer alan bir E noktası $|AE| = |EB|, m\left(\widehat{EAB}\right) = 11°$ ve $m\left(\widehat{EBC}\right) = 71°$ koşullarını sağllıyorsa, $m\left(\widehat{DCE}\right)$ nedir?

a) 72° **b)** 71° **c)** 70° **d)** 69° **e)** 68°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$\triangle ABC$ de $AB = BC$ olup $\angle BAC = \angle BCA = 49°$ dir.

$\triangle BEC$ nin iç bölgesinde $\triangle BE'C \cong \triangle BEA$ olacak şekilde bir E' noktası alalım.

$\angle E'BC = \angle E'CB = 11°$, $AE = EB = BE' = E'C$ ve $\angle EBB' = 60°$ dir. Bu durumda $\triangle EBB'$ eşkenardır.

İster basit açı hesabıyla ister E' noktasının $\triangle BEC$ nin çevrel çemberinin merkezi olduğunun fark edilmesiyle $\angle ECB = 30°$ olarak bulunabilir.

Bu durumda $\angle ECA = 49° - 30° = 19°$ dir.

$ABCD$ eşkenar dörtgen olduğu için $\angle ACD = \angle ACB = 49°$ ve $\angle DCE = 49° + 19° = 68°$ dir.

Not:

$0° < t < 30°$ olmak üzere; $\triangle ABC$ de, $\angle BAE = \angle ABE = 30° - t$, $\angle EBC = 90° - t$, $\angle EAC = 2t$ olduğu durumda, $\angle ECA = t$ çıkar. Bu soru için $t = 19°$ verilmiş.

Ek olarak, bu soru modeli, burada bahsedilen 4.7 numaralı modeldir.

(Bu tip soruların modelini bulmak için bu programı kullanabilirsiniz.)

Burada bahsedilen modelde gösterim yaparsak, $(30° - t = 11°, 90° - t = 71°, x) : (30° - t = 11°, 2t = 38°, y)$ dir. Ceva teoreminin trigonometrik halinin bir sonucu olarak gruplardaki açılar kendi aralarında yer değiştirebilir. Bu durumda, bu soru Lise 1. Aşama 2012/17 sorusu ile büyük benzerlik taşır.

Çözüm 2:

$\angle EBA = \angle EAB = \alpha$, $\angle EBC = 60° - \alpha$ ve $\angle EAC = 60° - 2\alpha$ olsun.

İddia: $\angle ECB = 30°$ ve $\angle ECA = 30° - \alpha$ dır.

Burada ilgili ispatı bulabilirsiniz. ■

$\alpha = 11°$ aldığımızda, bize sorulan soruyu elde ederiz.

$\angle ABC = 82°$ ve $\angle BCE = 30°$ olduğu için $\angle DCE = (180° - 82°) - 30° = 68°$ dir.

22 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ve her $n \geqslant 1$ için, $f(3n-1) = f(n) - 1$, $f(3n) = f(n)$, $f(3n+1) = f(n) + 1$ ise, $f(2011)$ nedir?

a) 7 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 1 **e)** 0

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

3 e bölümden kalanların $-1, 0, 1$ olduğu bir bölme işlemiyle 2011 yi mütemadiyen 3 e bölelim.

$f(2011) = f(3 \cdot 670) + 1$

$f(670) = f(3 \cdot 223) + 1$

$f(223) = f(3 \cdot 74) + 1$

$f(74) = f(3 \cdot 25) - 1$

$f(25) = f(3 \cdot 8) + 1$

$f(8) = f(3 \cdot 3) - 1$

$f(3) = f(3 \cdot 1)$

$f(1) = 1$

Taraf tarafa toplarsak $f(2011) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 3$ olur.

23 xy-düzlemindeki tam sayı koordinatlı noktalardan koordinatları çarpımı 6 ile bölünenler kırmızıya, bölünmeyenler ise beyaza boyanıyor. Kenarları koordinat eksenlerine paralel çok büyük bir karenin içinde kalan tam sayı koordinatlı noktalardan beyaz olanların sayısının kırmızı olanların sayısına oranı aşağıdakilerden hangisine en yakındır?

a) $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 2 **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{5}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$xy \equiv 0 \pmod 6$ denkliğinin 15 çözümü vardır. 36 (x, y) ikilisiden 21 i ise çözüm değildir. Bu durumda kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ama hiçbir kenarı eksenleri tam sayı bir koordinatta kesmeyen 6×6 büyüklükteki herhangi bir karede beyaz noktaların sayısının kırmızı noktaların sayısına oranı $\dfrac{21}{15} = \dfrac{7}{5}$tir.

$36n^2 < x^2 \leq 36(n+1)^2$ olmak üzere;

Çok büyük $x \times x$ bir kare alındığında karenin içerisinde tam sayı koordinattan başlamayan $6n \times 6n$ lik bir alanda kalan beyaz noktaların sayısı $21n^2$, kırmızı noktaların sayısı $15n^2$ dir.

$x^2 - 36n^2 \leq 36(n+1)^2 - 36n^2 = 72n + 1$ olduğu için $x \times x$ karenin $36n^2$ lik alan dışında kalan kısmındaki beyaz noktaların sayısı $B(n)$ ya da kırmızı noktaların sayısı $K(n)$ en fazla $72n + 1$ olabilir.

Bu durumda aradığımız oran $\dfrac{21n^2 + B(n)}{15n^2 + K(n)}$ olacaktır. Hem $B(n)$ hem de $K(n)$, n cinsinden derecesi en fazla 1 olan fonksiyonlar olduğu için $n \to \infty$ giderken ihmal edilebilir olacaktır.

24 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ renklerinde sırasıyla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ topun bulunduğu bir torbadan, her seferinde çekilen top torbaya geri konmak koşuluyla, birer birer rastgele n top çekildiğinde bu toplardan en az ikisinin aynı renkte olma olasılığını $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi en küçüktür?

a) $p(2, 2, 2, 1)$ **b)** $p(1, 1, 1, 1)$ **c)** $p(2, 2, 3)$ **d)** $p(2, 2, 1)$ **e)** $p(1, 1, 1)$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$p'(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile tüm topların farklı olma olasılığını gösterelim.

Açık şekilde $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) + p'(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Şıklardaki ifadelerin değillerini yazalım:

$p'(2, 2, 2, 1) = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot 4!$

$p'(1, 1, 1, 1) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 4!$

$p'(2, 2, 3) = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{3}{7} \cdot 3!$

$p'(2, 2, 1) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 3!$

$p'(1, 1, 1) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 3!$

Aralarında en büyüğü $p'(1, 1, 1)$ olduğu için şıklardan en küçüğü $p(1, 1, 1)$ dir.

25 $ABCDE$ düzgün dışbükey beşgeninin alanının, kenarları AC, CE, EB, BD, DA doğruları üstünde yer alan düzgün dışbükey beşgenin alanına oranı nedir?

a) $\dfrac{41}{6}$ **b)** $\dfrac{3 + 5\sqrt{5}}{2}$ **c)** $4 + \sqrt{5}$ **d)** $\dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İkinci düzgün beşgenin ilk beşgenin A dan çıkan köşegeni üzerinde yer almayan köşegeni A' olsun. Benzer şekilde B', C', D', E' köşeleri tanımlansın.

$D'E' = 1$ ve $AB = BC = x$ dersek bu durumda bize alanlar oranı, yani x^2 soruluyor.

$CD' = BC = 1 \Rightarrow E'C = E'B = x - 1$.

$\triangle BE'C \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x}{2x-1}$.

$2x^2 - 2x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$x > 1$ olduğu için $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

26 $0 \leqslant a < 2^{2008}$ ve $0 \leqslant b < 8$ tam sayıları $7\left(a + 2^{2008}b\right) \equiv 1 \pmod{2^{2011}}$ denkliğini sağlıyorsa, b nedir?

a) 3 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$7(a + 2^{2008}b) \equiv 7a + 8 \cdot 2^{2008} \cdot b - b \cdot 2^{2008} \equiv 1 \pmod{2^{2011}}$

$\Rightarrow 7a \equiv b \cdot 2^{2008} + 1 \pmod{2^{2011}}$

$0 \leq a < 2^{2008} \Rightarrow 7a < 7 \cdot 2^{2008} < 2^{2011}$ ve $b \cdot 2^{2008} \leq 7 \cdot 2^{2008} < 2^{2011}$ olduğu için $7a = b \cdot 2^{2008} + 1$. Her iki tarafı mod7 de incelersek $0 \equiv 2b + 1 \pmod 7 \Rightarrow b \equiv 3 \pmod 7$ olacaktır. O halde $b = 3$ olabilir. $b = 3$ iken $a < 2^{2008}$ olacağı için $b = 3$ verilen şartları sağlar.

27 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 1, a_3 = 4$ ve her $n \geqslant 2$ için $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 1$ koşulnu sağlıyorsa a_{2011} nedir?

a) 2^{2010} **b)** 2021056 **c)** 1010528 **d)** 3016 **e)** 2011

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{B}$

$a_3 - 2a_2 + a_1 = 1$

$a_4 - 2a_3 + a_2 = 1$

$a_5 - 2a_4 + a_3 = 1$

...

...

$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$

Taraf tarafa toplayınca şu eşitlik elde edilir:

$\Longrightarrow a_{n+1} - a_n = (n-1) + a_2 - a_1$ Aynı zamanda $a_3 - 2a_2 + a_1 = 1$ eşitliğinde a_3 ve a_1 bilindiği için yerine yazarak $a_2 = 2$ bulunur. O zaman eşitlik şu hale gelir: $a_{n+1} - a_n = (n-1) + 2 - 1 = n$. Şimdi bu eşitlikten yararlanarak başka eşitlikler yazalım.

$a_2 - a_1 = 1$

$a_3 - a_2 = 2$

$a_4 - a_3 = 3$

. .

. .

$a_{2011} - a_{2010} = 2010$

Taraf tarafa toplayalım:

$\Longrightarrow a_{2011} - a_1 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2010) = \dfrac{2010.2011}{2} = 2021055$

$a_1 = 1$ olduğu için $a_{2011} = 2021056$ bulunur.

28 $1, 2, \ldots, 4022$ sayıları 2×2011 bir satranç tahtasının birim karelerine, iki sayı aynı birim karede olmamak ve ardışık olan sayılar ortak bir kenarı olan birim karelerde yer almak koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

a) 16168444 **b)** 12168440 **c)** 10088242 **d)** 8084224 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Satranç tahtasının siyah-beyaz boyalı olduğunu düşünelim. 1 sayısı beyaz bir karedeyse tüm çift sayılar siyah karede olmalı ya da tam tersi.

Bu durumda 1 beyaz karedeyse 4022 siyah karede olacak. 1 ile 4022 yi tahtaya yerleştirdiğimizde diğer sayıları tek bir şekilde yerleştirebiliyoruz.

1 ile 4022 nin birlikte ilk ve birlikte son sütunda olduğu 4 durum var. Bunları aradan çıkartalım.

Bunun haricinde 1 ile 4022 aynı sütunda olamaz. 1 ile 4022 nin aynı sütunda olamadığı durumları hesaplayalım:

1 için 4022 farklı yer var. 4022 ile 1 farklı renklerdeki karelerde yer alacağı için, $4022/2 = 2011$, aynı sütunda yer almayacakları için 4022 ye $2011 - 1 = 2010$ farklı yer kalıyor. Buradan $4022 \times 2010 = 8084220$ farklı yerleştirme gelir.

Toplamda $8084220 + 4 = 8084224$ farklı yerleştirme olur.

29 ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen bir çember $[AB]$ kenarını D, $[AC]$ kenarını E noktasında kesiyor.ACD üçgeninin çevrel çemberi ise, BE doğrusunu $[BE]$ dışındaki bir F noktasında kesiyor. $|AD| = 4$ ve $|BD| = 8$ ise, $|AF|$ nedir ?

a) $\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{6}$ **c)** $4\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt{6}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$m\left(\widehat{ECD}\right) = m\left(\widehat{EBD}\right)$ ve $m\left(\widehat{ECD}\right) = m\left(\widehat{AFD}\right)$ olduğundan, $m\left(\widehat{AFD}\right) = m\left(\widehat{FBA}\right)$ dır.

Buna göre $\triangle AFD \sim \triangle ABF$ olup bu benzerlikten $|AF|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AF|^2 = 4 \cdot 12 = 48 \Rightarrow |AF| = 4\sqrt{3}$

30 m nin hangi değeri için, $3x^2 - 10xy - 8y^2 = m^{19}$ eşitliğini sağlayan hiçbir (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Denklemi $(3x+2y)(x-4y)=m^{19}$ şeklinde çarpanlara ayıralım. Bir $0 \le a \le 19$ tam sayısı için $3x+2y=m^a$ ve $x-4y=m^{19-a}$ olmalıdır. Bu denklemlerden

$$x=\frac{2m^a+m^{19-a}}{7}\ldots(1)$$

ve

$$y=\frac{5m^a-m^{19-a}}{14}\ldots(2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerini

$$2m^a+m^{19-a}\equiv 0 \pmod 7\ldots(3)$$

ve

$$y=5m^a-m^{19-a}\equiv 0 \pmod{14}\ldots(4)$$

biçiminde yazalım. Şimdi seçenekleri deneyelim:

$m=7$ ve $a=1$ için $(3),(4)$ denkliklerinin sağlandığı açıktır. Yani denklemin çözümü vardır.

$m=6$ için (3) denkliği $2+6^{19-2a}\equiv 0 \pmod 7$ olur. Ancak $19-2a$ tek sayı ve olduğundan $6\equiv -1 \pmod 7$ olduğundan $2+6^{19-2a}\equiv 1 \pmod 7$ çelişkisi elde edilir. $m=6$ için denklemin çözümü yoktur.

Cevabı bulduk ancak diğer seçenekler de kontrol amaçlı denenebilir.

$m=3$ için çözüm olduğunu gösterelim. (3) denkliği $2+3^{19-2a}\equiv 0 \pmod 7$ şekline gelir. $3^{19-2a}\equiv 5 \pmod 7$ olmalıdır. $3^5\equiv 5 \pmod 7$ olduğundan $19-2a=5$ seçersek $a=7$ tam sayısı bulunabilir. Bu değer için (4) denkliği de sağlandığından, $m=3$ için çözüm vardır.

31 $i^2+j^2+k^2=2011$ koşulunu sağlayan i,j,k tam sayıları için, $i+j+k$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 71 **b)** 73 **c)** 74 **d)** 76 **e)** 77

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Karesel-Aritmetik Ortalama Eşitsizliği uygulanırsa, $\sqrt{\dfrac{i^2+j^2+k^2}{3}}\ge\dfrac{i+j+k}{3}\implies 6033\ge(i+j+k)^2\implies$ $77\ge i+j+k$ elde edilir. (i,j,k tamsayı olduğundan)

Öte yandan, $i^2+j^2+k^2=2011\equiv 3 \pmod 4$ şartının sağlanması için, i, j, k sayılarının hepsi tek olmalıdır. (Bkz. Kare Kalanlar)

i, j, k sayıları eşit olduğunda $i+j+k$ toplamının 77'ye çok yakın olacağını biliyoruz. 77'ye eşit olması için de birbirlerine oldukça yakın olmalıdırlar. $\dfrac{77}{3}=25,\bar{3}$ olduğundan 25'e yakın tüm tek sayıların karelerini inceleyelim.

$21^2=441$

$23^2=529$

$25^2=625$

$27^2=729$

$29^2=829$

$i+j+k=77$ olabiliyorsa, $(21,27,29),(23,25,29)$ üçlülerinden biri bunu sağlayabilir. Denenirse, $21^2+27^2+29^2=2011$'dir.

O halde $i+j+k$ toplamı en fazla 77 olabilir. Sağlayan (i,j,k) üçlüsü $(21,27,29)$'dur.

32 Başlangıçta bir öbekte n taş bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncu istediği bir $i \geqslant 0$ tam sayısı için öbekteki taşlardan 2^i tanesinin alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun $n = 1000, 2000, 2011, 3000, 4000$ değerlerinin her biri için birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını oyuna başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir ?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Barış DEMİR)

$n = 3k$ için oyunu daima ikinci oyuncu kazanır.

$i \geq 0$ için birinci oyuncu 2^i taş alsın, geriye $3k - 2^i$ taş kalır.

$3k - 2^i \equiv 1 \pmod 3$ veya $3k - 2^i \equiv 2 \pmod 3$

Eğer, $3k - 2^i \equiv 1 \pmod 3$ ise, ikinci oyuncu $2^k \equiv 1 \pmod 3$ olacak biçimde taş alarak birinci oyuncuya $3k - 2^i - 2^k \equiv 0 \pmod 3$

olacak şekilde taş bırakır.Yani tekrar 3 ün katı olan bir taş miktarı kalır.

Eğer, $3k - 2^i \equiv 2 \pmod 3$ ise, 2.oyuncu $2^k \equiv 2 \pmod 3$ olacak biçimde taş alarak birinci oyuncuya $3k - 2^i - 2^k \equiv 0 \pmod 3$

olacak şekilde taş bırakır.Yani tekrar 3 ün katı olan bir taş miktarı kalır.

birinci oyuncu ne yaparsa yapsın ikinci oyuncu mutlaka ona 3 ün katı olacak biçimde taş bırakacaktır. 1.oyuncu en iyi ihtimalle bu durumu 3 taşa kadar sürdürecektir.3 taş kalınca da ya 2^0 alacak ve ikinci oyuncu 2^1 alarak kazanacak ya da tam tersi 2^1 alacak ve ikinci oyuncu 2^0 alarak kazanacaktır.

$n = 3k + 1$ ve $n = 3k + 2$ için de oyunu daima birinci oyuncu $n = 3k$ da ikinci oyuncunun uyguladığı taktiği uygulayarak kazanır.

O halde verilen sayılardan $1000, 2000, 2011, 4000$ için oyunu birinci oyunu kazanır.

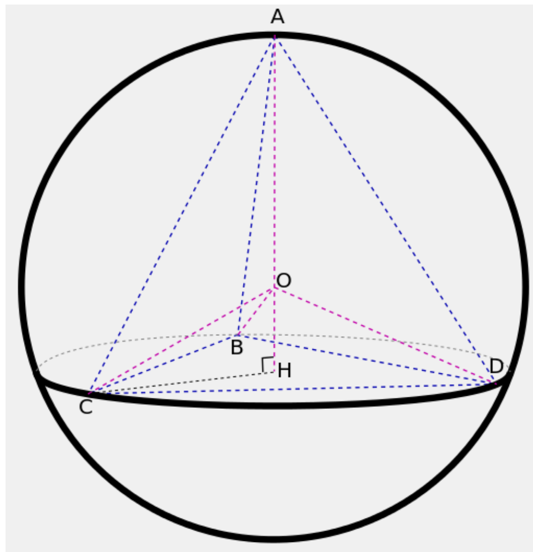
33 Bir birim küreye içten ve köşeleri bu küre üstünde yer alan düzgün dörtyüzlünün bir yüzüne de dıştan teğet olan kürenin hacmi en çok ne olabilir?

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{1}{4}$ **c)** $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **d)** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right)$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıtla: $\boxed{E}$

$ABCD$ düzgün dörtyüzlüsünün çevrel küresinin merkezi O olsun. $OC = OB = OD = 1$ ve $AC = AB = AD$ olduğu için A dan BCD düzlemine inilen dikme O dan geçer. Dikmenin ayağına H diyelim.



H noktası BCD eşkenar üçgeninin ağırlık merkezidir. Dörtyüzlünün bir kenarına a dersek, $BH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\angle BAH = \alpha$ dersek $\angle BOH = 2\alpha$ ve $OH = OB \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot (1/\sqrt{3})^2 = \dfrac{1}{3}$.

Dörtyüzlünün BCD yüzüne dıştan teğet ve birim küreye içten teğet olan en büyük kürenin merkezi OH üzerindedir. Bu durumda kürenin çapı $1 - OH = \dfrac{2}{3}$, kürenin yarıçapı $\dfrac{1}{3}$ oluyor.

Kürenin hacmi $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1/3)^2 = \dfrac{4\pi}{27}$ çıkar.

34 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, 2^n sayısının on tabanına göre sağdan en çok kaç basamakta aynı sayı yer alabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Son 4 basamağın aynı olduğunu kabul edelim.

$m \in \{2, 4, 6, 8\}$ olmak üzere $2^n = 10000k + 1111 \cdot m$ olacaktır. İki tarafı mod16 da incelersek $0 \not\equiv 1111 \cdot m \pmod{16}$ olacağı için son dört basamak aynı rakamdan oluşamaz.

Son 3 basamağın aynı olduğunu kabul edelim.

$2^n = 1000k + 111 \cdot m$ olacaktır. İki tarafı $\bmod 8$ de incelersek $0 \not\equiv 1111 \cdot m \pmod 8$ olacağı için $m = 8$ olmalı.

Her iki tarafı 8 e bölersek $2^{n-3} = 125k + 111$ elde ederiz.

$2^x \equiv 111 \pmod{125}$ denkliğinin çözümü varsa 2^n sayısının son üç hanesi 888 olacaktır.

$2^7 \equiv 3 \pmod{125} \Rightarrow 2^{35} \equiv 3^5 \equiv -7 \pmod{125} \Rightarrow 2^{36} \equiv -14 \equiv 111 \pmod{125}$.

O halde $m = 36$, yani $n = 39$ için, 2^{39} un son üç basamağı 888 dir.

35 Aşağıdaki fonsiyonlar arasında pozitif gerçel sayılar kümesinde aldığı en büyük değer en küçük olan hangisidir?

a) $\dfrac{x^2}{1+x^{12}}$ **b)** $\dfrac{x^3}{1+x^{11}}$ **c)** $\dfrac{x^4}{1+x^{10}}$ **d)** $\dfrac{x^5}{1+x^9}$ **e)** $\dfrac{x^6}{1+x^8}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Şıklardaki fonksiyonları $a(x), b(x), c(x), d(x), e(x)$ diye adlandıralım.

$d(x)$, en büyük değerini m de alsın.

$d(m) > d\left(\frac{1}{m}\right) \Rightarrow \dfrac{m^5}{1+m^9} > \dfrac{m^4}{1+m^9} \Rightarrow m > 1$ dir.

$$\begin{aligned}
a\left(\tfrac{1}{m}\right) &= \frac{m^{10}}{1+m^{12}}\\
b\left(\tfrac{1}{m}\right) &= \frac{m^{8}}{1+m^{11}}\\
c\left(\tfrac{1}{m}\right) &= \frac{m^{6}}{1+m^{10}}\\
e(m) &= \frac{m^{6}}{1+m^{8}}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki değerleri $m > 1$ olduğunu göz önünde bulundurarak $d(m)$ ile çapraz çarpıma tutarsak $\min\left\{a\left(\frac{1}{m}\right), b\left(\frac{1}{m}\right), c\left(\frac{1}{m}\right), d(m), e(m)\right\} = d(m)$ elde ederiz.

$d(x)$ in en büyük değeri diğerlerinin bazı değerlerinden daha küçük, yani diğerlerinin en büyük değerlerinden daha küçüktür.

36 Boyları birbirinden farklı 14 öğrenci başlangıçta nasıl sıralanmış olurlarsa olsunlar, her adımda yan yana duran iki öğrencinin yerini değiştirerek en az kaç adımda öğrencileri boy sırasına sokmak mümkün olur?

a) 42 **b)** 43 **c)** 45 **d)** 52 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Boyları $1, 2, \ldots, 14$ kabul edelim.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 13 & 14 \\ p(1) & p(2) & p(3) & \cdots & p(13) & p(14) \end{pmatrix}$$

p permütasyonunda $i < j$ olmak üzere $p(i) > p(j)$ ise (i, j) çiftine p nin bir inversiyonu (bkz. inversion) diyoruz.

p artan sırada olduğunda toplam inversiyon sayısı 0 dır.

p azalan sırada olduğunda toplam inversiyon sayısı $\dbinom{14}{2} = 91$ dir.

p için (i, j) çifti sayısı da $\dbinom{14}{2} = 91$ dir. Yani ters sıralı permütasyon en çok inversiyona sahip permütasyondur.

Bu soru için p nin inversiyon sayısını çift yönlü düşünelim.

Örneğin, artan sıralı bir p için artan inversiyon sayısı 0, azalan inversiyon sayısı 91 dir. Bu durumu $(0, 91)$ ile gösterelim.

Azalan sıralı p için inversiyon sayısı çifti $(91, 0)$ olacaktır.

(x, y) artan-azalan inversiyon sayısı çiftine sahip herhangi bir p permütasyonunda komşu iki elemanı yer değiştirdiğimizde, $a = 1, -1$ için, $(x, y) \to (x + a, y - a)$ olacaktır. Bu durumda $x + y$ toplamı değişmemiş olacak. O halde herhangi bir p permütasyonu için inversiyon çifti toplamı $x + y = 0 + 91 = 91 + 0 = 91$ dir.

Bu durumda olası tüm (x, y) inversiyon sayısı çiftlerinden $\min\{x, y\}$ değeri en çok 45 olabilir.
$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$ permütasyonunun inversiyon sayısı çifti $(45, 46)$ dır.

Şimdi soruya dönelim:

Her yer değiştirmede inversiyon sayısı en fazla 1 azalacağı için bir permütasyonu artan sıralamak için gerekli yer değiştirme sayısı en az toplam inversiyon sayısı kadar olmalı. Aslında tam olarak toplam inversiyon sayısı kadar yer değiştirme yeterlidir. Bunu ispatlayalım:

(1) İnversiyon oluşturan bir ardışık çifti yer değiştirdiğimizde, toplam inversiyon sayısı 1 azalacaktır.

(2) Herhangi bir adımda ardışık çiftlerin hiçbiri bir inversiyon oluşturmuyorsa $p(1) < p(2) < \cdots < p(n)$ demektir.

(3) O halde toplam inversiyon sayısı kadar ardışık yer değiştirmede toplam inversiyon sayısını sıfırlayabiliriz, yani permütasyonu artan sıralı hale dönüştürebiliriz.

Toparlamak gerekirse $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$ permütasyonunda artan inversiyon sayısı 45, azalan inversiyon sayısı 46 olduğu için p permütasyonunu 45 ardışık yer değiştirme ile artan hale getirebiliriz.

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2012

$\boxed{1}$ Yüksekliklerinin uzunlukları 3, 4 ve 6 birim olan bir üçgenin çevre uzunluğu kaç birimdir?

a) $12\sqrt{\frac{3}{5}}$ **b)** $16\sqrt{\frac{3}{5}}$ **c)** $20\sqrt{\frac{3}{5}}$ **d)** $24\sqrt{\frac{3}{5}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Yükseklikleri $3, 4, 6$ olan üçgenin kenar uzunlukları $4k, 3k, 2k$ olsun. $u = \dfrac{(4k + 3k + 2k)}{2}$ dir.

$A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ formulunu kullanırsak $A(ABC) = 3k^2\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ yuksekliklerden yararlanırsak $A(ABC) = 6k$ dır.

İkisinin eşitliğinden $k = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$, $Ç(ABC) = 9k = \dfrac{72\sqrt{15}}{15}$ dir. Sadeleştirirsek $\dfrac{24\sqrt{15}}{5}$, düzenlenirse $24\sqrt{\dfrac{15}{25}} = 24\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

$\boxed{2}$ m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $2012^n + m^2$ sayısının 11 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

a) 55 **b)** 46 **c)** 43 **d)** 39 **e)** 37

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$2012 \equiv -1 \pmod{11}$,

n çift ise $2012^n \equiv 1 \pmod{11}$ ve

n tek ise $2012^n \equiv -1 \pmod{11}$ dir.

$m^2 \equiv 0, 1, 3, 5, 9 \pmod{11}$ olacağından bu değerlere 1 ekleyeceğiz ya da bu değerlerden 1 çıkaracağız. Sonuç olarak elde edilen küme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ ve bunların toplamı 39 dur.

$\boxed{3}$ Aşağıdaki x değerlerinden hangisi $\sqrt[3]{6+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{3}$ eşitliğini sağlar?

a) 27 **b)** 32 **c)** 45 **d)** 52 **e)** 63

Çözüm:

Her iki tarafın küpünü alalım. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$6 + \sqrt{x} + 6 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{36-x}) = 3$$
$$\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{36-x}) = \sqrt[3]{-27}$$
$$36 - x = -9 \Rightarrow x = 45.$$

$\boxed{4}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin tüm a elemanları için $f(f(a)) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?

a) 1 **b)** 106 **c)** 127 **d)** 232 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

f nin sabit nokta sayısı 1, 3, 5 ya da 7 dir. (Sabit nokta, $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan nokta)

1 sabit nokta için, bu sabit nokta $\binom{7}{1}$ şekilde seçilir.

Kalan 6 noktadan biri (a) seçildiğinde $f(a) = b$, $f(b) = a$ şeklinde ikinci sayı için 5 seçenek vardır.

Benzer şekilde kalan 4 noktadan biri seçildiğinde bu noktanın görüntüsü için 3 seçenek var.

Kalan 2 noktadan biri seçildiğinde bu noktanın görüntüsü için 1 seçenek var.

O halde tam olarak 1 sabit nokta için $\binom{7}{1} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ seçenek var.

3 sabit nokta için, $\binom{7}{3} \cdot 3 \cdot 1$ seçenek var.

5 sabit nokta için, $\binom{7}{5} \cdot 1$ seçenek var.

7 sabit nokta için, $\binom{7}{7}$ seçenek var.

Hepsinin toplamı $105 + 105 + 21 + 1 = 232$ yapar.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

Doğrusal olmayan bir indirgemeli dizi yardımıyla çözüme ulaşabiliyoruz. $1, 2, 3, \ldots, n$ kümesinde uygun tanımlanan a_n farklı fonksiyon olsun.

Eğer fonksiyonda $f(n) = n$ ise geriye kalan elemanlar arasında a_{n-1} durum gelir.

$f(n) = k$ olsun. $k = 1, 2, \ldots, n-1$ olmak üzere, $n-1$ farklı şekilde k seçeriz. Geriye kalan n ve k haricinde $n-2$ eleman için ise a_{n-2} şekilde fonksiyon yazılır. $a_1 = 1$ ve $a_2 = 2$ barizdir.

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

indirgeme bağıntısını elde ederiz. Buradan $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ için;

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \Rightarrow a_3 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3a_2 \Rightarrow 4 + 3 \cdot 2 = a_4 = 10$$

$$a_5 = a_4 + 4a_3 \Rightarrow 10 + 4 \cdot 4 = a_5 = 26$$

$$a_6 = a_5 + 5a_4 \Rightarrow 26 + 5 \cdot 10 = a_6 = 76$$

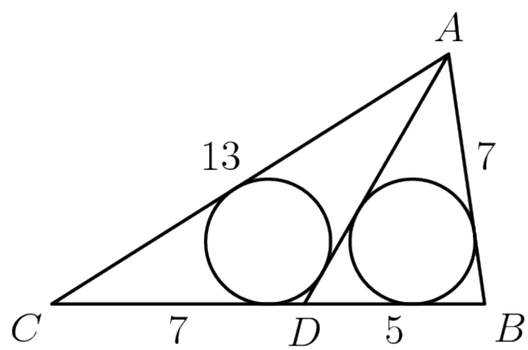
$$a_7 = a_6 + 6a_5 \Rightarrow 76 + 6 \cdot 26 = a_7 = 232$$

bulunur.

5 $|AB| = 7, |BC| = 12$ ve $|CA| = 13$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde yer alan D noktası $|BD| = 5$ koşulunu sağlıyor. r_1 ve r_2 sırasıyla, ABD ve ACD üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise, r_1/r_2 nedir?

a) 1 **b)** $\frac{13}{12}$ **c)** $\frac{7}{5}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:



Stewart'tan $AD = 8$.

$[ABD]/[ADC] = \dfrac{Ç(ABD) \cdot r_1}{Ç(ADC) \cdot r_2} = \dfrac{5}{7} \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{28}{20} = 1.$

6 n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi $n^{29} \equiv 7 \pmod{65}$ denkliğini sağlar?

a) 37 **b)** 39 **c)** 43 **d)** 46 **e)** 55

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$n^{29} = 7 + 65k$ seklinde yazabiliriz. Bu ifadeye mod5 te bakarsak $\left(n^5\right)^5 \cdot n^4 \equiv 7 \pmod{5}$ olur. Fermattan $n = 7 \pmod{5}$ olması gerekir. Aranan sayı, $7 + 5k$ seklinde ve tek seçenek 37 dir.

7 Tüm x, y, z gerçel sayıları için $f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz$ koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(x, y, z) = (1, 1, 1) \Rightarrow f(1) = 2$ veya $f(1) = -4$.

$(x, y, z) = (x, 1, 1) \Rightarrow f(x) = -\dfrac{16}{f^2(1) - 12} \cdot x \Rightarrow f(x) = 2x$ veya $f(x) = -4x$. Yerlerine koyduğumuzda iki fonksiyonun da sağladığını görürüz.

8 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

a) 2059 **b)** 2124 **c)** 2187 **d)** 2315 **e)** 2316

Çözüm:

$\subseteq$ ile $\subset$ gösterimlerini ayırırsak, bizden istenen $\emptyset \subseteq X \subset Y \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olacak şekilde (X,Y) ikililerinin sayısı.

$\emptyset \subseteq X \subseteq Y \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ikililerinin sayısı A olsun.

$\emptyset \subseteq X = Y \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ikililerinin sayısı B olsun.

$\emptyset \subseteq X \subset Y \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ikililerinin sayısı $A - B$ dir.

A sayısını hesaplayalım:

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin her elemanı X, $Y \setminus X$, $\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus Y$ kümelerinden birine ait olmalı. O halde $A = 3^7$.

Benzer şekilde B sayısı için,

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin her elemanı $X = Y$, $\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus X$ kümelerinden birine ait olmalı. O halde $B = 2^7$.

Aradığımız cevap $3^7 - 2^7 = 2187 - 128 = 2059$.

9 $[AB]$ çaplı çemberin $[CD]$ kirişi $[AB]$ ye diktir. M ve N sırasıyla, $[BC]$ ve $[AD]$ nin orta noktaları olmak üzere, $|BC| = 6$ ve $|AD| = 2\sqrt{3}$ ise $|MN|$ kaçtır?

a) 4 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{21}$ **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$AB \cap CD = E$ olsun. $BC/AD = CE/AE = \dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle CAB = 60^\circ$.

AC nin orta noktası K olsun. $KM \parallel AB$ ve $KN \parallel CD$ dir.

$\angle AK = AN = \sqrt{3}$ ve $\angle KAN = 120^\circ \Rightarrow KN = 3$.

$AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow KM = 2\sqrt{3}$.

$\triangle MKN$ bir dik üçgendir. $MN = \sqrt{(3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}$.

10 n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

n çift olsun.

$n = 2^a p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \Rightarrow \varphi(n) = 2^{a-1} p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 2^2 \cdot 5$.

$a > 2$ olamaz; çünkü tüm $(p_i - 1)$ler çift olmalı. Bu durumda $a = 1$ veya $a = 2$.

$a = 2$ için, $p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 10$.

$4 \nmid 10$ olduğu için tek asal çarpanların sayısı 1 olmalı. Bu durumda $p_1 = 11$ ve $\boxed{n = 2^2 \cdot 11 = 44}$.

$a = 1$ için, $p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 20$.

$8 \nmid 20$ olduğu için tek asal çarpanların sayısı 1 ya da 2 olmalı.

Tek asal çarpanların sayısı 1 olduğunda, $p_1^{a_1-1}(p_1-1) = 10 \Rightarrow \boxed{n = 2 \cdot 5^2 = 50}$

Tek asal çarpanların sayısı 2 olduğunda, $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1}(p_1-1)(p_2-1) = 20$.

En küçük iki tek asal sayı 3 ile 5 olduğu için, $k \geq 2$ olmak üzere; $(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 4k \Rightarrow p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} k = 5 \Rightarrow k = 5, a_1 = a_2 = 1$.

$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 20 \Rightarrow \boxed{n = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66}$.

n **tek olsun.**

$p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) = 20$ olacak. Bu durumun aynısını az önce $a = 1$ iken elde etmiştik. Tek fark, $2^a = 2^1$ diye fazladan bir çarpanları olmaması.

Buradan gelecek cevaplar, $\boxed{n = 3 \cdot 11 = 33}$ veya $\boxed{n = 5^2 = 25}$.

Toplamda $\boxed{5}$ pozitif tam sayı sağlıyor. O halde doğru yanıt $\boxed{E}$ şıkkı.

11 $x^3 + 2 = 3y, y^3 + 2 = 3z, z^3 + 2 = 3w, w^3 + 2 = 3x$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z, w) gerçel sayı dörtlüsü vardır?

a) 8 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

(L. Gökçe)

$x^3 + 2 = 3y, y^3 + 2 = 3z, z^3 + 2 = 3w, w^3 + 2 = 3x$ eşitliklerinin her iki tarafına 6 ekleyelim.

$x^3 + 2^3 = 3(y + 2), y^3 + 2^3 = 3(z + 2), z^3 + 2^3 = 3(w + 2), w^3 + 2^3 = 3(x + 2)$ olur. İki küp toplamı özdeşliğini kullanarak bu eşitlikleri taraf tarafa çarpıp $(x + 2)(y + 2)(z + 2)(w + 2)$ ile sadeleştirirsek $(x^2 - 2x + 4)(y^2 - 2y + 4)(x^2 - 2z + 4)(w^2 - 2w + 4) = 3^4$ olur. $f(a) = a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3$ parabolünün min değeri $a = 1$ için $f_{min} = 3$ olduğundan $(x^2 - 2x + 4)(y^2 - 2y + 4)(x^2 - 2z + 4)(w^2 - 2w + 4) \geq 3^4$ tür. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $x = y = z = w = 1$ olmasıdır. $(1, 1, 1, 1)$ bir çözümdür. Ayrıca $(x + 2)(y + 2)(z + 2)(w + 2)$ ile sadeleştirme yapmasak ve bu ifadenin çarpanlarından birinin 0 a eşit olması durumuna da bakmalıyız. $x = -2$ için ilk denklemden $3y = -6$ olup $y = -2$ bulunur. Bu şekilde $z = -2$ ve $w = -2$ dir. Diğer çözüm dörtlüsü $(-2, -2, -2, -2)$ dir.

Toplamda 2 farklı çözüm dörtlüsü bulunur.

12 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?

a) 596 **b)** 648 **c)** 679 **d)** 773 **e)** 812

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Soru, 2 tabanındaki gösteriminde 1111 içermeyen $2^{10} = 1024$ ten küçük negatif olmayan tam sayıların sayısını bulmakla özdeş. Açıklayalım:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0

Örneğin, yukarıda $\{4, 6, 7, 8\}$ alt kümesinin 2 sayı tabanına dönüştürülmüş şeklini görüyoruz.

$f(n)$ ile n basamaklı (başta etkisiz 0 lar olabilir) son basamağı 0 olan ve 1111 içermeyen sayıların sayısını gösterelim.

1 basamaklı bu şekilde tek sayı, 0. O halde, $f(1) = 1$.

2 basamaklı sayılar, 00, 10. $f(2) = 2$.

$f(3) = 4$ ve $f(4) = 8$.

$f(5)$ için, 11110 sayısını çıkarmamız gerekiyor. Yani $f(5) = 2^4 - 1 = 15$.

$f(5)$'i hesaplamanın, biraz daha değişik bir yolu var:

$f(1)$ şartını sağlayan sayıların sonuna 1110 yazarsak, $f(5)$ şartını sağlayan bir sayı elde ederiz.

$f(2)$ şartını sağlayan sayıların sonuna 110 yazarsak, $f(5)$ şartını sağlayan bir sayı elde ederiz.

$f(3)$ şartını sağlayan sayıların sonuna 10 yazarsak, $f(5)$ şartını sağlayan bir sayı elde ederiz.

$f(4)$ şartını sağlayan sayıların sonuna 0 yazarsak, $f(5)$ şartını sağlayan bir sayı elde ederiz.

Oluşan bu dörtlü grup ayrıktır. O halde, $f(5) = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) = 15$ tir.

Genellersek, $f(n+1) = f(n) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$ elde ederiz.

Soruda, bizden istenen, $f(11)$ i bulmamız. Fibonacci benzeri bir yöntemle, diziyi oluşturursak,

$$1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773$$

elde ederiz.

13 Köşeleri, düzlemdeki herhangi üçü doğrudaş olmayan 20 noktadan oluşan bir kümeye ait olan en çok kaç geniş açılı üçgen bulunabilir?

a) 6 **b)** 20 **c)** $2\binom{10}{3}$ **d)** $3\binom{10}{3}$ **e)** $\binom{20}{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Bir yarım çemberin üzerinde (çapı hariç kısmında) yer alan 20 nokta seçtiğimizde, oluşan $\binom{20}{3}$ üçgenin hepsi geniş açılı olacaktır.

NOT:

Soruda, biraz muğlak bir durum var. Bu tip sorular, genelde "20 nokta nasıl alınırsa alınsın, oluşacak geniş açılı üçgenlerin sayısı en çok kaç olabilir?" şeklinde karşımıza geliyor. Bu soruda ise, cevap anahtarından da teyit ederek, "20 noktalı kümelerden en çok geniş açılı üçgen bulunduran kümenin geniş açılı üçgen sayısı" sorulmuş.

14 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $(2n-1)^{502} + (2n+1)^{502} + (2n+3)^{502}$ sayısının 2012 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

a) 3 **b)** 1510 **c)** 1511 **d)** 1514 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f(n) \equiv (2n-1)^{502} + (2n+1)^{502} + (2n+3)^{502} \pmod{4 \cdot 503}$

$(2n-1), (2n+1), (2n+3)$ ardışık tek sayılardır. Bu durumda, $f(n) \equiv 3 \pmod 4$ olacaktır.

Ayrıca, bu tek sayıların hiçbirinin 503 e bölünmediği durumda, Fermat'tan $(2n-1)^{502} \equiv (2n+1)^{502} \equiv (2n+3)^{502} \equiv 1 \pmod{503}$ olacaktır. Bu durumda, $f(n) \equiv 3 \pmod{503}$.

Bu tek sayılar, ardışık olduğu için en fazla biri 503 e bölüneceğinden, bu durumda, $f(n) \equiv 2 \pmod{503}$ dür.

$f(n) \equiv 3 \pmod 4$ ve $f(n) \equiv 3 \pmod{503}$ denklik sisteminin tek çözümü $f(n) \equiv 3 \pmod{4 \cdot 503}$ tür.

$f(n) \equiv 3 \pmod 4$ ve $f(n) \equiv 2 \pmod{503}$ denklik sisteminin tek çözümü $f(n) \equiv 503 \cdot 3 + 2 \equiv 1511 \pmod{4 \cdot 503}$ tür.

O halde, $f(n)$ nin 2012 modunda alabileceği değerlerin toplamı, $3 + 1511 = 1514$ tür.

15 a gerçel sayısının, $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + a = 0$ denkleminin dört farklı gerçel kökü olmasını sağlayan tüm değerlerinin kümesi nedir?

a) $(-9, 2)$ **b)** $(-9, 0)$ **c)** $[-9, 0)$ **d)** $[-8, 1)$ **e)** $(-8, 1)$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x^4+8x^3+18x^2+8x+1 = 1-a$ ve $(x^2+4x+1)^2 = 1-a$ elde edilir. $f(x) = (x^2+4x+1)^2$ eğrisi ile $y = 1-a$ doğrusunun grafiğini çizeceğiz.

$f'(x) = 2(x^2+4x+1)(2x+4) = 0 \Rightarrow x = -2-\sqrt{3}$, $x = -2$, $x = -2+\sqrt{3}$.

$x = -2$ noktası, lokal maksimum; $x = -2 \pm \sqrt{3}$ noktaları da global minimumdur.

$y = f(x)$ eğrisi ile $y < 0$ doğruları kesişmez.

$y = 0$ doğrusu 2 noktada kesişir.

$0 < y < 9$ doğruları 4 noktada kesişir.

$y = 9$ doğrusu, 3 noktada kesişir.

$y > 9$ doğruları 2 noktada kesişir.

Bu durumda, $0 < y = 1-a < 9$ dan, $-8 < a < 1$ elde edilir.

16 8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. En az dört satırın her birindeki sayıların toplamı pozitif ise, üzerlerindeki sayıların toplamı -3 ten küçük olan en çok kaç sütun olabilir?

a) 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

En az 4 satırın toplamı pozitifse, bu satırlarda en az 5 er tane 1 var demektir. Bu 4 satırda, en az 20 tane 1 vardır. O halde, bu 4 satırda en çok 12 tane -1 vardır.

Bu 4 satır haricindeki satırlarda tamamen -1 olduğu durumda, bile bir sütundaki sayıların toplamının -3 ten küçük olması için, en az 6 karede -1 olması gerekiyor. Bu durumda, söz konusu sütunlar için, toplamları pozitif olan 4 satırın en az 2 satırında -1 olan kareler olmak zorunda. Bu 4 satırda, toplamda en fazla 12 tane -1 olduğu için, bu 2'li -1 lerden en fazla 6 tane içerebilir.

Aşağıdaki tabloda, bu şekilde bulunabilecek 6 sütun örneği yer almaktadır.

1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

17 Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $m\left(\widehat{BAD}\right) = 20°$, $m\left(\widehat{DAC}\right) = 80°$, $m\left(\widehat{ACD}\right) = 20°$ ve $m\left(\widehat{DCB}\right) = 20°$ ise $m(\widehat{ABD})$ nedir?

a) 5° **b)** 10° **c)** 15° **d)** 20° **e)** 25°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\triangle ABD$ yi $[AC]$ üzerine, üçgenin içine doğru $\triangle ABD \cong \triangle AEC$ olacak şekilde yapıştıralım.

$AD = AE$ ve $\angle DAE = 60^\circ$ olduğu için, $\triangle AED$ eşkenar, dolayısıyla $AE = ED$. Aynı zamanda, $AC = CD$ olduğu için, $\angle ACD$ nin açıortayı E den geçer. Bu durumda, $\angle ABD = \angle ECA = \angle ACD/2 = 10^\circ$ olacaktır.

Not:

$0^\circ < t < 30^\circ$ olmak üzere; $\angle BAD = 30^\circ - t$, $\angle DAC = 90^\circ - t$, $\angle ACD = 2t$, $\angle DCB = 30^\circ - t$ olduğu durumda, $\angle ABD = t$ çıkar. Bu soru için $t = 10^\circ$ verilmiş.

Ek olarak, bu soru modeli, burada bahsedilen 4.7 numaralı modeldir. (bkz. javascript tabanlı model belirme aracı)

Bu modele ait sorulardan biri burada fazlasıyla irdelenmiştir. Oradaki soru farklı olsa da bu soruyla aynı modele ait olduklarından kolayca birbirlerine dönüştürülebilir. Kaldı ki, ilgili konunun içerisinde buradaki soru tipine dönüştürülerek verilmiş çözümler yer alıyor.

Çözüm 2:

$[AD$ üzerinde $AB = AC = AE$ olacak şekilde bir E noktası alalım. $\triangle ABE \cong \triangle CAD$ olacaktır. Bu durumda, $AD = BE$ olur.

$\triangle ABE$ üçgeni bir $20^\circ - 80^\circ - 80^\circ$ üçgenidir. $AD = BE$ durumunda $\angle ABD$ yi soran soru klasik ve birçok çözümü olan bir soru. Bir tanesini verelim:

$AD = BF$ olacak şekilde $ABFD$ ikizkenar yamuğunu kuralım. $\angle DAB = \angle ABF = 20^\circ$. $\angle FBE = 60^\circ$ ve $BF = AD = BE$ olduğu için $\triangle FBE$ eşkenardır. Bu durumda, $BF = FE$ olduğu için, AF, $\angle BAE$ nin açıortayıdır. İkizkenar yamukta, $\angle BAF = \angle ABD = 10^\circ$ olacaktır.

18 Farklı asal sayıların kuvvetlerinin çarpımı olarak yazılımında sıfırdan farklı tüm kuvvetlerin tek sayılar olduğu bir pozitif tam sayıya *tekil* sayı diyelim. En çok kaç ardışık tekil sayı vardır?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

8 ardışık sayıdan 4 e bölünen iki sayı vardır. Bu sayılardan biri, $(k, 2) = 1$ olmak üzere; $n = 2^{2p} \cdot k$ formunda olmalı. O halde, ardışık 8 tekil sayı bulunamaz.

Ardışık 7 tekil sayıya bir örnek: 29, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, 31, $32 = 2^5$, $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$, $35 = 5 \cdot 7$.

19 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$ olduğuna göre (çarpanlara ayırmada zorlanılırsa deneme yoluyla da ayrılabilir.)

2. çarpandan reel kök gelmez(diskriminant 0'dan küçüktür.) 1. çarpandan gelen köklerin toplamı da 5 olarak bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{E}$

Denklemin bütün terimlerini x^2 ye bölelim.

$x^2 - 7x + 14 - 14\dfrac{1}{x} + 4\dfrac{1}{x^2} = 0$

$x^2 + \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 - 7\left(x + \dfrac{2}{x}\right) + 14 = 0$

$\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 - 7\left(x + \dfrac{2}{x}\right) + 10 = 0$

$\left(x + \dfrac{2}{x} - 2\right)\left(x + \dfrac{2}{x} - 5\right) = 0$

$(\underbrace{x^2 - 2x + 2}_{\Delta<0})(\underbrace{x^2 - 5x + 2}_{\Delta>0}) = 0$

Denklemi sağlayan kökler ikinci çarpana ait olup toplamları 5 dir.

Çözüm 3:

$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = (x^4 + 4) - 7x(x^2 - 2x + 2)$ şeklinde yazalım. Terim ekleme - çıkarma ile $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ şeklinde çarpanlara ayrılabildiğinden

$(x^4 + 4) - 7x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x + 2) = 0$ olur. $x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin gerçel kökü yoktur. $x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminin kökleri gerçel sayılar olup bu köklerin toplamı $x_1 + x_2 = 5$ tir.

20 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ sayılarının her $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ permütasyonu için, $(a_1+a_3, a_2+a_4, a_3+a_5, \dots, a_8+a_{10}, a_9+a_{11})$ verildiğinde a_i lerden en az k tanesini belirleyebiliyorsak, k en çok kaç olabilir?

a) 11 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$i = 1, 2, \dots, 9$ için $a_i + a_{i+2} = b_i$ olsun. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = \dfrac{11 \cdot 12}{2} = 66$

$b_1 + b_2 + b_5 + b_8 + b_9 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$

$b_1 + b_2 + b_5 + b_8 + b_9 = 66 - a_6$ olduğu için a_6 her zaman bulunabilir.

$a_6 + a_8 = b_6$ ve $a_4 + a_6 = b_4$ ten a_4 ve a_8;

$a_2 + a_4 = b_2$ ve $a_8 + a_{10} = b_8$ den a_2 ve a_{10} bulunabilir.

Bu durumda, $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$ sayıları her zaman bulunabiliyor. Bu durumda cevabımız ≥ 5 olmalı.

En az bir $(a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots, a_8 + a_{10}, a_9 + a_{11})$ çoklusu için $k = 5$ oluyorsa cevabımız 5 tir. Diğer bir ifadeyle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sayılarının sadece 2., 4., 6., 8., 10. elemanları ortak iki permütasyonu için aynı $(a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots, a_8 + a_{10}, a_9 + a_{11})$ çoklusunu elde ediyorsak cevabımız 5.

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$ permütasyonunu ile $(3, 2, 1, 4, 7, 6, 5, 8, 11, 10, 9)$ permütasyonu aynı

$(4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)$ çoklusunu üretiyor ve bu iki permütasyonun tam olarak 5 elemanı ortak. O halde bu permütasyon çifti için $k = 5$. Yani $k = 6$ olmayan permütasyon çiftleri mevcut.

21 $|AB| = 5, |BC| = 6$ ve $|CA| = 7$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait açıortayı $[BC]$ kenarını D noktasında kesiyor. A dan geçen ve BC ye D de teğet olan çember ise, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla P ve Q noktalarında kesiyor. AD ve PQ doğruları T noktasında kesişiyorsa, $|AT| / |TD|$ nedir?

a) $\frac{7}{5}$ **b)** 2 **c)** 3 **d)** $\frac{7}{2}$ **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\angle BAD = \angle DAC = \angle PQD = \angle QPD = \angle QDC = \angle PDB$ olduğu için, $PQ \parallel BC$. Bu durumda $AT/TD = AQ/QC$ dir.

Açıortay teoreminden $CD = BC \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{2}$.

C noktasının (ADQ) çemberine göre kuvvetinden, $CQ \cdot AC = CD^2 \Rightarrow QC = \frac{7}{4}$ ve $AQ = \frac{21}{4}$. Bu durumda, $AT/TD = AQ/QC = 3$ tür.

22 $4mn(m + n - 1) = \left(m^2 + 1\right)\left(n^2 + 1\right)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Öncelikle $(m, n) = d$ olsun. $m = d \cdot a$, $n = d \cdot b$.

$4d^2ab(ad + bd - 1) = (abd)^2 + (ad)^2 + (bd)^2 + 1$ ifadesine $\bmod d$ de bakarsak, sol taraf d ile bölünür, sağ taraf da 1 kalır. Demek ki ortak bolenleri $d = 1$ dir.

Öncelikle, ifadeyi $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ çiftleri sağlıyacaktır.

Şimdi m yi bölen en kücük p asalını ele alalım:

İfadenin sol tarafı p ile bölünür, sağ taraf $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ olmalı. Burada $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ve $n^4 \equiv 1 \pmod{p}$ olacaktır. n nin mertebesi $\text{ord}(n) = 4$ olduğundan, $4 \mid p - 1$, buradan da $p = 4k + 1$ şeklinde bir asal sayı çıkar.

En küçük $p = 5$ olduğundan, en küçük $m = 5$ alırsak, $n = 13$ çıkar. İfade simetrik olduğundan $(5, 13)$, $(13, 5)$ ikilisi de çözümü sağlar.

Tüm çözümler; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(5, 13)$, $(13, 5)$ olmak üzere 5 tanedir.

23 a, b, c gerçel sayıları $x^3 - 3x + 1 = 0$ denkleminin farklı kökleri ise, $a^8 + b^8 + c^8$ nedir?

a) 156 **b)** 171 **c)** 180 **d)** 186 **e)** 201

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x^4 = 3x^2 - x$

$x^8 = 9x^4 - 6x^3 + x^2 = 9(3x - 1)x - 6(3x - 1) + x^2 = 28x^2 - 27x + 6$

$a^8 + b^8 + c^8 = 28(a^2 + b^2 + c^2) - 27(a + b + c) + 18$

Vieta Formüllerinden,

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$(0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (-3) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$

$a^8 + b^8 + c^8 = 28 \cdot (6) - 27 \cdot (0) + 18 = 6 \cdot (28 + 3) = 6 \cdot 31 = 186.$

$\boxed{24}$ Bir yüzleri siyah ve diğer yüzleri beyaz olan 2012 tane tavla pulu bir doğru boyunca ve üste gelen yüzleri dönüşümlü olarak siyah ve beyaz olacak biçimde dizilmiştir. Her hamlede iki pul seçip bunları ve bu pulların arasında kalan tüm pulları ters çeviriyoruz. Bütün pulların üste gelen yüzlerinin aynı renkte olmasını en az kaç hamlede sağlayabiliriz?

a) 1006 **b)** 1204 **c)** 1340 **d)** 2011 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 1006.

Üste gelen yüzleri farklı olan ardışık pul iki sayısına uyuşmazlık sayısı diyelim. Başlangıçta uyuşmazlık sayısı 2011'e eşittir. Her hamlede uyuşmazlık sayısı en fazla iki azaldığı için gereken hamle sayısı en az 1006 dır. 1006 hamlenin aynı zamanda yeterli olduğunu gösterelim. Bunun için ilk hamlede 2. ve 2011., ikinci hamlede 3. ve 2010., ..., bin beşinci hamlede 1006. ve 1007. pulları ve en son hamlede de 1. ve 1006. pulları seçmek yeterli olacaktır.

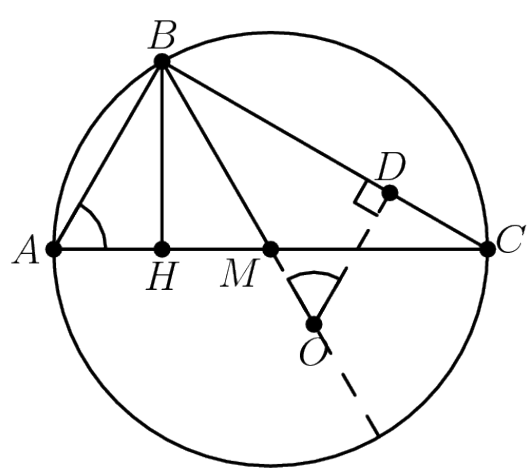
Kaynak: Tübitak 20. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2012

$\boxed{25}$ Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarının M orta noktası, B köşesine ait yüksekliğinin H ayağı ile C köşesi arasındadır. $m\left(\widehat{ABH}\right) = m\left(\widehat{MBC}\right)$, $m\left(\widehat{ACB}\right) = 15°$ ve $|HM| = 2\sqrt{3}$ ise $|AC|$ nedir?

a) 6 **b)** $5\sqrt{2}$ **c)** 8 **d)** $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$



O çevrel merkez, D de $[BC]$ nin orta noktası olsun. $\angle BAH = \dfrac{\angle BOC}{2} \Rightarrow \angle BAH = \angle DOB$ olduğu için O noktası BM doğrusu üzerinde olmalı. Diğer taraftan $\angle OMC = 90°$ olması gerektiğinden, $O = M$, ve $\triangle ABC$ dik üçgen olur.

$\dfrac{MH}{BM} = \cos 30° \Rightarrow MB = 4 \Rightarrow AC = 8.$

Not:

Bir kenara ait yükseklik, o kenara ait kenarortaysı (simedyan) ise; üçgen dik üçgen, kenar da hipotenüstür.

26 100 den küçük kaç asal sayı ardışık pozitif tam sayıların karelerinin toplamı olarak yazılabilir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Tam kareler dizisi: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, ...

100 den küçük,

$61 = 36 + 25$,

$41 = 25 + 16$,

$29 = 16 + 9 + 4$,

$13 = 9 + 4$,

$5 = 4 + 1$

olmak üzere, istenen şekilde 5 asal sayı vardır.

27 Tüm x gerçel sayıları için, $\sin x \cos x \le C\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)$ olmasını sağlayan en küçük C gerçel sayısı nedir?

a) $\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$2\sin x\cos x \le 2C(\sin^6 x + \cos^6 x)$

$\sin 2x \le 2C((\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3)$

$\sin 2x \le 2C(\sin^2 x + \cos^2 x)((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x)$

$\sin 2x \le 2C(1)((1)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x)$

$\sin 2x \le 2C(1 - \frac{3}{4}\sin 2x)$

$\sin 2x \le 1 \le \frac{4C}{2+3C} \Rightarrow 2 \le C.$

28 Başlangıçta üç kutuda sırasıyla, m, n ve k tane taş bulunuyor. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu istediği bir kutudan en az bir tane olmak üzere, istediği sayıda taş alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m, n, k) = (1, 2012, 2014)$, $(2011, 2011, 2012)$, $(2011, 2012, 2013)$, $(2011, 2012, 2014)$, $(2011, 2013, 2013)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan en az kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Ayşe, Burak'a herhangi bir sırada $(0, a, a)$ taş bırakırsa oyunu kazanır; çünkü bu aşamadan sonra Burak'ın her hamlesine karşı simetrik hamle yaparak son taşı almayı garantiler. Bu durumda $(2011, 2011, 2012) \to (2011, 2011, 0)$ ve $(2011, 2013, 2013) \to (0, 2013, 2013)$ başlangıç hamleleri ile Ayşe bu iki oyunu kazanmayı garantileyebilir.

Aynı gerekçeyle $(1, 1, a \ge 1)$ durumunda hamle sırası Ayşe'deyse Ayşe $a = 0$ yapıp oyunu kazanmayı garantiler.

Ayşe Burak'a $(1, 2, 3)$ taş bırakabilirse oyunu yine kazanmayı garantileyebilir. Burak 1 taş olan kutuya dokunamaz. 2 taş olan kutuyu 1 taşa düşürürse az önce açıklanan durumdan dolayı Ayşe $(1, 1, 0)$ hamlesiyle oyunu kazanmayı garantiler. 2 taş olan kutudan 2 taş çekemez; çünkü Ayşe $(1,0,1)$ hamlesini yapar. Benzer gerekçelerle Burak 3 taşlık kutudan 3 taş çekerse Ayşe $(1,1,0)$ hamlesiyle ya da Burak 2 taş çekerse Ayşe $(1,0,1)$ hamlesiyle oyunu kazanır. Burak 3 lük kutudan 1 taş çekerse Ayşe $(0,2,2)$ hamlesiyle oyunu kazanmayı garantileyebilir.

Ayşe, Burak'a herhangi bir sırada $(1,a,a+1)$ taş bırakırsa oyunu kazanmayı garantileyebilir mi? Burak ezkaza 1 i 0 yaparsa Ayşe diğer iki kutudaki taşları eşitleyip yukarıda anlatılan gerekçeden dolayı oyunu kazanmayı garantileyebilecektir. Burak ikinci bir kutuda 1 taş bıraktığı anda $(1,1,a)$ durumu oluşacak $(1,1,0)$ hamlesiyle Ayşe oyunu kazanacak.

Ayşe Burak'a $(1,a,a+1)$ şeklinde taş bırakmaya devam etsin. Bir esnada Burak Ayşe'ye $(1,2,a)$ taş bırakacaktır. Bu durumda, Ayşe ya $(1,2,1)$ ya da $(1,2,3)$ hamlesini yapmış olacak. Her iki durumda da Ayşe'nin kazanan stratejisinin olduğunu yukarıda göstermiştik. O halde Ayşe Burak'a $(1,a,a+1)$ taş bırakabilirse oyunu kazanmayı garantileyebilir.

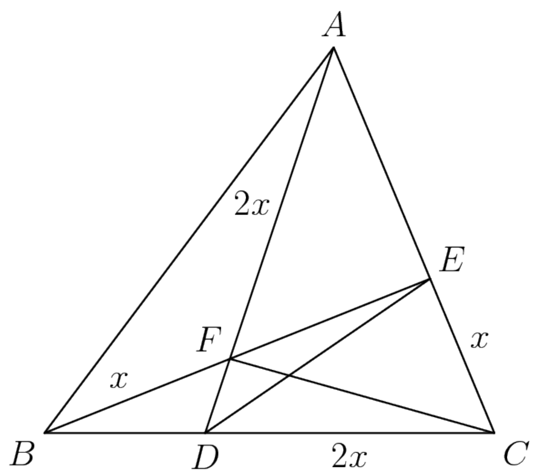
$(1,2012,2014) \to (1,2012,2013)$, $(2011,2012,203) \to (1,2012,2013)$ ve $(2011,2012,2014) \to (2011,2012,1)$ başlangıç hamleleriyle Ayşe diğer üç oyunu da kazanmayı garantileyebilir.

29 Dar açılı bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan D ve E noktaları için, AD ve BE doğruları F noktasında kesişiyor. $|AF| = |CD| = 2|BF| = 2|CE|$ ve Alan$(ABF) =$ Alan(DEC) ise Alan(AFC) /Alan(BFC) nedir?

a) 4 **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 2 **d)** $\sqrt{2}$ **e)** 1

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$



$AF \cdot FB = EC \cdot CD$ olduğu için, $\sin\angle AFB = \sin\angle ACB$ olmalı. $\angle AFB > \angle ACB$ olduğu için, $\angle AFB + \angle ACB = 180^\circ$, dolayısıyla da, D, F, E, C noktaları çembersel olacaktır.

$[AFC] = \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot FC \cdot \sin\angle AFC = \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot FC \cdot \sin\angle DFC$

$[BFC] = \dfrac{1}{2} \cdot BF \cdot FC \cdot \sin\angle BFC = \dfrac{1}{2} \cdot BF \cdot FC \cdot \sin\angle EFC$

$[AFC]/[BFC] = \dfrac{AF}{BF} \cdot \dfrac{\sin\angle DFC}{\sin\angle EFC}$ olacaktır. $DFEC$ kirişler dörtgeninde, Sinüs Teoreminden $\dfrac{CD}{\sin\angle DFC} = \dfrac{CE}{\sin\angle EFC}$ olduğu için $[AFC]/[BFC] = \dfrac{AF}{BF} \cdot \dfrac{CD}{CE} = 4$ elde edilir.

Çözüm 2:

CF, AB yi P de kessin.

$$[AFC]/[BFC] = AP/BP = \frac{CD}{BD} \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{CD}{CE} \cdot \frac{AE}{BD} \qquad \text{(Ceva)}$$

olacaktır. Bu durumda, bizden istenen, AE/BD yi bulmak.

$AF \cdot FB = EC \cdot CD$ olduğu için, $\sin\angle AFB = \sin\angle ACB$ olmalı. $\angle AFB > \angle ACB$ olduğu için, $\angle AFB + \angle ACB = 180°$, dolayısıyla da, D, F, E, C noktaları çembersel olacaktır. Çembersellikten, $\angle BDF + \angle AEF = 180°$ dir.

$\triangle AFE$ de Sinüs teoreminden,

$$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = \frac{AF}{\sin\angle AEF} \qquad (1)$$

ve $\triangle BFD$ de Sinüs teoreminden

$$\frac{BD}{\sin\angle BFD} = \frac{BF}{\sin\angle BDF} \qquad (2)$$

ve olacaktır. (1) ile (2) yi taraf tarafa oranlarsak,

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF} = 2 \qquad (3)$$

çıkacaktır.

Ceva'dan bulduğumuz ifadede (3) teki değeri yazarsak $AP/BP = 2 \cdot 2 = 4$ olacaktır.

30 $x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ eşitlğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Verilen ifadeyi aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = xyz(x + y) + 2 \Rightarrow (x + y)((x + y)^2 xy(z - 3)) = 2$$

$x + y = \{1, -1, 2, -2\}$ değerlerini alabilir.

$x + y = 1 \Rightarrow xy(z - 3) = 1$ çözüm yoktur.

$x + y = -1 \Rightarrow xy(z - 3) = -3$ çözüm yoktur.

$x + y = 2 \Rightarrow xy(z - 3) = -3$ olup $(3, -1, 4), (-1, 3, 4), (1, 1, 0)$ üç çözüm vardır.

$x + y = -2 \Rightarrow xy(z - 3) = -5$ olup $(-1, -1, -2)$ tek çözümü vardır.

Buna göre toplam çözüm sayısı 4 tür.

31 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ fonksiyonu tüm m, n tam sayıları için,

$$m + f(m + f(n + f(m))) = n + f(m)$$

ve $f(6) = 6$ koşullarını sağlıyorsa $f(2012)$ nedir?

a) -2010 **b)** -2000 **c)** 2000 **d)** 2010 **e)** 2012

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$n = -f(m)$ olsun. $m + f(m + f(0)) = 0$.

$m = x - f(0)$ olsun. $x - f(0) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -x + f(0)$ olacaktır.

$f(6) = 6$ için $f(6) = -6 + f(0) = 6 \Rightarrow f(0) = 12$ ve $f(x) = -x + 12$ elde edilir. $f(2012) = -2012 + 12 = -2000$.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

$m + f(n + f(m)) = 2012$ dersek $m + f(2012) = n + f(m)$ olur.

$n + f(m) = 6$ ve $m = 2006$ için

$$2006 + f(2012) = n + f(2006).......(*)$$

olur. $n + f(2006) = 6$ olduğundan $n = 6 - f(2006)$ değeri (*) da yerine yazılırsa $f(2012) = -2000$ bulunur.

$\boxed{32}$ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sayılarının $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ permütasyonlarından kaçı için,
$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_{10} - 10| = 4$ olur ?

a) 60 **b)** 52 **c)** 50 **d)** 44 **e)** 36

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{smallmatrix}\right)$ permütasyonunda $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_{10} - 10| = 4$ olması için yeri ile indisi farklı

- 4 eleman: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$
- 3 eleman: $1 + 1 + 2 = 4$
- 2 eleman: $2 + 2 = 4$

olmalı.

2 eleman için, $\left(\begin{smallmatrix} \cdots & a & \cdot & a+2 & \cdots \\ \cdots & a+2 & \cdot & a & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ olmalı. Bu şekildeki eleman çiftleri $(1, 3)$, $(2, 4)$, $\ldots$, $(8, 10)$ olmak üzere 8 tanedir.

4 eleman için, $\left(\begin{smallmatrix} \cdots & a & a+1 & \cdots & b & b+1 & \cdots \\ \cdots & a+1 & a & \cdots & b+1 & b & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ olmalı. Olası (a, b) çiftleri $a = 1$ için 7 tanedir. $a = 2$ için 6 tanedir. O halde, bu şekildeki ardışık sayılardan oluşan iki çift $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ farklı şekilde seçilebilir.

3 eleman için (a, b, c) üçlüsü kendi aralarında 3 uzunluklu çevrim oluşturmalı ve a, b, c sayıları ardışık olmalı. Bu şekilde her a için iki farklı $\left(\begin{smallmatrix} \cdots & a & a+1 & a+2 & \cdots \\ \cdots & a+1 & a+2 & a & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ ve $\left(\begin{smallmatrix} \cdots & a & a+1 & a+2 & \cdots \\ \cdots & a+2 & a & a+1 & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ permütasyon vardır. $a = 1, 2, \ldots, 8$ den $2 \cdot 8 = 16$ farklı permütasyon gelir.

O halde, toplamda $8 + 28 + 16 = 52$ permütasyon $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_{10} - 10| = 4$ denklemini sağlar.

$\boxed{33}$ $|AB| = 2\,|BC|$ olan $ABCDA'B'C'D'$ dikdörtgenler prizmasında $[BB']$ ayrıtı üstündeki E noktası $|EB'| = 6\,|EB|$ koşulunu sağlıyor. AEC ve $A'EC'$ üçgenlerinde E ye ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, F ve F' olmak üzere, $m\left(\widehat{FEF'}\right) = 60^\circ$ ise, $\dfrac{|BC|}{|BE|}$ nedir?

a) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$ **d)** $5\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$AE^2 = AB^2 + BE^2$ ve $EC^2 = BE^2 + BC^2$ olduğu için $AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2 = AF^2 - FC^2$ olacaktır. Bu durumda, $BF \perp AC$.

Benzer şekilde, $A'E^2 = A'B'^2 + B'E^2$ ve $C'E^2 = B'C'^2 + B'E^2$ olduğu için $A'E^2 - C'E^2 = A'B'^2 - B'C'^2 = A'F'^2 - C'F'^2$ olacaktır. Bu durumda, $B'F' \perp A'C'$.

$BB'F'F$ bir dikdörtgen oldu. $BE = 1$ ve $BF = a$ diyelim.

$\tan\angle FEB = \dfrac{a}{1} = a$ ve $\tan\angle F'EB' = \dfrac{a}{6}$, $\angle FEB + \angle F'EB' = 120°$ olduğu için

$$\tan 120° = -\sqrt{3} = \frac{\tan\angle FEB + \tan\angle F'EB'}{1 - \tan(\angle FEB \cdot \tan\angle F'EB')} = \frac{a + \dfrac{a}{6}}{1 - \dfrac{a^2}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{7a}{a^2 - 6} = \sqrt{3} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}.$$

ABC dik üçgeninde $AB/BC = 2$ olduğu için $BC/EB = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ tir. Bu durumda, $BC = \dfrac{a}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{15}$

34 $n \geq 2012$ olmak üzere, $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ sayısının 10 ile bölünmesini sağlayan en küçük n tam sayısı nedir?

a) 2012 **b)** 2013 **c)** 2014 **d)** 2015 **e)** 2016

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$S = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + \cdots + (2^{n-1} + 2^n) + 2^n$

$S = (2^{n+1} - 2^1) + (2^{n+1} - 2^2) + \cdots + (2^{n+1} - 2^{n-1}) + (2^{n+1} - 2^n)$

$S = n \cdot 2^{n+1} - (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) = n \cdot 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2$

$(n-1)2^{n+1} \equiv 8 \pmod{10}$ denkliğini 2011 den sonra sağlayan ilk n tam sayısı $n = 2013$ tür.

35 $x^3 + y^4 = x^2y$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) pozitif gerçel sayı ikililerinde x in aldığı en büyük değer A ve y nin aldığı en büyük değer B ise , A/B nedir?

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{512}{729}$ **c)** $\dfrac{729}{1024}$ **d)** $\dfrac{3}{4}$ **e)** $\dfrac{243}{256}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$AO \geq GO$ dan,

$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^3}{3} + y^4}{4} &\geq \sqrt[4]{\frac{x^9 \cdot y^4}{3^3}} \\ \left(\frac{x^2y}{4}\right)^4 &\geq \frac{x^9 \cdot y^4}{3^3} \\ A = \frac{3^3}{4^4} &\geq x \end{aligned}$$

$AO \geq GO$ dan,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+y^4}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{x^6\cdot y^4}{4}} \\
\left(\frac{x^2y}{3}\right)^3 &\geq \frac{x^6\cdot y^4}{4} \\
B=\frac{4}{3^3} &\geq y
\end{aligned}$$

$A/B = \dfrac{3^3\cdot 3^3}{4^4\cdot 4} = \dfrac{729}{1024}$

$\boxed{36}$ Her kutuda en çok 20 taş olmak koşuluyla k tane taş 2012 kutuya nasıl dağıtılmış olursa olsun, bu kutulardan bazılarını seçip, seçtiğimiz kutulardan istediklerimizden istediğimiz sayıda taş atarak, seçtiğimiz kutularda toplam olarak en az 100 tane ve bu kutuların her birinde eşit sayıda taş kalmasını sağlayabiliyorsak, k en az kaç olabilir?

a) 500 **b)** 450 **c)** 420 **d)** 349 **e)** 296

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Kaba kuvvet (brute-force) gerektiren bir çözüm yapacağız.

Seçtiğimiz kutuların sayısı n, atılan taşlardan sonra her birinde kalan taş sayısı m olsun.

$m \leq 20$ ve $n \cdot m \geq 100$ dir.

$$\begin{array}{llllll}
m=20 & \Rightarrow & n\geq 5 & , \quad m=19,18,17 & \Rightarrow & n\geq 6 \\
m=16,15 & \Rightarrow & n\geq 7 & , \quad m=14,13 & \Rightarrow & n\geq 8 \\
m=12 & \Rightarrow & n\geq 9 & , \quad m=11,10 & \Rightarrow & n\geq 10 \\
m=9 & \Rightarrow & n\geq 12 & , \quad m=8 & \Rightarrow & n\geq 13 \\
m=7 & \Rightarrow & n\geq 15 & , \quad m=6 & \Rightarrow & n\geq 17 \\
m=5 & \Rightarrow & n\geq 20 & , \quad m=4 & \Rightarrow & n\geq 25 \\
m=3 & \Rightarrow & n\geq 34 & , \quad m=2 & \Rightarrow & n\geq 50 \\
m=1 & \Rightarrow & n\geq 100 & & &
\end{array}$$

olmalı.

Şimdi kutulara mükün olduğunca, sorudaki koşul sağlanmayacak şekilde taş dolduralım:

İlk 5 kutuya 20 şer tane doldurursak, taş sayısı ≥ 100 olacak ve (m, n) ikilisi bulunmuş olacak.

Onun için ilk 4 kutuya 20, 5. kutuya 19 taş koyuyoruz. $20+20+20+20+19=99$.

6. kutuya 19 ya da 18 ya da 17 taş koyarsak $m \geq 17$ ve $n=6$ ikilisi bulunmuş olacak. $20+20+20+20+19+16 = 115$.

Bu şekilde devam ettirelim:

$20+20+20+20+19+16+14+12+11+9$ olduğunda 11. kutuya tekrar 9 taş koyabiliriz. Çünkü $m=9$ için $n \geq 12$ olmalı.

Devamında 12. kutuya 8, 13. ve 14. kutulara 7 taş koyabiliriz.

$m=7$ iken $n \geq 15$ ve $m=6$ iken $n \geq 17$ olduğu için sıradaki iki kutuya 6 taş koyuyoruz.

$20+20+20+20+19+16+14+12+11+9+9+8+7+7+6+6=204$

Benzer şekilde devam edildiğinde,

$$204+\underbrace{5+5+5}_{3}+\underbrace{4+\cdots+4}_{5}+\underbrace{3+\cdots+3}_{9}+\underbrace{2+\cdots+2}_{16}+\underbrace{1+\cdots+1}_{50}=348$$

İlk 99 kutuya mümkün olan en çok taşı dağıttık. $k=348$ olan durumda, yukarıdaki gibi bir dağıtım yapıldığında soruda istenen koşul sağlanmaz.

Diğer taraftan, bundan sonraki 1 taşı hangi kutuya koyarsak koyalım, istenen şekilde (m, n) sayıları bulunmuş olacak.

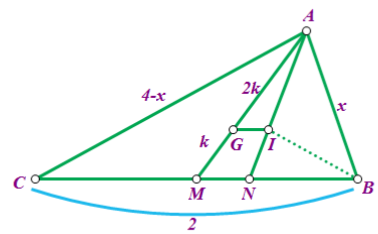
21. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2013

1 $|AC| > |AB|$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ve ağırlık merkezi G olmak üzere, IG ve BC doğruları birbirine paralel, $|BC| = 2$, ve $Alan(ABC) = \dfrac{3\sqrt{5}}{8}$ ise $|AB|$ nedir?

a) $\frac{9}{8}$ **b)** $\frac{11}{8}$ **c)** $\frac{13}{8}$ **d)** $\frac{15}{8}$ **e)** $\frac{17}{8}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$



AM kenarortay, AN açıortay olsun.
$IG \parallel BC$ olduğu için

$$\frac{AG}{GM} = \frac{AI}{IN} = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN} = \frac{AB+AC}{BN+CN} = 2 \Rightarrow AB + AC = 4$$

$AB = x$ ve $AC = 4 - x$ dersek, Heron formülünden

$$\sqrt{3 \cdot 1 \cdot (3-x) \cdot (x-1)} = \frac{3\sqrt{5}}{8} \Rightarrow (3-x)(x-1) = \frac{15}{8} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

Sol taraf toplamları 2 olan iki sayının çarpımı sağ taraf da toplamları 2 olan iki sayının çarpımı. O halde $x - 1 = \frac{1}{8}$ ya da $x - 1 = \frac{15}{8}$. $AB < AC$ olduğu için $x = \frac{9}{8}$.

2 p, q asal sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\frac{1}{p} + \frac{2013}{q} = \frac{n}{5}$$

eşitliğini sağlayan kaç (p, q, n) üçlüsü vardır?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$$(q + 2013p) = \frac{npq}{5} \Rightarrow \left(1 + \frac{2013p}{q}\right) = \frac{np}{5}$$

(i) $q \neq 5$ ise $5|np$ ve $q|2013p$ yani $q \in \{3, 11, 61, p\}$ olacaktır.

$5 = \dfrac{np}{1 + \dfrac{2013p}{q}}$

$q \in \{3, 11, 61\}$ için $\left(1 + \frac{2013p}{q}, p\right) = 1$ olduğu için $p = 5$ olmalı.

(ii) $p = q$ için $5 = \dfrac{np}{2014}$.
$2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 5 = np \Rightarrow p \in 2, 5, 19, 53$.

(iii) $q = 5$ için $5 + 2013p = np \Rightarrow 5 = (n - 2013)p \Rightarrow p = 5$ çözümü yukarıda ele alınmıştı.

p, q değerlerine göre n elde edileceği için sorudaki eşitliği sağlayan (p, q) ikilileri $(5,3)$, $(5,11)$, $(5,61)$, $(2,2)$, $(5,5)$, $(19,19)$, $(53,53)$ olmak üzere 7 tanedir.

$\boxed{3}$ Katsayıları $\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesine ait olan bir polinomun $x-6$ ile bölümünden kalan 2013 ise x in katsayısı en az kaç olabilir?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$P(x) = (x-6)Q(x) + 2013 \Rightarrow P(6) = 2013$ olur.

$P(x) = \overbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2}^{x^2R(x)} + a_1x + a_0$ diyelim.

$P(6) = 36R(6) + 6a_1 + a_0 = 2013$ eşitliğini mod6 da incelersek $a_0 = 6k + 3$, sorudaki kısıttan dolayı da $a_0 = 3$ çıkar.

$P(6) = 36R(6) + 6a_1 + 3 = 2013 \Rightarrow 6a_1 = 2010 - 36R(6) \geq 2010 - 55 \cdot 36 = 30 \Rightarrow a_1 \geq 5$

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

$P(x) = (x-6)Q(x) + 2013 \Rightarrow P(6) = 2013$ olur.

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ifadesinde $x = 6$ ve katsayılar 6'dan küçük olduğu için $P(6)$ ile 6 tabanında bir sayı gösteriliyor.

Bu durumda $P(6) = (2013)_{10} = (13153)_6$ olduğu için $a_1 = 5$ çıkacaktır.

$\boxed{4}$ $1, 2, ..., 49$ sayıları 7×7 bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Satranç tahtasında siyah bir kareye tek sayı yerleştirirsek, bir sonraki (çift) sayı, beyaz kareye gelecek. Yani 1 sayısı hangi renkte karedeyse, diğer tüm tek sayılar o renkte karede olmalı. Bir satırdaki 7 karenin, 4 ü aynı renktedir. O zaman bir satırda en fazla 4 kareye tek sayı gelebilir. Yani bir satıra en fazla 4 tek asal sayı yerleştirilebilir. 2 çift bir asal olduğu için, bir satırda en fazla 5 asal sayı olabilir.

Bundan sonrası 5 asal sayının yer aldığı bir örnek bulmak.

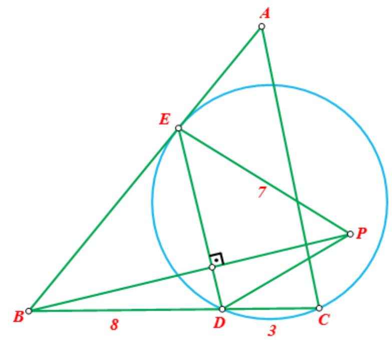
3	2	11	12	13	18	19
4	1	10	9	14	17	20
5	6	7	8	15	16	21
					...	22

$\boxed{5}$ $[BC]$ kenarının uzunluğu 11 olan ABC üçgeninin bu kenarı üstünde bir D noktası $|BD| = 8$ olacak biçimde alınıyor. C ve D noktalarından geçen çember AB doğrusuna bir E noktasında teğettir. B'den geçen ve DE doğrusuna dik olan doğru üzerinde bulunan bir P noktası için $|PE| = 7$ ise, $|DP|$ kaçtır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Çemberde kuvvetten $BE^2 = BD \cdot BC \Rightarrow BE^2 = 88$.



$ED \perp BP$ olduğu için $BE^2 - BD^2 = EP^2 - PD^2 \Rightarrow 88 - 64 = 49 - DP^2 \Rightarrow DP = 5$.

$\boxed{6}$ 5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111. pozitif tam sayı nedir?

a) 760 **b)** 756 **c)** 755 **d)** 752 **e)** 750

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111. pozitif tam sayı ile 3 tabanına göre en küçük 111. pozitif tam sayı yazılış bakımından aynıdır. 3 tabanındaki 111. sıradaki pozitif tam sayıyı bulmak için $(x)_3 = 111$ denklemini çözeriz. $(11010)_3 = 111$ dir. O halde cevabımız $(11010)_5 = 755$ olur.

$\boxed{7}$ $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 5 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ şeklinde olmalı.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^4 & + & ax^3 & + & bx^2 & & & & \\
 & + & cx^3 & + & acx^2 & + & bcx & & \\
 & & & + & dx^2 & + & adx & + & bd \\
\hline
x^4 & - & 8x^3 & + & 13x^2 & - & 24x & + & 9
\end{array}$$

ve

$$\begin{aligned}
a + c &= -8 \\
b + d + ac &= 13 \\
bc + ad &= -24 \\
bd &= 9
\end{aligned}$$

Üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü nasıl deneyerek yapıyorsak, bunu da deneyeceğiz. $bd = 9$ da, $b = d = 3$ olarak alırsak, $a+c = -8$ ile $bc+ad = -24$ ün uyumlu olduğunu görürüz. $b+d+ac = 13$'te yerine yazarsak $ac = 7$ ve $a + c = -8$ denklemlerinin ortak çözümünde $a = -1, c = -7$ nin bir çözüm olduğunu görebiliriz. O halde sorudaki ifadeyi

$$x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = (x^2 - x + 3)(x^2 - 7x + 3) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz.

$x^2 - x + 3 = 0$ ın gerçel kökü yoktur. Bu durumda, $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$ denkleminin gerçel kökleri sadece $(x^2 - 7x + 3) = 0$ dan gelecektir. O halde, denklemin gerçel kökleri toplamı 7 dir.

8 Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?

a) 105 **b)** 100 **c)** 95 **d)** 90 **e)** 85

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Yirmigenimiz $A_1A_2 \ldots A_{20}$ olsun.

Simetri ekseni A_1A_{11} olan 9 deltoid vardır. ($A_2A_{20}, A_3A_{19}, \ldots, A_{10}A_{12}$ diğer köşegenler)

Benzer şekilde A_2A_{12} simetri eksenine sahip deltoid sayısı da 9 dur.

Bu durumda $A_1A_{11}, A_2A_{12}, \ldots, A_{10}A_{20}$ simetri eksenleri için $9 \cdot 10 = 90$ deltoid vardır.

Peki bu 90 deltoidden aynı olanlar var mı?

Deltoid eşkenar dörtgen olduğu için iki simetri ekseni olacaktır. Bu durumları çıkarmamız gerekiyor.

$A_1A_6A_{11}A_{16}$ deltoidinin iki simetri ekseni var. Bu deltoid hem A_1A_{11} simetri ekseni için sayıldı, hem de A_6A_{16} simetri ekseni için sayıldı.

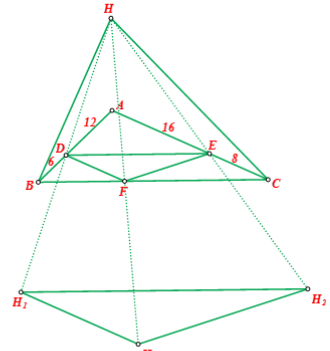
$A_2 - A_7$, $A_3 - A_8$, $A_4 - A_9$ ve $A_5 - A_{10}$ nokta çiftleri ile başlayan eşkenar dörtgenlerde de aynı durum söz konusu. Bu durumda aradığımız cevap $90 - 5 = 85$ tir.

9 ABC üçgeninde $|AB| = 18$, $|AC| = 24$ ve $m(\widehat{BAC}) = 150°$ dir. D noktası $[AB]$, E noktası $[AC]$ ve F noktası $[BC]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BD| = 6, |CE| = 8$ ve $|CF| = 2|BF|$ dir. ABC üçgeninin diklik merkezi H noktasının D, E ve F noktalarına göre simetrikleri sırasıyla, H_1, H_2 ve H_3 noktaları ise, $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı nedir?

a) 70 **b)** 72 **c)** 84 **d)** 96 **e)** 108

Çözüm:

H merkezli homotetiden dolayı, $H_1H_2H_3$ üçgeni ile DEF üçgeninin benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir.



Yani, $[H_1H_2H_3] = 4[DEF] = 2[ADE] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \cdot \sin 150^\circ\right) = 96.$

10 n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

n **çift olsun.** Bu durumda, n ile aralarında asal olan tüm sayılar tek olacaktır. O zaman $\varphi(n) = 20$ olacak.

$n = 2^a p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \Rightarrow \varphi(n) = 2^{a-1} p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 2^2 \cdot 5.$

$a > 2$ sağlamaz; çünkü tüm $p_i - 1$ sayıları çiftir. O halde $a = 1$ veya $a = 2$.

$a = 2$ için, $p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 10$. Bu durumda n nin 2 veya daha fazla tek asal çarpanı olamaz; çünkü $4 \nmid 10$. Bu durumda, $p_1 = 11$ ve $\boxed{n = 2^2 \cdot 11 = 44}$ olur.

$a = 1$ için, $p_1^{a_1-1} \cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1) = 20$. Bu durumda n nin 3 veya daha fazla tek asal çarpanı olamaz; çünkü $8 \nmid 20$.

1 adet tek asal çarpan (p) için, $p^{a-1}(p-1) = 10 \Rightarrow \boxed{n = 2 \cdot 5^2 = 50}$

2 adet tek asal çarpan için, $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1}(p_1-1)(p_2-1) = 20$.

$(p_1-1)(p_2-1) = 4k \geq 8$

$\Rightarrow p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} k = 5 \Rightarrow k = 5, a_1 = a_2 = 1.$

$(p_1-1)(p_2-1) = 20 \Rightarrow \boxed{n = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66}$.

n **tek olsun.** $(a, n) = 1$ ise, $(n-a, n) = 1$ olacaktır. a tek ise, $n - a$ çifttir. a çift ise, $n - a$ tektir. Bu durumda n ile aralarında asal tek sayıların sayısı, n ile aralarında asal çift sayıların sayısına eşittir. O zaman, $\varphi(n) = 40$ tır.

n nin 2 den daha fazla asal böleni olamaz; çünkü $\varphi(n) \geq (3-1)(5-1)(7-1) = 48 > 40$.

n nin bir asal böleni varsa, $p_1^{a_1-1}(p_1-1) = 40$ olacak. p_1 tek olduğu için, $p_1 = 8k+1$. $a_1 > 1$ sol tarafı 40 tan büyük yapar. O halde $a_1 = 1$ ve $p_1 = \boxed{n = 41}$

n nin iki asal böleni varsa, $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1}(p_1-1)(p_2-1) = 40$. $(p_1-1)(p_2-1) = 4k \geq 8$.

$\Rightarrow p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \cdot 4k = 40 \Rightarrow p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} k = 10.$

$k = 2$ ise, asal çarpanlardan biri 5, 5 in üssü 2 ve diğer asal çarpanların üssü 1 olmalı.

$5 \cdot (5-1)(p-1) = 40 \Rightarrow p - 1 = 2 \Rightarrow p = 3$. So $\boxed{n = 3 \cdot 5^2 = 75}$.

$k = 5$ olamaz; çünkü $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} = 2$ olması mümkün değil.

$k = 10$ ise, $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$. $(p_1-1)(p_2-1) = 40 \Rightarrow p_1 = 5, p_2 = 11 \Rightarrow \boxed{n = 5 \cdot 11 = 55}$.

Toplamda $\boxed{6}$ farklı pozitif tam sayı elde edilmiş oldu.

11 $x^4 + y^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ eşitliğinin sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$(x^2+y-1)^2 = x^4+y^2+1+2x^2y-2y-2x^2$

$(y^2+x-1)^2 = y^4+x^2+1+2xy^2-2x-2y^2$

Taraf tarafa toplarsak

$(x^2+y-1)^2+(y^2+x-1)^2 = x^4+y^4+2x^2y+2xy^2+2-x^2-y^2-2x-2y = 0$

Bu durumda $x^2 = 1-y$ ve $y^2 = 1-x$ olmalı.

$x^2-y^2 = 1-y-(1-x) = (x-y) \Rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$

$x = y$ ise, $x^2 = 1-x \Rightarrow x^2+x-1$ den iki gerçel kök çıkacak.

$x+y = 1$ ise $x^2 = 1+x-1 = x \Rightarrow x^2-x = x(x-1) = 0$ den de iki gerçel kök çıkacak.

Bu durumda (x,y) ikililerinin sayısı 4 tür. Bunları yazalım:

$(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\boxed{12}$ 100 öğrenci, öğleden önce 50 tane ikili grup halinde ve öğleden sonra da, yine 50 tane ikili grup halinde ders çalışıyorlar. Öğleden önceki ve sonraki gruplar nasıl oluşturulursa oluşturulsun, herhangi ikisi gün boyunca hiç birlikte çalışmamış n öğrenci bulunabiliyorsa, n sayısı en çok kaç olabilir?

a) 42 **b)** 38 **c)** 34 **d)** 25 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Öğrenciler $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ olsun.

İlk gruplar $(a_1,a_2), (a_3,a_4), \cdots, (a_{99},a_{100})$ olsun.(Temsili olarak.)

Yine ikinci gruplarda temsili olarak $(a_1,a_{100}), (a_2,a_{99}), \cdots, (a_{50},a_{51})$ olsun. Şimdi gün boyunca birbiriyle hiç çalışmamış 50 tane öğrenci alınabileceğini gösterelim.

İkinci gruplandırmaya göre ilk ikiliden a_1'i alalım.İkinciden a_2 alınamaz çünkü ilk başta çalıştılar dolayısıyla a_{99}'u alalım.Üçüncüden a_3'ü alalım ve bu şekilde almaya devam edelim her gruptan her zaman bir kişi alınabileceği aşikar dolayısıyla 50 grupta olduğunu varsayarsak 50 tane birbiriyle hiç çalışmamış öğrenci bulunabilir. Ayrıca bu soru çizgeler yardımıyla da çözülür.

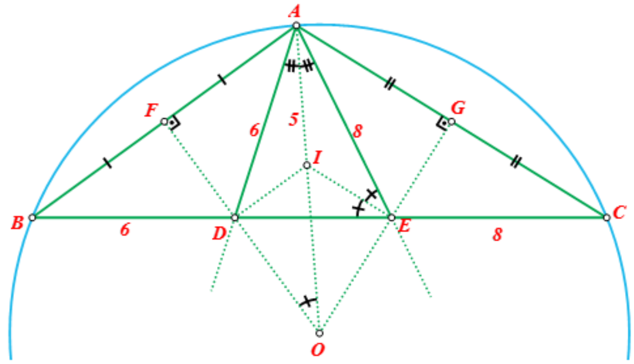
$\boxed{13}$ Çevrel çemberinin merkezi O olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları D, B ile E arasında yer almak üzere, $|AD| = |DB| = 6$ ve $|AE| = |EC| = 8$ koşullarını sağlıyor. ADE üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I noktası ve $|AI| = 5$ ise, $|IO|$ nedir?

a) $\dfrac{26}{5}$ **b)** 5 **c)** $\dfrac{23}{5}$ **d)** $\dfrac{21}{5}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

AB nin orta dikmesi D den ve O dan, AC nin orta dikmesi de E den ve O dan geçer.



Bu durumda, AB nin orta dikmesi ADE açısının dış açıortayı, benzer şekilde AC nin orta dikmesi de AED açısının dış açıortayıdır. Bu durumda O noktası, DAE üçgeninin A ya karşı dış teğet çemberinin merkezidir. Bu durumda A, I, O doğrusaldır.

$\angle AOD = \dfrac{\angle AED}{2} = \angle AEI = \angle IED$ ve $\angle DAO = \angle IAE$ olduğu için $\triangle ADO \sim \triangle AIE$. Dolayısıyla da

$$\frac{AI}{AE} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{6}{5+IO} \Rightarrow IO = \frac{23}{5}$$

14 n tam sayısını bölen pozitif tam sayıların sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; 64800 sayısının tüm k pozitif tam sayı bölenleri için, $d(k)$ sayılarının toplamı nedir?

a) 1440 **b)** 1650 **c)** 1890 **d)** 2010 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$64800 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ olduğu için $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 2$ olmak üzere $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ biçiminde olmalı.

$d(k) = (a+1)(b+1)(c+1)$ olacaktır. $a+1 = x$, $b+1 = y$, $c+1 = z$ şeklinde değişken değiştirirsek $d(k) = xyz$ ve $\sum d(k) = \sum\limits_{x=1}^{6}\sum\limits_{y=1}^{5}\sum\limits_{z=1}^{3} xyz = \sum\limits_{x=1}^{6} x \cdot \sum\limits_{y=1}^{5} y \cdot \sum\limits_{z=1}^{3} z$ olacaktır.

Bu durumda $\sum d(k) = \dfrac{6\cdot 7}{2} \cdot \dfrac{5\cdot 6}{2} \cdot \dfrac{3\cdot 4}{2} = 21 \cdot 15 \cdot 6 = 1890$

15 $[1, 2013]$ aralığında yer alan n gerçel sayısı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 14 **b)** 13 **c)** 12 **d)** 11 **e)** 10

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x < y < z$ sayıları verildiğinde $x + y \le z$ ise bir üçgen oluşturamıyoruz.

$x < y < z < w$ sayıları verildiğinde $x + y + z \le w$ ise bir dörtgen oluşturamıyoruz. Hem $x + y \le z$ hem de $x + y + z \le w$ ise ne üçgen oluşuyor, ne de dörtgen.

$1 < 1 + x < 2 + 2x < 4 + 4x < \cdots < 1024 + 1024x$ sayılarından $a < b < c$ şeklinde üç sayı seçtiğimizde her zaman $a + b < c$ oluyor.

Benzer şekilde dört sayı seçtiğimizde $a + b + c < d$ olacaktır.

$(0, \frac{989}{1024}]$ aralığında bir x sayısı seçildiğinde $1, 1+x, 2+2x, \ldots, 1024+1024x$ sayıları hiçbir şekilde bir çeşitkenar çokgen oluşturmayacak.

Yani $n = 12$ olduğunda çeşitkenar çokgenin bulunamadığı n adet sayı seçilebiliyor.

$n = 13$ olduğunda seçilen sayılar $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{13} \leq 2013$ olsun.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} > x_i$ olması demek çeşitkenar i-gen bulunabilir demek.

Hiçbir i değeri için çeşitkenar çokgen bulunamadığını varsayalım.

$1 \leq x_1 < x_2$

Her tarafa x_2 ekleyelim:

$2 \leq x_1 + x_2 \leq x3$

Her tarafa x_3 ekleyelim:

$4 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4$

$\vdots$

$2048 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} \leq x_{2013} \leq 2013$

olduğu için çelişki elde ettik.

Bu durumda $n = 13$ olduğunda en az bir i değeri için $x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} > x_i$ dir. Yani çeşitkenar i-gen bulunabilir.

16 16 beyaz ve 4 kırmızı top her biri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

a) $\frac{5}{64}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{4^4}{\binom{16}{4}}$ **d)** $\frac{5^4}{\binom{20}{4}}$ **e)** $\frac{3}{32}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

20 top 4 kutuya 5'erli $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \dfrac{20!}{(5!)^4}$ şekilde dağıtılır.

Her kutuya 1 kırmızı top, $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 4!$ şekilde,

geri kalan 16 beyaz top, $\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = \dfrac{16!}{(4!)^4}$ şekilde dağıtılır.

Düzenlersek, $\dfrac{\frac{16! \cdot 4!}{(4!)^4}}{\frac{20!}{(5!)^4}} = \dfrac{5^4}{\binom{20}{4}}$ olur.

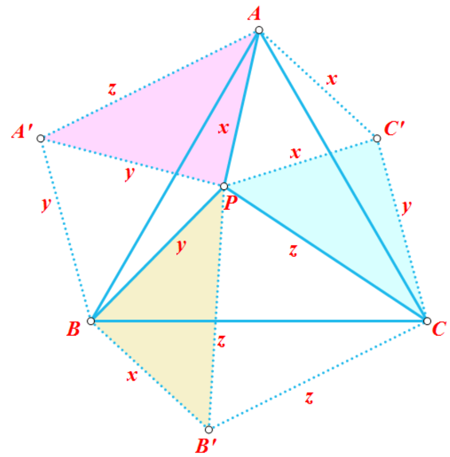
17 Kenar uzunluğu 10 olan bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası için $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2 = 128$ ise, kenar uzunlukları $|PA|, |PB|, |PC|$ olan bir üçgenin alanı nedir?

a) $6\sqrt{3}$ **b)** $7\sqrt{3}$ **c)** $8\sqrt{3}$ **d)** $9\sqrt{3}$ **e)** $10\sqrt{3}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Üçgenin dışarısında $\triangle C'AC \cong \triangle PAB$ olacak şekilde C' noktası alalım. $\angle PAB = \angle C'AC \Rightarrow \angle PAC' = 60°$ olacaktır. Bu durumda, $\triangle PAC'$ üçgeni eşkenar olur. $\triangle PC'C$ üçgeninin kenarları $PC' = PA$, $C'C = PB$, PC dir. Bu durumda bize sorulan $\triangle PC'C$ üçgeninin alanıdır.



Benzer şekilde, $\triangle B'BC \cong \triangle PAC$ olacak şekilde üçgenin dışında B' noktası,

$\triangle A'AB \cong \triangle PCB$ olacak şekilde üçgenin dışında A' noktası alalım.

$S = [PAA'] = [PCC'] = [PBB']$ diyelim.

$[AA'BB'CC'] = [ABC] + [A'AB] + [B'BC] + [C'CA] = 2[ABC]$ dir.

$[AA'BB'CC'] = [BA'P] + [CB'P] + [AC'P] + 3S$ dir.

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2\sqrt{3}}{4} + \frac{z^2\sqrt{3}}{4} + 3S = 2 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{3} + 12S = 200\sqrt{3} \Rightarrow 12S = 72\sqrt{3} \Rightarrow S = 6\sqrt{3}$$

Çözüm 2:

(Hasan TUNÇ)

P nin BC, AC, AB kenarlarına göre simetrikleri sırasıyla, P_A, P_B, P_C olsun.

Açık şekilde, $AP = AP_B = AP_c$, $BP = BP_A = BP_C$, $CP = CP_A = CP_B$ ve $\angle P_CAP_B = \angle P_ACP_B = \angle P_ABP_C = 120°$.

$\triangle P_BAP_C$ bir $30° - 30° - 120°$ üçgenidir. Dolayısıyla $P_BP_C = AP_B\sqrt{3} = AP\sqrt{3}$ tür. Benzer şekilde $P_AP_C = BP\sqrt{3}$ ve $P_AP_B = CP\sqrt{3}$ tür. Bu durumda soruda sorulan üçgenle $\triangle P_AP_BP_C$ üçgeni benzer, üçgenlerin benzerlik oranı $\frac{1}{\sqrt{3}}$, alanları oranı $\frac{1}{3}$ tür.

$[AP_BCP_ABP_C] = 2 \cdot [ABC] = 50\sqrt{3}$ ve

$[AP_BCP_ABP_C] = [P_AP_BP_C] + [AP_BP_C] + [BP_AP_C] + [CP_AP_B]$

$[AP_BCP_ABP_C] = [P_AP_BP_C] + \frac{1}{2} \cdot AP^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot BP^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot CP^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$50\sqrt{3} = [P_AP_BP_C] + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (AP^2 + BP^2 + CP^2)$

$50\sqrt{3} = [P_AP_BP_C] + 32\sqrt{3} \Rightarrow [P_AP_BP_C] = 18\sqrt{3}$

$\triangle P_AP_BP_C$ ile sorulan üçgenin alanları oranı 3 olacağı için cevap $18\sqrt{3}/3 = 6\sqrt{3}$ tür.

18

$$\binom{2013}{1} + 2013\binom{2013}{3} + 2013^2\binom{2013}{5} + \cdots + 2013^{1006}\binom{2013}{2013}$$

toplamının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 20 **b)** 14 **c)** 7 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Sorudaki toplama A diyelim.

$$\begin{aligned}(2+1)^{2013} + (2-1)^{2013} &= 2\cdot\tbinom{2013}{0}\cdot 2^{2013} + 2\cdot\tbinom{2013}{2}\cdot 2^{2011} + \cdots + 2\cdot\tbinom{2013}{2012}\cdot 2^1 \\ &= \tbinom{2013}{2013}\cdot 4^{1007} + \tbinom{2013}{2011}\cdot 4^{1006} + \cdots + \tbinom{2013}{1}\cdot 4^1 \\ &\equiv 4A \pmod{41}\end{aligned}$$

$4A \equiv 3^{2013} + 1 \equiv (3^4)^{503}\cdot 3 + 1 \equiv (-1)\cdot 3 + 1 \equiv -2 \equiv 80 \pmod{41}$

$\Rightarrow A \equiv 20 \pmod{41}$.

19 x bir gerçel sayı olmak üzere

$$\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 2 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $1+\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2} = x^2 - 4x + 4 + 3 - 2\sqrt{2} = (x-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2$

$x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2} = x^2 - 8x + 16 + 11 - 6\sqrt{2} = (x-4)^2 + (3-\sqrt{2})^2$ olduğu için

$\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (3-\sqrt{2})^2}$

Aslında bu klasik bir geometri problemi.

Koordinat düzleminde $P(2, \sqrt{2}-1)$ ve $Q(4, 3-\sqrt{2})$ noktaları alınıyor. x-ekseni üzerinde $|PX| + |QX|$ toplamını en küçük yapan $X(x,0)$ noktasını bulunuz.

Nasıl çözüyoruz?

P nin x-eksenine göre simetriği $P'(2, 1-\sqrt{2})$ olsun. $P'X = PX$ olduğu için $PX + QX$ i minimum yapan X noktası $P'X + QX$ i de minimum yapacak. $P'X + QX$ ifadesi P', X, Q doğrusal olduğunda minimum olur. O halde $\min(PX + QX) = P'Q = \sqrt{(4-2)^2 + (3-\sqrt{2}-(1-\sqrt{2}))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

Minkowski Eşitsizliği'ni kullanacağız. Çözümün anlaşılabilirliği için eşitsizlikten bahsedelim. a_{ij} pozitif reeller, $r > s$ ise sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{r}\right)^{s/r}\right)^{1/s} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{s}\right)^{r/s}\right)^{1/r}$$

olduğunu belirtir. Bu çözümde kullanacağımız hali ise $s = 1$, $r = 2$, $m = 2$ ve $n = 2$ yani

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

Buna göre sorudaki ifade şöyle yazılabilir

$$\sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (3-\sqrt{2})^2}$$

$$\overbrace{\geq}^{Minkowski} \sqrt{(x-2+4-x)^2 + (\sqrt{2}-1+3-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

elde edilir. Eşitlik durumu $x = \sqrt{2} + 1$ için sağlanır.

20 Ağırlıkları $1, 2, ..., 2013$ gram olan 2013 taşın her birinin üstüne $1, 2, ..., 2013$ sayılarından biri, her sayı tam olarak bir kez kulanılarak yazılıyor. Sayılar nasıl yazılırsa yazılsın, tüm taşların üstünde kendi ağırlıklarının yazılıp yazılmadığı, sol kefesindeki ağırlıktan sağ kefesindeki ağırlığın çıkarılmasının sonucunu gösteren iki kefeli bir tartı k kez kullanılarak kontrol edilebiliyorsa, k en az kaç olabilir?

a) 15 **b)** 12 **c)** 10 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{\text{D}}$

Taşlara $2187 - 2013 = 174$ tane sıfır ağırlıklı taş ekleyerek taş sayısını $3^7 = 2187$ olarak alalım. Taşları her biri 729 taştan oluşan en hafif, orta ve en ağır gruba bölelim, hafif grubu sol kefeye, ağır grubu sağ kefeye yerleştirelim. Tartı yanlış bir ağırlık olduğunu kanıtlamıyorsa, bu üç grubu aynı kuralla üçer gruba ayıralım ve en hafif üç grubu sol kefeye, en ağır üç grubu ise sağ kefeye yerleştirelim. Tartı yanlış bir ağırlık olduğunu kanıtlamıyorsa, benzer şekilde devam edelim. Yedinci tartı sonucunda 2187 tane birer elemanlı grup elde edeceğiz. Şimdi 7 den daha az tartıyla yapılamayacağını gösterelim. Her tartı için üç grup tanımlanıyor. Bu grupların birinde ilk tartı sonucunda bir grupta en az $2013/3 = 671$, ikinci tartı sonucunda en az 224, üçüncü tartı sonucunda en az 75, dördüncü tartı sonucunda en az 25, beşinci tartı sonucunda en az 9, altıncı tartı sonucunda en az 3 eleman olacak. Bu 3 taşın üstüne yazılmış sayıların doğru olup olmadığı kontrol edilmemiş olacaktır.

Kaynak: Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyatı Soru ve Çözümleri

21 $m(\widehat{C}) = 90°$ olan bir ABC dik üçgeninin $[AB]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları $|AD| = |AC|$ ve $|BE| = |BC|$ koşullarını sağlıyor. AEC ve BDC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği F noktası için $|CF| = 2$ ise, $|ED|$ nedir?

a) $\sqrt{2}$ **b)** $1 + \sqrt{2}$ **c)** 2 **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

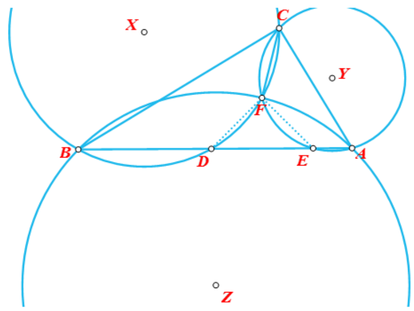
Yanıt: $\boxed{D}$

ABC üçgeninin iç merkezi I olsun.

$\angle BFC = \angle BDC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ olduğu için I noktası, BDC yayı üzerindedir.

$\angle CFA = \angle CEA = 90^\circ + \dfrac{\angle B}{2}$ olduğu için I noktası, AEC yayı üzerindedir.

$\angle BFA = 360^\circ - \left(90^\circ + \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ + \dfrac{\angle B}{2}\right) = 135^\circ = 90^\circ + \dfrac{\angle C}{2}$ olduğu için I noktası, BFA yayı üzerindedir.



Bu üç yayın bir tek kesişim noktası var. O da F. Demek ki, $I = F$. Bu durumda BF açıortay olduğu için $DF = FC = 2$, AF açıortay olduğu için $FE = FC = 2$.

CF açıortay olduğu için, $\angle BCF = \angle FDE = 45^\circ$. DFE ikizkenar dik üçgeninde, $DE = 2\sqrt{2}$ dir.

22 $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21$ sayısı, $0 \le n < 2013$ koşulunu sağlayan kaç n tam sayısı için, 2013 ile bölünür?

a) 6 **b)** 8 **c)** 12 **d)** 16 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$(n^2+1)(n^2+2n-21) \equiv (n^2+1)\left((n+1)^2 - 22\right) \equiv 0 \pmod{3 \cdot 11 \cdot 61}$

mod3 için, $n \equiv 0, 1$.

mod11 için,

$n^2 \equiv -1 \pmod{11}$ denkliğinin çözümü yok.

$(n+1)^2 - 22 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow n \equiv 10$.

mod61 için,

$n^2 \equiv -1 \equiv 122 - 1 \equiv 121 \pmod{61} \Rightarrow n \equiv \pm 11 \pmod{61}$.

$(n+1)^2 - 22 \equiv 0 \equiv 122 \pmod{61} \Rightarrow (n+1)^2 \equiv 144 \pmod{61}$

$\Rightarrow n+1 \equiv \pm 12 \pmod{61} \Rightarrow n \equiv 11, -13 \pmod{61}$.

İkisini birleştirirsek, $n \equiv 11, -11, -13 \pmod{61}$

Çinlilerin kalan teoremine göre

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{3} \\ x &\equiv b \pmod{11} \\ x &\equiv c \pmod{61} \end{aligned}$$

denkliğinin mod2013 te tam olarak bir çözümü olacağı için, $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21 \equiv 0 \pmod{2013}$ denkliğinin çözüm sayısı $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ dır.

23 f ve g fonksiyonları tüm $x \neq 1$ gerçel sayıları için,

$$f(2x+1) + g(3-x) = x$$

$$f((3x+5)/(x+1)) + 2g((2x+1)/(x+1)) = x/(x+1)$$

koşullarını sağlıyorsa, $f(2013)$ nedir?

a) 1007 **b)** $\frac{4021}{3}$ **c)** $\frac{6037}{7}$ **d)** $\frac{4029}{5}$ **e)** 3016

Çözüm:

İkinci denklemde

$$(3x+5)/(x+1) \to 2x+1$$

ve

$$(2x+1)/(x+1) \to 3-x$$

olması için x yerine $(-x+2)/(x-1)$ yazılırsa;

$f(2x+1) + 2g(3-x) = -x+2$ olur.

$f(2x+1) + g(3-x) = x$ olduğundan;

$f(2x+1) = 3x-2$

$f(2013) = 3016$

24 Ağırlıkları $1, 2, ..., 77$ gram olan 77 taş ağırlıkları birbirinden farklı olan k gruba kendinden daha hafif gruptan daha az taş içerecek biçimde dağıtılabiliyorsa, k sayısı $\{9, 10, 11, 12\}$ değerlerinden kaçını alabilir?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Toplam ağırlık $T = 1 + 2 + \cdots + 77 = 77 \cdot 39 = 3003$.

En ağır grubun ağırlığı en az $W_k = \left\lceil \frac{T}{k} \right\rceil$.

En ağır gruptaki taş sayısı en az $N_k = \left\lceil \frac{W_k}{77} \right\rceil$.

Hafif grup kendinden ağır gruptan daha fazla taş içereceğinden, toplam taş sayısı en az $N_k + (N_k+1) + \cdots + (N_k + k - 1) = k \cdot (N_k + \frac{k-1}{2}) \leq 77$ olacaktır.

$N_k \geq 1$ olduğu için $k = 12$ nin N_k yı hesaplamadan son eşitsizliği sağlamadığı görülür.

$k = 10, 11$; $N_k \geq 4$, dolayısıyla $10 \cdot (4 + \frac{9}{2}) > 77$ olduğu için sağlamaz.

$k = 9$ için; $W_k \geq 334$ ve $N_k \geq 5$. $9 \cdot (5+4) > 77$ olduğu için $k = 9$ da sağlamaz.

O halde cevap, hiçbiri.

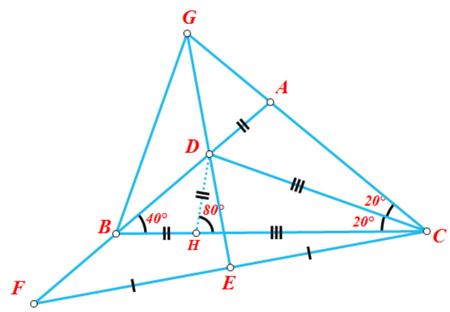
25 $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde D noktası $[AB]$ kenarı üstünde yer almak üzere, $[CD]$ iç açıortay ve $m(\widehat{ABC}) = 40°$ dir. $[AB]$ kenarının uzantısı üstünde ve B den sonra yer alan bir F noktası için, $|BC| = |AF|$ dir. $[CF]$ nin orta noktası E olmak üzere, ED ve AC doğrularının kesişim noktası G ise, $m(\widehat{FBG})$ nedir?

a) 150° **b)** 135° **c)** 120° **d)** 105° **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

(ADC) çemberi BC yi H de kessin. $\angle DHC = 80°$ olacaktır. $AD = DH$ ve $HC = DC$.
$\angle DBH = 40°$ olduğu için $BH = DH = AD$.



$AF = BC = HC + BH = AD + DF \Rightarrow DF = DC$ olur. $\angle BDC = 120° \Rightarrow \angle DCE = 30°$.

FDC ikizkenar üçgeninde DE kenarortay olduğu için aynı zamanda yüksekliktir. Bu durumda GEC dik üçgeninde $\angle EGC = 40° = \angle DBC$ olur. Aynı zamanda $\angle DCB = \angle DCG = 20°$ olduğu için $BC = GC$ dir. $\angle GBC = 70° \Rightarrow \angle GBD = 30° \Rightarrow \angle GBF = 150°$.

26 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $n^3 + 2$ ve $(n+1)^3 + 2$ sayılarının her ikisini de bölen asal sayıların sayısı en çok kaç olabilir?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

x, y tam sayılar olmak üzere; $p \mid a \wedge p \mid b \Rightarrow p \mid ax + by$.

$$p \mid n^3 + 2 \wedge p \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 3 \Rightarrow p \mid (n^3 + 3n^2 + 3n + 3) - (n^3 + 2) = 3n^2 + 3n + 1 \quad (1)$$

$$p \mid n(3n^2 + 3n + 1) - 3(n^3 + 2) = 3n^2 + n - 6 \quad (2)$$

$$p \mid (3n^2 + 3n + 1) - (3n^2 + n - 6) = 2n + 7 \quad (3)$$

$$p \mid 3n(2n + 7) - 2(3n^2 + 3n + 1) = 15n - 2 \quad (4)$$

$$p \mid 15(2n + 7) - 2(15n - 2) = 109 \quad (5)$$

109 asal olduğu için $p \mid 109$ şeklinde tek bir asal sayı vardır. O da $p = 109$.

27 (a, b) ikilisinin $(1,2), (3,5), (5,7), (7,11)$ değerlerinden kaçı için $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$ polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0

Çözüm 1:

$P(x) = (x+1)(x^4 + (a-1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1) = (x+1)Q(x)$

$(a,b) = (1,2)$ için $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ in kökü yoktur.

$(a,b) = (3,5)$ için $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = x^2(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2$ her zaman pozitiftir.

$(a,b) = (5,7)$ için $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1$, $Q(0) = 1$ ve $Q(-1) = -3$ olduğu için $(-1,0)$ aralığında en az bir x değeri için $Q(x) = 0$ dır. O halde bu (a,b) çifti için $P(x)$ in birden fazla gerçel kökü vardır.

$(a,b) = (7,11)$ için $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x + 1$, $Q(0) = 1$ ve $Q(-1) = -5$ olduğu için $(-1,0)$ aralığında en az bir x değeri için $Q(x) = 0$ dır. O halde bu (a,b) çifti için de $P(x)$ in birden fazla gerçel kökü vardır.

O halde, sadece $(1,2)$ ve $(3,5)$ çiftleri için $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır.

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^4 + (a-1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1) \\ &= (x+1)((x^2+1)^2 + (a-1)x(x^2+1) + (b-a-1)x^2) \end{aligned}$$

$\dfrac{x^2+1}{x} = t$ dersek

$P(x) = (x+1)x^2(t^2 + (a-1)t + b - a - 1)$ olacaktır. Son çarpanı t ye göre çözdüğümüzde

$$\Delta = (a-1)^2 - 4(b-a-1) = (a+1)^2 - 4(b-1) < 0 \qquad \text{(Test 1)}$$

ise $P(x)$ polinomunun $x = -1$ den başka kökü yok demektir.

$t = \dfrac{1 - a \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)}}{2}$ çıkacaktır. Sonra bulduğumuz t değerini yerine yazarsak

$$x^2 + 1 = tx \Rightarrow x^2 - tx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}$$

elde ederiz.

$$t^2 < 4 \qquad \text{(Test 2)}$$

durumu $P(x)$ i tek köklü yapacaktır.

Ayrıca t li denklemden $x = -1$ çıkması da $P(x)$ i tek köklü yapacaktır. $-1 = t \pm \sqrt{t^2-4} \Rightarrow -2 - t = \pm\sqrt{t^2-4} \Rightarrow t = -2$ için de $P(x)$ in tek bir gerçel kökü olacaktır. Bu denklemi çözersek

$$t = \frac{1 - a \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)}}{2} = -2$$

$$\Rightarrow a - 5 = \pm\sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)} \Rightarrow b = 3a - 5$$

elde ederiz. Yani

$$3a - b = 5 \qquad \text{(Test 3)}$$

ise de $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır.

Düzenlersek; Test 1 i sağlayan ikililer için $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır. Test 1 i sağlamayan bir ikili Test 2 yi sağlıyorsa yine $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır. Test 1 ve Test 2 yi sağlamıyor; ama Test 3 sağlıyorsa yine $P(x)$ in tek gerçel kökü olacaktır.

$(a,b) = (1,2)$ ikilisi için $(1+1)^2 - 4(2-1) = 0$ olacağından Test 1 sağlanmadı. Bu ikili için $t = 0$ çıkacağı için $t^2 = 0^2 < 4$ olduğundan Test 2 i sağlandı. O halde, bu ikili için $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır.

$(a,b) = (3,5)$ ikilisi için $(3+1)^2 - 4(5-1) = 0$ olacağından Test 1 sağlanmadı. Bu ikili için $t = -1$ çıkacağı için $t^2 = (-1)^2 < 4$ olduğundan Test 2 i sağlandı. O halde, bu ikili için $P(x)$ in tek gerçel kökü vardır.

$(a,b) = (5,7)$ ikilisi için $(5+1)^2 - 4(7-1) = 12$ olacağından Test 1 sağlanmadı. Bu ikili için $t = -2 \pm \sqrt{3}$ çıkacağı için ve $t = -2 - \sqrt{3}$ için $t^2 = (-2-\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} > 4$ olduğundan Test 2 de sağlanmadı.

$3 \cdot 5 - 7 = 8 \neq 5$ olduğu için Test 3 de sağlanmadı. O halde, bu ikili için $P(x)$ in birden fazla farklı gerçel kökü var.

$(a,b) = (7,11)$ ikilisi için $(7+1)^2 - 4(11-1) = 24$ olacağından Test 1 sağlanmadı. Bu ikili için $t = -6 \pm \sqrt{6}$ çıkacağı için ve $t = -2 - \sqrt{6}$ için $t^2 = (-6 - \sqrt{6})^2 > 4$ olduğundan Test 2 de sağlanmadı. $3 \cdot 7 - 11 = 10 \neq 5$ olduğu için Test 3 de sağlanmadı. O halde, bu ikili için $P(x)$ in birden fazla farklı gerçel kökü var.

28 Başlangıçta tahtaya bir (m,n) pozitif tam sayı ikilisi yazılmıştır. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu sayılardan birini seçip silerek, yerine bu sayının yarısından küçük olmayan bir tam sayı yazıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m,n) = (7,79), (17,71), (10,101), (21,251), (50,405)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)**Hiçbiri

Çözüm 1:

Ayşe hangi sayıyı yazarsa yazsın, Burak da o sayıyı eski haline çevirirse; oyunun bitmemesini sağlar. Böylelikle Ayşe oyunu kazanmayı garantileyememiş olur. Bu durumda yanıt $\boxed{E}$ olur.

NOT:

Bu soruda bir sorun oluşmuş; yoksa o kadar da kolay bir soru değilmiş. Duyduğuma göre, sayıyı büyütmemek konusunda kısıtlama getirilmesi unutulmuş.

Çözüm 2:

Alternatif versiyon, yani $(m,n) \to (m,x)$ dönüşümü için $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < x < n$ ön koşulunun var olması durumu, için çözüm yapalım.

Dönüşüm eşitsizliğini $\frac{n-1}{2} < x < n \Longrightarrow (m,n) \to (m,x)$ şeklinde yazalım.

Ayşe, herhangi bir aşamada (n,n) yazmayı başarırsa, Burak'ın (n,x) hamlesinden sonra (x,x) yazabileceğinden bu durumu $(1,1)$ yazıncaya kadar devam ettirebilir. $(1,1)$ çiftini Ayşe yazdığı için, Burak hamle yapamaz duruma gelir ve Ayşe oyunu kazanır.

İddia: Ayşe, herhangi bir aşamada, $k = 0, 1, \ldots$ için $(n, 2^k(n+1) - 1)$ yazmayı başarırsa, sonlu sayıda adım sonunda sayı çiftini (x,x) şeklinde bir çifte çevirmeyi başarabilir.

İspat:

Burak $2^k(n+1) - 1 \to x$ dönüşümü yaparsa, $\frac{(2^k(n+1)-1)-1}{2} = 2^{k-1}(n+1) - 1 < x < 2^k(n+1) - 1$, yani $x = 2^{k-1}(n+1), 2^{k-1}(n+1)+1, \ldots, 2^k(n+1) - 2$ olacaktır. Bir sonraki hamlede Ayşe $x \to 2^{k-1}(n+1) - 1$ dönüşümü yapabilecektir. Burak, bu şekildeki dönüşümlerde ısrarcı olursa, Ayşe bu şekilde $k = 0$'a kadar gelir.

Burak $n \to x$ dönüşümü yaparsa, Ayşe $2^k(n+1) - 1 \to 2^k(x+1) - 1$ dönüşümü yapacaktır (Bu durumun legal olduğunu birazdan göstereceğiz.). Burak bu değişiklikte ısrarcı olursa bir noktada $x \to 1$ dönüşümü yapmak zorunda olacak. O noktadan sonra, k sayısını bir azaltacak hamle sırası hep Ayşe'de olacak. $k = 0$ durumunda, Ayşe tahtaya $(1,1)$ yazmış olacak ve oyunu kazanacak.

Söz verdiğimiz gibi, Ayşe'nin $2^k(n+1) - 1 \to 2^k(x+1) - 1$ dönüşümünün legal olduğunu gösterelim.

Göstermemiz gereken,
$$\frac{(2^k(n+1)-1)-1}{2} < 2^k(x+1) - 1 < 2^k(n+1) - 1$$
olduğu.

$x < n$ olduğu için sağ taraf çok açık.

$2^{k-1}(n+1) - 1 < 2^k(x+1) - 1 \Leftrightarrow n+1 < 2(x+1) \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} < x$ olduğu için sol taraf da doğru. ■

Sorudaki (m, n) ikililerinden $(17, 71)$, $(17, 2^2 \cdot (17 + 1) - 1)$ formunda olduğu için, Burak tahtaya (x, x) sayısını yazmayı garantileyebilecek. O halde, Ayşe oyunu kaybedecek. Diğer ikililer için böyle bir durum söz konusu değil. Yani tahtaya ilk olarak Ayşe $(n, 2^k(n+1) - 1)$ formunda bir sayı yazabilecek, böylelikle oyunu kazanmayı garantileyebilecek. Örneğin, Ayşe $(7, 79) \to (7, 2^3(7 + 1) - 1) = (7, 63)$ yazdıktan sonra oyunu kazanacak forma girmiş olacak.

Sonuç olarak, sorunun bu hali için, doğru yanıt, $\boxed{a)\ 4}$.

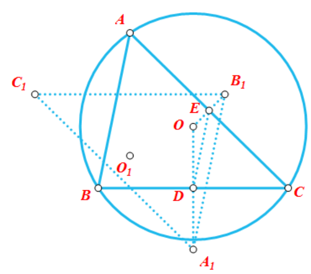
29 $|AB| = 5, |BC| = 6$ ve $|AC| = 7$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O nun BC, AC ve AB doğrularına göre simetriği sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1 noktaları olsun. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin A noktasına uzaklığı nedir?

a) 6 **b)** $\sqrt{29}$ **c)** $\dfrac{19}{2\sqrt{6}}$ **d)** $\dfrac{35}{4\sqrt{6}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{35}{3}}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

BC nin orta noktası D, AC nin orta noktası E olsun. $\dfrac{OE}{EB_1} = \dfrac{OD}{DA_1} = 1$ olduğu için $A_1B_1 = 2 \cdot ED = AB$. Benzer şekilde $A_1C_1 = AC$ ve $B_1C_1 = BC$ olur. Bu durumda $A_1B_1C_1$ üçgeni ile ABC üçgeni eştir. O zaman bu iki üçgenin çevrel yarıçapları da eşittir.



$A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel merkezi O_1 olsun. $\angle C_1A_1O_1 = \angle CAO$ ve $AC \parallel A_1C_1$ olduğu için $A_1O_1 \parallel AO$ dur. Ayrıca, $A_1O_1 = AO$ olduğu için AOA_1O_1 bir paralelkenardır. Bu durumda, $AO_1 = OA_1$ olur.

$$\frac{abc}{4R} = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \Rightarrow \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4R} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \Rightarrow R = OC = \frac{35}{4\sqrt{6}}$$

$DC = 3$ olduğu için Pisagordan $OD^2 = \dfrac{35^2}{96} - 9 = \dfrac{361}{96} \Rightarrow OD = \dfrac{19}{4\sqrt{6}} \Rightarrow OA_1 = AO_1 = \dfrac{19}{2\sqrt{6}}$.

30 2013 den küçük kaç n pozitif tam sayısı için, n yi bölen en küçük asal sayı p olmak üzere, $p^2 + p + 1$ sayısı n yi böler?

a) 212 **b)** 206 **c)** 191 **d)** 185 **e)** 173

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$132 + 13 + 1 = 183$ ve $13 \cdot 183 > 2013$ olduğu için deneyeceğimiz asal sayılar 13 ten küçük olmalı.

$p = 11$ için, $112 + 11 + 1 = 133 = 7 \cdot 19$ olduğu için p en küçük asal çarpan değildir.

$p = 7$ için, $72 + 7 + 1 = 57 = 3 \cdot 19$ olduğu için p en küçük asal çarpan değildir.

Bu durumda sadece 2, 3 ve 5 i deneyeceğiz.

$\lfloor x \rfloor$ ile x pozitif sayısının tam kısmını gösterelim.

$p = 2$ için, $22 + 2 + 1 = 7$ olduğu için $2 \cdot 7 | n < 2013$ olmalı. $\lfloor \frac{2013}{14} \rfloor = 143$ adet böyle sayı var.

$p = 3$ için, $32 + 3 + 1 = 13$ olduğu için $39|n < 2013$ olmalı; fakat $78|n < 2013$ olmamalı. Aksi takdirde, en küçük asal bölen 2 olur. Bu şekilde $\lfloor \frac{2013}{39} \rfloor - \lfloor \frac{2013}{78} \rfloor = 51 - 25 = 26$ sayı var.

$p = 5$ için, $52 + 5 + 1 = 31$ olduğu için $155|n < 2013$ olmalı; fakat 2 veya 3, n'yi bölmemeli.

İçerme-Dışarmadan $\lfloor \frac{2013}{155} \rfloor - \lfloor \frac{2013}{310} \rfloor - \lfloor \frac{2013}{465} \rfloor + \lfloor \frac{2013}{930} \rfloor = 12 - 6 - 4 + 2 = 4$ sayı elde edilir.

Toplamda $143 + 26 + 4 = 173$ sayı vardır.

31 Gerçel sayılardan oluşan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 3$ için,

$$a_n = (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + ... + 2a_{n-2} + a_{n-1}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $a_{2011} = 2011$ ve $a_{2012} = 2012$ ise, a_{2013} nedir?

a) 6025 **b)** 5555 **c)** 4025 **d)** 3456 **e)** 2013

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$$\begin{aligned}
a_{2013} &= 2012a_1 + 2011a_2 + \cdots + 3a_{2010} + 2a_{2011} + a_{2012} \\
a_{2012} &= 2011a_1 + 2010a_2 + \cdots + 2a_{2010} + a_{2011} \\
a_{2011} &= 2010a_1 + 2009a_2 + \cdots + a_{2010} \\
a_{2012} - a_{2011} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} + a_{2011} = 1 \\
a_{2013} - a_{2012} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011} + a_{2012} \\
a_{2013} &= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011}}_{=1} + a_{2012} + a_{2012} \\
a_{2013} &= 1 + 2012 + 2012 = 4025
\end{aligned}$$

32 Yalnızca $1, 2, 3$ rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

a) 768 **b)** 642 **c)** 564 **d)** 510 **e)** 456

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Ardışık basamakları farklı olup 1 ile başlayıp 1 ile biten n basamaklı sayıların sayısını a_n ile gösterelim. Açık şekilde $a_3 = 2$ ve sorumuzun cevabı $3a_{10}$.

1 ile başlayan; ama son basamağına bir kısıtlama getirilmemiş sayıların sayısı: 2^{n-1}.

Bu durumda 1 ile başlayıp 1 ile bitmeyen söz konusu n basamaklı sayıların sayısı $2^{n-1} - a_n$ olacaktır.

Bu sayının sonuna 1 koyarsak, $n + 1$ basamaklı 1 ile başlayıp 1 ile biten sayı elde edeceğiz.

O halde $a_{n+1} = 2^{n-1} - a_n$.

Açık şekilde, $a_4 = 2^2 - 2$, $a_5 = 2^3 - a_4 = 2^3 - 2^2 + 2$ ve $a_6 = 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2$.

O halde $a_{10} = 2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1$.

$\frac{a_{10}}{2} = 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2^1 - 1$ ile a_{10} u toplarsak $\frac{3a_{10}}{2} = 2^8 - 1 \Rightarrow 3a_{10} = 2^9 - 2 = 510$.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

Daha önce şurada daire diliminin boyanması problemini çözerek $n \geq 4$ için $a_{n+1} + a_n = k \cdot (k-1)^{n-1}$ indirgeme bağıntısını ve $a_n = (k-1)(-1)^n + (k-1)^n$ açık biçimini elde etmiştik.

Yukarıdaki problemde de $1, 2, 3$ rakamlarını kullanarak istenen özellikte yazılabilecek n basamaklı sayıların sayısını b_n ile gösterelim. Bizden istenen b_{10} değeridir. İlk basamak ile n-inci basamak aynı olması istendiğinden, ilk basamak belirlendiğinde n-inci basamak da belirlenmiş oluyor. Bu sebeple ilk $n-1$ basamakla ilgilenmeliyiz. Daire dilimi boyama problemi ile ikişki kurarsak, $1, 2, 3$ rakamları ile $n-1$ basamaklı sayı yazma problemi $k = 3$ renk ile $n-1$ daire dilimini boyama ile özdeştir. Bu sebeple $n-1$ basamağın belirlenme sayısı $b_n = a_{n-1}$ dir. O halde problemimizin çözümü a_9 olacaktır. $k = 3$ iken

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2^n$$

olup $a_9 = 2 \cdot (-1)^9 + 2^9 = -2 + 512 = 510$ bulunur.

Not:

Ayrıca daha fazla uygulama problemiyle ilgilenenler için burada video olarak şunları sundum:

1. $a_{n+1} + a_n = k \cdot (k-1)^{n-1}$ bağıntısının ispatı

2. 2019 JEE (Joint Entrance Exam) isimli sınava ait bir problemin çözümü

3. 2013 Tübitak Lise 1. Aşama 32. sorunun çözümü

4. Çetin ceviz bir kombinatorik problemin çözümü

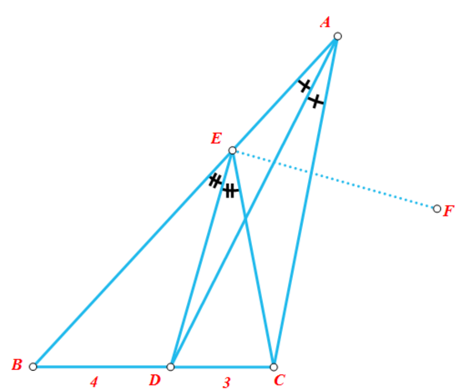
$\boxed{33}$ Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 4$ ve $|DC| = 3$ olacak biçimde yer alan D noktası için, $|AD|$ iç açıortaydır. $[AB]$ kenarı üstünde yer alan ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC})$ koşulunu sağlayan A dan farklı bir E noktası için, $[AE]$ doğru parçasının orta dikmesi ile BC doğrusu M noktasında kesişiyorsa, $|CM|$ nedir?

a) 12 **b)** 9 **c)** 7 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{4}{3}$ noktalarının geometrik yeri, $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{4}{3}$ olduğu için D, E, A noktalarından geçen çemberdir (Apolonyus çemberi). AE nin orta dikmesi, BC yi bu çemberin merkezinde kesecektir. Bu geometrik yeri fark etmek, zaten soruyu çözmek demek.



Yine de Apolonyus'a çok takılmadan bir çözüm yapalım.

$\angle BEC$ nin dış açıortayı ile BC doğrusu G de kesişsin. Dış açıortay teoreminden

$$\frac{EC}{EB} = \frac{CG}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CG}{7+CG} = \frac{3}{4} \Rightarrow CG = 21$$

$\angle BAC$ nin dış açıortayı ile BC doğrusu H de kesişsin. Dış açıortay teoreminden

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CH}{7+CH} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = 21$$

olacağı için $G = H$ dir.

İç açıortay ile dış açıortay arasında kalan açı $90°$ olacağı için, $\angle DEG = \angle DAG = 90°$.

Bu durumda, DG çaplı çember E ve A noktasından geçer. AE nin orta dikmesi, BC yi çemberin merkezinde keser. Yani $DM = MG$.

$$CG = 21 \Rightarrow DG = 24 \Rightarrow DM = 12 \Rightarrow MC = 9$$

Çözüm 2:

AEC üçgeninde D noktası dış çember merkezi olduğundan CD, ECG açısının açıortayı olur. AEM üçgeninin simetri ekseni MI çizilirse IM, CIK açısının açıortayı olur. Buna göre M'de ECI üçgeninin dış çember merkezidir ve dolayısıyla EM, CEI nın açıortayı olur.

Bu aşamadan sonra bulunanlar ile farklı yollardan çözüme ulaşabiliriz. $|CM| = x$ diyelim

1. Açılar incelendiğinde görülüyor ki $\angle EBC = \angle CEM$ dir. Yani ECM üçgeni ile BEM üçgeni benzerdir. Bu üçgenlerin benzerlik oranı $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{3}{4}$ dür.Bu oranı uygulayarak $x = 9$ bulunabilir.

veya $|ME| = |MD|$ olduğu görülürse, $|ME| = x+3$ yazıp EBM üçgeninde $(x+3)^2 = x\cdot(x+7)$ denkleminden $x = 9$ bulunur.

2. Açılar incelendiğinde $\angle CEM = \angle CAM$ olduğundan A, E, C, M çemberseldir.B noktasının bu çembere göre kuvvetini yazarsak

$7.(7 + x) = |BE| \cdot |BA|$ dır.

EBC üçgenin de $|BE| = 4a, |CE| = 3a$ ve ABC üçgenin de $|AB| = 4b, |AC| = 3b$ alıp dış açıortay teoremi uygularsak

$7^2 = 4a \cdot 4b - 3a \cdot 3b = 7 \cdot a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 7$ ve $|BE| \cdot |BA| = 16ab = 16 \cdot 7$

O halde, $7 \cdot (7 + x) = 16 \cdot 7 \Rightarrow x = 9$

34 $a! + b^3 = 18 + c^3$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Denklemi mod7 de inceleyelim. mod7 de sayıların küpleri $-1, 0$, veya 1' e denk olduğundan $18 + c^3 - b^3$ değeri mod7 de 2, 3, 4, 5, 6 olabilir. $a \geq 7$ için $a!$ değeri mod7 de 0'a eşit olduğundan $a < 7$ için çözüm arayalım. a yerine 2, 3, 4, 5, 6 değerlerini koyarsak denklemi sadece $a = 6$ sağlar. Bu durumda $b = 3$ ve $c = 9$ olur. Yani denklemi sadece $(6, 3, 9)$ üçlüsü sağlar.

Kaynak:

AoPS

$\boxed{35}$ $f(x) = x + 1 + \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ olmak üzere $\overbrace{f(f(\dots f(n)))}^{21 \text{ kere}} = 2013$ olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir? (Burada $\lfloor a\rfloor$ ile, a gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösterilmektedir.)

a) 1214 **b)** 1202 **c)** 1186 **d)** 1178 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İddia 1:

$$\boxed{\left\lfloor\sqrt{f^n(x)}\right\rfloor \neq \left\lfloor\sqrt{f^{n+1}(x)}\right\rfloor \implies \left\lfloor\sqrt{f^{n+1}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor}$$

$\left\lfloor\sqrt{f^n(x)}\right\rfloor = a$ olsun.

$a^2 \le f^n(x) \le a^2 + 2a$ ve $a^2 + 2a + 1 \le f^{n+1}(x)$.

f nin tanımı gereği:

$$a^2 + 2a + 1 \le f^{n+1}(x) \le a^2 + 3a + 1 = a^2 + 3a + 1 < (a+2)^2$$

$$\implies \left\lfloor\sqrt{f^n(x)}\right\rfloor = a + 1$$

$f^{n+1}(x)$ in en büyük değeri için $f^{n+2}(x)$ i hesaplarsak:

$$f^{n+2}(x) \le a^2 + 3a + 1 + 1 + a + 1 = a^2 + 4a + 3 < (a+2)^2$$

olacağı için

$$\left\lfloor\sqrt{f^{n+1}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor = a + 1$$

dir.$\blacksquare$

İddia 2:

$$\boxed{\left\lfloor\sqrt{f^n(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{n+1}(x)}\right\rfloor = a \implies \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{n+3}(x)}\right\rfloor = a + 1}$$

$a^2 \le f^n(x) < f^{n+1}(x) \le a^2 + 2a$ olur.

$f^n(x)$ in en küçük değeri için $f^{n+2}(x)$ i hesaplarsak:

$a^2 + a + 1 \le f^{n+1}(x)$ ve $f^{n+2}(x) \ge a^2 + a + 1 + 1 + a = a^2 + 2a + 2 > (a+1)^2$.

$f^{n+1}(x)$ in en büyük değeri için $f^{n+2}(x)$ i hesaplarsak:

$f^{n+2}(x) \le a^2 + 2a + 1 + a = a^2 + 3a + 1 < (a+2)^2$ olacağı için

$$(a+1)^2 < f^{n+2} < (a+2)^2 \Rightarrow \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor = a + 1$$

İddia 1 gereği $\left\lfloor\sqrt{f^{n+1}(x)}\right\rfloor \neq \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor \implies \left\lfloor\sqrt{f^{n+2}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{n+3}(x)}\right\rfloor$. $\blacksquare$

$f^{21}(x) = 2013$ ve $44^2 < 2013 < 45^2$ olduğu için, $f^{22}(x) = 2013 + 1 + 44 = 2058 \ge 45^2$.

İddialardaki sonuçları geriye doğru işletirsek,

$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f(x)}\right\rfloor = a$

$\left\lfloor\sqrt{f^2(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^3(x)}\right\rfloor = a + 1$

$\vdots$

$\left\lfloor\sqrt{f^{20}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{f^{21}(x)}\right\rfloor = a + 10 = 44$

Buradan $a = 34$ ve $34^2 \le x < 35^2$

$f^0(x) = x,$
$f(x) = x + 1 + 34 = x + 35,$
$f^2(x) = x + 35 + 1 + 34 = x + 70$
$f^3(x) = x + 70 + 1 + 35 = x + 106$
$f^4(x) = x + 106 + 1 + 35 = x + 142$
$f^5(x) = x + 142 + 1 + 36 = x + 179$
$\vdots$
$f^{21}(x) = x + 35 + 36 + 36 + 37 + 37 + \cdots + 43 + 44 + 45.$
Bu durumda, $f^{21}(x) = 2013 = x + 35 + 80 \cdot 10 \Rightarrow x = 1178$ elde edilir.

36 En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü, $K > E$ olmak üzere,K kız ve E erkekten oluşuyor.Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe 1/2 ve her yenilgiye 0 puan veriliyor.Turnuva bittiğinde,her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa, E sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Kızlar kendi aralarında yapmış olduğu maçlardan toplam $\binom{K}{2}$ puan almış ise tüm puanları $K.(K-1)$ dir.
Erkekler, erkeklerden $\binom{E}{2}$ puan almış ise toplam puanları $E.(E-1)$ dir.
Maç sayısı $\binom{K+E}{2}$ olduğundan,
$\dfrac{(K+E).(K+E-1)}{2} = K.(K-1) + E.(E-1)$
$(K-E)^2 = K + E$
$K + E = 16, 25, 36, 49$ olabilir.

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2014

1 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBD}) = 120°$, $|AB| = 2$, $|AD| = 4$ ve $|BC| = |BD|$ dir. C noktasından geçen ve AB ye paralel olan doğru AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?

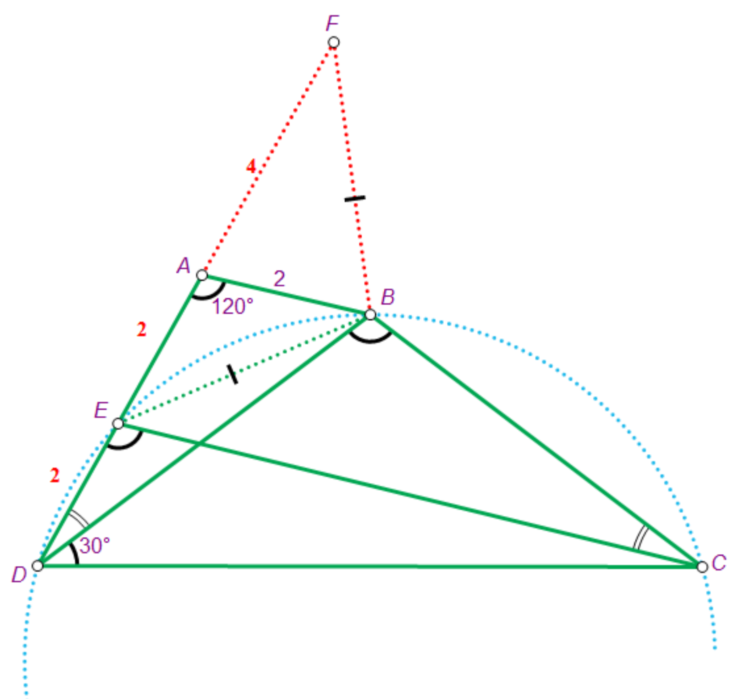
a) 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Biraz zorlayıp, eşlikten çözelim:

$AB \parallel EC$ olduğu için, $\angle BAD = \angle CED = 120°$ dir. $\angle DEC = \angle DBC$ olduğu için, D, E, B, C noktaları çemberseldir.



Bu durumda, $DEBC$ kirişler dörtgeninde $\angle AEB = \angle BCD = 30°$ olacağından, $AE = AB = 2 = ED$ olacaktır. $EB = BF$ olacak şekilde, $\triangle EBC$ üçgenini kuralım. $\triangle FAB$, bir $30° - 60° - 90°$ üçgeni olacaktır. Bu durumda $AF = 2 \cdot AB = 4$ tür.

$BD = BC$, $EB = BF$ ve $\angle DBF = \angle CBE$ olduğu için, $\triangle FDB \cong \triangle ECB$, dolayısıyla da $EC = FD = 8$ dir.

Çözüm 2:

$AB \parallel EC$ olduğu için, $\angle BAD = \angle CED = 120°$ dir. $\angle DEC = \angle DBC$ olduğu için, D, E, B, C noktaları çemberseldir.

$EC \cap BD = \{P\}$ olsun. Paralellikten $EP = 1$ ve $BP = PD$ elde edilir. $\triangle ABD$ de Kosinüs teoreminden $BD = 2\sqrt{7}$ ve $BP = PD = \sqrt{7}$ çıkar.

P noktasının, (BDC) çemberine göre kuvvetini yazarsak, $EP \cdot PC = BP \cdot PD \Rightarrow 1 \cdot PC = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \Rightarrow PC = 7$ ve $EC = 8$ elde edilir.

Çözüm 3:

$[AB$ üzerinde $[AB]$ dışında, $BK = AD = 4$ olacak şekilde bir K noktası alalım. $\angle ADB = \angle KBC$, $BK = AD$ ve $BC = BD$ olduğu için $\triangle ABD \cong \triangle KCB$ dir.

EA ile CK doğruları L noktasında kesişsin. $\triangle LAK$ ve $\triangle LEC$ birer eşkenar üçgendir. $KA = 6 = LK$ olduğu için $LC = 8 = EC$ dir.

Çözüm 4:

[Mehmet Utku Özbek]

$\triangle ABD$ 'de Kosinüs teoreminden $BD = BC = 2\sqrt{7}$ bulunur. $[DA$ ile $[CB$, K noktasında kesişsin. $\angle KAB = \angle KBD = 60^\circ$ dir.Dolayısıyla $\triangle KAB$ ile $\triangle KBD$ benzerdir. $KA = x$ ve $KB = y$ olsun. Benzerliği yazarsak $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{2\sqrt{7}} = \dfrac{y}{x+4}$ olur. Buradan $y = x\sqrt{7}$ olur ve yerine yazarsak $x = \dfrac{2}{3}$ ve $y = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ bulunur. $AB \parallel EC$ ve $BC = 2\sqrt{7}$ olduğu için benzerlik oranı $\dfrac{1}{4}$ tür. $AB = 2$ olduğu için $EC = 8$ dir.

2 $mn + n + 14 = (m-1)^2$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 16 **b)** 12 **c)** 8 **d)** 6 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Denklemi n değerini yalnız bırakacak şekilde düzenlersek, $n = m - 3 - \dfrac{10}{m+1}$ olur.

$m+1$ değerleri 10 un bölenleri olan $\{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$ kümesinden seçilerek 8 tane (m, n) ikilisi bulunabilir.

3 Kaç n tam sayısı için, $|x^2 - 4x - 7| = n$ eşitliğini sağlayan dört farklı x gerçel sayısı vardır?

a) 12 **b)** 10 **c)** 8 **d)** 7 **e)** 5

Çözüm:

(Eray Atay)

Yanıt: $\boxed{B}$

$|x^2 + 4x - 7| = n$ denkleminin çözümleri, $x^2 + 4x - 7 = n$ ve $x^2 + 4x - 7 = -n$ olmak üzere iki denklemin çözümleridir.

4 farklı x gerçel sayısının çözüm olması istendiğinden, ilk denklemin 2 farklı ve ikinci denklemin de 2 farklı çözümü olması gerekir. Bunun için de Δ'larının 0'dan büyük olması gerekir.

İlk denklemin Δ'sı: $16 - 4(-n-7) = 4n + 44 > 0, n > -11$

İkinci denklemin Δ'sı: $16 - 4(n-7) = 44 - 4n > 0, 11 > n$

Bu iki eşitsizlikten $11 > n > -11$ elde edilir. Soruda verilen eşitlikte mutlak değerli ifade n e eşit olduğundan $n \geq 0$ olması gerekir. Ayrıca $n = 0$ için tek bir denklem elde edildiğinden 4 farklı x reel sayısı çözüm olamaz. Dolayısıyla $11 > n > 0$ olmalıdır. Bu aralıktan 10 adet n tamsayısı seçilebilir.

4 3 kırmızı, 2 beyaz ve 2 mavi top rastgele sıraya dizildiğinde iki beyaz topun veya iki mavi topun yan yana gelme olasılığı nedir?

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** $\frac{16}{35}$ **d)** $\frac{10}{21}$ **e)** $\frac{5}{14}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

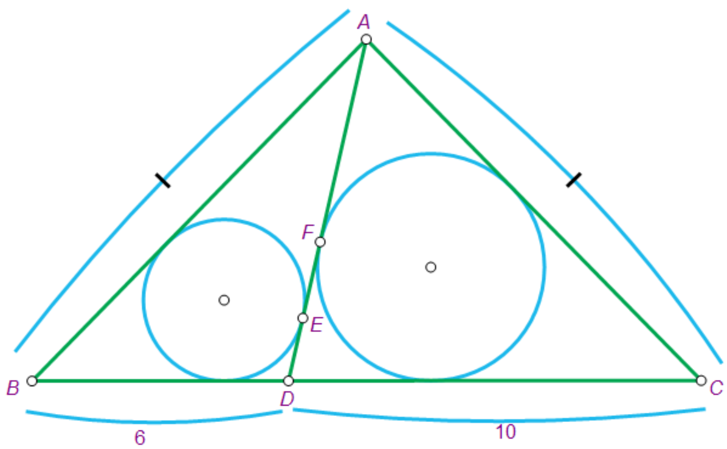
$$P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B) = \frac{6! \cdot 2!}{7!} + \frac{6! \cdot 2!}{7!} - \frac{5! \cdot 2! \cdot 2!}{7!} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{2}{21} = \frac{10}{21}$$

5 D, $|AB| = |AC|$ olan bir ABC ikizkenar üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 6$ ve $|DC| = 10$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere, ABD ve ADC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin $[AD]$ kenarına değme noktaları sırasıyla, E ve F ise, $|EF|$ nedir?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **c)** 1 **d)** $\frac{9}{8}$ **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$



$$DE = \frac{BD + AD - AB}{2},$$
$$DF = \frac{CD + AD - AC}{2}.$$
$$EF = DF - DE = \frac{CD - BD}{2} = 2$$

6 Ondalık yazılımında tüm rakamları çift olan pozitif tam sayılar artan sırayla

$$2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, \ldots$$

biçiminde yazıldığında 2014. sayı nedir?

a) 66480 **b)** 64096 **c)** 62048 **d)** 60288 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, \ldots$ sayılarının her birini 2 ye bölelim. $1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, \ldots$ olur. Bu sayılar 5 tabanına göre dizilmiş haldedir. O halde 5 tabanına göre 2014. pozitif tamsayıyı hesaplayalım. $2014 = (31024)_5$ olur. Bu değeri tekrar 2 ile genişletirsek $2 \cdot 31024 = 62048$ elde edilir.

$\boxed{7}$ $x$ve y gerçel sayıları için $(x^2+1)(y^2+1)+9 = 6(x+y)$ ise, x^2+y^2 nedir?

a) 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

Çözüm:

Verilen ifadeyi $(xy-1)^2 + (x+y)^2 - 6(x+y) + 9 = 0$ olarak düzenlersek

$(xy-1)^2 + (x+y-3)^2 = 0$ olur. Buradan

$x+y = 3$ ve $xy = 1$ olmalıdır.

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 = 7$ bulunur.

$\boxed{8}$ 17 özdeş kırmızı ve 10 özdeş beyaz top 4 farklı kutuya, her kutudaki kırmızı topların sayısı beyaz topların sayısından daha fazla olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

a) 5462 **b)** 5586 **c)** 5664 **d)** 5720 **e)** 5848

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İlk başta 10 beyaz topu 4 kutuya $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$ şekilde dağıtalım. Her kutuya içerdiği beyaz top sayısının bir fazlası kırmızı top koyalım. Kalan 3 kırmızı topu 4 kutuya $\binom{6}{3} = 20$ şekilde dağıtabiliriz.

Buna göre istenen şekilde $286 \cdot 20 = 5720$ farklı dağıtım yapılabilir

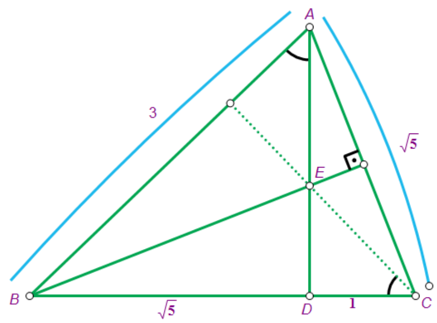
$\boxed{9}$ D, bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB| = 3, |CD| = 1$ ve $|AC| = |BD| = \sqrt{5}$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere; B köşesine ait yükseklik AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **b)** 1 **c)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **e)** $\dfrac{3}{2}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$AB^2 - AC^2 = 9 - 5 = 4 = 5 - 1 = BD^2 - CD^2$ olduğu için, $AD \perp BC$ dir. Ayrıca, $AD = 2$ dir.



Bu durumda, E noktası, $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir. Basit açı hesabıyla, $\angle BAD = 90° - \angle ABC = \angle BCE$ elde edilir.

$\cos \angle DAB = \dfrac{2}{3} = \cos \angle DCE = \dfrac{1}{EC} \Rightarrow EC = \dfrac{3}{2}$ elde edilir.

10 $m^3 - n^3 = 9^k + 123$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$k > 0$ için $9^k \equiv 0 \pmod 9$ olduğundan $m^3 - n^3 \equiv 6 \pmod 9$ olur. Ancak iki küp farkı 9 modunda 0, 1, 2, 7, 8 değerlerini alabileceğinden $k > 0$ için çözüm yoktur.

$k = 0$ için $m^3 - n^3 = 124 \Rightarrow (m - n)\left[(m - n)^2 + 3mn)\right] = 124$ ifadesinde çarpanları muhtemel değerler için denersek sadece $m = 5, n = 1$ değerleri için sağlandığını görebiliriz.

O halde tek çözüm $(5, 1, 0)$ üçlüsüdür.

11 Sadece bir x gerçel sayısı için $x^2 + ax + 1$ ifadesinin negatif bir tam sayı değer almasını sağlayan a gerçel sayılarının çarpımı nedir?

a) -1 **b)** -2 **c)** -4 **d)** -6 **e)** -8

Çözüm:

(Eray Atay)

Yanıt: $\boxed{E}$

$x^2 + ax + 1$'in grafiğinin kolları yukarı doğrudur. O halde tek bir negatif tam sayıya eşit olması, o sayının -1 olması gerektiği anlamına gelir. Çünkü daha küçük bir sayıya eşit olması durumunda -1'e de eşit olması her zaman mümkündür.

$x^2 + ax + 1 = -1$ yani $x^2 + ax + 2 = 0$ eşitliğini sağlayan tek bir x reel sayısı var ise, $\Delta = 0$ olmalıdır.

$b^2 - 4ac = a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ ya da $a = -2\sqrt{2}$ dir. a değerlerinin çarpımı -8 dir.

12 21 öğrenciden oluşan ve herhangi üç öğrencisinin en az ikisi arkadaş olan her sınıfta en az k arkadaşı olan bir öğrenci bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11 **e)** 12

Çözüm 1:

(Egemen Erbayat)

Yanıt: $\boxed{C}$

En çok arkadaşa sahip öğrenci A olsun ve A ile B arkadaş olmayan iki öğrenci olsun.

$A - B - X$ üçlüsünde, X öğrencisi A ile veya B ile arkadaş olmak zorunda. Çünkü, sorudaki herhangi üç öğrencinin ikisi arkadaş şartı, bunu zorunlu kılıyor.

O halde, $X(A)$ ile A ile arkadaş olan X öğrencilerinin, $X(B)$ ile B ile arkadaş olan X öğrencilerinin sayısını gösterirsek, İçerme-Dışarma ilkesi gereğince

$$X(A) + X(B) - X(A \cap B) = 19$$

olduğu görülür.

$X(A) + X(B) \geq 19$ ve $X(A) \geq X(B)$ olduğu için

$2 \cdot X(A) \geq 19$ ve $X(A) \geq 9,5$ olacaktır.

En küçük $X(A)$ değeri 10 dur.

Yani herhangi bir sınıfta, en az 10 arkadaşı olan bir A kişisi yer almak zorunda.

Çözüm 2:

En çok arkadaşı olan kişilerden biri A, A nın arkadaş sayısı n olsun. A ile arkadaş olan kişilerin kümesini $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ile gösterelim. A ile arkadaş olmayan $20-n$ kişinin kümesini de $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_{20-n}\}$ ile gösterelim. C kümesinden seçtiğimiz herhangi iki kişi C_i, C_j olsun. $\{A, C_i, C_j\}$ üçlüsünü göz önüne alırsak problemin hipotezi gereği C_i, C_j arkadaş olmalıdır. O halde C kümesindeki herkes birbiriyle arkadaştır. Böylece C deki bir kişinin en azından $19 - n$ arkadaşı olduğunu anlarız. Ancak A nın maksimum sayıda arkadaşa sahip olması özelliğinden dolayı $n \geq 19 - n$ olup $n \geq 10$ elde edilir.

Burada çözümü tamamlayabilmek için $n = 10$ olabilecek bir durum örneği de vermemiz gerekmektedir. Örnek: A nın arkadaş olduğu 10 kişi ve arkadaş olmadığı 10 kişiden oluşan bir düzenlemede B deki herkes kendi içinde arkadaş, C deki herkes kendi içinde arkadaş olsun. B deki ve C deki kişilerin ortak arkadaşı bulunmasın.

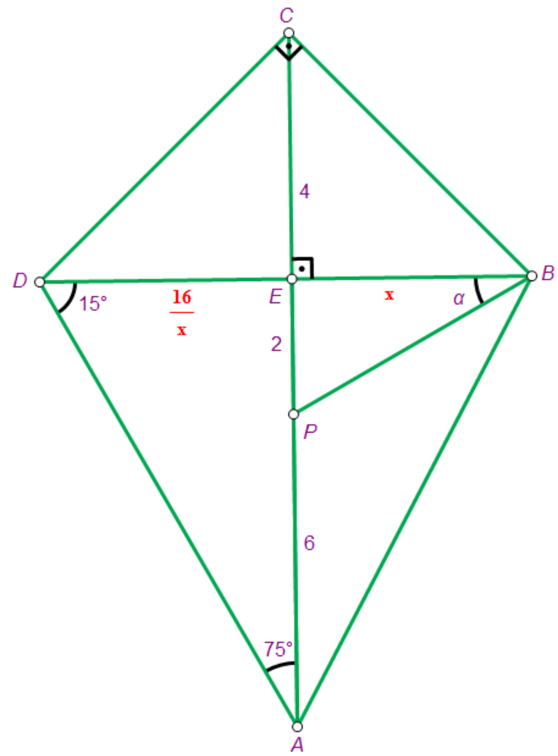
Düşünce biçimi olarak aynı yolla çözülebilen bir başka soru 2010 Pr/32 de verilmiştir.

13 $m(\widehat{ADB}) = 15^\circ$ ve $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olan dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenleri E noktasında dik olarak kesişiyor. P, $|AE|$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|EC| = 4, |EA| = 8$ ve $|EP| = 2$ ise, $m(\widehat{PBD})$nedir?

a) 15° **b)** 30° **c)** 45° **d)** 60° **e)** 75°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$



Öklit'ten $DE \cdot EB = 16$.

$\tan\angle DAE = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{\frac{16}{EB}}{8} = \dfrac{2}{EB} = \tan\angle PBE$ dir. Bu durumda, $\angle DAE = \angle PBD = 75°$ dir.

Not: P, $\triangle ABD$ nin diklik merkezidir. $EP \cdot EA = DE \cdot EB$ olduğu ise bilinen bir özellik.

$\boxed{14}$ Kaç farklı p asal sayısı için, $p \mid n^3 + 3$ ve $p \mid n^5 + 5$ olacak biçimde bir n tam sayısı bulnur?

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

öklit algoritması kullanalım.

$(n^3 + 3, n^5 + 5)$ birinciyi n^2 ile çarpalım ve çıkartalım

$(n^3 + 3, 5 - 3n^2)$ birinciyi 3 ile ikinciyi n ile çarpalım ve toplayalım

$(5n + 9, 5 - 3n^2)$ birinciyi $3n$ ile ikinciyi 5 ile çarpalım ve toplayalım

$(5n + 9, 27n + 25)$ birinciyi 27 ikinciyi 5 ile çarpalım ve çıkartalım

$(118, 135n + 125)$ bulunur.

$118 = 2 \cdot 59$ olup $p = 2$ ve $p = 59$ için istenen sağlanır.

Çözüm 2:

$p \mid n^3 + 3 \Longrightarrow p \mid (n^3)^5 + 3^5$
$p \mid n^5 + 5 \Longrightarrow p \mid (n^5)^3 + 5^3$
$p \mid (n^{15} + 243) - (n^{15} + 125) \Longrightarrow p \mid 118$
$(p, n) = (2, 1)$ ve $(p, n) = (59, 10)$ ikilileri verilen koşulu sağlar.
Kaynak: AoPS

15 $(2x^2 + 5x + 9)^2 = 56(x^3 + 1)$ eşitliğini sağlayan farklı x gerçel sayılarının toplamı nedir?

a) 3 **b)** $\frac{7}{4}$ **c)** 4 **d)** $\frac{9}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$\big(2(x^2 - x + 1) + 7(x + 1)\big)^2 = 56(x + 1)(x^2 - x + 1)$
$4(x^2 - x + 1)^2 + 28(x + 1)(x^2 - x + 1) + 49(x + 1)^2 - 56(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$
$4(x^2 - x + 1)^2 - 28(x + 1)(x^2 - x + 1) + 49(x + 1)^2 = 0$
$\big(2(x^2 - x + 1) - 7(x + 1)\big)^2 = 0$
$(2x^2 - 9x - 5)^2 = 0$
$x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$

16 Aslı 100 şekeri kardeşi ve kardeşinin 18 arkadaşı arasında dağıtacaktır. Bunun için, kardeşinin arkadaşlarını bir kaç gruba ayırıyor ve 100 şekeri bu gruplara dağıtıyor. Sonra her gruptaki çocuklar, kendilerine verilen şekerleri aralarında her biri eşit ve olabildiğince çok sayıda şeker alacak biçimde paylaşıp, kalan şekerleri de Aslı'nın kardeşine veriyorlar. Aslı'nın kardeşi en çok kaç şeker alabilir?

a) 12 **b)** 14 **c)** 16 **d)** 17 **e)** 18

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$
Grup sayısı n; $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de grupların içerdiği çocuk sayısı olsun. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 18$ dir.
Her $i = 1, \ldots, n$ için, i. grupta x_i çocuk olduğu için, artan şeker sayısı en çok $x_i - 1$ olur.
$k(n)$ ile Aslı'nın kardeşinin n gruptan alabileceği en büyük şeker sayısını gösterelim.
$k(n) \le x_1 - 1 + x_2 - 1 + \cdots + x_n - 1 = 18 - n$ olacaktır.
Sırayla, deneyelim.
$n = 1$ için $k(1) \le 17$ olmasına rağmen, 100 şeker 18 çocuğa dağıtıldığında, her biri 5 şeker alacak. $k(1) = 100 - 18 \cdot 5 = 10$ dur.
$n = 2$ için $k(2) \le 16$ olacaktır. $x_1 = 8$ ve $x_2 = 10$ aldığımızda, 1. gruba 31, 2. gruba 69 şeker dağıtılırsa, $k(2) = 7 + 9 = 16$ olacak şekilde bir dağıtımın mümkün olduğu görülebilir.

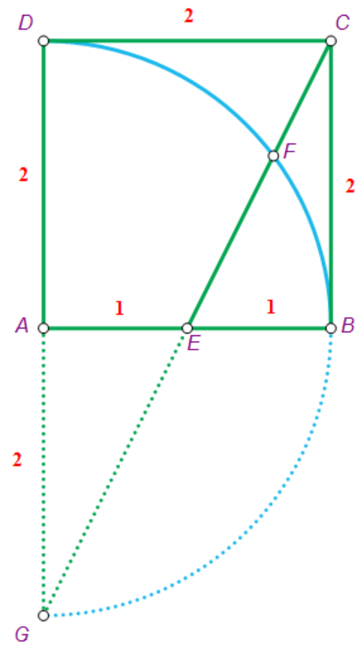
17 Bir $ABCD$ karesinde $[AB]$ kenarının orta noktası E ve B köşesinden geçen A merkezli çemberin $[EC]$ doğru parçası ile kesişim noktası F ise, $|EF|/|FC|$ nedir?

a) 2 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\sqrt{5} - 1$ **d)** 3 **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

DG, çemberin bir çapı olsun.



$AE = EB$ ve $AG = BC$ olduğu için, C, E, G doğrusaldır.

Kolaylık olması açısından, $AB = 2$ dersek, Öklit'ten veya C noktasının çembere göre kuvvetinden, $CF \cdot CG = CD^2 \Rightarrow CF = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ çıkar.

$EC = \sqrt{5}$ olduğu için de $EF = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ bulunur. O halde, $EF/FC = 3/2$ dir.

$\boxed{18}$ Aşağıdaki sayılardan hangisi x ve y tam sayılar olmak üzere, $x^2 + y^5$ biçiminde yazılamaz?

a) 59170 **b)** 59149 **c)** 59130 **d)** 59121 **e)** 59012

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$x, y \equiv 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5 \pmod{11}$

$x^2 \equiv -2, 0, 1, 3, 4, 5 \pmod{11}$

$y^5 \equiv 0, \pm1 \pmod{11}$

$\Rightarrow x^2 + y^5 \equiv 0, \pm1, \pm2, \pm3, 4, \pm5 \pmod{11}$ yani $x^2 + y^5$ sayısının 11 ile bölümünden kalan 7 olamaz.

Seçenekler incelendiğinde $59121 = 11k + 7$ olduğundan, istenen biçimde yazılamayan bir sayıdır.

$\boxed{19}$ x pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + x + 5}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) $\dfrac{14}{11}$ **b)** $\dfrac{9}{7}$ **c)** $\dfrac{13}{10}$ **d)** $\dfrac{4}{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

(Eray Atay)

Yanıt: $\boxed{E}$

$\dfrac{x^2+2x+6}{x^2+x+5} = 1 + \dfrac{x+1}{x^2+x+5}$

Bu ifadenin en büyük değeri için, $\dfrac{x+1}{x^2+x+5}$ ifadesinin en büyük değeri bulunmalıdır. Bunun için kesri ters çevirip en küçük değeri bulunabilir. $\dfrac{x^2+x+5}{x+1} = x + \dfrac{5}{x+1} = x+1+\dfrac{5}{x+1} - 1$

$x+1+\dfrac{5}{x+1}$ ifadesinin en küçük değerinin, aritmetik-geometrik ortalama yardımıyla $2\sqrt{5}$ olduğu görülebilir. O halde $x+1+\dfrac{5}{x+1} - 1$'in en küçük değeri $2\sqrt{5}-1$ dir. Tekrar ters çevirirsek $\dfrac{x+1}{x^2+x+5}$ ifadesinin en büyük değeri $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-1} = \dfrac{2\sqrt{5}+1}{19}$ olarak bulunur.

O halde $\dfrac{x^2+2x+6}{x^2+x+5}$ ifadesinin en büyük değeri, $1+\dfrac{2\sqrt{5}+1}{19} = \dfrac{20+2\sqrt{5}}{19}$ dur.

Çözüm 2:

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+6}{x^2+x+5}$ için $f'(x) = 0$ denkleminin pozitif gerçel kökünü bulalım.

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2+x+5)-(2x+1)(x^2+2x+6)}{(x^2+x+5)^2} = 0$ payı düzenlersek,

$x^2+2x-4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 5$ ve $x>0$ için $x = \sqrt{5}-1$ dir. Bu noktada fonksiyonun bir ekstremumu vardır bu değer,

$f(\sqrt{5}-1) = \dfrac{(\sqrt{5}-1+1)^2+5}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1+1)+5} = \dfrac{10}{10-\sqrt{5}}$ dir.

20 Her biri 2 nin veya 3 ün tam sayı kuvveti olan tam sayılardan oluşan ve tüm elemanlarının toplamı 2014 olan kaç farklı küme vardır?

a) 64 **b)** 60 **c)** 54 **d)** 48 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

İstenen özellikteki kümeden, 3 ün kuvvetleri olan tüm sayıları ($1 = 3^0$ dahil) birleştirerek $a_i \in \{0,1\}$ olmak üzere $(A)_{10} = (a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_3$ sayısını elde edelim. $(B)_{10} = (\cdots b_0)_2 = 2014 - (A)_{10}$ olsun.

A nın basamaklarını seçtiğimizde, B nin basamakları kendiliğinden dolacaktır. Normalde, hiçbir kısıtlama olmaksızın 2^7 farklı A sayısı elde edilebilir. Hiçbir kısıtlama olmaksızın dedik; çünkü 3 lük tabanda sadece $0,1$ lerden oluşan her A sayısı böyle bir dağılımı mümkün kılmayabilir. Örneğin, $A \mod 6 = 1$ olduğunda, A sayısı tek olduğu için, B sayısı da tektir. Bu durumda, $a_0 = b_0 = 1$ olacaktır. 1 sayısını a_0 için kullandığımızdan B sayısının 2 tabanındaki gösteriminde son basamak 1 olamaz. $a_0 = 1$ olduğunda A nın tek sayı olması için $a_1, a_2, \cdots, a_6$ nın çift sayıda 1 içermesi gerekir. $\dfrac{6!}{0!\cdot 6!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} + \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} + \dfrac{6!}{6!\cdot 0!} = 32$ olduğu için, bu şekilde 32 farklı A sayısı vardır.

$A \mod 6 = 0$ olduğunda, A çift sayı olduğu için B de çift sayı olacaktır. Bu durumda, $a_0 = 0$ ve $b_0 = 0$ olur. $a_0 = 0$ olduğundan dolayı A nın çift sayı olması için $a_1, a_2, \cdots, a_6$ nın çift sayıda 1 içermesi gerekir. Bu şekilde 32 farklı A sayısı olduğunu az önce göstermiştik.

$A \mod 6 = 3$ olduğunda, $a_0 = 0$ olur ve $a_1, a_2, \cdots, a_6$ sayıları tek sayıda 1 içerir. A tek sayı olduğu için, B de tek sayıdır. Bu durumda $b_0 = 1$ dir. 1 sayısı A nın 3 tabanındaki yazılımında kullanılmadığı için sorun teşkil etmez. Daha önce $a_1, \cdots, a_6$ sayılarının çift sayıda 1 içeren 32 farklı permütasyonu olduğunu göstermiştik. $2^6 = 64$ olduğu için, tek sayıda 1 içeren de $64 - 32 = 32$ sayı vardır.

$A \mod 6 = 4$ olduğunda $a_0 = 1$ olur ve $a_1, a_2, \cdots, a_6$ sayıları tek sayıda 1 içerir. A çift sayı olduğu için B de çift sayı olacaktır. Bu durumda, $b_0 = 0$ dır. 1 sayısının kullanımı açısından burada da bir sorun yok; ama başka bir sorun var. $A \mod 6 = 3$ ise $(A+1) \mod 6 = 4$ olacaktır. A nın 3 tabanındaki son basamağı $a_0 = 0$ ve B nin 2 tabanındaki son basamağı $b_0 = 1$ olduğu için, A ile $A+1$ sayılarının son basamakları haricindeki diğer basamakları aynıdır. Benzer şekilde, B ile $B-1$ in son basamakları haricindeki diğer basamakları aynıdır. Bu durumda (A, B) ikilisinden gelecek küme ile $(A+1, B-1)$ ikilisinden gelecek küme aynı olacaktır. $(0)_3 = 0 \equiv 0 \pmod 6$ ve $(1111111)_3 = 1093 \equiv 1 \pmod 6$ olduğu için A nın tüm değerleri arasından her $A \mod 6 = 3$ için 1 tane $A+1 \mod 6 = 4$ bulunacaktır.

O halde, farklı kümeleri sayarsak $32 + 32 = 64$ küme elde ederiz.

Çözüm 2:

(Eray Atay)

Yanıt: $\boxed{A}$

A sayısı 3'ün kuvvetlerinin toplamından, B sayısı da 2'nin kuvvetlerinin toplamından oluşsun.

$A + B = 2014$'tür. Bir kümede aynı sayı 2 kez yazılamayacağından dolayı 2 şartımız vardır:

Şart 1: A sayısı 3 tabanında 0 ve 1'lerden oluşmalıdır. B sayısında 2 tabanında aynı durum her zaman geçerli olduğundan bir kısıtlama yoktur.

Şart 2: A sayısında $3^0 = 1$ ve B sayısında $2^0 = 1$ aynı anda bulunamaz.

$3^7 = 2187 > 2014$ olduğundan A'da 3'ün en fazla 6. kuvveti bulunabilir. Yani $3^0, 3^1, 3^2, \cdots, 3^6$ olmak üzere 7 adet 3'ün kuvveti A'da bulunabilir. Ayrıca hepsinin toplamı 1093 olduğundan hepsi aynı anda da bulunabilir.

2 durum söz konusudur.

Durum 1: Ne A'da, ne de B'de $3^0 = 2^0 = 1$ sayısı bulunsun.

Bu, B'nin çift olacağı anlamına gelir. $A + B = 2014$ olduğundan A'yı çift seçmek yeterlidir. A'da 3^0 sayısı bulunmadığına göre kalan 6 kuvvetten çift sayıda bulunmalıdır. Bunların sayısı ise, $\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} =$ 32'dir. A sayısı seçildiğinde, $B = 2014 - A$ sayısı zaten oluşacaktır. O halde **Durum 1**'de 32 adet küme oluşturulabilir.

Durum 2: A veya B'den herhangi birinde $3^0 = 2^0 = 1$ sayısı bulunsun.

$A = (a_1 \cdots a_n 1)_3$, $B = (b_1 \cdots b_m 0)_2$ durumu ile $A = (a_1 \cdots a_n 0)_3$, $B = (b_1 \cdots b_m 1)_2$ durumu aynı kümeyi verecektir. Yani herhangi birinde 1 sayısı var iken, hangisinde olduğu sonucu değiştirmeyecektir. $A_1 = (a_1 \cdots a_n 0)_3$, $B_1 = (b_1 \cdots b_m 0)_2$ şeklide tanımlama yapalım. Buna göre, A_1 veya B_1'de $3^0 = 2^0 = 1$ sayısı bulunmamak şartı ile, $A_1 + B_1 = 2013$ denkleminin çözüm sayısı bize **Durum 2**'den gelecek olan çözüm sayısını verir.

B_1'de 2^0 bulunmayacağına göre B_1 çifttir, yani A_1 tektir. O halde A_1'de $3^1, 3^2, \cdots, 3^6$ sayılarından tek sayıda bulunmalıdır. Bunların sayısı ise $\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 32$'dir. Yani **Durum 2**'de 32 adet küme oluşturulabilir.

O halde, toplam küme sayımız $32 + 32 = 64$'tür.

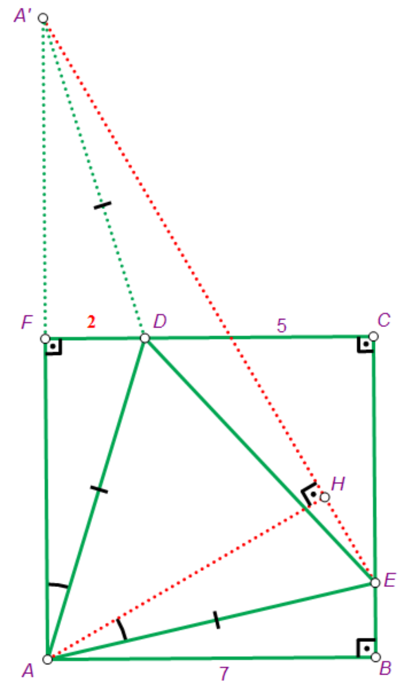
21 $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının $[BC]$ kenarına dik olduğu bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üstündeki bir E noktası için AED bir eşkenar üçgendir. $|AB| = 7$ ve $|CD| = 5$ ise, $ABCD$ yamuğunun alanı nedir?

a) $27\sqrt{3}$ **b)** 42 **c)** $24\sqrt{3}$ **d)** 40 **e)** 36

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$ABCF$ dikdörtgenini kuralım.



A noktasının, F ye göre simetriği A' noktası olsun. $AD = DA' = DE = AE$ dir. Bu durumda, D noktası, $\triangle AA'E$ nin çevrel merkezidir. $\angle AA'E = 30^\circ$ dir.

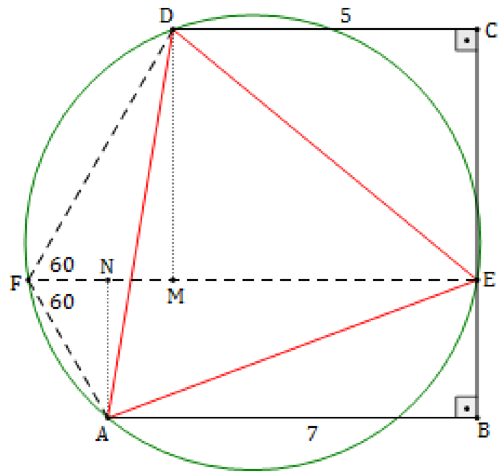
A dan $A'E$ ye inilen dikmenin ayağı H olsun. $\angle A'AH = \angle DAE = 60^\circ$ olduğu için, $\angle DAA' = \angle HAE$ dir. Bu durumda, $AD = AE$ olduğu için, $\triangle DFA \cong \triangle EHA$ dır. Yani, $EH = DF = 2$ dir.

E den AA' ne inilen dikme, $AB = 7$ ye eşit olacağından ve $\angle AA'E = 30^\circ$ olduğu için $A'E = 2 \cdot 7 = 14$ ve $A'H = 12$ dir. $\triangle A'AH$ bir $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğu için $AA' = 8\sqrt{3}$ ve $AF = 4\sqrt{3}$ tür.

Bu durumda, $[ABCD] = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot (5+7)}{2} = 24\sqrt{3}$ tür.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$



ADE üçgeninin çevrel çemberi ile E noktasından yamuğun tabanlarına paralel olarak çizilen doğru F noktasında kesişsin.

"*Bir eşkenar üçgenin çevrel çemberi üzerinde alınan noktanın, yakın köşelere uzaklıkları toplamı, diğer köşeye olan uzaklığına eşittir*" *

Bu durumda $|FD| + |FA| = |FE|$ * dir.

A ve D den EF ye çizilen dikme ayakları sırasıyla N ve M olsun. $|ME| = 5, |MN| = 2$ dir.

$|FN| = x$ dersek $|FA| = 2x, |FD| = 2x + 4, |FE| = x + 7$ olur ve * dan $x = 1$ bulunur.

Buradan $|AN| = \sqrt{3}, |DM| = 3\sqrt{3}$ ve $|BC| = 4\sqrt{3}$ olup $A(ABCD) = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

Çözüm 3:

$AB = a$, $CD = c$, $AD = DE = EA = d$ ve $AF = BC = h$ olsun.

$ABCF$ dikdörtgenini çizelim ve $\angle FDA = \alpha$ diyelim.

$$\cos \angle EAB = \cos(\alpha - 60^\circ) = \frac{a}{d}$$

$$\cos \angle FDE = \cos(\alpha + 60^\circ) = -\frac{c}{d}$$

Taraf tarafa çıkarırsak

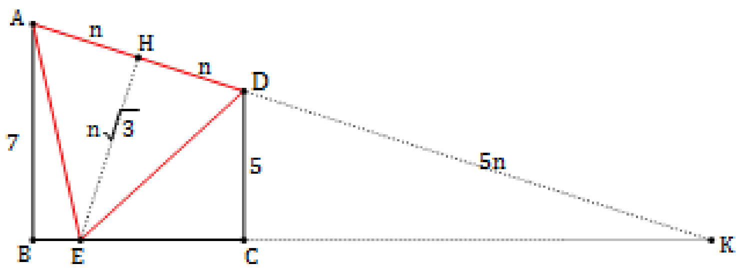
$$2 \sin \alpha \sin 60 = \frac{a+c}{d}$$

$$2 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a+c}{d} \Rightarrow h = \frac{a+c}{\sqrt{3}}$$

olarak bulunur.

$a = 7$ ve $c = 5$ için $h = 4\sqrt{3}$ çıkıyor. Bu durumda, $[ABCD] = 24\sqrt{3}$ olacaktır.

Çözüm 4:



AD ile BC nin kesim noktası K olsun. $DC \parallel AB$ olduğundan $\dfrac{|DC|}{|AB|} = \dfrac{|KD|}{|KA|} = \dfrac{5}{7}$ dir. E den AD ye çizilen dikmenin ayağına H dersek $\triangle KHE \sim \triangle KCD$ olur. Bu benzerlikten $\dfrac{|HE|}{|HK|} = \dfrac{|CD|}{|CK|} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{5}{|CK|} \Rightarrow$ $|CK| = 10\sqrt{3}$ dür.

$\dfrac{|CK|}{|BC|} = \dfrac{|DK|}{|AD|} \Rightarrow |BC| = 4\sqrt{3}$ olur.

Buna göre, $A(ABCD) = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ bulunur.

22 2014^{2015} sayısının 121 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 45 **b)** 34 **c)** 23 **d)** 12 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(2014)^{2015} = (2013+1)^{2015} = \binom{2015}{0}2013^{2015} + \cdots + \binom{2015}{2013}2013^2 + \binom{2015}{2014}2013 + \binom{2015}{2015}$

$11 \mid 2013$ olduğu için yukarıdaki açılımdaki ilk 2014 terim 121 ile bölünecektir.

$(2014)^{2015} \equiv 2015 \cdot 2013 + 1 \equiv (2013+2)2013 + 1 \equiv 4027 \equiv 34 \pmod{121}$

23 x bir gerçel sayı olmak üzere,

$$(x^2 + 2x + 8 - 4\sqrt{3}) \cdot (x^2 - 6x + 16 - 4\sqrt{3})$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $112 - 64\sqrt{3}$ **b)** $3 - \sqrt{3}$ **c)** $8 - 4\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3} - 4$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Eray Atay)

Yanıt: $\boxed{A}$

$(x^2 + 2x + 8 - 4\sqrt{3}) \cdot (x^2 - 6x + 16 - 4\sqrt{3}) = \left[(x+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2\right] \cdot \left[(x-3)^2 + (2-\sqrt{3})^2\right]$

x'li terimleri 0 yapan sayılar -1 ve 3 olduğundan, ifadenin en küçük değeri için x'in -1 ve 3 arasında olması gerektiği açıktır. Çünkü aksi takdirde ifade daha büyük olacaktır.

$-1 < x < 3$ seçileceği için, $x-3$ yerine pozitif olması adına $3-x$ yazılıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left[(x+1)^2+(2-\sqrt{3})^2\right]\cdot\left[(2-\sqrt{3})^2+(3-x)^2\right] &\geq \left[(x+1)(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3-x)\right]^2\\ &= [(2-\sqrt{3})\cdot 4]^2\\ &= 112-64\sqrt{3}\end{aligned}$$

bulunur.

24 $1,2,\dots,n$ tam sayıları, ikisi de içerdiği herhangi farklı iki sayının aritmetik ortalamasını içermeyecek biçimde iki kümeye ayrılabiliyorsa, n en çok kaç olabilir?

a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Not: Yalnızca okuyarak takip edilmesi zor bir çözüm olduğundan kağıt ve kalem ile takip edilmesi önerilir.

İki kümemizden birindeki herhangi iki sayının aritmetik ortalamasının aynı kümede olmasını istemiyoruz.

$n=9$ için sağlanamayacağını ve $n=8$ için sağlayan bir durum olduğunu gösterelim. $n=9$ için sağlanamıyorsa $n\geq 9$ için de hiçbir zaman sağlanamayacağı aşikardır.

2'nin kuvveti olan 2, 4, 8 sayılarının iki kümeye ayrılma varyasyonlarını inceleyelim.

a ve b'nin aritmetik ortalamasını $s(a,b)$ ile gösterelim.

Durum 1: 2, 4, 8 aynı anda ilk kümede olsun. $s(2,4)=3$, $s(2,8)=5$ ve $s(4,8)=6$ olduğundan 3, 5 ve 6 ikinci kümede olmalıdır. $s(3,9)=6$ olduğundan 9 ikinci kümede olamaz. İlk kümede olmalıdır. Bu noktada 7 her iki kümede de bulunamaz çünkü ilk kümede olursa 7, 8, 9; ikinci kümede olursa 5, 6, 7 sayıları şartı bozar. Dolayısıyla bu durum mümkün değildir.

Durum 2: 2 ve 8 ilk kümede, 4 ikinci kümede olsun. $s(2,8)=5$ olduğundan 5 ikinci kümede olmalıdır. $s(4,6)=5$ ve $s(5,3)=4$ olduğundan 6 ve 3 ilk kümede olmalıdır. $s(8,6)=7$ olduğundan 7 ikinci kümede olmalıdır. İlk kümede 2, 8, 6, 3; ikinci kümede 4, 5, 7 sayıları olmuş oldu. Bu noktada $s(3,1)=2$ ve $s(7,1)=4$ olduğundan 1 iki kümeye de dahil edilemez. Dolayısıyla bu durum da mümkün değildir.

Durum 3: 2 ve 4 ilk kümede, 8 ikinci kümede olsun. $s(2,4)=3$ ve $s(2,6)=4$ olduğundan 3 ve 6 ikinci kümede olmalıdır. $s(8,6)=7$ olduğundan 7 ilk kümede olmalıdır. $s(7,1)=4$ olduğundan 1 ikinci kümede olmalıdır. $s(5,1)=3$ olduğundan 5 ilk kümede olmalıdır. **İlk kümede 2, 4, 7, 5; ikinci kümede 8, 3, 6, 1 olmuş oldu. Bu, $n=8$ için sağlayan bir durumdur.** Ayrıca $s(5,9)=7$ ve $s(3,9)=6$ olduğundan bu noktada 9 iki kümeye de dahil edilemez. Yani $n=9$ için bu durum da mümkün değildir.

Durum 4: 2 ilk kümede, 4 ve 8 ikinci kümede olsun. $s(4,8)=6$ olduğundan 6 ilk kümede olmalıdır. İlk kümede 2, 6; ikinci kümede 4, 8 olmuş oldu. Bu noktada ilerleyemediğimizden deneme yapmalıyız. Örneğin, 7 sayısını ilk kümeye ve ikinci kümeye koyup şart sağlanabiliyor mu diye bakalım.

7 ilk kümede olsun, $s(7,5)=6$ olduğundan 5 ikinci kümede olmalıdır. $s(5,3)=4$ olduğundan 3 ilk kümede olmalıdır. $s(3,1)=2$ olduğundan 1 ikinci kümede olmalıdır. **İlk kümede 2, 6, 7, 3; ikinci kümede 4, 8, 5, 1 olmuş oldu. Bu da $n=8$ için sağlayan bir durumdur.** Yine 9 iki kümeye de dahil edilemez. Çünkü $s(9,3)=6$ ve $s(9,1)=5$'tir. Dolayısıyla 7 ilk kümeye koyulduğunda $n=9$ sağlanamaz.

7 ikinci kümede olsun, $s(7,1)=4$ olduğundan 1 ilk kümede olmalıdır. $s(1,3)=2$ olduğundan 3 ikinci kümede olmalıdır. $s(3,7)=5$ olduğundan 5 ilk kümede olmalıdır. **İlk kümede 2, 6, 1, 5; ikinci kümede 4, 8, 7, 3 olmuş oldu. Bu da $n=8$ için sağlayan başka bir durumdur**, ve yine 9 iki kümeye de dahil edilemez. Çünkü $s(9,1)=5$ ve $s(9,7)=8$'dir. Dolayısıyla 7 ikinci kümeye koyulduğunda da $n=9$ sağlanamaz.

Bu durumun da sağlanamayacağını bulduk. Başka durum da yoktur. Yani $n=9$ hiçbir şekilde sağlanamaz. $n=8$ için ise 3 örnek bulduk. Dolayısıyla verilen şartı sağlayan en büyük n sayısı 8'dir. Benzer işlemler farklı sayıların varyasyonlarıyla da denenebilir.

Onat Vuran'a ayrıca teşekkürler...

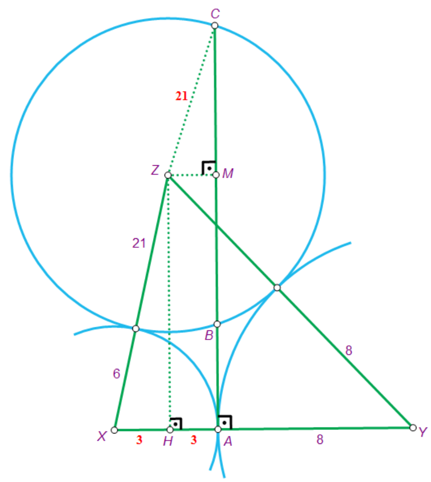
25 Birbirine A noktasında dıştan teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerinin yarıçapları sırası ile 6 ve 8 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerine dıştan teğet olan C_3 çemberinin yarıçapı ise 21 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerinin A noktasından geçen ortak teğet doğrusu C_3 çemberini B ve C noktalarında kesiyor ise, $|BC|$ kaçtır?

a) 24 **b)** 25 **c)** $14\sqrt{3}$ **d)** $24\sqrt{3}$ **e)** $25\sqrt{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

C_1, C_2, C_3 çemberlerinin merkezleri, sırasıyla X, Y, Z olsun.



$\triangle XYZ$ de, Z den geçen yüksekliğin ayağı H olsun.

$YZ^2 - XZ^2 = YH^2 - XH^2$ olacaktır.

$29^2 - 27^2 = 2 \cdot 56 = (YH - XH)(YH + XH) = (YH - XH) \cdot XY = 14 \cdot (YH - XH)$

$YH - XH = 8$ ve $XH = AH = 3$ çıkar.

BC nin orta noktası M olsun. $ZM \perp BC$ dir. Bu durumda, $ZMAH$ bir dikdörtgen olur. O halde, $AH = ZM = 3$ olacaktır.

$\triangle ZMC$ dik üçgeninde, $MC^2 = ZC^2 - ZM^2 = 21^2 - 3^2 = 18 \cdot 24 \Rightarrow MC = 12\sqrt{3}$ ve $BC = 2 \cdot MC = 24\sqrt{3}$ tür.

26 $n^4 + 1$ sayısını bölen en küçük asal sayı $f(n)$ olmak üzere, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2014)$ toplamının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

$n^4 + 1$ sayısını bölen en küçük asallar; eğer n sayısı tek ise, $f(n) = 2$ olması gerektiği açıktır.

Ancak sayı çift ise mertebe (order) kavramını kullanarak çözüme gidilebilir.

$n^4 \equiv -1 \pmod{f(n)} \Rightarrow n^8 \equiv 1 \pmod{f(n)}$.

Buradan $f(n)$ mertebesi için $8 \mid f(n) - 1$ diyebiliriz.

Buradan $f(n) = 8k + 1$ şeklinde olduğu ortaya çıkar.

Aradığımız asal sayıların yarısı tek, yarısı çift olduğu için sayı $f(2) + f(4) + \cdots + f(2014) \equiv 1 \cdot 1007 \pmod 8$ olur.

$f(1) + f(3) + \cdots + f(2013) = 1007 \cdot 2$ dir.

Toplarsak $3 \cdot 1007 \equiv 5 \pmod 8$ olur.

27 Pozitif tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, $f(1) = 4$ ve her n pozitif tam sayısı için $f(2n) = f(n)$ ve $f(2n+1) = f(n) + 2$ koşullarını sağlamaktadır. 2014 ten küçük kaç k pozitif tam sayısı için $f(k) = 8$ dir?

a) 45 **b)** 120 **c)** 165 **d)** 180 **e)** 215

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

(Egemen Erbayat)

$f(1) = 4 \Rightarrow k \in \mathbf{N}, f(2^k) = 4$

$f(2^k) = 4 \Rightarrow f(2^k) + 2 = f(2(2^k) + 1) = f(2^{k+1} + 1) = 6$

$f(2^{k+1} + 1) = 6 \Rightarrow m \in \mathbf{N}, f((2^m)(2^{k+1} + 1)) = 6 = f(2^{k+m+1} + 2^m)$

$f(2^{k+m+1} + 2^m) = 6 \Rightarrow f(2^{k+m+1} + 2^m) + 2 = f(2(2^{k+m+1} + 2^m) + 1) = f(2^{k+m+2} + 2^{m+1} + 1) = 8$

$f(2^{k+m+2} + 2^{m+1} + 1) = 8 \Rightarrow \ell \in \mathbf{N}, f((2^\ell)(2^{k+m+2} + 2^{m+1} + 1)) = 8 = f(2^{k+m+\ell+2} + 2^{m+\ell+1} + 2^\ell)$

$2^{k+m+\ell+2} + 2^{m+\ell+1} + 2^\ell < 2014$

$g(k, m, \ell) = 2^{k+m+\ell+2} + 2^{m+\ell+1} + 2^\ell < 2014 = \underbrace{(11111011110)_2}_{\text{11 basamaklı}}$

$g(k, m, \ell)$; 2 tabanında en fazla 11 basamaklı sayılardan tam olarak 3 tane 1 içerenlerin sayısıdır. $\dfrac{11!}{8! \cdot 3!} = 165$.

28 Başlangıçta tahtaya -1, 2, -3, 4, -5, 6 sayıları yazılıdır. Her işlemde tahtaya yazılı olan herhangi a ve b sayılarını silip yerine $2a + b$ ve $2b + a$ sayılarını yazarsak $(0, 0, 0, 3, -9, 9)$, $(0, 1, 1, 3, 6, -6)$, $(0, 0, 0, 3, -6, 9)$, $(0, 1, 1, -3, 6, -9)$, $(0, 0, 2, 5, 5, 6)$ altılılarından kaç tanesini elde edebiliriz?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$|2a+b| + |a+2b| \geq |a| + |b|$ eşitsizliği gereği sonlu adım sonunda altılıdaki sayıların mutlak değerleri toplamı azalmaz. İspatlayalım.

$a, b \geq 0$ ve $a, b < 0$ durumlarında eşitsizliğin doğruluğu açıktır. Genelliği bozmadan $a \geq 0 > b$ durumu için ispatlayalım.

Eşitsizlikte a sayısının kritik noktaları $a = -\dfrac{b}{2}$ ve $a = -2b$ dir. Ayrıca $b < 0$ olduğundan $-2b > -\dfrac{b}{2}$ dir. a sayısı için 3 durum söz konusudur:

Durum 1: $a \geq -2b$

$|2a + b| + |a + 2b| \geq |a| + |b| \iff (2a + b) + (a + 2b) \geq a - b \iff 2a \geq -4b \iff a \geq -2b$ ki bu zaten kabulumüzdür.

Durum 2: $-2b > a \geq -\dfrac{b}{2}$

$|2a + b| + |a + 2b| \geq |a| + |b| \iff (2a + b) + (-a - 2b) \geq a - b \iff 0 \geq 0$ eşitsizliği doğrudur.

Durum 3: $-\dfrac{b}{2} > a$

$|2a + b| + |a + 2b| \geq |a| + |b| \iff (-2a - b) + (-a - 2b) \geq a - b \iff -2b \geq 4a \iff -\dfrac{b}{2} \geq a$ ki bu zaten kabulümüzdür.

Eşitsizliği ispatlamış olduk.

Başlangıçta tahtada yazılı olan $(-1,2,-3,4,-5,6)$ altılısındaki sayıların mutlak değerleri toplamı 21 dir. $(0,1,1,3,6,-6), (0,0,0,3,-6,9), (0,1,1,-3,6,-9), (0,0,2,5,5,6)$ altılılarındaki sayıların mutlak değerleri toplamı sırasıyla $18, 18, 20, 18$ olduğundan bu altılıları elde etmek mümkün değildir.

$(0,0,0,3,-9,9)$ altılısı, her adımda kırmızı renkle belirtilen sayılar işleme sokularak şu şekilde elde edilebilir:

$(-1,2,-3,4,-5,6) \longrightarrow (0,3,-3,4,-5,6)$

$(0,3,-3,4,-5,6) \longrightarrow (0,3,0,4,-5,9)$

$(0,3,0,4,-5,9) \longrightarrow (0,3,0,3,-6,9)$

$(0,3,0,3,-6,9) \longrightarrow (0,0,0,3,-9,9)$

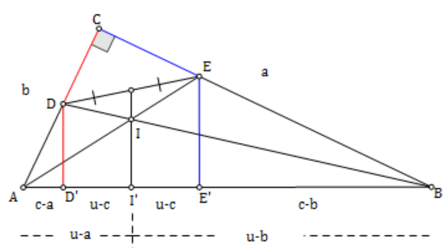
Dolayısıyla $(0,0,0,3,-9,9), (0,1,1,3,6,-6), (0,0,0,3,-6,9), (0,1,1,-3,6,-9), (0,0,2,5,5,6)$ altılılarından sadece biri elde edilebilir.

29 $|AB| = 13, |BC| = 12$ ve $|CA| = 5$ olan bir ABC üçgeninin A ve B köşelerine ait iç açıortaylar I noktasında kesişiyor ve karşı kenarları da sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ nin orta noktasından ve I dan geçen doğru $[AB]$ yi F noktasında kesiyor ise, $|AF|$ nedir?

a) $\frac{3}{2}$ **b)** 2 **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** 3 **e)** $\frac{7}{2}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$



Bahse konu doğrunun dik üçgenin hipotenüsüne dik olduğunu genel durumda görelim.

D, E, I noktalarında hipotenüse inilen dikme ayakları sırasıyla D', E', I'olsun. $|BC| = |BD'| = a$ ve $|AC| = |AE'| = b$ eşitlikleri vardır.

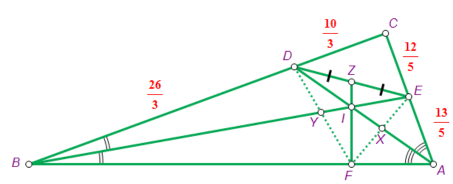
Buradan $|AD'| = c - a$ ve $|BE'| = c - b$ dir. Ayrıca $|I'A| = u - a$ ve $|I'B| = u - b$ olduğundan $|I'D| = |I'E| = u - c$ olur.

$EDD'E'$ yamuğundan $II' \parallel DD' \parallel EE'$ olduğundan II' doğrusu $[DE]$ nı ortalar.

Buna göre verilen üçgende $[IF] \perp [AB]$ olup $|AF| = u - a = u - |BC| = 15 - 12 = 3$ tür.

Çözüm 2:

DE nin orta noktası Z, $BE \cap DF = \{Y\}$ ve $AD \cap EF = \{X\}$ olsun.



$\triangle DBF$ de açıortay teoreminden, $\dfrac{BD}{BF} = \dfrac{DY}{YF}$.

$\triangle AEF$ de açıortay teoreminden, $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{XF}{XE}$.

$\triangle DEF$ üçgeninde, X, Y, Z noktaları için Ceva Teoremi uygularsak, aslında bilinen bir özellik,

$$\frac{DY}{YF} \cdot \frac{XF}{XE} \cdot \frac{EZ}{ZD} \Rightarrow \frac{BD}{BF} \cdot \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BD} \tag{1}$$

olacaktır.

$\triangle ABC$ de, $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$ olup, açıortay teoreminden, $BD = \dfrac{ac}{b+c} = \dfrac{26}{3}$ ve $AE = \dfrac{bc}{a+c} = \dfrac{13}{5}$ tir.

(1) de yerine yazarsak, $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{3}{10}$ çıkar. $AB = 13$ olduğu için $AF = 3$ tür. ■

Not:

Dikkat ettiyseniz, $\triangle ABC$ nin dik üçgen olduğunu kullanmadık. $\angle ACB$ nin ölçüsünden bağımsız, her üçgende $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{AE}{BD} = \dfrac{b(b+c)}{a(a+c)}$ bağıntısı vardır.

Özel olarak, $c^2 = a^2 + b^2$ olduğunda, ayrıca her dik üçgende $[ABC] = (u-a)(u-b) = \dfrac{ab}{2}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
\frac{b(b+c)}{a(a+c)} &= \frac{2b(b+c-a) + 2ab}{2a(a+c-b) + 2ab} \\
&= \frac{2b(b+c-a) + (b+c-a)(a+c-b)}{2a(a+c-b) + (b+c-a)(a+c-b)} \\
&= \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{(a+c-b)(a+bc)} \\
&= \frac{u-a}{u-b}
\end{aligned}$$

elde edilir. $AC = b = (u-a) + (u-b)$ olduğu için, F noktası, iç teğet çemberin AC ye değdiği noktadır. Yani $IF \perp AB$.

Aslında, $\dfrac{b(b+c)}{a(a+c)} = \dfrac{u-a}{u-b}$ denkleminin çözüm kümesi (çapraz çarpım yapıp, çarpanlara ayrıldığında görülebilir) $a = b$ veya $c^2 = a^2 + b^2$ dir. Bu da demek oluyor ki, $\triangle ABC$ üçgeninde $AC = BC$ olduğunda veya $AC^2 + BC^2 = AB^2$ olduğunda, $IF \perp AB$ dir.

Çözüm 3:

D den FI ya çizilen paralel BA yı D' da, BE yi D'' de kessin.

E den FI ya çizilen paralel BA yı E' de, AD yi E'' de kessin.

Açıortay teoreminden, $\dfrac{BI}{IE} = \dfrac{AB}{EA} = 5$ ve $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{3}{2}$.

$IE = a$ ve $ID = 2b$ olsun.

$IE = ID'' = a$ ve $BD' = 4a$; $ID = IE'' = 2b$ ve $AE'' = b$ dir.

Bu durumda, $AE' = m$ ise, $E'F = D'F = 2m$ ve $BD' = 8m$ olur. $AB = 13m$ olduğu için $AF = 3m = 3$ tür.

Çözüm 4:

Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı, $r = u - c = 15 - 13 = 2$.

Açıortay teoreminden $CE = \dfrac{12}{5}$, $CD = \dfrac{10}{3}$.

$C(0,0)$, $A(5,0)$, $B(0,12)$ olsun. $I(2,2)$ olacaktır.

DE nin orta noktası M olsun. $M(6/5, 4/3)$.

$MI : 5x - 12y + 14 = 0$.

$BC : 12x + 5y - 60 = 0$.

Bu iki doğrunun ortak çözümü $x = \dfrac{50}{13}$ tür.

F noktasının apsisi $\dfrac{50}{13}$ olduğu için benzerlikten $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{5 - \dfrac{50}{13}}{5} = \dfrac{3}{13} \Longrightarrow AF = 3$.

Not: Doğru denklemlerini yazınca, $MI \perp BC$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda F iç teğet çemberin kenara değdiği nokta olur. Yani doğrudan $AF = u - a = 15 - 12 = 3$ sonucuna varabiliriz.

30 Bir n pozitif tam sayısı için, $s(n)$ ile n sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını göstermek üzere; 2014^{2014} sayısını bölen tüm k pozitif tam sayıları için $(s(k))^3$ sayılarının toplamının en büyük asal böleni nedir?

a) 5 **b)** 7 **c)** 11 **d)** 13 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Eray ATAY)

Yanıt: $\boxed{E}$

$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ olduğundan $2014^{2014} = 2^{2014} \cdot 19^{2014} \cdot 53^{2014}$ tür.

2014^{2014} sayısının bir pozitif böleni $k = 2^{a_1} \cdot 19^{a_2} \cdot 53^{a_3}$ olsun. $(s(k))^3 = (a_1+1)^3 \cdot (a_2+1)^3 \cdot (a_3+1)^3$ dir.

Bize sorulan, mümkün olan tüm $(a_1+1)^3 \cdot (a_2+1)^3 \cdot (a_3+1)^3$ sayılarının toplamıdır. Bu toplam şöyle ifade edilebilir,

$$\sum (s(k))^3 = \sum_{a_1=0}^{2014} \sum_{a_2=0}^{2014} \sum_{a_3=0}^{2014} (a_1+1)^3 (a_2+1)^3 (a_3+1)^3$$

$$= \sum_{a_1=0}^{2014} (a_1+1)^3 \cdot \sum_{a_2=0}^{2014} (a_2+1)^3 \cdot \sum_{a_3=0}^{2014} (a_3+1)^3$$

$$= (1^3 + 2^3 + \cdots + 2015^3) \cdot (1^3 + 2^3 + \cdots + 2015^3) \cdot (1^3 + 2^3 + \cdots + 2015^3)$$

$= (1^3 + 2^3 + \cdots + 2015^3)^3 = \left(\left(\dfrac{2015 \cdot 2016}{2} \right)^2 \right)^3 = (2015 \cdot 1008)^6 = (5 \cdot 13 \cdot 31)^6 \cdot (2^4 \cdot 3^2 \cdot 7)^6 = 2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^6 \cdot 13^6 \cdot 31^6$ sayısının en büyük asal çarpanı 31'dir.

31 $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için,

$$(a_{n+1} - 2a_n) \cdot \left(a_{n+1} - \frac{1}{a_n + 2} \right) = 0$$

olmak üzere, $a_k = 1$ ise, k aşağıdakilerden hangisi olabilir?

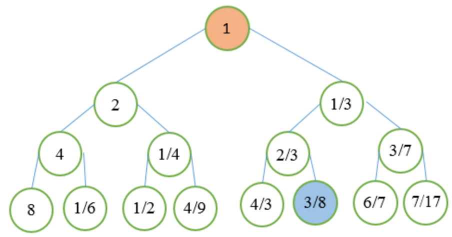
a) 6 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 12 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Bir sonraki terim ya şu ankinin iki katı ya da iki fazlasının çarpaya göre tersi olmalı.

$1 \to 1/3 \to 2/3 \to 3/8 \to 6/8 \to 12/8 \to 3 \to 6 \to 1/8 \to 1/4 \to 1/2 \to 1$ dizisinden de görülebileceği için $k = 12$ için $a_k = 1$ olabilir.



Bizi $k = 12$ ye götüren yolu inceleyelim:

Öncelikle, dizinin terimleri pozitif olduğu için $a_n \geq \dfrac{1}{2}$ ise $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ olmak zorunda olduğunu fark edelim.

$a_k = 1$ ise,

$a_{k-1} = \dfrac{1}{2}$, $a_{k-2} = \dfrac{1}{4}$,

$a_{k-3} = 2$, $a_{k-4} = 1$

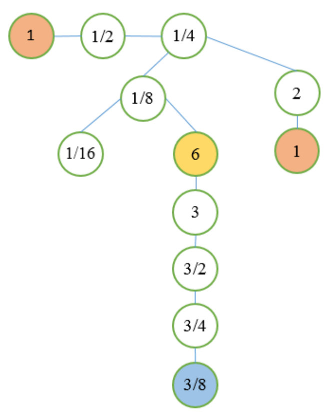
ya da

$a_{k-3} = \dfrac{1}{8}$, $a_{k-4} = \dfrac{1}{16}$

ya da

$a_{k-3} = \dfrac{1}{8}$, $a_{k-4} = 6$ olacaktır.

Bu durumda, ilk olarak $k - 4 = 1 \Rightarrow a_5 = 1$ elde ediliyor.



Açıktır ki, $i \geq 0$ olmak üzere, her $a_{4i+5} = 1$ olabilir.

Diğer taraftan, 6 dan sonra r adımda ilk kez 1 e ulaşılırsa, $k = r + 5$ olabilecek.

$a_{k-4} = 6 \to 3 \to 3/2 \to 3/4 \to a_{k-8} = 3/8$ olmak zorunda.

$a_{k-9} = 2/3$, $a_{k-10} = 1/3$, $a_{k-11} = 1$ ve $k = 12$.

32 Başlangıçta masada k tane taş bulunuyor. Alper, Betül ve Ceyhun sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu masadan bir veya iki taş alıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor ve oyun sona eriyor. Oyuna her seferinde Alper başlamak üzere, oyun $k = 5, 6, 7, 8, 9$ değerleri için birer kez oynanırsa, Alper bunlardan kaçını kaybetmemeyi garantileyebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

(Egemen Erbayat)

Cevap: $\boxed{B}$

İki kişi toplam 2, 3 veya 4 taş çekebilir.

Alper'e 4 taş gelirse, Alper taş çektikten sonra kalan $2 = 1 + 1$ ya da $3 = 1 + 2$ taşı diğerleri bitirip Alper'i hamlesiz bırakabilir.

Alper'e 5 taş gelirse, Alper taş çektikten sonra kalan $4 = 2 + 2$ ya da $3 = 1 + 2$ taşı diğerleri bitirip Alper'i hamlesiz bırakabilir.

Alper'e 8 taş geldiğinde, Alper ne çekerse çeksin, Betül ile Ceyhun 1 er taş çektiğinde Alper'e tekrardan $8 - x - 1 - 1 = 6 - x \in \{4, 5\}$ geleceği için, Alper hamlesiz kalabilir.

Alper'e 9 taş geldiğinde, Alper ne çekerse çeksin, Betül ile Ceyhun toplamda 3 taş çektiğinde Alper'e tekrardan $9 - x - 1 - 2 = 6 - x \in \{4, 5\}$ geleceği için, Alper hamlesiz kalabilir.

Alper, kendisinden sonra gelen oyuncuya 5 taş bırakırsa, şöyle bir durum oluşacak: $5-1-1 = 3$, $5-1-2 = 2$ ya da $5 - 2 - 2 = 1$

Alper, mümkün olduğunca çok taş çektiğinde, kendisinden sonra gelene 1 ya da 0 taş bırakmış olacak. Bu durumda, sıra kendisine gelmeden oyunu Betül ile Ceyhun'dan biri kaybetmiş olacak.

Hem $6 - 1 = 5$ hem de $7 - 2 = 5$ durumlarıyla, Alper oyunu kaybetmemeyi garantileyebilir.

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2015

1 Bir $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $EF \parallel AC$ olacak şekilde E ve F noktaları veriliyor. E ve F nin AB kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 3, BC kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 4, CD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 5 olduğuna göre, AD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı kaçtır?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{B}$

$[EF]$ nin problemde bahsi geçen izdüşümlerinin $ABCD$ dikdörtgeninin kenarları üzerindeki uzunlukları verilen sırada x, y, z, t olsun. $[EF] \parallel [AC]$ olduğundan kenarları x, y, z, t olan dikdörtgen ile $ABCD$ dikdörtgeni benzer dikdörtgenlerdir. Bu benzerliğe göre, $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow |AB| \cdot y = |BC| \cdot x$ olur. Bu sonuca göre, problemde istenen yamuğun alanına S dersek $S + 4 = 3 + 5 \Rightarrow S = 4$ bulunur.

2 Birkaç pozitif tam sayının en küçük ortak katları 2015 ise bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

a) 13 **b)** 22 **c)** 49 **d)** 65 **e)** 96

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ olduğu için en az bir sayıda 13 en az bir sayıda 31 en az bir sayıda 5 çarpanı bulunmak zorundadır. Eğer bir sayıda bu çarpanların iki tanesi varsa toplam daima 65 ten büyük olur. 65 ten az olması için her çarpan sadece bir sayıda olmalıdır. Bu da en az $31 + 13 + 5 = 49$ demektir.

3 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sonsuz geometrik dizisinin bazı elemanları silinerek toplamı S ye eşit olan bir sonsuz geometrik dizi elde edilebiliyorsa, S sayısı $\frac{1}{2015}, \frac{1}{215}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$ değerlerinden kaçına eşit olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{B}$

Oluşan dizi $\dfrac{1}{2^k}, \dfrac{1}{2^{k+a}}, \dfrac{1}{2^{k+2a}}, \dots$ şeklinde olur. Toplamı paranteze alırsak $\dfrac{1}{2^k} \cdot (1 + \dfrac{1}{2^a} + \dfrac{1}{2^{2a}} + \cdots)$ olur. $|r| < 1$ iken $1 + r + r^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-r}$ ile verilen sonsuz toplam formülünden bu ifade $\dfrac{1}{2^k} \cdot \dfrac{2^a}{2^a - 1}$ e dönüşür. Verilen şıklara $\dfrac{1}{x}$ diyelim. O zaman

$\dfrac{1}{2^k} \cdot \dfrac{2^a}{2^a - 1} = \dfrac{1}{x}$ olur. $2^a \cdot x = 2^k \cdot (2^a - 1)$ olur. x in verilen dört değeri de tek sayı olduğundan ve 2^a ile $2^a - 1$ aralarında asal olduğundan dolayı $x = 2^a - 1$ olmak zorundadır. Bu dört değerden bunu sağlayan sayı bir tanedir ve 15 tir.

4 Düzlemdeki n doğrunun her biri diğer doğruların tam olarak 2015 tanesiyle kesişiyorsa, n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 10

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{D}$

n tane doğruyu maksimum sayıda kümeye ayıralım. Öyle ki her kümedeki doğrular kendi içlerinde birbirlerine paralel olsun. O zaman bir kümedeki bir doğru kendi kümesindeki doğrular dışında bütün doğruları kesmektedir. Kümelerin sayısı k olsun. Her kümedeki doğru sayısı $1 \le i \le k$ olmak üzere a_i olsun. Birinci kümedeki bir doğru için yazarsak $a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 2015$ olur. İkinci kümedeki bir doğru için yazarsak $a_1 + a_3 + \cdots + a_k = 2015$ olur. k. kümedeki bir doğru için yazarsak $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = 2015$ olur. Her bir kümedeki bir doğru için yazılan denklemleri taraf tarafa toplarsak $(k-1)\cdot(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = 2015 \cdot k$ olur. $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ olduğunu biliyoruz. O zaman $(k-1)\cdot n = 2015 \cdot k$ olur. k ile $k-1$ aralarında asal olduğu için $k - 1 \mid 2015$ olmalı. Ve her $k-1$ değeri için bir n değeri vardır. Yani cevap 2015 in pozitif bölenlerinin sayısı kadardır. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ olduğu için cevap 8 dir.

NOT: Bu soru daha önce 2004 yılında 31. soru olarak 2015 yerine 2004 yazılarak sorulmuştur.

5 Bir $ABCD$ karesinin $[AC]$ köşegeni üzerinde $|AE| = |EF| = |FC|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve AD kenarına teğet olan O_1 merkezli bir çember AC kenarına da E noktasında teğettir. Benzer şekilde ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve CD kenarına teğet olan O_2 merkezli bir çember AC kenarına da F noktasında teğettir. Buna göre BO_1O_2 üçgeninin alanının DO_1O_2 üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\dfrac{13+12\sqrt{2}}{17}$ **b)** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{5}$ **c)** $\dfrac{7+4\sqrt{2}}{13}$ **d)** $\dfrac{12+5\sqrt{2}}{9}$ **e)** $\dfrac{18+8\sqrt{2}}{21}$

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{A}$

Oran sorduğu için işlemi kolaylaştırmak adına değer verebiliriz. $|AE| = |EF| = |FC| = \sqrt{2}$ diyelim. $|O_1E| = r$ olsun. O_1EA dik üçgen ve AO_1 açıortaydır. Dolayısıyla $\angle O_1AE = 22.5^\circ$ dir. $\tan 22.5 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ dir. O zaman

$\dfrac{r}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ve $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ dir. İki çemberin eş olduğunu biliyoruz. Çünkü BD köşegenine göre simetrik ve aynı konumdalar. Yani O_1O_2FE dikdörtgendir. BD köşegenini çizelim. $|O_1O_2|$ kesiştiği nokta H olsun. $BD \perp AC$ ve $AC // O_1O_2$ olduğu için $BD \perp O_1O_2$ dir. Üçgenlerin alanları oranı doğrudan $\dfrac{|BH|}{|DH|}$ a eşittir.

BD ile AC kesişimi K olsun. $|BH| = |BK| + |KH| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{6+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}$ olur.

$|DH| = |DK| - |KH| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{6+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}$ olur. Böylece $\dfrac{|BH|}{|DH|} = \dfrac{6+5\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}} = \dfrac{13+12\sqrt{2}}{17}$ bulunur.

6 2323^{2323} ün pozitif tam bölenlerinin bazılarından oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinde hiçbir eleman bir diğerini tam bölmüyorsa, n in alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2322 **b)** 2323 **c)** 2324 **d)** 2325 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$2323 = 101 \cdot 23$

O halde $\{23^0 \cdot 101^{2323}, 23^1 \cdot 101^{2322}, 23^2 \cdot 101^{2321}, \cdots, 23^{2322} \cdot 101^1, 23^{2323} \cdot 101^0\}$ kümesi 2324 elemandan oluşur, ve hiçbir eleman bir diğerini tam bölmez.

En büyük değerin 2324 den büyük olamayacağını ispatlayalım.

23 ün bir elemandaki kuvveti $0, 1, \cdots, 2323$ olmak üzere 2324 farklı değer alabilir. Eğer 2325 tane eleman olsaydı, Güvercin Yuvası İlkesi gereği 23 ün aynı kuvveti çarpanı olan 2 eleman olmak zorundaydı. Bu iki elemandan 101'in kuvveti küçük olan, büyük olanı bölmek zorundadır. Dolayısıyla kümemizde 2324 den fazla eleman bulunamaz.

$\boxed{7}$ $xy(x-y) = 1$ ve $x^2 - xy + y^2 = y + 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2 **e)** $\sqrt{5}$

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{E}$

İkinci ifadeyi $x(x-y) + y^2 = y + 1$ diye yazıp $x(x-y)$ yerine $\dfrac{1}{y}$ yazalım. Denklem $y^3 - y^2 - y + 1 = 0$ a dönüşür. Bu da $(y+1)(y-1)^2 = 0$ demektir. Yani $y = 1$ veya $y = -1$ dir. $y = 1$ olduğunda $x^2 - x - 1 = 0$ dan $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ veya

$x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ çıkar. $x^2 + y^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$ veya $x^2 + y^2 = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}$ bulunur. $y = -1$ olduğunda $x^2 + x + 1 = 0$ çıkar ki bu denklemin kökleri gerçel değildir. O zaman $x^2 + y^2$ nin alabileceği en büyük değerle en küçük değerin farkı

$\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$ tir.

$\boxed{8}$ $a_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ koşulunu sağlar?

a) 682 **b)** 758 **c)** 864 **d)** 956 **e)** 1024

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{E}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ifadesinin alabileceği değerler $0, 1, 2, 3, 4, 5$ tir. Durum inceleyelim. Durumları incelerken 1 leri dağıtma amaçlı inceleyeceğiz. Örneğin $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ise $\dbinom{5}{1}$ diye.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0$ olamlıdır. 1 durum.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0, 1$ olmalıdır. Bu durumları sayarsak $\dbinom{5}{1} \cdot \left(\dbinom{6}{0} + \dbinom{6}{1}\right) = 35$ durum

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0, 1, 2$ olmalıdır. Bu durumları sayarsak $\binom{5}{2} \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} \right) = 220$ durum

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0, 1, 2, 3$ olmalıdır. Bu durumları sayarsak $\binom{5}{3} \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} \right) = 420$ durum

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0, 1, 2, 3, 4$ olmalıdır. Bu durumları sayarsak $\binom{5}{4} \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right) = 285$ durum

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5$ ise $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olmalıdır. Bu durumları sayarsak $\binom{5}{5} \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} \right) = 63$ durum

Cevap $1 + 35 + 220 + 420 + 285 + 63 = 1024$ bulunur.

Çözüm 2:

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ istenmeyen koşuldur. Toplamda $2^{11} = 2048$ onbirli olduğu için istenen koşulları bulmak için 2048'den istenmeyen koşulları çıkartacağız.

$(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ onluları arasından $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ eşitliğini sağlayanların sayısı x olsun. Bu durumda $a_{11} = 1$ olduğunda x adet istenmeyen koşul elde edeceğiz.

Onluların sayısı $2^{10} = 1024$ olduğu için $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ şeklindeki onluların sayısı $\dfrac{1024 - x}{2}$ dir. a_{11} nasıl seçilirse seçilsin $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ olacağı için $\dfrac{1024 - x}{2} \cdot 2 = 1024 - x$ adet daha istenmeyen koşul elde ederiz.

Bu durumda tüm istenmeyen koşulların toplam sayısı 1024, dolayısıyla istenen koşulların sayısı $2048 - 1024 = 1024$ olacaktır.

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen iç açıortay ile B köşesinden geçen kenarortay P noktasında kesişiyor. $|AP| = \sqrt{3}, |BP| = 1, |CP| = \sqrt{7}$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

a) $\sqrt{3}$ **b)** 2 **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** $3\sqrt{2}$

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{D}$

B köşesinden çıkan kenarortayın ayağı D olsun. $|AD| = |DC| = x$ olsun. $|PD| = y$ olsun.Açıortay teoreminden $|AB| = \dfrac{x}{y}$ olur. Yine açıortay teoreminden $\dfrac{x^2}{y} - y = 3$ olur. Ve APC üçgeninde kenarortay teoreminden $2y^2 = 3 + 7 - 2x^2$ olur. Yani $x^2 + y^2 = 5$ tir. $x^2 - y^2 = 5 - 2y^2 = 3y$ olur. $2y^2 + 3y - 5 = (2y + 5)(y - 1) = 0$ olur. y pozitif olduğu için $y = 1$ dir. $x = 2$ dir. $A(\triangle ABC) = 2 \cdot A(\triangle ABD)$ dir. ABD kenarı 2 olan eşkenar üçgen çıkıyor yani alanı $\sqrt{3}$ tür. Cevap $2\sqrt{3}$ çıkar.

$\boxed{10}$ Her $i \in \{1, 2, \ldots, 22\}$ için a_i, a_{i+1} i tam bölecek ve a_{23} de 2015 i tam bölecek biçimde kaç farklı $(a_1, a_2, \ldots, a_{23})$ pozitif tam sayı 23-lüsü vardır?

a) 23^3 **b)** 23^4 **c)** 24^3 **d)** 24^4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

b_1 , b_2 ... , b_{23} terimlerini tanımlayalım. Öyle ki $a_2 = a_1 \cdot b_1$ olsun. Aynı şekilde $a_3 = a_2 \cdot b_2$ olsun. Yani $a_{n+1} = a_n \cdot b_n$ olsun. Ve $2015 = a_{23} \cdot b_{23}$ olsun. Son ifadede yerine yazarsak $2015 = a_{22} \cdot b_{22} \cdot b_{23}$ olur. Böyle gidersek $2015 = a_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_{23}$ olur. Burada 24 tane terim var. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ olduğundan dolayı 3 tane çarpanı 24 terime dağıtacağız. Geri kalan terimler 1 olacak. Bu dağıtım 24^3 şeklinde olur.

11 a ve b, $a+b=1$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, $(a^2-b)(b^2-a)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $-3\sqrt{3}$ **b)** -5 **c)** 0 **d)** $\frac{1}{16}$ **e)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{B}$

İstenen ifade $(a^2-b)(b^2-a) = (ab)^2+ab-(a^3+b^3) = (ab)^2+ab-[(a+b)^3-3ab(a+b)]$ biçiminde yazıldıktan sonra $a+b=1$ verisi kullanılarak $(ab)^2+4ab-1$ şekline dönüşür. Bu son ifade $(ab+2)^2-5$ olacağından en küçük değer -5 tir.

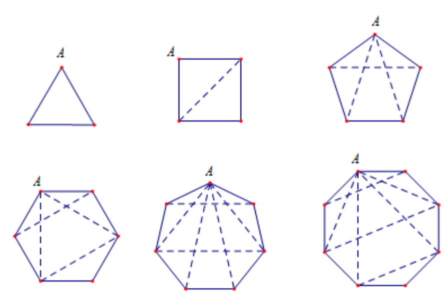
12 Köşeleri, verilmiş bir düzgün n-genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı $s(n)$ olmak üzere, $s(n) > s(n+1)$ koşulunu sağlayan kaç $n \le 2015$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 336 **b)** 403 **c)** 504 **d)** 671 **e)** 1007

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Problemi kavramak maksadıyla bazı düzgün çokgenleri çizip $s(n)$ değerlerini hesaplayalım. Aşağıdaki şekilde $s(3) = 3-2 = 1$, $s(4) = 4 \cdot 1 = 4$, $s(5) = 5 \cdot 2 = 10$, $s(6) = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 8$, $s(7) = 7 \cdot 3 = 21$, $s(8) = 8 \cdot 3 = 24$ olur.



Burada $s(n) > s(n+1)$ özelliğine sahip en küçük değerin $n=5$ olduğu görülüyor. Çünkü düzgün altıgende oluşan ikizkenar üçgenlerden bazıları eşkenar üçgen olduğu için bunlar ikişer kez fazla sayılmıştır. Bu fazlalıkları çıkarınca $s(n) > s(n+1)$ durumunun oluşması mümkün görülüyor.

Şimdi $n = 2k+1$ formunda tek sayı olsun. Ayrıca eşkenar üçgenler oluşması için $3|n+1$ olmasını istiyoruz. Üstelik $n+1 = 2k+2$ çift sayı olduğundan $6|n+1$ dir. Bu şartlar altında $s(n) = k \cdot n = \frac{n-1}{2} \cdot n = \frac{n^2-n}{2}$ ve $s(n+1) = k \cdot (n+1) - \frac{n+1}{3} \cdot 2 = \frac{3n^2-4n-7}{6}$ olur. $s(n) > s(s+1)$ eşitsizliğinden $\frac{n^2-n}{2} > \frac{3n^2-4n-7}{6}$

olup $n > -7$ bulunur. Dolayısıyla $6|n+1$ özelliğindeki her n pozitif tamsayısı istenen özelliktedir. $n+1 \leq 2016$ olup $2016 = 336 \cdot 6$ dır. Yani 336 tane n değeri elde edilir.

Şimdi de $n = 2k+2$ formundaki çift sayıları inceleyelim. Ayrıca $3|n+1$ olsun. Bu durumda da benzer hesaplamalarla $s(n) = \dfrac{n^2-2n}{2}$, $s(n+1) = \dfrac{3n^2-n-4}{6}$ olur. $s(n) > s(n+1)$ eşitsizliğinden $\dfrac{n^2-2n}{2} > \dfrac{3n^2-n-4}{6}$ olup $5n < 4$ bulunur. Bu duruma uygun n değeri yoktur.

Sonuç olarak toplam 336 tane n değeri vardır.

13 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C|$ olacak biçimde A_1 ve A_2 noktaları alınıyor. Benzer şekilde $[CA]$ kenarı üzerinde $|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A|$ olacak biçimde B_1 ve B_2 noktaları alınıyor. AA_1 doğrusu BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla X ve W noktalarında, AA_2 doğrusu da BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla Y ve Z noktalarında kesiyor. Buna göre $XYZW$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{4}{35}$ **c)** $\dfrac{8}{63}$ **d)** $\dfrac{9}{70}$ **e)** $\dfrac{1}{7}$

Çözüm 1:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{D}$

4 tane Menaleus uygulayacağız.

$$\Longrightarrow \frac{|BA_1|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AX|}{|XA_1|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{|AX|}{|XA_1|} = 1 \quad \Rightarrow |AX| = 6 \cdot |XA_1|$$

$$\Longrightarrow \frac{|BA_1|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AW|}{|WA_1|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{|AW|}{|WA_1|} = 1 \quad \Rightarrow 2 \cdot |AW| = 3 \cdot |WA_1|$$

Kolaylık olsun diye $|AA_1| = 35k$ diyelim. O zaman bulduklarımızı yazarsak $|AW| = 21k$, $|WX| = 9k$, $|XA_1| = 5k$ olur. $A(BXW) = 9S$ diyelim. O zaman $A(ABC) = 105S$ olur. Şimdi kalan iki Menaleusu yapalım.

$$\Longrightarrow \frac{|BA_2|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AY|}{|YA_2|} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{|AY|}{|YA_2|} = 1 \quad \Rightarrow |AY| = 3 \cdot |YA_2|$$

$$\Longrightarrow \frac{|BA_2|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZA_2|} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{|AZ|}{|ZA_2|} = 1 \quad \Rightarrow 4 \cdot |AZ| = 3 \cdot |ZA_2|$$

Kolaylık olsun diye $|AA_2| = 28m$ diyelim. O zaman bulduklarımızı yazarsak $|AZ| = 12m$, $|ZY| = 9m$, $|YA_2| = 7m$ olur. $A(ABA_2) = 70S$ olduğu için $A(BZY) = \dfrac{45}{2}S$ olur.

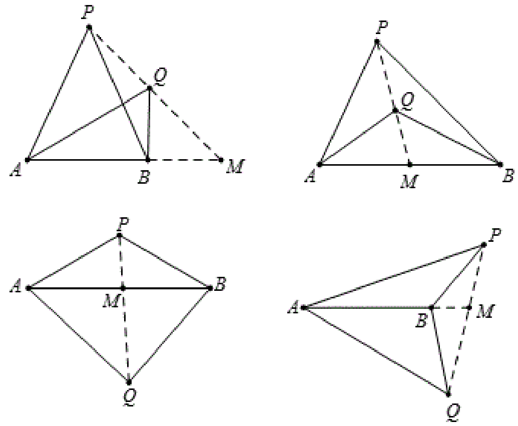
$A(XYZW) = A(BYZ) - A(BXW) = \dfrac{45}{2}S - 9S = \dfrac{27}{2}S$ bulunur. $\dfrac{A(XYZW)}{A(ABC)} = \dfrac{\frac{27}{2}S}{105S} = \dfrac{9}{70}$ bulunur.

Çözüm 2:

Teorem: AB ve PQ doğruları bir M noktasında kesişsinler. Buna göre, $\dfrac{A(ABP)}{A(ABQ)} = \dfrac{|PM|}{|QM|}$ eşitliği geçerlidir.

İspat: Şekil-1 de bu duruma uygun çizimler verilmiştir.

$$\frac{A(ABP)}{A(ABQ)} = \frac{A(ABP)}{A(AMP)} \cdot \frac{A(AMP)}{A(AMQ)} \cdot \frac{A(AMQ)}{A(ABQ)} = \frac{|AB|}{|AM|} \cdot \frac{|PM|}{|QM|} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|PM|}{|QM|} \text{ dir.}$$



Şekil-1

$A(ABC) = \Delta$ diyelim.

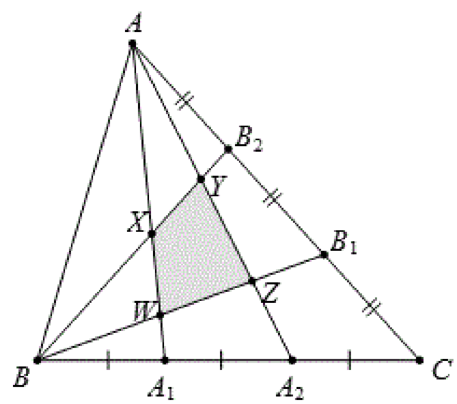
$\dfrac{A(CAZ)}{A(ABZ)} = \dfrac{|CA_2|}{|BA_2|} = \dfrac{|CB_1|}{|AB_1|} = \dfrac{A(BCZ)}{A(ABZ)} = \dfrac{1}{2}$ ve $A(ABZ) + A(BCZ) + A(CAZ) = \Delta$ olduğundan $A(ABZ) = \dfrac{\Delta}{2}$ dir.

$\dfrac{A(CAX)}{A(ABX)} = \dfrac{|CA_1|}{|BA_1|} = \dfrac{|CB_2|}{|AB_2|} = \dfrac{A(BCX)}{A(ABX)} = 2$ ve $A(ABX) + A(BCX) + A(CAX) = \Delta$ olduğundan $A(ABX) = \dfrac{\Delta}{5}$ dir.

$\dfrac{A(CAY)}{A(ABY)} = \dfrac{|CA_2|}{|BA_2|} = \dfrac{|AB_2|}{|CB_2|} = \dfrac{A(ABY)}{A(BCY)} = \dfrac{1}{2}$ ve $A(ABY) + A(BCY) + A(CAY) = \Delta$ olduğundan $A(ABY) = \dfrac{2\Delta}{7}$ dir.

Benzer şekilde $A(BAW) = \dfrac{2\Delta}{7}$ dir.

Buna göre, $A(XYZW) = A(ABZ) + A(ABX) - A(ABY) - A(BAW) = \dfrac{\Delta}{2} + \dfrac{\Delta}{5} - \dfrac{2\Delta}{7} - \dfrac{2\Delta}{7} = \dfrac{9\Delta}{70}$ olur.



Şekil-2

14 2015 ten büyük olmayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ kümesinde herhangi iki elemanın farkı bu iki elemanın toplamını tam bölmüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

a) 403 **b)** 462 **c)** 504 **d)** 613 **e)** 672

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

2015 den büyük olmayan pozitif tam sayıları $\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\cdots,\{2011,2012,2013\},\{2014,2015\}$ şeklinde 672 ayrık altkümeye ayıralım. Görüldüğü üzere, bir altkümeden birden fazla eleman aldığımızda bu iki elemanın farkları, toplamlarını böler. O halde k en fazla 672 olabilir. Gerçekten de, her kümeden $3k+1$ formundaki sayıyı aldığımızda, bu iki sayının farkı 3 e bölünür. Toplamları ise 3 e bölündüğünde 2 kalanı vereceğinden, farkları toplamlarını bölemez.

15 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonları her $x \neq 0$ için

$$f(2x+1) + g(x-1) = 3x+2$$
$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + 4$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(2015) + g(2015)$ kaçtır?

a) -2016 **b)** -2015 **c)** 2014 **d)** 2015 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

$\frac{x+1}{x}$ ifadesini $2x+1$ e eşitleyen ifadeyi bulalım. $\frac{y+1}{y} = 2x+1 \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$ Aynı zamanda $\frac{1-2x}{2x}$ ifadesinde x yerine $\frac{1}{2x}$ yazınca $x-1$ çıkıyor. Yani ifadeleri eşitleyen ifade $\frac{1}{2x}$ dir.

$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = f(2x+1) + 3g(x-1) = x+4$ olur. İki denklemi taraf tarafa çıkarırsak $2g(x-1) = 2-2x \Rightarrow g(x-1) = 1-x$ bulunur. İlk denklemde yerine yazılırsa $f(2x+1) = 4x+1$ bulunur. O zaman $f(2015) = 4029$ ve $g(2015) = -2015$ bulunur. Ve bunların toplamı 2014 tür.

16 Bir çember etrafına yüz sayı dizilmiştir. Saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk iki sayıdan büyük olan sayılara A tipi, saat yönünde kendisinden önce gelen ilk iki sayıdan küçük olan sayılara ise B tipi sayı diyelim (bir sayı hem A hem de B tipi olabilir). A tipi sayıların sayısı 80 ise, B tipi sayıların sayısı en az kaç olabilir?

a) 60 **b)** 61 **c)** 62 **d)** 63 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 61.

A olmayanlara C diyelim. Bir C ve C den önce gelen en uzun A tipli sayı grubuna blok diyelim. Toplamda $100-80=20$ tane C tipi sayı var. Demek ki 20 blok var (bloklar tek elemanlı olabiliyor). En büyük sayı T olsun. T den önce gelen iki sayı da C tipidir. O zaman en az bir blokun eleman sayısı birdir. Her blokta soldan ilk 2 eleman dışındakiler B tipidir. Demek ki en az $100-19\cdot 2-1=61$ B tipi sayı vardır. 19 blokun her birinin en az 4 elemanlı olduğu durum 61 için örnek oluşturur.

Kaynak: Tübitak 23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2015

17 Düzlemde bir çember ve bu çemberin dış bölgesinde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ noktaları veriliyor. Bu çemberin üzerindeki her A noktası için, $[AA_1], [AA_2], \ldots, [AA_n]$ doğru parçalarından en az üçü çemberi yalnızca A noktasında kesiyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 7.

Çemberin merkezi O olsun. A_1O ya paralel olup çembere teğet olan iki doğru vardır, bu doğrular ℓ_1, ℓ_2 ve çembere değdikleri noktalar P_1, P_2 olsun. Soruda verilen koşulu $A = P_1$ ve $A = P_2$ için değerlendirirsek, $A_1, A_2, \ldots A_n$ den en az 3'ünün ℓ_1 e göre çember ile farklı tarafta ve en az 3'ünün ℓ_2 ye göre çember ile farklı tarafta olduğunu görürüz, bir de A_1 var, böylece $n \geq 7$ dir. Çember ile merkezdeş olan çok büyük bir düzgün $7-$genin köşeleri verilen şartı sağlar, o halde cevap 7.

Kaynak: Tübitak 23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2015

18 $0 \leq n < 23^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı n tam sayısı için $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2$ sayısı 23^2 ile tam bölünür?

a) 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 23 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2 = (n+2)(n^4 + n^2 - 2n + 1)$

İkinci çarpanı mod 23 de incelersek, $(n^2)^2 \equiv -(n-1)^2 \pmod{23}$. Bu denkliğin çözümünün olması için, mod 23 de karesi -1 e denk olan bir sayı olmalıdır. Ancak $23 \equiv -1 \pmod 4$ olduğu için bu imkansızdır. Dolayısıyla $n^4 + n^2 - 2n + 1$ ifadesinde 23 çarpanı bulunamaz.

O halde $23^2 | (n+2)(n^4 + n^2 - 2n + 1) \iff 23^2 | n + 2$. Yani şart sadece $n = 23^2 - 2$ için sağlanır.

19 $f(x) = ax^2 - 3ax + 2a + 23$ fonksiyonu her $1 \leq x \leq 2$ için $|f(x)| \leq 23$ koşulunu sağlıyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?

a) 178 **b)** 181 **c)** 184 **d)** 187 **e)** 190

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

$f(x) = a(x-1)(x-2) + 23$ ün mutlak değerinin 23 ten küçük olması için $-46 \leq a(x-1)(x-2) \leq 0$ olmalı. a nın en büyük değerini soruyor o yüzden pozitif kabul edebiliriz. $1 \leq x \leq 2$ için zaten $a(x-1)(x-2) \leq 0$ dır. O zaman $a(x-1)(x-2) + 46 \geq 0$ olduğunu incelemeliyiz. Bu denklemin deltasının sıfırdan küçük eşit çıkması lazım. $\triangle = 9a^2 - 4 \cdot a \cdot (2a + 46) \leq 0$ olur. Yani $a^2 \leq 184a$ olur . Bu da $a \leq 184$ demektir. a nın alabileceği en büyük değer 184 tür.

20 Başlangıçta 101 top içeren bir kırmızı kutu ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve kırmızı kutudan seçtiği sayıda topu beyaz kutuya aktarıyor. Burak da her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve beyaz kutudan seçtiği sayıda topu kırmızı kutuya aktarıyor. Bir sayı en fazla bir kez seçilebiliyor. Sırası gelen oyuncu hamle yapamazsa oyun bitiyor. İlk hamleyi yapan Aslı, beyaz kutuda en fazla kaç top kalmasını garantileyebilir?

a) 1 **b)** 49 **c)** 50 **d)** 51 **e)** 101

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{E}$

Aslı'nın bütün topların beyaz kutuda kalmasını garantileyebileceğini gösterelim. Aslı kırmızı kutudan 1 top alamaz. Çünkü o zaman Burak'ın alabileceği top sayısı sadece 1 olabilir ama daha önce kullanılmıştı. Aslı kırmızı kutudan 2 top alsın. Şimdi beyaz kutuda 2 top var. Burak'ın alabileceği top sayısı sadece 1 dir çünkü 2 kullanıldı. Burak 1 topu kırmızı kutuya aktarır. Şu an beyaz kutuda 1 top var. Ve 1 ve 2 sayıları kullanıldı. Aslı kırmızı kutudan 3 topu beyaz kutuya aktarsın. Şu an beyaz kutuda 4 top var ve 1 , 2 , 3 sayıları kullanıldı. Yani Burak sadece 4 top alabilir. Burak 4 topu da kırmızı kutuya aktarsın. Şimdi kırmızı kutuda 101 beyaz kutuda 0 top var. Yani en başa döndük . Ve 1 , 2 , 3 , 4 sayıları kullanıldı.

Aslı yine benzer şekilde 5 top alamaz. Alırsa beyaz kutuda 5 top olmuş olacak ve 1 den 5 e kadar bütün sayılar kullanıldığından Burak hamle yapamayacak. Dolayısıyla Aslı 6 top alır. Ve benzer şekilde oyun devam eder. Görüldüğü gibi ilk $4k$ sayı kullanıldığında Aslı beyaz kutuda 0 top kalmasını garantileyebiliyor. O zaman 1 den 100 e kadar sayılar kullanıldığında yine beyaz kutuda 0 top kalacak. Ve sıra Aslı' da olacak. Aslı 'ya sadece 101 sayısı kaldı. Aslı 101 topu da beyaz kutuya aktarır. Son durumda 1 den 101 e kadar bütün sayılar kullanıldı. Ve beyaz kutuda 101 top var. Yani Burak hamle yapamıyor. Aslı 101 topun beyaz kutuda kalmasını garantilemiş oldu.

21 $|AB| = 11$ ve $|AC| = 9$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BP| = 7$ ve $|CP| = 3$ koşullarını sağlayan bir P noktası alınıyor. Buna göre, $|AP|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt :$\boxed{B}$

$|BC| < 10$ dur. Eğer 10 olsaydı bu durumda P noktası $|BC|$ nin üzerinde olurdu. Bu durumda stewart teoreminden $|AP|^2 = \dfrac{121 \cdot 3 + 81 \cdot 7}{10} - 21 = 72$ olurdu. O zaman $|AP|^2 < 72$ olmalı. Ayrıca ABP ve ACP üçgenlerinde üçgen eşitsizliğinden $4 < |AP| < 18$ ve $6 < |AP| < 12$ bulunur. Dolayısıyla $|AP|$ nin alabileceği tamsayı değerler 7 ve 8 olmak üzere 2 tanedir.

22 $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \le a < 23$ tam sayısı vardır?

a) 5 **b)** 6 **c)** 10 **d)** 11 **e)** 12

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$x^2 - ax + 1 \equiv 0 \pmod{23}$ denkliğinin çözümü olması için $\Delta = a^2 - 4$ ün mod23 te bir tam kare olması gerekir.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a^2 mod 23	0	1	4	9	16	2	13	3	18	12	8	6	...
$a^2 - 4$ mod 23	19	20	0	5	12	21	9	22	14	8	4	2	...

$a = 11$ e kadar 6 çözüm olduğu için toplamda 12 çözüm vardır.

23 Çevresi 23 birim ve alanı 23 birim kare olan kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{C}$

İkizkenar üçgenin tabanına $2x$ diyelim, buna göre eşit kenarlar $\frac{23}{2} - x$ olur. Heron alan formülünden $23^2 = \frac{23}{2} \cdot \left(\frac{23}{2} - 2x\right) \cdot x \cdot x$ olup ifade düzenlenirse $4x^3 - 23x^2 + 92 = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemin $x < \frac{23}{4}$ şartını sağlayan pozitif gerçel kök sayısını arıyoruz. Tek değişkenli polinomlar için Descartes in işaret kuralına göre polinomun ya 2 ya da 0 tane pozitif gerçel kökü vardır. $f(x) = 4x^3 - 23x^2 + 92$ için $f(5) > 0, f(4) < 0$ olduğundan $(4, 5)$ aralığında bir pozitif kök vardır. $f(3) < 0, f(2) > 0$ olduğundan $(2, 3)$ aralığında da bir pozitif gerçel kök bulunur. O halde problemde verilen şartları sağlayan iki üçgen vardır.

Descartes İşaret Kuralı

Çözüm 2:

Cevap: 2.

Kenar uzunlukları $\frac{23}{2} - a, \frac{23}{2} - a, 2a$ olan üçgenin tabana dik olan yüksekliğinin uzunluğu

$$h = \sqrt{\left(\frac{23}{2} - a\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{23}{2} \cdot \left(\frac{23}{2} - 2a\right)}$$

dır. O halde biz

$$23 = a \cdot h = a \cdot \sqrt{\frac{23}{2} \cdot \left(\frac{23}{2} - 2a\right)} \Leftrightarrow a^2 \cdot \frac{23}{2} \cdot \left(\frac{23}{2} - 2a\right) = 23^2 \Leftrightarrow a^2 \cdot (23 - 4a) = 4 \cdot 23$$

denkleminin çözümlerini arıyoruz. $a = \frac{23}{6}$ değerini denediğimizde (yani eşkenar üçgen), $a^2 \cdot (23 - 4a) = \frac{23^3}{6^2 \cdot 3} > 4 \cdot 23$ olur. O halde verilen denklemin en az bir adet $0 < a < \frac{23}{6}$ olmak üzere ve en az bir adet $\frac{23}{6} < a < \frac{23}{4}$ olmak üzere iki çözümü vardır. Bir de $a < 0$ şartını sağlayan ve geometrik anlamı olmayan bir çözüm olduğuna göre başka çözüm olamaz, çünkü denklem 3'üncü derecedir. Yani istenen şartları sağlayan 2 üçgen vardır.

24 Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınıftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir?

a) 41 **b)** 43 **c)** 46 **d)** 48 **e)** 50

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Öğrencilerden ilkini gruplardan birine yerleştiririz. İkinci öğrenciyi tek türlü yerleştirebilmemiz için ilk gruptaki öğrenci ile arkadaşlık bağı bulunmalıdır (bir bağ elde ettik), bu durumda bu öğrenciyi ikinci gruba yerleştiririz. Geri kalan 21 öğrencinin her birinin tek türlü yerleşebilmesi için yerleşeceği grup haricindeki iki grupla da bir arkadaşlık bağı bulunması gereklidir ($21 \cdot 2 = 42$ bağ daha elde ettik). Yani tüm öğrencilerin tek türlü yerleşebileceği ve 43 arkadaşlık bağı bulunan bir örnek kurmuş olduk.

En az 43 arkadaşlık bağı gerektiğini ise tümevarım ile gösterebiliriz. İddiamız şudur ki; her $n > 1$ tam sayısı için gereken arkadaşlık bağı sayısı $2n - 3$ tür. $n = 2$ iken 1 arkadaşlık bağı bulunması gerektiği açıktır, aksi takdirde iki öğrenciyi aynı veya farklı gruba koyabiliriz ki tek türlü dağıtmış olmayız. $n = k$ iken dağıtabilmemiz için $2k - 3$ bağ gerekiyor olsun. $k + 1$ öğrenciyi dağıttığımızda ilk k öğrenciyi tek türlü dağıtabilmek için $2k - 3$ bağ gerekecek, $k + 1$. öğrencinin tek türlü gidişini sağlamak için iki bağ daha gerekecek ve toplam $2k - 1 = 2(k + 1) - 3$ bağ gerekecektir, ispat bitmiştir.

(Şöyle de düşünebiliriz ki; eğer $2n - 2$ arkadaşlık bağı ile öğrencileri dağıtabilseydik öğrencilerden birini çıkardığımızda geriye en az $2n - 3$ arkadaşlık bağı kalması gerekeceğinden bu öğrencinin en fazla 1 arkadaşlık bağı bulunabileceğini söyleyebilirdik, ki bu durumda da bu öğrenci arkadaşlık bağı bulunmayan iki gruba da gidebilirdi, çelişki.)

25 Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = |BC| = 7, |CD| = |AE| = 15$ ve $|DE| = 24$ olarak veriliyor. Bu beşgenin alanı kaçtır?

a) 112 **b)** 168 **c)** 210 **d)** 276 **e)** 360

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{D}$

$[ED]$ nin orta dikmesinin B den geçtiği açıktır. Orta dikmenin çemberi ve $[ED]$ yi kestiği noktalar sırasıyla Kve T olsun. $\angle BED = \alpha \Rightarrow \angle BAE = 180 - \alpha$ olur. ABE üçgeninde kosinüs teoreminden $|BE|^2 = 274 + 210 \cdot cos\alpha$ dir ayrıca BTE üçgeninde $cos\alpha = \dfrac{12}{|BE|}$ olduğundan bu iki ifadeden $|BE|^3 - 274|BE| - 2520 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden (birazda sezgisel olarak) $|BE| = 20$ bulunur.Buna göre $|BT| = 16$ dır. Sonuç olarak $|ABCDE| = 2\,(|ABE| + |BTE|) = 2\,(42 + 96) = 276$ dır.

26 $n > 1$ tam sayısının en büyük ve en küçük asal bölenlerinin toplamı $f(n)$ olmak üzere, $f(n) = n - 23$ denklemini sağlayan kaç farklı $n > 1$ tam sayısı vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

n sayısının en küçük asal böleni p, en büyük asal böleni q olsun.

$p = q$ ise $2p = p - 23$ denklemini sağlayan p asal sayısı yoktur. Dolayısıyla n en az iki farklı asal çarpan içermelidir.

n sayısı başka çarpanlar da içerebileceğinden $n \geq pq$ olduğu açıktır.

$f(n) = n - 23 \Longrightarrow p + q = n - 23 \geq pq - 23$

$p + q \geq pq - 23 \Longrightarrow 24 \geq pq - p - q + 1 \Longrightarrow 24 \geq (p - 1)(q - 1)$

$2 \leq p < q$ olduğunu bildiğimizden, $p = 2, 3, 5$ olabilir.

$q = n - 23 - p$ olduğundan $q|n - (p + 23) \Longrightarrow q|p + 23$ tür. O halde,

$p = 2 \Longrightarrow q|25 \Longrightarrow q = 5 \Longrightarrow n = 2 + 5 + 23 = 30$ sağlar.

$p = 3 \Longrightarrow q|26 \Longrightarrow q = 13 \Longrightarrow n = 3 + 13 + 23 = 39$ sağlar.

$p = 5 \Longrightarrow q|28 \Longrightarrow q = 7 \Longrightarrow n = 5 + 7 + 23 = 35$ sağlar.

Yani şartı sağlayan n tam sayıları $30, 35, 39$ olmak üzere 3 tanedir.

27 $x^{23} - 2015^{2015}x + 23 = c$ denkleminin en az üç farklı gerçel çözümünün bulunmasını sağlayan tüm c tam sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

a) -46 **b)** 0 **c)** 403 **d)** 2015 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

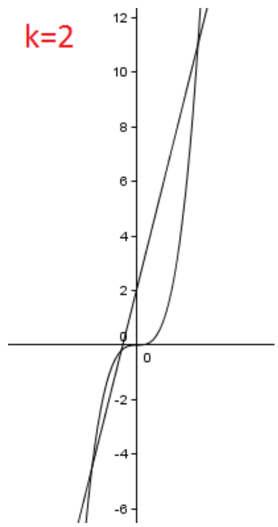
Yanıt: $\boxed{E}$

$k = c - 23$ olsun.

Denklem, $x^{23} - 2015^{2015}x - k = 0$ dır.

İddia 1: Denklemin en fazla üç gerçel kökü olabilir.

Bu iddianın doğruluğu, **Descartes'in İşaret Değişim Kuralı** yardımıyla veya $f(x) = x^{23}$ ve $g(x) = 2015^{2015}x + k$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınarak görülebilir.



O halde denklemin tam olarak üç farklı gerçel kökünün bulunmasını sağlayan c tam sayılarının aritmetik ortasını arıyoruz.

İddia 2: Bir $k = k_0$ için denklemin 3 farklı gerçel kökü varsa, $k = -k_0$ için de 3 farklı gerçel kökü vardır.

İspat: x_0 sayısı $x^{23} - 2015^{2015}x - k_0 = 0$ denkleminin köküyse, $-x_0$ sayısı $x^{23} - 2015^{2015}x + k_0 = 0$ denkleminin köküdür. Çünkü x yerine $-x$ yazıldığında önceki denklem elde ediliyor. Yani k_0 yerine $-k_0$ yazıldığında, denklemin köklerinin negatifleri yeni denklemin kökleri olur. Dolayısıyla kök sayısı korunur.

O halde, $-k = -c + 23 = (46 - c) - 23$ olduğundan, bir $c = c_0$ tamsayısı için denklemin üç farklı gerçel kökü varsa, $c = 46 - c_0$ tamsayısı için de üç farklı gerçel kökü vardır.

Şartı sağlayan c tam sayıları $c_1, c_2, \cdots, c_n, 46 - c_1, 46 - c_2, \cdots 46 - c_n$ olsun. c_i sayıları arasında 23 varsa, 23 ü iki kez yazdık demektir. Ancak olsa da olmasa bu sayıların aritmetik ortalaması 23 tür.

Çözüm 2:

Cevap: Hiçbiri.

Bu şartı sağlayan c tam sayılarının bir k pozitif reel sabit sayısı için $(23 - k, 23 + k)$ aralığındaki sayılar olması gerektiği görülür. Türev incelemesi ile k yi hesaplayabiliriz, ama bu sorunun cevabını bulmak için buna gerek yok. k ne olursa olsun $(23 - k, 23 + k)$ aralığındaki tam sayıların aritmetik ortalaması 23 tür.

$\boxed{28}$ Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 7-geni olan bir piramidin her ayrıtının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıtlar takip edilerek ulaşılabilecek şekilde boyanmasına *iyi boyama* diyelim. Kaç iyi boyama vardır?

a) 218 **b)** 234 **c)** 252 **d)** 298 **e)** 324

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 252.

Taban dışındaki kenarların boyama sayısı 2^7. Bir iyi boyamada bu yedi kenarın tümü kırmızı, veya tümü mavi olamaz: $2^7 - 2$. Piramidin tepe noktası O olmak üzere, genelliği bozmadan $[OA_i]$ kırmızı, $[OA_{i+1}]$ mavi renge boyanmış olsun. $[A_iA_{i+1}]$ kenarını herhangi bir renge boyayalım, bu renk de genelliği bozmadan mavi olsun. O zaman $[A_{i+1}A_{i+2}]$ kenarı kırmızı renge boyanma zorunda olacaktır. Benzer şekilde devam edersek diğer taban kenarların da tek türlü boyanma zorunda olacaklarını göreceğiz. Demek ki iyi boyama sayısı $2\left(2^7 - 2\right) = 252$ dir.

Kaynak: Tübitak 23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2015

29 İç teğet çemberinin merkezi I olan ve $|AB| = 3, |BC| = 7, |CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeni verilmiştir. BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde BC doğrusuna göre I ile farklı tarafta kalacak biçimde alınan bir D noktasından $[BC]$kenarına inilen dikmenin ayağı E dir. Buna göre, $\dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{9}{5}$ ise $m\left(\widehat{BAD}\right)$ kaçtır?

a) 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 75° **e)** 90°

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{C}$

$\dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{9}{5}$ ve $|BC| = 7$ için $|BE| = \dfrac{9}{2}, |CE| = \dfrac{5}{2}$ dir. $|AC| + |CE| = |AB| + |BE| = s$ olduğundan E noktası ABC üçgeninin dış çemberinin $[BC]$ kenarına teğet olduğu noktadır.$[BC]$ ye teğet olan çemberin merkezi BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olacağından bu merkez problemde bahsedilen D noktasıdır. Kosinüs teoreminden $\angle BAC = 120°$ olup $\angle BAD = 60°$ dir.

s : ABC üçgeninin yarı çevresidir.

30 $3(m^3n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 8 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

(Mehmet Utku Özbek)

Yanıt: $\boxed{C}$

Denklemi düzenlersek $mn \cdot (3m^2 - n^2 - 1) = 9m^2 - 3n^2 - 3$ olur. Buradan iki durum çıkıyor. Ya $mn = 3$ ya da $3m^2 - n^2 - 1 = 0$ olmalı. $mn = 3$ için 4 tamsayı çözümü var. $3m^2 - n^2 = 1$ ifadesine $\pmod 3$ te bakarsak $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ olur. Çelişki. Yani cevap 4.

31 Elemanları 23 ten büyük olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılar dizisinde ilk ve son eleman dışındaki her eleman iki komşusunun aritmetik ortalamasından büyüktür. Buna göre n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 12 **b)** 13 **c)** 14 **d)** 15 **e)** 16

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

a, b, c dizinin 3 ardışık terimi olmak üzere $a > b$ ise $b > c$ olduğu açıktır, yani dizi bir yerde azalmaya başladığında sürekli azalacaktır. Şimdi dizinin azalan 7. teriminin sıfırın altına ineceğini gösterelim. Dizinin en büyük terimi x, x ten sonra gelen terim y olsun. (eğer x sayısı birden fazla kez geçiyorsa en sonuncusuna bakalım) Sonraki terim z olmak üzere, soruda verilen koşuldan $2y > x + z$ olduğundan $2y - x > z$ olur, yani z en fazla $2y - x - 1$ olabilir, benzer şekilde yazarsak z den sonraki terim t olmak üzere $2(2y - x - 1) > y + t$ olduğundan t en fazla $3y - 2x - 3$ olabilir, bunu bu şekilde devam ettirerek $4y - 3x - 6, 5y - 4x - 10, 6y - 5x - 15$ ve 7. terim olan $7y - 6x - 21$ i buluruz. $x \geq y + 1$ olduğundan $7y - 6x - 21 \leq 7y - 6(y + 1) - 21 = y - 27 < 0$ buluruz (çünkü $y < 23$ verilmiştir). Bu da demektir ki dizideki sayılar en fazla 6 kez azalabilir. Sorunun başında söylediğimiz ifadeden dizinin bir yere kadar artan, en büyük sayıda tekrar eden ve sonra azalan olduğunu görebiliriz*. Bu da demektir ki ilk 7 terim artan sırada olacak (yani terimler 6 kez artacak), 7. terim belli sayıda tekrar edecek (ki bu sayı en fazla 2 olabilir, sorudaki şarttan 3 olamayacağı açıktır) ve simetrik bir şekilde 6 terim daha eklenecek, bu da bize 14 terimli bir dizi verir. Dizimize örnek olarak $2, 8, 13, 17, 20, 22, 23, 23, 22, 20, 17, 13, 8, 2$ dizisini verebiliriz.

*Burada görmemiz gereken bir durum a, b, cb en büyük terim olmayacak şekilde ardışık terimler ve $a < b$ ise $b = c$ olabileceğidir, fakat bu durumda c den sonra gelen terim d olmak üzere $b = c$ olduğundan $c > d$ olmalıdır, ki bu durumda b ve c en büyük terim olur, çelişki.

32 23 kentin bulunduğu bir ülkede 250 kent ikilisi arasında karşılıklı uçak seferleri, ülkedeki herhangi bir kentten bir diğerine (doğrudan veya birkaç aktarmayla) en fazla 5 saatlik uçus süresi sonucunda ulaşılabilecek biçimde nasıl düzenlenirse düzenlensin, k saatlik uçus sonucunda bir kentten başlayıp her kente en az bir kez uğrayarak baştaki kente dönülebiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 95 **b)** 100 **c)** 105 **d)** 110 **e)** 115

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 110.

$250 < \binom{23}{2} = 253$ olduğundan aralarında karşılıklı uçak seferleri bulunmayan en az iki kent vardır. Buna göre A dan B ye en kısa sefer $A \to C \to B$ olacak şekilde A, B ve C kentleri bulunur. O zaman $A \to C \to B \to \cdots \to A$ en fazla $22 \cdot 5 = 110$ saat olur. 110 saat için örnek: Bir A kenti ile diğer tüm kentler arasında her biri 2.5 saat süren karşılıklı uçak seferleri olsun. A dışındaki kenlerin bazıları arasında da toplam 100 sefer elde etmek için her biri 10 saat süren yollarla birleştirilsin.

Kaynak: Tübitak 23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2015

24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2016

1 $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışınını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$\angle EAF = \angle ECD = \angle FEB$ olduğu için EF aynı zamanda ABE üçgeninin çevrel çemberine de teğettir. $EF^2 = 4.9 = 36$ dan $EF = 6$ bulunur.

2 $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$

$n^2 - 7n + 14 = 3m - mn$

$n^2 - 7n + 14 = m(3 - n)$

$\dfrac{n^2 - 7n + 14}{3 - n} = m$

$-n + 4 + \dfrac{2}{3 - n} = m$

$\dfrac{2}{3 - n}$ 'ı tamsayı yapan değerlerler 4 tanedir: $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 5$.

3 $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$c = \dfrac{2}{ab}$ olduğundan $f(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + \dfrac{16}{a^2b^2} - 6b$ olur. $f(a, b, c) \geq 0$ olduğunu gösterelim. $A.G.O$ dan $a^2 + \dfrac{16}{a^2b^2} \geq \dfrac{8}{b}$ den; $f(a, b, c) \geq 2b^2 + \dfrac{8}{b} - 6b \geq 0$ göstermeliyiz. $A.G.O$ dan $b^2 + b^2 + \dfrac{8}{b} \geq 6b$ olduğundan eşitsizlik doğrudur. Eşitlik $a = \sqrt{2}, b = 2, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için sağlanır.

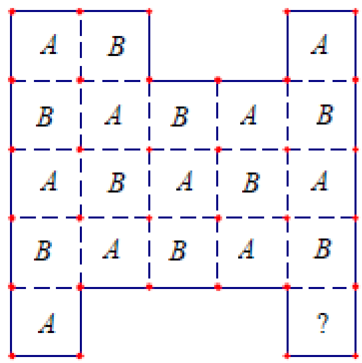
4 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt $\boxed{B}$

Eğer tüm karelere taş koyulmuşsa, ortak kenara sahip karelerde farklı renklerde taş olacağından A ve B ile göstereceğimiz iki farklı renkle boyama yapılabilir. Ancak bazı karelere taş konulmamışsa iki rengin yetmeyeceğini gösterelim. Şekildeki gibi 21 kareye taş koyulmuş olsun. İki renk ile boyamaya başlarsak aşağıdaki desen oluşur. ? ile gösterdiğimiz karedeki taşın dört kare solunda A rengi olduğu için ? karesini A ile boyayamayız. Ayrıca ? karesinin üstündeki karede de B rengi olduğundan ? karesindeki taşı B ile de boyayamayız. Böylece ? karesi için üçüncü bir C rengi kullanmamız gerektiğini anlarız. $k \geq 3$ tür.



Genel olarak bir karedeki taşın rengini kısıtlayan iki unsur vardır. Bunlar, o taşın üstündeki ilk taş ile o taşın solundaki ilk taştır. Üstünde ve solunda A, B renkli taş bulunan taşı C rengiyle boyarız. Üstünde ve solunda A, C renkli taş bulunan taşı B rengiyle boyarız. Üstünde ve solunda B, C renkli taş bulunan taşı da A rengiyle boyarız. Elbette üstünde ve solunda aynı renkli, örneğin A, A taşları bulunan taşı B ya da C renginden istediğimiz herhangi biriyle boyayabiliriz. $k = 3$ tür.

5 Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ve $[AC]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{DBC}) = 90^\circ$ dir. $\dfrac{|CD|}{|AB|} = 2\sqrt{2}$ ise $m(\widehat{BDC})$ nedir?

a) 52.5° **b)** 60° **c)** 67.5° **d)** 75° **e)** 90°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$AB = \sqrt{2}$ olsun. $CD = 4$ olur.

DC nin orta noktası M olsun. $BM = 2$ dir.

B den AC ye inilen dikmenin ayağı H olsun. $\triangle ABH$ de, $BH = 1$ olacaktır. Bu durumda $\angle BMH = 30^\circ$, dolayısıyla da $\angle BDC = 75^\circ$ olacaktır.

6 n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ birer tam sayı olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için $b_i = {a_i}^2$ olarak tanımlanıyor. Hiçbir $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tam sayı n-lisi için $2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} - n^2$ ifadesi 7 ile tam bölünmüyorsa n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Tam kareler mod 3 te $0, 1$ olduğu için ve $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$, $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$ olduğu için $2^{b_i} \equiv 1, 2 \pmod 7$ olur. Dolayısıyla $T = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} \equiv n, n+1, \ldots, 2n \pmod 7$ dir. Görüldüğü üzere $n \geq 6$ için T ifadesi mod 7 de her kalanı verebilir. $n^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$ olduğu için $n \geq 6$ ise $T \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$ olacak şekilde $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tam sayı n-lisi bulunabilir. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için denenirse $n = 3, 4, 5$ in istenen durumu sağladığı görülür.

$\boxed{7}$ Bir $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right\} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan her x için,

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{7x+2}\right) = x$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(1)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) $\frac{1}{7}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{2}{7}$ *d)* $\frac{1}{2}$ *e)* Hiçbiri

Çözüm:

$x = 1$ için $f(1) + f(0) = 1$

$x = 0$ için $f(0) + f(-1/2) = 0$

$x = -1/2$ için $f(-1/2) + f(1) = -1/2$

İkinci denlemi birinci denklemden çıkarırsak ve üçüncü denklem ile toplarsak

$f(1) - f(-1/2) = 1$

$f(-1/2) + f(1) = -1/2$

$2f(1) = 1/2$

$f(1) = 1/4.$

$\boxed{8}$ Başlangıçta masa üzerinde her biri 51 gram süt içeren birkaç bardak bulunuyor. Bir kedi her işlemde önce masadaki her bardaktan 3 gram süt içiyor, daha sonra bir bardak alıp bu bardaktaki sütü diğer bardaklara eşit olarak dağıtıyor ve boş bardağı masadan atıyor. Birkaç işlem sonucunda masada tek bir bardak kalıyor. Bu son bardakta yine 51 gram süt bulunuyorsa kedi toplamda kaç gram süt içmiştir?

a) 1530 **b)** 1581 **c)** 1632 **d)** 1683 **e)** 1734

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: 1581.

Bardak sayısı n olsun. Toplam içilen suyu iki farklı biçmde hesaplayalım: $51 \times (n-1)$ ve $3(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2)$. O zaman $51(n-1) = 3\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$ ve buradan $n^2 - 33n + 32 = 0$. Buradan $n = 1$ ve $n = 32$ değerlerini elde ediyoruz. $n > 1$ olma zorundadır. $n = 32$ sorudaki koşulları sağlıyor ve cevap $51 \cdot 31 = 1581$ dir.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

9 Bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. EF doğrusu $[CB$ ışınını P noktasında kesiyor. Buna göre $|BD| = 1$, $|CD| = 3$, $|PF| = \sqrt{5}$ ise $|CA|$ uzunluğu kaçtır?

a) 4 **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** 5 **d)** $4\sqrt{2}$ **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Menaleustan $\dfrac{PB}{PB+4} \cdot \dfrac{3}{AE} \cdot \dfrac{AF}{1} = 1$ bulunur. $AE = AF$ olduğu için $PB = 2$ bulunur. Buradan PBF üçgeninin dik üçgen olduğunu görürüz. O zaman ABC üçgeni de diktir. Pisagordan $AF = x$ olmak üzere $(x+1)^2 + 16 = (x+3)^2$ ve $x = 3$ bulunur. Yani $|CA| = 5$ tir.

Not: Bir başka yol olarak P,B,D,C noktaları harmonik olduğu için $PB = x$ olmak üzere $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{1}{3}$ ten $x = 2$ bulunabilir.

10 $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ olmak üzere kaç farklı p asal sayısı için $a^2 + b + 1$ ve $b^2 + a + 1$ sayılarının her ikisi de p ile tam bölünecek biçimde a ve b tam sayıları bulunabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 4.

$a^2 + b + 1 \equiv b^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan $a^2 + b + 1 - \left(b^2 + a + 1\right) = (a-b)(a+b-1) \equiv 0 \pmod{p}$ olur. $a \equiv b \pmod{p}$ için $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ve buradan da $(2a+1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$ olur. $a + b \equiv 1 \pmod{p}$ için ise $a^2 - a + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ ve buradan da $(2a-1)^2 \equiv -7 \pmod{p}$ elde ederiz. Yani soruda verilen koşulları sağlayan bir a, b ikilisi vardır ancak ve ancak -3 ve -7 sayılarından en az biri p modunda karekalandır. $5^2 \equiv -3 \pmod{7}$, $6^2 \equiv -3 \pmod{13}$, $4^2 \equiv -3 \pmod{19}$ ve $2^2 \equiv -7 \pmod{11}$ olduğundan $7, 11, 13, 19$ şartları sağlar. $p = 17$ için ise karekalanlar $0, 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13$ olup -3 ve -7 karekalan değildir. Bu yüzden cevap 4 olur.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

11

$$\begin{aligned} (x+2y)(y+2z)(z+2x) &= 1 \\ (2x+y)(2y+z)(2z+x) &= 2 \\ (x+y)(y+z)(z+x) &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için xyz ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) $-\dfrac{1}{2}$ **b)** $-\dfrac{5}{2}$ **c)** $\dfrac{1}{4}$ **d)** $\dfrac{5}{4}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

İfadeleri açıp ilk ikisini toplayalım.

$\Rightarrow T = 6x^2y + 6xy^2 + 6x^2z + 6xz^2 + 6y^2z + 6yz^2 + 18xyz = 3$

Üçüncü ifadeyi açarsak $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz = 3$ olur. Üçüncü ifadeyi 6 ile çarpıp T den çıkaralım.

$\Rightarrow 6xyz = -15$

Yani $xyz = -\dfrac{5}{2}$ olabilir.

12 İki basamaklı sayılardan oluşan her $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinin herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanı bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 38 **b)** 41 **c)** 45 **d)** 51 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt $\boxed{B}$

$n = 40$ için istenen özelliğin sağlanmadığına dair ters örnek verelim. $\{10, 11, 12, \ldots, 49\}$ kümesindeki sayıların onlar basamağındaki rakamlar $1, 2, 3, 4$ ten oluşmaktadır. Dolayısıyla bu 5 sayı nasıl seçilirse seçilsin güvercin yuvası prensibi gereği en az ikisinin onlar basamağı aynı olur. Yani $n \geq 41$ dir.

90	91								99
20	21								29
10	11	12							19

x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2	x_3
x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1	x_2
x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

$n = 41$ durumunda daima istenen özellikte 5 sayı seçilebileceğini ispatlayalım. Önce iki basamaklı tüm sayıları 9×10 tabloya yazalım. Bu tablonun m inci satırındaki sayıların onlar basamağı m, n inci sütunundaki sayıların birler basamağı $n - 1$ dir. Şimdi aynı tablonun birim karelerini $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ ile göstereceğimiz 10 farklı renkle aşağıdaki gibi boyayalım. Hiçbir satırda veya sütunda aynı renk iki kez görülmez. Bu tablodan 41 kare nasıl seçilirse seçilsin $\lfloor \dfrac{41}{10} \rfloor + 1 = 5$ kare aynı renkle boyanmıştır. Bu 5 kare istenen özellikteki sayıları bulundurur.

13 Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?

a) 4 **b)** $\dfrac{9}{2}$ **c)** 5 **d)** $\dfrac{11}{2}$ **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$AD = AE$ olduğundan ve AO iç açıortay olduğundan $DO = OE = 8$ dir. $\angle ADE = \angle AED = \alpha$, $\angle DBO = \angle OBC = \beta$, $\angle BCO = \angle OCE = \theta$ olsun. $DBCE$ dörtgeninde iç açılar toplamından $\alpha + \beta + \theta = 180°$ bulunur. O zaman $\angle DOB = \theta$ ve $\angle COE = \beta$ dır. Yani $\triangle BOD$ ve $\triangle OCE$ benzerdir. $\dfrac{9}{8} = \dfrac{x}{4}$ ten $x = \dfrac{9}{2}$ bulunur.

14 $3, 5, 7, 11, 13$ sayılarından kaç tanesi $(n + 3)(n + 7)(n + 11)(n + 15) + 257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$f(n) = (n+3)(n+7)(n+11)(n+15) + 257$ ve $g_k(n) \equiv f(n-9) - 257 \pmod{k}$ olarak tanımlayalım.

$g_3(n) \equiv (n^2-1)(n^2-0) \equiv 1$

$g_5(n) \equiv (n^2-4)(n^2-1) \equiv 3$

$g_7(n) \equiv (n^2-4)(n^2-1) \equiv 2$

$g_{11}(n) \equiv (n^2-4)(n^2-3) \equiv 7$

$g_{13}(n) \equiv (n^2-4)(n^2-10) \equiv 3$

denkliklerini sağlayan değerleri araştıracağız.

$g_k(n) \equiv 0$ nın köklerinin sağlamayacağı aşikar. Bu yüzden onları doğrudan eleyeceğiz. $n = 0$ ın da kök olmadığı aşikar.

g_3 için karesel kalanları yazalım: $\{\cancel{0}, \cancel{1}\}$. Yani, $k = 3$ için $f(n) \equiv 0 \pmod{k}$ olamaz.

g_5 için karesel kalanlar: $\{\cancel{0}, \cancel{1}, \cancel{4}\}$. $k = 5$ te kümede.

g_7 için karesel kalanlar: $\{\cancel{0}, \cancel{1}, \cancel{4}, 2\}$.

$n^2 \equiv 2$ için $(2-4)(2-1) \not\equiv 2 \pmod{7}$ olduğu için $k = 7$ de kümede.

g_{11} için karesel kalanlar: $\{\cancel{0}, 1, \cancel{4}, 9, 5, \cancel{3}\}$.

$n^2 \equiv 1$ için $(1-4)(1-3) \equiv 6 \not\equiv 7 \pmod{11}$.

$n^2 \equiv 9$ için $(9-4)(9-3) \equiv 8 \not\equiv 7 \pmod{11}$.

$n^2 \equiv 5$ için $(5-4)(5-3) \equiv 2 \not\equiv 7 \pmod{11}$.

$k = 11$ de kümede.

g_{13} için karesel kalanlar: $\{\cancel{0}, 1, \cancel{4}, 9, 3, 12, \cancel{10}\}$.

$n^2 \equiv 12$ için $(12-4)(12-10) \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13}$ olduğu için $k = 13$ kümede değil.

O halde, $3, 5, 7, 11$ sayıları için söz konusu ifadenin hiçbir değeri bu sayılara tam bölünmez.

$\boxed{15}$ $1 \le |a|, |b|, |c| \le 10$, $a \ne c$ ve $b^2 \ge 4ac$ koşullarını sağlayan tüm a, b, c tam sayıları için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2 + bx + a = 0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a, b, c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?

a) 20 **b)** 40 **c)** 50 **d)** 60 **e)** 80

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 80.

(a, b, c) bir çözümse $(-a, -b, -c)$ de bir çözümdür. Ayrıca $ac > 0$ olmalıdır. Aksi halde her iki denklemin kökleri ters işaretli olacağından ilkinin en küçük kökü negatif ikincinin en büyük kökü pozitif olur ve çelişki elde ederiz. Simetriden $a > 0, c > 0$ durumundaki çözüm sayısı, $a < 0, c < 0$ durumu ile aynıdır. $a > 0, c > 0$ kabul edelim. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin en küçük kökü $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ve $cx^2 + bx + a = 0$ denkleminin en büyük kökü $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ olur. Bu iki ifadeyi eşitleyip gerekli sadeleştirmeleri yaparsak $(a + c)^2 = b^2$ elde ederiz. Buradan da $a + c = |b|$ elde ederiz. $b > 0$ için $a + c = b$ ve $a > c, b < 0$ için ise $a + c = -b$ ve $c > a$ olmalıdır. Simetriden dolayı her iki durum için çözüm sayısı eşittir. $b > 0$ için $a + c = b$ ve $a > c$ durumunda her $b > 0$ değeri için $\lfloor (b-1)/2 \rfloor$ tane (a, c) ikilisi elde ederiz. $b = 1, 2, \ldots, 10$ durumları için toplamda $0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 20$ adet çözüm gelir. $b < 0$ için de 20 çözüm vardır. Buradan da 40 çözüm buluruz. Son olarak tüm çözümleri -1 ile çarparsak 40 yeni çözüm elde ederiz. Sonuç olarak toplam çözüm sayısı 80 olur.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

16 $1, 2, \ldots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a \mid b$ ve $b \mid c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 6.

İlk önce en az 6 renk gerektiğini gösterelim. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ sayılarının herhangi üçü aynı renge boyanırsa koşullar sağlanmaz. Demek ki renk sayısı $11/2 = 5.5$ 'den az olmayacaktır. Şimdi 6 renk ile gereken boyamayı yapalım. $1, 2, \ldots, 2016$ sayılarını 11 gruba ayıralım: $G_1 = \{1\}$, $G_2 = \{2, 3\}$, $G_3 = \{4, 5, 6, 7\}$, $G_4 = \{8, 9, 10, \ldots 14, 15\}$, $\ldots, G_{10} = \{512, 513, \ldots, 1022, 1023\}$, $G_{11} = \{1024, 1025, \ldots, 2015, 2016\}$. Aynı gruptaki herhangi iki sayıdan daha küçük olan daha büyük olanı bölmüyor. Bu nedenle her renk en fazla iki grupta kullanılmak üzere, her gruptaki sayıların tümü aynı renge boyanırsa koşullar sağlanmış olur.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

17 Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadaştır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?

a) $4\sqrt{5}$ **b)** 9 **c)** $\sqrt{85}$ **d)** $3\sqrt{10}$ **e)** $\sqrt{91}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Ceva dan $FE \parallel BC$ dir. $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AF}{FB} = \dfrac{3}{5}$ olduğu için $AE = \dfrac{9}{4}$ ve $EC = \dfrac{15}{4}$ bulunur. $AB^2 - \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 = 10^2 - \left(\dfrac{15}{4}\right)^2$ nden $AB = \sqrt{91}$ bulunur.

18 n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?

a) 11 **b)** 17 **c)** 24 **d)** 30 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt $\boxed{B}$

$n = p(d_1 + d_2)$, $d_1|n$, $d_2|n$ ve $d_1 \neq d_2$ ise $d_1 > d_2$ kabul edebiliriz. $n = d_1 x = d_2 y$ olacak şekilde $1 \leq x < y$ tamsayıları vardır. $d_1 = \frac{n}{x}$ ve $d_2 = \frac{n}{y}$ değerlerini $n = p(d_1 + d_2)$ denkleminde yazalım. $n = p\left(\frac{n}{x} + \frac{n}{y}\right)$ olup buradan $xy–px–py = 0$ elde edilir. Her iki tarafa p^2 ekleyelim. $xy–px–py + p^2 = p^2$ ifadesi $(x - p)(y - p) = p^2$ biçiminde çarpanlara ayrılır. $x < y$ olduğundan yalnızca

$$x - p = 1y - p = p^2$$

durumu incelenir. $x = p + 1$, $y = p(p + 1)$ dir. O halde $n = d_2 y = d_2 p(p + 1)$ dir. $p(p + 1) \leq n < 100$ olduğundan $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ dir.

$p = 7$ için $n = 56d_2$ dir. $d_2 \in \{1\}$ olup $n \in \{56\}$ dır.

$p = 5$ için $n = 30d_2$ dir. $d_2 \in \{1, 2, 3\}$ olup $n \in \{30, 60, 90\}$ dır.

$p = 3$ için $n = 12d_2$ dir. $d_2 \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ olup $n \in \{12, 24, \ldots, 96\}$ dır.

$p = 2$ için $n = 6d_2$ dir. $d_2 \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ olup $n \in \{6, 12, \ldots, 96\}$ dır.

$p = 3$ ve $p = 5$ durumlarından elde edilen n değerleri $p = 2$ içinde zaten vardır. $p = 2$ ve $p = 7$ durumlarından toplam $16 + 1 = 17$ farklı n değeri elde edilir.

19 Gerçel katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{3}{4}$

Çözüm 1:

Yanıt $\boxed{E}$

Soruda P nin polinom olduğu verilmeyip sadece sürekli bir fonksiyon olduğu verilse bile yeterlidir. P nin sürekli fonksiyon olduğu zayıflatılmış şartıyla çözümü yapacağım, polinom olduğu bilgisini kullanmayacağım.

Verilen fonksiyonel denklemi sağlayan iki fonksiyon P ve R olsun.

$$P(x + y) = P(x) + P(y) + 2xy - 1$$
$$R(x + y) = R(x) + R(y) + 2xy - 1$$

denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak $(P - R)(x + y) = (P - R)(x) + (P - R)(y)$ olur. $P - R = f$ dersek $f(x + y) = f(x) + f(y)$ Cauchy fonksiyonel denklemini elde ederiz. f fonksiyonu sürekli olduğundan tüm çözümler $f(x) = cx$ biçimindedir. Dolayısıyla verilen fonksiyonel denklemin herhangi iki çözümü arasındaki fark daima cx tir. Yani $P(x) - R(x) = cx$ olur. Eğer fonksiyonel denklemin bir $R(x)$ özel çözümünü bulursak tüm $P(x)$ çözümlerini de bulabiliriz.

$R(x+y) = R(x)+R(y)+2xy-1$ denkleminin bir özel çözümünün $R(x) = x^2+1$ olduğunu tahmin edebiliriz. Genel çözüm $P(x) = x^2 + cx + 1$ dir. $P(1) = 1$ için bir başka özel çözüm bulunur. $1 + c + 1 = 1$ den $c = -1$ olur. $P(x) = x^2 - x + 1$ elde edilir. Bu parabolün minimum değeri $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ tür.

Çözüm 2:

Yanıt : $\boxed{E}$

$P(x) = x^2 + 1 + Q(x)$ olarak yazalım. Denklemde yerine yazarsak $Q(x) + Q(y) = Q(x + y)$ bulunur. Cauchy fonksiyonel denkleminde ötürü a bir reel sayı olmak üzere $Q(x) = ax$ bulunur. $P(x) = x^2 + ax + 1$ olduğu anlaşılır. $P(1) = a+2 = 1$ olduğundan $a = -1$ olur. $x^2 - x+1$ polinomunun minimum değeri $x = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ olduğunda olacağından cevap $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ bulunur.

20 Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal olacak şekilde sıraya dizilebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 5.

$n + 1$ ve $n - 1$ sayıları asal ise $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde dizilebilir. Dizi

$$n, 1, n - 2, 3, n - 4, 5, \ldots, 6, n - 5, 4, n - 3, 2, n - 1$$

şeklinde olacaktır (dizinin tek numaralı elemanları çift ve çift numaralı elemanları tek sayılardır ve çift sayılar azalan, tek sayılar artan alt dizi oluşturuyor). Bu durumda dizinin herhangi iki komşu elemanının toplamı $n + 1$ veya $n - 1$ olacaktır.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

21 $|AB| = 13, |BC| = 4, |CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?

a) $\frac{3}{2}$ **b)** 2 **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** 3 **e)** $\frac{7}{2}$

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{A}$

Heron formülünden üçgenin alanı 24 bulunur. $u = 16$ olduğu için $u.r = 24$ ten iç teğet çemberin yarıçapı $r = \frac{3}{2}$ bulunur. Aynı zamanda BC kenarına ait yükseklik BC yi H de kessin. Alandan dolayı $AH = 12$ bulunur. Üçgen geniş açılı olduğu için H noktası $|BC|$ nin dışındadır. $BH = 5$ bulunur.İç teğet çemberin BC kenarına değdiği noktaya D diyelim. Basit hesaplamalarla $BD = 1$ bulunur. O zaman $DM = 1$ dir. KHM ve IDM üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{1}{7} = \frac{\frac{3}{2}}{KH}$ ve $KH = \frac{21}{2}$ bulunur. $AK = 12 - KH = \frac{3}{2}$ bulunur.

22 Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Tam küpler $\pmod 7$ de $0, 1, 6$ kalanlarını verebilir. $1376 \equiv 4 \pmod 7$ dir. O zaman $n \geq 2$ olmak üzere $a_n \equiv 3, 4, 5 \pmod 7$ dir. Tam kareler $\pmod 4$ te $0, 1, 2, 4$ kalanlarını verdiğinden $a_n \equiv 4 \pmod 7$ olursa ancak tam kare olabilir. Farz edelim ki $k \geq 2$ olmak üzere bir a_k için $a_k \equiv 4 \pmod 7$ olsun. O zaman $a_{k+1} \equiv 5 \pmod 7$ olur. $a_{k+2} \equiv 3 \pmod 7$ olur. Devam edersek $a_{k+3} \equiv 3 \pmod 7$ olduğu görülür. Yani bundan sonra bütün terimler $\pmod 7$ de 3 kalanı verir. Demek ki bir $a_k \equiv 4 \pmod 7$ için a_k dan sonraki terimlerin hiçbiri tam kare olamaz. Şimdi a_k dan önceki terimlere bakalım. $a_{k-1} \equiv 0 \pmod 7$ olmalıdır. Ama $n \geq 2$ olmak üzere $a_n \equiv 3, 4, 5 \pmod 7$ olmak zorunda demiştik. O zaman $k - 1 < 2$ olmalıdır. Yani tam kare olarak farz ettiğimiz a_k terimi a_2 veya a_1 olabilir. Eğer $k = 1$ ise dizide en fazla bir tane tam kare olabilir. Eğer $k = 2$ ise dizide en fazla 2 tane tam kare olabilir. Yani hem a_1 hem de a_2 tam kare olması koşuluyla. Dolayısıyla bu dizide en fazla 2 tane tam kare bulunabilir. Örnek olarak $a_1 = 7^2$ ve $a_2 = 49^3 + 1376 = 343^2 + 4.343 + 4 = 345^2$ verebiliriz.

Çözüm 2:

Ardışık iki tam kare terim örneğinin nasıl bulunduğunu açıklayalım. $a_n = y^2$ ve $a_{n+1} = x^2$ olsun. $x^2 - y^6 = 1376$ dır. Çarpanlara ayırırsak

$$(x - y^3)(x + y^3) = 2^5 \cdot 43$$

olur. Muhtemel durumlar incelenirse yalnızca $x - y^3 = 2$ ve $x + y^3 = 688$ denklem sisteminden çözüm gelir ve $(x, y) = (345, 7)$ bulunur.

$\boxed{23}$ Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \dfrac{4}{a_n a_{n-1}} = 2\left(1 + \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 1.

İfade düzenlenirse $(a_n a_{n+1} - 2)(a_n a_{n-1} - 2) = 0$ elde edilir. Buradan da tüm terimler farklı olduğundan her $i = 0, 2, 4, \ldots$ için $a_i a_{i+1} = 2$ veya her $i = 1, 3, 5, \ldots$ için $a_i a_{i+1} = 2$ olmalıdır. $a_0 = \sqrt{2}$ olduğundan ilki olamaz. Bu durumda da $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016} = 2^{1008}$ olur.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

$\boxed{24}$ Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

a) 204 **b)** 216 **c)** 228 **d)** 239 **e)** 251

Çözüm:

Yanıt $\boxed{D}$

Problemi genel halde, $2n$ kırmızı ve $2n$ beyaz topu n kutuya dağıtma şeklinde çözelim. İstenen özellikteki dağıtımların sayısı a_n olsun. Kırmızı ve beyaz topları kısaca K, B ile gösterelim. İlk kutuya KK, KB, BB dağıtıldığında kalan $n-1$ kutuya istenen özellikte sırasıyla b_{n-1}, c_{n-1}, b_{n-1} yolla dağıtılsın. a_n bu üç ayrık toplamından oluşur.

$$a_n = 2b_{n-1} + c_{n-1} \ldots (1)$$

Şimdi b_{n-1} i inceleyelim. İkinci kutuya KK veya KB konabileceğinden

$$b_{n-1} = b_{n-2} + c_{n-2} \ldots (2)$$

olur. Şimdi de c_{n-1} i inceleyelim. İkinci kutuya KK , BB veya KB konabileceğinden

$$c_{n-1} = 2b_{n-2} + c_{n-2} \ldots (3)$$

olur. (1) ve (3) ten

$$c_{n-1} = a_{n-1} \ldots (4)$$

bulunur. Ayrıca (2) ve (3) ten $2b_{n-1} = c_{n-1} + c_{n-2}$ olup (4) ten dolayı bu denklemi

$$2b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} \ldots (5)$$

biçiminde yazabiliriz. (4) ve (5) i (1) de kullanırsak

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \ldots (6)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. a_1 için KK, BB, KB durumları olup $a_1 = 3$ bulunur. a_2 için $\{KK, KB\}$, $\{KK, KK\}$, $\{BB, KB\}$, $\{BB, BB\}$, $\{KB, KB\}$, $\{KB, KK\}$, $\{KB, BB\}$ durumları olup $a_2 = 7$ dir. (6) dan faydalanarak

$a_3 = 2a_2 + a_1 = 17$

$a_4 = 2a_3 + a_2 = 41$

$a_5 = 2a_4 + a_3 = 99$

$a_6 = 2a_5 + a_4 = 239$ bulunur.

25 Dar açılı bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna A da teğet olan çemberi ikinci kez K de kesiyor. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna B de teğet olan çemberi ikinci kez L de kesiyor. $|CK| = 12$, $|KL| = 9$ ise $|CL|$ uzunluğunun alabileceği değerler toplamı kaçtır?

a) 12 **b)** 15 **c)** 18 **d)** 21 **e)** 24

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

ABC üçgeninde H diklik merkezi olsun.

$\angle HCB = \angle BAH = \angle BAK = \angle ACK$ dır.

Benzer şekilde $\angle HCA = \angle ABH = \angle ABL = \angle BCL$.

Bu iki eşitliği birleştirirsek $\angle ACL = \angle ACK$ elde edilir. Yani C, L, K doğrusaldır.

Bu durumda, $CL = 12 - 9 = 3$ ya da $CL = 12 + 9 = 21$ değerlerini alacaktır. $\boxed{3 + 21 = 24}$.

Not: Dikkat edilirse CKL doğrusu CH nin izogonal eşleniğidir. Yani CKL doğrusu ABC nin çevrel merkezi O dan geçer. Bu durumda O nun pozisyonuna göre CO doğrusu AH, BH doğrularından (yükseklikler) önce birini sonra diğerini kesecektir. Yani sorudaki iki ihtimal de duruma göre gerçekleşecektir.

26 $\binom{3n}{n}$ ifadesinin 2016 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?

a) 11 *b)* 23 *c)* 31 *d)* 43 *e)* Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ olduğundan $\binom{3n}{n} = \dfrac{(3n)!}{(2n)! \cdot n!}$ ifadesinin asal çarpanlarına ayrılmış halinde 2, 3, 7'nin kuvvetleri sırasıyla en az 5, 2 ve 1 olmalıdır. 3 ve 7 asallarından n'yi sınırlandırmamız zordur çünkü $n = 3$ için $7 \mid \binom{3n}{n}$ ve $n = 4$ için $3^2 \mid \binom{3n}{n}$ olacaktır. Yani n'yi alttan sınırlamak için 2 asalına bakmak mantıklıdır. $n!$'deki 2'nin kuvveti

$$v(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla

$$v\left(\binom{3n}{n}\right) = v\left(\frac{(3n)!}{(2n)! \cdot n!}\right) = v((3n)!) - v((2n)!) - v(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{3n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \right)$$

$S_n(k) = \left\lfloor \frac{3n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$ diyelim. Bu durumda

$$v\left(\binom{3n}{n}\right) = S_1(n) + S_2(n) + S_3(n) + \cdots$$

olacaktır. Eğer Öklit algoritmasıyla $n = 2^k a + b$ olarak yazarsak $(0 \le b < 2^k)$

$0 \le b < \frac{2^k}{3}$, $\frac{2^k}{3} < b \le 2^{k-1}$, $2^{k-1} < b < \frac{2^{k+1}}{3}$ ve $\frac{2^{k+1}}{3} < b < 2^k$ durumlarını incelersek her durumda $S_n(k) = 0$ veya 1 olabileceğini görürüz. Eğer $3n < 2^k$ ise $S_n(k)$ kesinlikle 0 olacaktır, bu yüzden $S_n(k) = 1$ olması için $3n \ge 2^k$ olmalıdır. Her n için $S_1(n) = 0$ olacağından 5'i elde etmek için ilk 6 terime bakmalıyız, eğer $3n < 2^6 = 64$ ise $k \ge 6$ için $S_k(n) = 0$ olacaktır ve sadece $k = 2, 3, 4, 5$ için $S_k(n) = 1$ olabileceğinden 2'nin 5. kuvveti elde edilemez. Dolayısıyla $3n \ge 64$ olmalıdır. Yani $n \ge 22$ olmalıdır.

$n = 22$ ise $v\left(\binom{3n}{n}\right) = 4$ olacaktır. İstenileni sağlamaz. Ancak $n = 23$ için 2, 3 ve 7'nin kuvvetleri istenilen şekilde olacaktır.

27 $P(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) -1 *b)* 0 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 3

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$P(x)$ polinomunun bir kök varsa bu kök ya $x^3 + x + 1$ polinomunun ya da $x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ polinomunun bir köküdür.Öncelikle, $x^3 + x + 1$ in Descartes'ın işaret değişimi kuralından hiç pozitif kökü yoktur.x yerine $-x$ yazarak da yine Descartes'ten tam olarak bir negatif kökü olduğuna ulaşırız.

$x^3 + x + 1$ polinomunun bir kökü a olsun. Şimdi $x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ polinomunda x yerine $1 - a$ yazalım. $(1-a)^3 - 3(1-a)^2 + 4(1-a) - 3 = -(a^3 + a + 1) = 0$ olduğundan; buradan $x^3 + x + 1$ ve $x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ polinomlarını kökleri arasında bire bir eşleme olduğuna ulaşırız. Yani iki polinomun da tam olarak birer reel kökü vardır ve toplamları 1 dir.

Çözüm 2:

$x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x - 1) - 1$ olduğundan $y = x - 1$ dersek $y^3 + y - 1 = 0$ olur. Bu ifade y değişkenine göre artan bir fonksiyon belirttiğinden tam olarak $y_1 = x_1 - 1$ şeklinde bir gerçel köke sahiptir. Ayrıca $x^3 + x + 1 = 0$ ifadesi de x e göre artan bir fonksiyon belirttiğinden tam olarak $x = x_2$ şeklinde bir gerçel köke sahiptir. Dolayısıyla $P(x) = 0$ denkleminin iki farklı gerçel kökü vardır.

$$x^3 + x + 1 = 0 y^3 + y - 1 = 0$$

denklemlerini taraf tarafa toplarsak $(x^3 + y^3) + (x + y) = 0$ olup $(x + y)(x^2 + y^2 - xy + 1) = 0$ elde edilir. $x^2 + y^2 - xy + 1 > 0$ olduğundan $x + y = 0$ olmalıdır. Buradan $x_1 + x_2 = 1$ elde edilir.

28 Bir torbada başlangıçta 2016 adet eşit uzunluklu çubuk bulunuyor. Her işlemde bir çubuk seçilip iki eşit parçaya bölünüyor. İşlemler nasıl yapılırsa yapılsın torbada her zaman en az n tane eşit uzunluklu çubuk bulunuyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2 *b)* 505 *b)* 756 *b)* 1009 *b)* 1511

Çözüm:

Yanıt $\boxed{D}$

2016 tane 1 birim uzunluğunda parça olsun. Bunları 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\dots$, $\frac{1}{2^k}$ birimlik parçalara sırasıyla x_0, x_1, $\dots$, x_k tane olacak şekilde ayıralım. Bunların her birinden en fazla n tane vardır. Yani $\max\{x_0, x_1, \dots, x_k\} = n$ dir. Bunların toplam uzunluğu $T = 1 \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2^2} \cdot x_2 + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot x_k = 2016$ olur. Her i için $x_i \le n$ olduğundan $n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \ge 2016$ dır. Geometrik toplam formülünden $2n\dfrac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \ge 2016$ dır. Ayrıca $\dfrac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} < 1$ olduğundan $n > 1008$ elde edilir.

Şimdi de $n = 1009$ için $T = 1 \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2^2} \cdot x_2 + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot x_k = 2016$ denklemini sağlayan $x_0, x_1, \ldots,$ x_k tamsayılarına örnek bulalım. $k = 10$, $x_0 = 1009$ alırsak bu denklem

$$2^9 x_1 + 2^8 x_2 + \cdots + 2x_9 + x_{10} = 1007 \cdot 2^{10}$$

biçimine dönüşür. $x_1 = x_2 = \cdots = x_{10} = 1007$ örnek bir çözümdür.

29 $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışınını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?

a) 15° **b)** 22.5° **c)** 30° **d)** 37.5° **e)** 45°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$AC = 1$ olsun ve $\angle DEB = \alpha$ olsun.

ACE üçgeninde Sinüs Teoreminden $AE = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha}$.

BDE üçgeninde Sinüs Teoreminden $BD = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin 45^\circ}$ ve $BE = \dfrac{2\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = 2(\sin\alpha + \cos\alpha)$ olacaktır.

$AB = BE - AE = 2(\sin\alpha + \cos\alpha) - \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha}$ olacağından $AB + BD = AE$ eşitliğini yazarsak

$$2(\sin\alpha + \cos\alpha) - \frac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha}$$

düzenleyip

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ} = \frac{\dfrac{1}{2} - \sin^2\alpha}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha}$$

$$\sqrt{2}\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha - 1 + 1 + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos 2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos 2\alpha$$

$\sin 2\alpha = x$ dersek

$$1 - \sqrt{1 - x^2} + x = \sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow (\sqrt{1 + x})^2 = \sqrt{1 - x}\sqrt{1 + x}(\sqrt{2} + 1)$$

$$\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x(4 + 2\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$$

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

$[BD$ üzerinde $BF = BE$ olacak şekilde bir F noktası alalım. $\angle EFB = \angle FEB = 67,5^\circ$ ve $DF = 2AB$ olacaktır.

$\angle FDE = \angle CDB = \angle BAC$ ve $DF/DE = AB/AC$ olduğu için $\triangle DFE \sim \triangle ABC$ $(K.A.K)$. Bu durumda $FE = 2BC$ ve $\angle CBA = 67,5^\circ$ olacaktır.

EF nin orta noktası G olsun. $BG \perp EF$ dir. Ayrıca $(K.A.K)$ dan $\triangle GEB \cong \triangle CBE$ dir. Bu durumda $EC \perp BC$ olup $\angle CEB = 22,5^\circ$ çıkacaktır.

Çözüm 3:

Yanıt $\boxed{B}$

Probleme genel bir çözüm verelim. Verilen uzunluk eşitliklerinin yanında $m(\widehat{ABD}) = 2\alpha$ ve $m(\widehat{DEB}) = \beta$ ise $\alpha = \beta$ olduğunu ispatlayalım.

Kirişler dörtgeninde çevre açılardan $m(\widehat{ACD}) = 2\alpha$ olur. $|AB| = x$, $|BD| = y$, $|AC| = z$ dersek $|AE| = x + y$ ve $|ED| = 2z$ olur. ADE üçgeninin alanını iki farklı yolla hesaplayalım. D noktasından AE ye inen yüksekliğin uzunluğuna h_1 dersek $h_1 = y \sin 2\alpha$ olur. A noktasından DE ye inen yüksekliğin uzunluğuna h_2 dersek $h_2 = z \sin 2\alpha$ olur. $Alan(ADE) = \frac{1}{2}|AE|h_1 = \frac{1}{2}|DE|h_2$ olduğundan $2z^2 = y(x+y)$ elde edilir.

Şimdi BDE üçgeninde sinüs teoremini yazarsak

$$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{2x+y}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{2z}{\sin 2\alpha} = \frac{2(x+y)}{\sin\beta + \sin(2\alpha+\beta)}$$

olup

$$\frac{y}{\sin\beta} \cdot \frac{2(x+y)}{\sin\beta + \sin(2\alpha+\beta)} = \frac{4z^2}{\sin^2 2\alpha}$$

bulunur. $2z^2 = y(x+y)$ eşitliğinden

$\sin^2 2\alpha = \sin^2\beta + \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta)$

$\implies \sin^2 2\alpha - \sin^2\beta = \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta)$

$\implies (\sin\alpha - \sin\beta)\cdot(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta)$

$\implies \sin(2\alpha-\beta)\cdot \sin(2\alpha+\beta) = \sin\beta\cdot\sin(2\alpha+\beta)$

$\implies 2\alpha - \beta = \beta$

$\implies \alpha = \beta$ sonucuna ulaşılır.

30 $23, 29, 31, 37, 41$ sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını böler?

a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$m^7 - n^7 \equiv 3 \pmod{k}, k \in \{23, 29, 31, 37, 41\}$ denkliğinin çözümlerinin varlığını arıyoruz.

İlk olarak $k = 23$ için, $m = k^3, n = \ell^3$ olarak değiştirirsek, denklik, $k^{21} - \ell^{21} \equiv 3 \pmod{23}$ şekline döner, Euler-Phi fonksiyonundan, $\varphi(23) = 22$ bulunur. Böylece, $k^{21} - \ell^{21} \equiv 3 \pmod{23} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{\ell} \equiv 3 \pmod{23} \Rightarrow \dfrac{\ell}{3\ell+1} \equiv k \pmod{23}$ denkliğinin çözümünün olabilmesi için, $\left(23, \dfrac{\ell}{3\ell+1}\right) | k$ olması gerekir ki zaten $(n, 3n+1) = 1$ olduğundan bu doğrudur. O halde 23 bu koşulları sağlar.

Şimdi $k = 29$ olsun. Kare alırsak, $m^7 - n^7 \equiv 3 \pmod{29} \Rightarrow m^{14} + n^{14} \equiv 9 + 2(mn)^7 \Rightarrow m^{28} + n^{28} + 2(mn)^{14} \equiv 81 + 4(mn)^{14} + 36(mn)^7 \pmod{29}$ Burada Euler-Phi fonksiyonundan $\varphi(29) = 28$ bulunur. Düzenlersek,

$2 \equiv 23 + 2(mn)^{14} + 36(mn)^7 \pmod{29} \Rightarrow (mn)^{14} + 18(mn)^7 + 81 \equiv 85 \pmod{29} \Rightarrow \left((mn)^7 + 9\right)^2 \equiv 27 \pmod{29}$ bulunur. $27 \equiv -2 \pmod{29}$ olduğundan $27 \pmod 9$ da kare kalan değildir. O halde 29 bu koşulları sağlamaz.

Şimdi de $k = 31$ olsun. Burada $m = a^{13}, n = b^{13}$ olarak değiştirirsek, Euler-Phi fonksiyonundan, $\varphi(31) = 30$ bulunur. Böylece $k^{91} - \ell^{91} \equiv 3 \pmod{31} = k - \ell \equiv 3 \pmod{31}$ buradan $k \equiv 4 \pmod{31}$ ve $\ell \equiv 1 \pmod{31}$ olarak bulunur. Yani 31 koşulları sağlar.

Şimdi $k = 37$ olsun. $m = k^5, n = \ell^5$ olarak değiştirirsek, denklik, $k^{35} - \ell^{35} \equiv 3 \pmod{37}$ şekline döner. Euler-Phi fonksiyonundan $\varphi(37) = 36$ bulunur. Böylece, $k^{35} - \ell^{35} \equiv 3 \pmod{37} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{\ell} \equiv 3 \pmod{37} \Rightarrow \dfrac{\ell}{3\ell + 1} \equiv k \pmod{37}$ denkliğinin çözümünün olabilmesi için, $\left(37, \dfrac{\ell}{3\ell+1}\right) | k$ olması gerekir ki zaten $(n, 3n+1) = 1$ olduğundan bu doğrudur. O halde 37 bu koşulları sağlar.

Son olarak $k = 41$ olsun. $m = k^6, n = \ell^6$ olarak değiştirirsek, denklik, $k^{42} - \ell^{42} \equiv 3 \pmod{41}$ şekline döner. Euler-Phi fonksiyonundan $\varphi(41) = 40$ bulunur. Böylece, $k^{42} - \ell^{42} \equiv 3 \pmod{41} = k^2 - \ell^2 \pmod{41}$ denkliğinin çözümü $k \equiv 2 \pmod{41}$, $\ell \equiv 1 \pmod{41}$ olduğundan bu doğrudur. O halde 41 de bu koşulları sağlar.

Sonuç olarak verilen 5 sayıdan 4 ü bu koşulları sağlar

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

$p \in \{23, 31, 37, 41\}$ sayıları için $k \cdot 7 \equiv 1 \pmod{p-1}$ olacak şekilde k sayısı bulunabileceğini biliyoruz. Çünkü 7 sayısı $22, 30, 36, 40$ sayılarının hepsiyle aralarında asaldır.

$p \in \{23, 31, 37, 41\}$ sayıları için $m^7 - n^7 - 3 \equiv 0 \pmod p$ olacak şekilde (m, n) tamsayılarının bulunduğunu gösterelim.

$k \cdot 7 \equiv 1 \pmod{p-1}$ olsun. $m = a^k, n = b^k$ olacak şekilde seçelim. $\Longrightarrow a^{7k} \equiv a \pmod p$, $\Longrightarrow b^{7k} \equiv b \pmod p$ olur.

$\Longrightarrow m^7 - n^7 - 3 \equiv a - b - 3 \pmod p$ olur. $a = 4, b = 1$ seçerek koşulu sağlatırız.

Şimdi $m^7 - n^7 - 3 \equiv 0 \pmod{29}$ olacak şekilde (m, n) tamsayılarının bulunmadığını gösterelim.

$x^{28} \in \{0, 1\} \pmod{29}$ olduğundan $k = x^7$ sayısı için $k^4 \in \{0, 1\} \pmod{29}$ dur. Bu $k = x^7$ sayısının alabileceği değerlere bakalım.

$k \equiv 0$ veya $k^4 \equiv 1 \pmod{29} \Longrightarrow (k-1)(k+1)(k^2+1) \equiv 0 \pmod{29} \Longrightarrow k \in \{1, -1, 12, 13\} \pmod{29}$.

$\Longrightarrow x^7 \in \{0, 1, 12, 13, 28\} \pmod{29}$

Görüldüğü üzere, $m^7 - n^7 - 3 \equiv 0 \pmod{29}$ olması mümkün değildir.

Sonuç olarak, $23, 29, 31, 37, 41$ sayılarından 29 hariç dördü sorudaki koşulu sağlar.

31 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c pozitif gerçelleri için, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ ifadesi 2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016 sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?

a) 0 *b)* 1 *c)* 2 *d)* 3 *e)* 4

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

$\dfrac{2}{a+b+c}$ ifadesinin 1 den büyük olduğunu ispatlayacağız.

Soruda verilen ifade $\sum_{cyc}(a-b)^2 = 2(\sum_{cyc} a^2 - ab) = \dfrac{2(a+b+c)(\sum_{cyc} a^2 - ab)}{a+b+c} = \dfrac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{a+b+c} = \dfrac{2}{a+b+c}$ olduğundan, $a+b+c$ nin alabileceği minimumunu bulmak yeterli.

Cauchy-schwarz'dan $(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geqslant (a^2+b^2+c^2)^2$ bulunur.

Şimdi $a^3+b^3+c^3 = 3abc+1$ yazarsak, $3abc+1 \geqslant \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c}$ olduğundan

$(3abc+1)(a+b+c) \geqslant (a^2+b^2+c^2)^2 \Rightarrow (3abc+1)(a+b+c) \geqslant 9abc\sqrt[3]{abc} \Rightarrow a+b+c \geqslant \dfrac{9abc\sqrt[3]{abc}}{3abc+1}$ bulunur.

$a^3+b^3+c^3 \geqslant \dfrac{(a+b+c)^3}{9}$ eşitsizliğinden, $9(3abc+1) \geqslant (a+b+c)^3$ ve burada $abc = k$ dersek ifade ,$27^3k^2 \leqslant (27k+9)(3k+1)^3 \Rightarrow k \leqslant \dfrac{1}{2}$ bulunur. Buradan, $\dfrac{2}{a+b+c} > 1$ olur ispat biter. ■

O halde alınabilecek değerler $2016^{-2}, 2016^{-1}$ ve 1 dir.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

Özdeşik: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Ayrıca $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

O halde, $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] = 2$ bilgisi altında $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ifadesinin soruda verilen değerlerden hangilerini alabileceğini bulmak istiyoruz.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ifadesinin $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016$ değerlerine eşit olması için $a+b+c$ ifadesinin sırasıyla $2.2016^2, 2.2016, 2, \dfrac{1}{1008}$ değerlerine eşit olması gerekir.

İddia 1: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2016$ ve $a+b+c = \dfrac{1}{1008}$ olması mümkün değildir.

İspat: Olabileceğini varsayalım. $a+b+c = \dfrac{1}{1008}$ olabilmesi için $a, b, c < 1$ olmalıdır. Ancak bu durumda $2016 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 < a^2+b^2+c^2 < a+b+c = \dfrac{1}{1008}$ elde ederiz. Çelişki.

İddia 2: Diğer 3 durum mümkündür.

İspat: Diğer 3 duruma örnek bulacağız. Kolay olması açısından $(a,b,c) = (x+y, x, x)$ formunda örnekler bulalım.

i) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2016^{-2}, a+b+c = 2.2016^2$

$\Longrightarrow 2y^2 = 2016^{-2}, 3x+y = 2.2016^2$

Bu denklem sisteminin (x,y) çözümünün olduğu açıktır.

ii) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2016^{-1}, a+b+c = 2.2016$

$\Longrightarrow 2y^2 = 2016^{-1}, 3x+y = 2.2016$

Bu denklem sisteminin (x,y) çözümünün olduğu açıktır.

iii) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 1, a+b+c = 2$

$\Longrightarrow 2y^2 = 1, 3x+y = 2$

Bu denklem sisteminin (x,y) çözümünün olduğu açıktır.

O halde $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ifadesi $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1$ sayılarına eşit olabilir ancak 2016 sayısına eşit olamaz.

32 Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2,3,22,23\}$, $\{1,2,3,21,22,23\}$, $\{1,7,12,13,19,24\}$, $\{5,6,11,17,18\}$ ve $\{10,11,12,13,14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt $\boxed{D}$

Aslı'nın hamlesini A, berk'in hamlesini B ile gösterelim. Ayrıca bir sayı silinirse onun yerine 0 koyalım.

Oyunun kazandıran stratejisini belirlemek için daha az sayıyla oynayalım. Örneğin tahtada $\{20, 21\}$ sayıları yazılı olsun. $\{20, 21\}$ için A $\{20, 0\}$ ya da $\{21, 0\}$ oynarsa B de diğer sayıyı siler. Yani $\{0, 0\}$ bırakıp oyunu kazanır. Eğer A $\{20, 22\}$ oynarsa B de $\{21, 22\}$ oynayıp yine A ya ardışık sayılar bırakır. Bu yolla B başlangıç pozisyonunu korur ve oyunu kazanır. a uygun aralıkta bir tamsayı olsun.

(1) $\{a, a+1\}$ ile başlayan oyunu B kazanır.

(2) $\{a, a+2\}$ ile başlayan oyunda A $\{a+1, a+2\}$ hamlesini yaparak B ye (1) durumunu bırakır. A kazanır.

(3) $\{a, a+3\}$ ile başlayan oyunda A $\{a+1, a+3\}$ hamlesini yaparsa B ye (2) durumunu bırakır. B kazanır. Eğer A, $\{a, a+4\}$ hamlesini yaparsa B de buna karşılık $\{a+1, a+4\}$ hamlesini yaparak sayılar arasındaki farkı korumuş olur. Bu yolla B kazanır.

(4) $\{a, a+4\}$ ile başlayan oyunda A $\{a+1, a+4\}$ hamlesini yaparsa B ye (3) durumunu bırakır. A kazanır.

Sonuç 1. Tek sayıyı T ile ve çift sayıyı Ç ile gösterelim. $\{T, T\}$ veya $\{Ç, Ç\}$ oyunlarını A kazanır. $\{T, Ç\}$ oyunlarını B kazanır.

Şimdi üç sayıdan oluşan oyunları inceleyelim.

(5) $\{T, T, T\}$ ile başlayan oyunda A $\{T, T, 0\}$ yaparsa B ye kazandırır. O halde A, $\{T, T, Ç\}$ yapar. Buna karşılık B de $\{0, T, Ç\}$ hamlesiyle karşılık verir. B kazanır.

(6) $\{T, T, Ç\}$ ile başlayan oyunda A $\{0, T, Ç\}$ yapar. A kazanır.

(7) $\{T, Ç, Ç\}$ ile başlayan oyunda A $\{0, T, Ç\}$ yapar. A kazanır.

(8) $\{Ç, Ç, Ç\}$ ile başlayan oyunda A $\{0, Ç, Ç\}$ yaparsa B kazanır. Eğer A $\{T, Ç, Ç\}$ yaparsa B $\{T, Ç, 0\}$ hamlesiyle karşılık verir. B kazanır.

Sonuç 2. $\{T, T, T\}$ ve $\{Ç, Ç, Ç\}$ oyunlarını B kazanır. $\{T, T, Ç\}$ ve $\{T, Ç, Ç\}$ oyunlarını A kazanır.

Şimdi dört sayıdan oluşan oyunları inceleyelim.

(9) $\{T, T, T, T\}$ oyununda A $\{T, T, T, 0\}$ hamlesini yapar. (5) e göre A kazanır.

(10) $\{T, T, T, Ç\}$ oyununda A $\{T, T, T, 0\}$ hamlesini yapar. (5) e göre A kazanır.

(11) $\{T, T, Ç, Ç\}$ oyununda A $\{T, T, Ç, 0\}$ ya da $\{0, T, Ç, Ç\}$ hamlesini yaparsa (6-7) ye göre B kazanır. Eğer A $\{T, T, T, Ç\}$ yaparsa B $\{T, T, T, 0\}$ hamlesini yapar ve (5) e göre B kazanır. Eğer A $\{T, Ç, Ç, Ç\}$ yaparsa B $\{0, Ç, Ç, Ç\}$ hamlesini yapar ve (8) e göre B kazanır.

(12) $\{T, Ç, Ç, Ç\}$ oyununda A $\{T, T, Ç, Ç\}$ yapar ve (11) e göre A kazanır.

(13) $\{Ç, Ç, Ç, Ç\}$ oyununda A $\{0, Ç, Ç, Ç\}$ yapar ve (8) e göre A kazanır.

Sonuç 3. $\{T, T, Ç, Ç\}$ oyununda B, diğer oyunlarda A kazanır.

Şimdi beş sayıdan oluşan oyunları inceleyelim.

(14) $\{T, T, T, T, T\}$ oyununda A $\{T, T, T, T, Ç\}$ oynar. Buna karşılık, B $\{T, T, T, T, 0\}$ oynarsa (9) a göre A kazanır. Eğer B $\{T, T, T, T, T\}$ oynarsa A tekrar $\{T, T, T, T, Ç\}$ oyununu oynar. Eğer B $\{T, T, T, Ç, Ç\}$ oynarsa A tekrar $\{T, T, T, T, Ç\}$ oyununu oynar. Yani B nin tüm hamlelerine karşı A nın ve başlangıç pozisyonunu koruduğu bir hamlesi vardır. Böylece A kazanır.

(15) $\{T, T, T, T, Ç\}$ oyununda (15) deki incelemeden dolayı B kazanır.

(16) $\{T, T, T, Ç, Ç\}$ oyununda A $\{T, T, T, T, Ç\}$ hamlesini yapar. (14) deki incelemeden dolayı A kazanır.

(17) $\{T, T, Ç, Ç, Ç\}$ oyununda A $\{T, T, Ç, Ç, 0\}$ hamlesini yapar. (11) den dolayı A kazanır.

(18) $\{T, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ oyununda A sayılardan birini silerse (12-13) durumlarından biri oluşur ve B kazanır. Eğer A $\{T, T, Ç, Ç, Ç\}$ oynarsa (17) den dolayı B kazanır. Eğer A $\{Ç, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ oynarsa B $\{T, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ hamlesiyle başlangıç pozisyonunu korur. Böylece her şekilde B kazanır.

(19) $\{Ç, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ oyununda eğer A sayılardan birini silerse (13) den dolayı B kazanır. Eğer A $\{T, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ oynarsa B $\{Ç, Ç, Ç, Ç, Ç\}$ hamlesiyle başlangıç pozisyonunu korur. Böylece her şekilde B kazanır.

Sonuç 4. $\{T, T, T, T, T\}$, $\{T, T, T, \text{Ç}, \text{Ç}\}$, $\{T, T, \text{Ç}, \text{Ç}, \text{Ç}\}$ oyunlarını A kazanır. Diğer durumlarda ise B kazanır.

Şimdi probleme dönelim. $\{2, 3, 22, 23\}$ oyununu (11) den dolayı B kazanır. $\{5, 6, 11, 17, 18\}$ oyununu (15) den dolayı A kazanır. $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ oyununu (17) den dolayı A kazanır. $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$ oyununda A $\{1, 2, 3, 21, 23\}$ hamlesini yapar ve (15) e göre A kazanır. $\{1, 7, 12, 13, 19, 24\}$ oyununda A $\{1, 7, 12, 13, 19\}$ oynarsa (15) ten dolayı A kazanır.

Çözüm 2:

Cevap: 4.

Bir oyuncu kendi hamlesi sonucunda tahtadaki tek ve çift sayıların sayısını birbirlerine eşit yaparsa her zaman hamlesi olur. Aslı $\{2, 3, 22, 23\}$ sayılarıyla başlayan oyun dışında bunu yapabiliyor. $\{2, 3, 22, 23\}$ sayılarıyla başlayan oyunda ise Aslının hamlesi ne olursa olsun Berk ilk hamlesi sonucunda tek ve çift sayıların sayısını birbirlerine eşit yaparak oyunu kazanmayı garantiler.

Kaynak: Tübitak 24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2016

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2017

1 210^9 doğal sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi 4, 9, 25, 49 doğal sayılarından en az ikisi ile bölünür?

a) 9984 **b)** 9744 **c)** 9728 **d)** 9648 **e)** 9216

Çözüm:

Cevap : $\boxed{C}$

$210^9 = 3^9.7^9.2^9.5^9$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir. Pozitif çarpanları $4, 49, 25, 9$ sayılarından en az ikisine bölünecekse, bu pozitif çarpanların sayısını

Olabilecek tüm pozitif çarpanlar - (sadece 1'ine bölünen çarpanlar + hiçbirine bölünmeyen çarpanlar)

Şeklinde düşünebiliriz. Bunu hesaplayalım. Olabilecek tüm pozitif çarpanlar $10.10.10.10 = 10^4$ tanedir. Hiçbirine bölünmeyen çarpanlar için, 2.3.5.7 sayısının pozitif bölenlerine bakmalıyız. Çünkü bu çarpanlardan alacağımız herhangi bir pozitif bölen, $4, 49, 25, 9$ sayılarından hiçbirine bölünmeyecektir. Bunların sayısı $2.2.2.2 = 2^4$ tanedir. Şimdi sadece 1 ine bölünen çarpanlara bakalım. Sadece 49 a bölünen pozitif çarpanları bulalım.

$$7^2.2^8.3^8.5^8.(7^7.2.3.5)$$

şeklinde yazdığımızda, parantez içindeki sayının pozitif çarpanlarından her biri, 49 a bölünecektir, fakat $9, 25$ ve 4 e bölünmeyecektir. Bu çarpanların sayısı $8.2.2.2 = 64$ tanedir. Bu işlemi 4 sayısı için uygulayacak olsaydık, yine aynı sonucu bulacaktık. O halde sadece 1'ine bölünen $4.64 = 256$ tane çarpan var.

$$10000 - (256 + 16) = 9728$$

2 $x, y \geq -2017$ olmak üzere, $\frac{x}{x-y+2017} - \frac{y}{x-y-2017} = 1$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) tam sayı ikilileri vardır?

a) 4033 **b)** 4034 **c)** 6051 **d)** 6052 **e)** 8068

Çözüm:

Cevap : 6050

İfadenin paydaları eşitlenirse en son (payda eşitlenirken iki kare farkı kullanılırsa çok daha pratik olur)

$$x + y = 2017$$

ifadesi kalacaktır. $x = -2017$, $y = 4034$, $x = -2016$, $y = 4033$, ... $x = 4034$, $y = -2017$ olabilecek tüm çözümler olup, $4034 - (-2017) + 1 = 6052$ tanedir. Fakat

$(x, y) = (2017, 0), (0, 2017)$ değerleri paydayı 0 yapacağından bu ikilileri çıkartmalıyız. Yani toplamda $6052 - 2 = 6050$ tane ikili vardır.

3 Tepe açısı $m(\widehat{BAC}) = 100°$ olan ABC ikizkenar üçgeninde $\widehat{ACB}$ açısının açıortayı $[AB]$ kenarını D'de kesiyor. $|AD| = x$, $|DC| = y$ ise $|BC|$'nin x ve y cinsinden değeri hangisidir?

a) $x + 2y\cos 40°$ **b)** $y + 2x\cos 20°$ **c)** $y + 2x$ **d)** $3x - y$ **e)** $x + y$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$[BC]$ üstünde bir E noktası, $m(\widehat{DEC}) = 80^\circ$ olacak biçimde alınırsa $|CE| = |CD| = y$ ve $ACED$ kirişler dörtgeni olup $|AD| = |DE| = |BE| = x$ tir. $|BC| = x + y$ olur.

Çözüm 2:

BC üstünde $m(\widehat{DTC}) = 100^\circ$ olacak şekilde bir T noktası belirleyelim, $|DA| = |DT| = x$ ve $|AC| = |TC| = a$ olsun, $|DB| = a - x$ olur. BC'nin sağında $m(\widehat{DQC}) = 20^\circ$ olacak şekilde bir Q noktası belirleyelim, $|DQ| = |DC| = y$ olur. QTD üçgeninin ikizkenar olması sonucu $|QT| = y$ olup $|BT| = y-(a-x) = y-a+x$ olur, $|BT| + |TC| = y + x - a + a = x + y = |BC|$ olduğu görülür...

Çözüm 3:

Tekrar BC üstünde $m(\widehat{DTC}) = 100^\circ$ olacak şekilde bir T noktası seçilir, $ADTC$ deltoid olacağından $|AD| = |DT| = x$'tir. $m(\widehat{DQC}) = 80^\circ$ olacak şekilde bir BC üstünde bir Q noktası seçilirse QDC ikizkenar üçgen olacağından $|QC| = y$ ve DQT de ikizkenar üçgen olacağından $|DQ| = x$ olur. Açılar yerine yerleştirildiğinde BQD'nin de ikizkenar üçgen olduğu görülür, buradan $|BQ| = x$ elde edilir, o halde $|BC| = x + y$ olacaktır.

$\boxed{4}$ Beş basamaklı bir sayının birler ve onlar basamağı silindiğinde tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir, ayrıca bu sayının binler ve on binler basamağı silindiğinde de tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir. Bu özelliklere sahip kaç farklı beş basamaklı doğal sayı vardır?

a) 52 **b)** 54 **c)** 57 **d)** 58 **e)** 60

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Sayımız $abcde$ olsun. $abc = x^2$ ve $cde = y^2$ olmalı. Tam kare 3 basamaklı sayılar,

$$10^2, 11^2, 12^2, 13^2, ...31^2$$

olup, 22 tanedir. $cde = 10^2 = 100$ seçersek, $x^2 \equiv 1(mod10)$ olmalı. Bu denkliği sağlayan sayılar $x \equiv 1$ ve $x \equiv 9$ olmak üzere 2 tanedir.

O halde $y = 10$ için $x = 11, 19, 21, 29, 31$ olmak üzere 5 tanedir. Bu mantıkla diğerlerini hesaplamaya çalışalım.

$y = 11$ için $x^2 \equiv 1(mod10) \Rightarrow x \equiv 1, x \equiv 9 \Rightarrow x = 11, 19, 21, 29, 31$ olmak üzere 5 tanedir.

O halde artık pratik hesaplamaya başlayalım. $y = 10, 11, 12, 13, 14$ sayılarından herbiri için 5 tane x değeri var. O halde 25 sayı var.

$y = 15, 16, 17$ için $x^2 \equiv 2(mod10)$ denkliğinin çözümü yoktur.

$y = 18, 19$ için $x^2 \equiv 3(mod10)$ denkliğinin çözümü yoktur.

$y = 20, 21, 22$ için $x^2 \equiv 4(mod10)$ denkliğinin çözümü $x \equiv 2$ ve $x \equiv 8$ dir. O halde $x = 12, 18, 22, 28$ olmak üzere $4.3 = 12$ tanedir.

$y = 23, 24$ için $x^2 \equiv 5(mod10)$ ise $x \equiv 5$ olur. O halde $x = 15, 25$ olup $2.2 = 4$ tane sayı vardır.

$y = 25, 26$ için $x^2 \equiv 6(mod10)$ ise $x \equiv 4$ ve $x \equiv 6$ olur. $x = 14, 16, 24, 26$ olup $4.2 = 8$ sayı vardır.

$y = 27, 28$ için $x^2 \equiv 7(mod10)$ denkliğinin çözümü yoktur.

$y = 29$ için $x^2 \equiv 8(mod10)$ denkliğinin çözümü yoktur.

$y = 30, 31$ için $x^2 \equiv 9(mod10)$ ise $x \equiv 3$ ve $x \equiv 7$ olur. $x = 13, 17, 23, 27$ olup $4.2 = 8$ sayı vardır

Toplamda $25 + 12 + 4 + 8 + 8 = 57$ sayı vardır.

$\boxed{5}$ 7 kişi, zemin katta bulunan bir asansöre binip, her katta en az bir kişi inecek şekilde dört kat çıkıyor ve dördüncü katta asansör tamamen boşalıyor. Bu asansör kaç farklı şekilde kullanılır?

a) 8400 **b)** 8449 **c)** 8456 **d)** 9114 **e)** 9149

Çözüm:

Cevap : $\boxed{A}$

Soruyu matematiğe dökelim. Katlar x_1, x_2, x_3, x_4 olmak üzere, bizden istenen şey.

$$\sum_{x_1+x_2+x_3+x_4=7} \binom{7}{x_1}\binom{7-x_1}{x_2}\binom{7-x_1-x_2}{x_3}\binom{7-x_1-x_2-x_3}{x_4}$$

Olacaktır.

$x_1+x_2+x_3+x_4=7$ denklemini sağlayan $\binom{6}{3}=20$ tane pozitif tamsayı vardır. Pozitif tamsayı seçeceğiz çünkü her katta mutlaka bir kişi iniyor. Bu denklemi sağlayan sayıları bulalım.

$4,1,1,1$ ve bunun permütasyonları $4!/3! = 4$ tanedir.

$1,2,3,1$ ve bunun permütasyonları $4!/2! = 12$ tanedir.

$2,2,2,1$ ve bunun permütasyonları $4!/3! = 4$ tanedir. 20 tane çözümü tamamladık. O halde hesaba geçelim.

$4.\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 4.210 = 840$

$12.\binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 12.420 = 5040$

$4.\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 4.630 = 2520$

$$840 + 5040 + 2520 = 8400$$

$\boxed{6}$ a, b, c sayıları, $x^3+x-1=0$ denkleminin kökleri olsun. Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri $a\cdot b$, $a\cdot c$, $b\cdot c$ olur?

a) $x^3-x-1=0$ **b)** $x^3-x^2+1=0$ **c)** $x^3-x^2-x-1=0$ **d)** $x^3-x+1=0$ **e)** $x^3-x^2-1=0$

Çözüm:

Cevap : $\boxed{E}$

Vieta formüllerine göre kökleri a, b, c olan 3.dereceden denklemi.

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-(abc)=0$$

Şeklinde yazabiliriz. O halde $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=1$ ve $abc=1$ olarak bulunur. Kökleri ab, ac ve bc olan denklemi

$$x^3-(ab+ac+bc)x^2+abc(a+b+c)x-(abc)^2=0$$

şeklinde yazabilirim. O halde denklemimiz.

$$x^3-x^2-1=0$$

olacaktır.

7 $|AB| = 2|BC|$ olan $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{ABE}) = 15^\circ$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = 2$ ise $|CE|$ kaçtır?

a) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt{4+\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt{6+\sqrt{3}}$ **d)** $2\sqrt{1+\sqrt{3}}$ **e)** $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$[AB]$ nin orta noktası H olsun.H'den DC'ye dik indirirsek bir $HBCF$ karesi elde ederiz.E, HF üzerindedir.$(15-75-90)$ üçgeni aynı zamanda $(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1, 2\sqrt{2})$ üçgenidir.Buradan $|HE| = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$,$|HB| = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ ve bu ikisinden $|EF| = \sqrt{2}$ bulunur.EFC üçgeninde pisagordan $|EC| = \sqrt{4+\sqrt{3}}$ bulunur.

8 n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $(n+2)^4$ sayısının $(n+1)^4$ sayısına bölümünden kalan K_n olsun. K_n sayısının 4 ile bölümünden kalan R_n ise $R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{2016} + R_{2017}$ kaçtır?

a) 2016 **b)** 2017 **c)** 4030 **d)** 4031 **e)** 6053

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$(n+2)^4 - (n+1)^4 = 4n^3+18n^2+28n+15$ dir. $n > 4$ için $(n+1)^4 > 4n^3+18n^2+28n+15 \Rightarrow n^4-12n^2-24n-14 > 0$ dır.Çünkü Decartes İşaret Değişimine göre bu fonksiyonun sadece 1 pozitif kökü vardır, bu kökün ise $(4,5)$ aralığında olduğu görülebilir.Dolayısıyla $n > 4$ için $K_n = 4n^3 + 18n^2 + 28n + 15$ olur.

$n > 4$ ve $n = 2k+1$ için $R_n = 1$ ve $n = 2k$ için $R_n = 3$ olur. Tek tek denersek $R_1 = 1, R_2 = 1, R_3 = 1, R_4 = 2$ bulunur.

$R_1 + R_2 + \cdots + R_{2017} = 1+1+1+2+1+3+1+3+\cdots+1+3+1 = 4030$ olur.

9 İçi dolu bir küre, merkezinden geçen 100 düzlem ile en fazla kaç parçaya bölünür?

a) $2^{100}-2$ **b)** 9898 **c)** $2^{198}+2$ **d)** $3^{100}+2$ **e)** 9902

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Problemi genel halde çözelim ve merkezden geçen n düzlem küreyi en çok a_n bölgeye ayırsın. $a_1 = 2$ dir. Küre ile düzlemin kesişimi bir çemberdir. Bu çemberin yarıçapı ile kürenin yarıçapının eşit olacağına dikkat edelim. Bu şekilde n tane çember oluşmuş olur. Alınan herhangi iki çember çifti için 2 kesişim noktası ve 4 çember yayı oluşmaktadır. $n+1$ inci çember ile a_{n+1} bölge oluşmuş olsun. $n+1$ inci çember, önceki n çemberin herbiriyle farklı noktalarda kesişecek biçimde çizilebilir. Dolayısıyla $2n$ yeni kesişim noktası eklenmiş olur ve $2n$ tane yeni çember yayı oluşmuş olur. Her yeni çember yayı, yeni oluşan bir bölgenin sınırını oluşturur. Yani $2n$ tane yeni bölge oluşur. $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n + 2n$ bağıntısına ulaşırız. Bunu

$$\sum_{n=1}^{k-1}(a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=1}^{k-1} 2n$$

biçiminde yazarsak $a_k - a_1 = k(k-1)$ ya da $a_k = k^2 - k + 2$ genel terimini elde ederiz. Artık

$$a_{100} = 10^4 - 10^2 + 2 = 9902$$

olduğunu bulmak kolaydır.

10 $x - 2y + xy = 1 + \sqrt{10}$ ve $x^2 + 4y^2 = 13$ olduğuna göre $|x - 2y - 2|$ ifadesinin değeri kaçtır ?

a) $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{10} - 1$ **c)** $\sqrt{-2 + \sqrt{10}}$ **d)** $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ **e)** $-3 + \sqrt{10}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

İlk ifadeden

$(x-2y)^2 = (1+\sqrt{10}-xy)^2 \Rightarrow 13-4xy = x^2y^2+11+2\sqrt{10}-xy(2\sqrt{10}-2) \Rightarrow x^2y^2-xy(2\sqrt{10}-2)+(2\sqrt{10}-2) = 0$

bulunur.

$$(x - 2y - 2)^2 = (-1 + \sqrt{10} - xy)^2 \Rightarrow (x - 2y - 2)^2 = x^2y^2 - xy(2\sqrt{10} - 2) + (11 - 2\sqrt{10})$$
$$= 2 - 2\sqrt{10} + 11 - 2\sqrt{10} = 13 - 4\sqrt{10} = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 \Rightarrow |x - 2y - 2| = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

bulunur.

11 $ABCD$ dışbükey dörtgeninde ABD, tepe açısı $m(\widehat{A}) = 60° + 2x$ olan bir ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = x$ ise $m(\widehat{DCA})$ kaç derecedir?

a) $30°$ **b)** $30° + x$ **c)** $30° - x$ **d)** $30° - 2x$ **e)** $25°$

Çözüm 1:

Cevap : $\boxed{A}$

Köşegenlerin kesim noktasına P diyelim. $m(\widehat{DPA}) = m$ olsun. $|AD| = |BC| = a$, $|DP| = b$ ve $|PC| = c$ diyelim.

$b = c$ olduğunu göstereceğiz birazdan. İkizkenarları kullanarak açıları yerleştirirsek $m(\widehat{DAP}) = 60° + x$ ve $m(\widehat{CBP}) = 120 - x$ olacaktır. DAP ve CBP üçgenlerinde sırasıyla sinüs teoremi uygulayalım.

$$\frac{b}{\sin(60° + x)} = \frac{a}{\sin(m)}$$

$$\frac{c}{\sin(120° - x)} = \frac{a}{\sin(m)}$$

$$\sin(60° + x) = \sin(120° - x)$$

$$b = c$$

Olacaktır. $m(\widehat{DPC}) = 120°$ olduğundan, DPC üçgeni $120° - 30° - 30°$ üçgenidir. $m(\widehat{DCA}) = 30°$ olur.

Çözüm 2:

Sentetik çözüm olarak: ADC üçgeninde $60°+x$ açısının BDC üçgenindeki $120°-x$ açısına bütünler olduğunda dikkat edelim, bu durumda ADC üçgeni $|AD|$ kenarından tutulup $|BD|$ kenarı üstüne yapıştırılırsa $C'A'(B)D$ noktalarının doğrudaş olduğu görülür, bu da bize $m(\widehat{C'}) = m(\widehat{D}) = \alpha$ yani $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$ olduğunu verir, o halde $2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$ olacaktır...

12 n pozitif bir tam sayı olsun.

$$x + y = n$$
$$xy = n + 65$$

sisteminin (x, y) gerçel çözümlerinin olması için n'in en küçük değeri kaçtır?

a) 21 **b)** 19 **c)** 18 **d)** 17 **e)** 16

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow n^2 \geq 4n + 260 \Rightarrow (n-2)^2 \geq 264 \Rightarrow minn = 19$

13

$$\sum_{k+l=0}^{97} \binom{100}{k}\binom{100-k}{l}\binom{100-k-l}{97-k-l}$$

toplamının değeri nedir?

a) $3^{100} \cdot 53900$ **b)** $3^{97} \cdot 107800$ **c)** $3^{105} \cdot 10780$ **d)** $3^{100} \cdot 107800$ **e)** $3^{98} \cdot 53900$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$n_1, n_2, ..., n_k$ negatif olmayan tamsayılar ve $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ olmak üzere,

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

şeklinde tanımlansın. Multinom açılımı

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1,n_2,...,n_k=1}^{n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1}.x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$$

şeklindedir. Şimdi burada kullandığımız k sayısı temsili bir k sayısıydı. Birazdan kullanacağımız k sayısı, sorudaki k sayısı olacaktır. Öncelikle, $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!.(a-b)!}$özdeşliğini kullanarak

$$\binom{100}{k}\binom{100-k}{l}\binom{100-k-l}{97-k-l}.6 = \binom{100}{k, l, 97-k-l}$$

olduğunu rahatça görebiliriz. $n_1 = k, n_2 = l$ ve $n_3 = 97 - k - l$ olarak alalım. $n = k + l + 97 - k - l = 97$ olacaktır. Ayrıca soruda aradığımız toplama S diyelim. Buna göre

$$(x_1 + x_2 + x_3)^{97} = \sum_{k,l,97-k-l=1}^{97} \binom{97}{k, l, 97-k-l} x_1^k.x_2^l.x_3^{97-k-l}$$

Katsayılar toplamını istediğimiz için $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ verelim.

$$3^{97} = \sum_{k,l,97-k-l=1}^{97} \binom{97}{k, l, 97-k-l} = 6S/100.99.98.$$

$$S = 3^{98}.53900$$

$\boxed{14}$ x, y, z, w, v negatif olmayan tam sayılardır.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 40$$

denklemini gerçekleyen tüm (x, y, z, w, v) tam sayı beşlilerinin sayısı kaçtır?

a) 56 **b)** 66 **c)** 112 **d)** 120 **e)** 122

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$6 \geq x \geq y \geq z \geq w \geq v \geq 0$ olsun. $5x^2 \geq 40 \Rightarrow x^2 \geq 8 \Rightarrow 6 \geq x \geq 3$ olur.

$i) x = 3$ ise,

$$4y^2 \geq y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 31 \Rightarrow 3 = x \geq y \geq 3 \Rightarrow y = 3$$
$$3z^2 \geq z^2 + w^2 + v^2 = 22 \Rightarrow z \geq 3 \Rightarrow z = 3$$
$$w^2 + v^2 = 13 \Rightarrow (w, v) = (3, 2) \Rightarrow (x, y, z, w, v) = (3, 3, 3, 3, 2)$$

bulunur.

$ii) x = 4$ ise,

$$4y^2 \geq y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 24 \Rightarrow 4 \geq y \geq 3$$

$y = 3$ ise,

$$3z^2 \geq z^2 + w^2 + v^2 = 15 \Rightarrow z = 3$$
$$w^2 + v^2 = 6$$

Buradan çözüm gelmez. $y = 4$ ise,

$$z^2 + w^2 + v^2 = 8 \Rightarrow (z, w, v) = (2, 2, 0) \Rightarrow (x, y, z, w, v) = (4, 4, 2, 2, 0)$$

bulunur.

$iii) x = 5$ ise,

$$4y^2 \geq y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 15 \Rightarrow 3 \geq y \geq 2$$

$y = 2$ ise,

$$3z^2 \geq z^2 + w^2 + v^2 = 11 \Rightarrow z = 2$$
$$w^2 + v^2 = 7$$

Buradan çözüm gelmez. $y = 3$ ise,

$$z^2 + w^2 + v^2 = 6 \Rightarrow (z, w, v) = (2, 1, 1) \Rightarrow (x, y, z, w, v) = (5, 3, 2, 1, 1)$$

bulunur.

$iv) x = 6$ ise

$$y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 4 \Rightarrow (x, y, z, w, v) = (6, 2, 0, 0, 0), (6, 1, 1, 1, 1)$$

çözümleri bulunur. Permütasyonlarını alırsak $\dfrac{5!}{4!} + \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} + \dfrac{5!}{2!} + \dfrac{5!}{4!} + \dfrac{5!}{3!} = 120$ bulunur.

$\boxed{15}$ Düzlemde $A(1,0), B(5,2)$ noktaları veriliyor. $y = x+2$ doğrusu üzerinde alınan bir C noktası için, $|AC|^2 + |CB|^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 26 **b)** $\dfrac{425}{16}$ **c)** $\dfrac{53}{2}$ **d)** $\dfrac{105}{4}$ **e)** 25

Çözüm:

Cevap $\boxed{A}$

C noktasının koordinatları $(x, x+2)$ olsun.

$|AC|^2 = (x-1)^2 + (x+2)^2, \ |BC|^2 = (x-5)^2 + x^2 \Rightarrow |AC|^2 + |BC|^2 = x^2 + (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x+2)^2$

olur.

$$\Rightarrow |AC|^2 + |BC|^2 = 4x^2 - 8x + 30 = (2x-2)^2 + 26 \Rightarrow min\{|AC|^2 + |BC|^2\} = 26$$

$\boxed{16}$ p bir tek asal sayı olmak üzere, $\sqrt{x(x-p^2)}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan x pozitif tam sayılarından en büyüğü ile en küçüğü arasındaki fark aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{p^2+1}{4}$ **b)** $\dfrac{p^4+1}{4}$ **c)** $\left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2$ **d)** $\left(\dfrac{p^2-1}{2}\right)^2$ **e)** $\dfrac{(p^2+1)(p^2-p+1)}{4}$

Çözüm 1:

Cevap : $\boxed{D}$

m negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere,

$$x(x-p^2) = m^2$$

olmasını istiyoruz. Bunun için bir kaç durum inceleyeceğiz. Kısalık olması için $OBEB(a,b) = (a,b)$ olarak göstereceğiz.

$(x,(x-p^2)) = d$ olsun. d sayısı $x - (x-p^2) = p^2$ sayısını böleceğinden $(x,(x-p^2)) = 1, p, p^2$ sayılarından biri olabilir.

$i)d = p^2$ olsun. Bu durumda $x = p^2.k$ ve $x - p^2 = p^2(k-1)$ olacaktır. Bu ikisini çarparsak

$$p^4k(k-1) = m^2$$

olacaktır. Sonucun tam kare olabilmesi için $k(k-1)$ sayısının da tam kare olması lazım. Bu çarpımın tam kare olabilmesinin tek yolu $k = 1$ olmasıdır. Bu durumda $x = p^2$ olarak bulunur.

$ii)d = p$ olsun. Bu durumda $x = pk$ ve $x - p^2 = p(k-p)$ olacaktır. Bu ikisinin çarpımı

$$p^2k(k-p) = m^2$$

olarak bulunur. Sonucun tam kare olabilmesi için $k(k-p)$ çarpımının da tam kare olması lazım. $(k,(k-p)) = p$ olursa, tekrardan $i)$ deki duruma döneceğiz. O halde $(k, k(k-p)) = 1$ olmalı. Aralarında asal iki sayının çarpımının tam kare olabilmesi için iki sayıda tam kare olmalıdır.

$k = a^2$ ve $k - p = b^2$ olsun. $(a-b)(a+b) = p$ olup, $a - b = 1$ ve $a + b = p$ olacaktır. Buradan $a = p + 1/2$ olacaktır. $x = pk$ olup, $x = p.(p+1)^2/4$ olacaktır.

$iii)d = 1$ olsun. Bu durumda

$x = a^2$ ve $x - p^2 = b^2$ olacaktır. $(a-b)(a+b) = p^2$ eşitliğinden bir kaç durum daha inceleyelim. $a - b = 1$ ve $a + b = p^2$ olursa, $a = p^2 + 1/2$ ve $x = (p^2+1)^2/4$ olacaktır.

Şimdi sıra geldi $p(p+1)^2/4$, p^2 ve $(p^2+1)^2/4$ sayılarını sıralamaya. En iyisi $p = 3$ verip hangisinin daha büyük olduğuna bakmak. Bu durumda bariz olarak en küçük p^2 ve en büyük $(p^2+1)^2/4$ olacaktır. Bu iki sayının farkı $(p^2-1)^2/4$ olacaktır.

Çözüm 2:

$0 < x < p^2$ için kökün içi negatif olur. Çelişki. $x = p^2$ için şart sağlar. $x > p^2$ için,

$$x^2 - p^2x = t^2 \Rightarrow 4x^2 - 4p^2x + p^4 = (2x-p^2)^2 = 4t^2 + p^4 \Rightarrow (2x - p^2 - 2t)(2x - p^2 + 2t) = p^4$$

olur. $\max\{x\}$ için $(2x - p^2 + 2t) = p^4, (2x - p^2 - 2t) = 1$ veya tam tersi olmalı. Buradan $x = \left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2$ bulunur. İstenen fark $\left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2 - p^2 = \left(\dfrac{p^2-1}{2}\right)^2$ olur.

17 *KARPUZ* kelimesinin harfleri ile yazılabilecek olan tüm kelimelerin kaç tanesinde ya K, A'dan önce, ya da R, A'den sonra, ya da R, P'den öncedir? (Burada önce ya da sonra ifadeleri yan yana olmaları gerektiği anlamına gelmez)

a) 696 **b)** 690 **c)** 660 **d)** 600 **e)** 580

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

KARPUZ kelimesinin harfleri ile koşulsuz $6! = 720$ kelime yazılabilir. İstenmeyen durumu bulalım. P-R-A-K dizilimine U ve Z harflerini $5.6 = 30$ farklı şekilde yazabiliriz. İstenen durum sayısı $720 - 30 = 690$ bulunur.

18 $n = 1, 2, 3, \cdots$ doğal sayıları için, $a_n = 2 - \dfrac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}$ olarak verilsin. Buna göre, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{2}{\sqrt{a_2}} + \dfrac{3}{\sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{19}{\sqrt{a_{19}}} + \dfrac{20}{\sqrt{a_{20}}}$ ifadesinin eşiti nedir?

a) $\dfrac{\sqrt{761}+1}{4}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{761}-1}{4}$ **c)** 20 **d)** 19 **e)** 7

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen ifadenin paydasını eşleniğiyle çarpıp düzenlersek $a_n = 4n^2 + 2 + 2\sqrt{4n^4+1} = (\sqrt{2n^2+2n+1} + \sqrt{2n^2-2n+1})^2$ bulunur.

$$\frac{n}{\sqrt{a_n}} = \frac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1} + \sqrt{2n^2-2n+1}} = \frac{\sqrt{2n^2+2n+1} - \sqrt{2n^2-2n+1}}{4}$$

olur.Verilen toplam,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{4} + \cdots + \frac{\sqrt{841}-\sqrt{761}}{4} = \frac{\sqrt{841}-1}{4} = 7$$

bulunur.

$\boxed{19}$ Bir kenarı 12 olan $ABCD$ karesinde $|AE|=3, |AF|=4$ olacak şekilde AB ve AD kenarları üzerinde sırasıyla E ve F noktaları alınıyor. Kare içinde bir tabanı EF ve diğer tabanın köşeleri BC ve DC kenarları üzerinde olan en büyük alana sahip yamuğun alanı kaçtır?

a) 76 **b)** 74 **c)** $\frac{147}{2}$ **d)** 73 **e)** $\frac{145}{2}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Kareyi D noktası orijin ve AD kenarı y ekseninde, DC kenarı x ekseninde olacak şekilde koordinat düzlemine taşıyalım. Yamuğun diğer tabanı M, DC üzerinde ve N, BC üzerinde olmak üzere MN olsun. $MN//EF$ olduğundan $|MC|=3k$ ve $|NC|=4k$ olur.

Yamuğun köşe koordinatları $E(3,12), F(0,8), M(12-3k,0), N(12,4k)$ olur. Köşeleri $(a,b),(c,d),(e,f)$ olan üçgenin alanı $\frac{1}{2}\cdot|(ad+cf+ab)-(bc+ed+af)|$ dir. Eğer $S(EFMN)=S(EFM)+S(EMN)$ yazarsak,

$$S(EFM)=\frac{1}{2}\cdot|8(12-3k)-(24+12(12-3k))|=6|6-k|=6(6-k)$$

$$S(EMN)=\frac{1}{2}\cdot|(144-24k)-(-12k^2+48k+144)|=6k|k-6|=6k(6-k)$$

$$\Rightarrow S(EFMN)=6(6-k)+6k(6-k)=6(k+1)(6-k)$$

olur. $minS(EFMN)$ için $k+1=6-k\Rightarrow k=\frac{5}{2}$ olmalı.Buradan $minS(EFMN)=\frac{147}{2}$ bulunur.

$\boxed{20}$ $\sum_{n=1}^{30} n^{61}\equiv x \pmod{31^2}$ ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 404 **b)** 434 **c)** 465 **d)** 496 **e)** 527

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$$(31-n)^{61}+n^{61}=31^{61}-31^{60}\cdot n\cdot\binom{61}{1}+\cdots+n^{60}\cdot 31\cdot\binom{61}{1}\equiv n^{60}\cdot 31\cdot 61(mod\ 31^2)$$

$$\sum_{n=1}^{30} n^{61}\equiv 31\cdot 61\cdot\sum_{n=1}^{15} n^{60}\equiv x\equiv 31a\ (mod\ 31^2)$$

$$61\cdot\sum_{n=1}^{15} n^{60}\equiv-\sum_{n=1}^{15} n^{60}\equiv -15\equiv 16\equiv a\ (mod\ 31)\Rightarrow x\equiv 31a\equiv 496\ (mod\ 31^2)$$

bulunur.

$\boxed{21}$ $1,2,3,3,5,5,8,8$ rakamlarını kullanarak aynı olan rakamlar yan yana olmayacak şekilde oluşturulabilen beş basamaklı kaç farklı şifre vardır ?

a) 980 **b)** 840 **c)** 720 **d)** 660 **e)** 580

Çözüm:

Cevap : $\boxed{D}$

$\{1,2,3,5,8\}$ şeklinde $5! = 120$ tane şifre oluşturabilirim.

$\{3,3,.,.,.\}$ şeklinde, boş olan 3 yere $\{1,2,5,8\}$ kümesinden bir eleman seçerek, 3 rakamlarının yan yana olmadığı $(\frac{5!}{2!} - 4!).\binom{4}{3}$ şifre oluşturabilirim. Aynı şeyi $\{5,5,.,.,.\}$ ve $\{7,7,.,.,.\}$ kümeleri için yapacağımdan $36.4.3 = 432$ şifre oluşturabilirim.

Şimdi aynı sayma işlemini $\{3,3,5,5,.\}$, $\{3,3,8,8,.\}$, $\{5,5,8,8,.\}$ kümeleri için yapacağım. $\{3,3,5,5,.\}$ kümesinde boş kalan yere $\{1,2,8\}$ elemanlarından birini getirebilirim. Dahiliyet hariciyet prensibini de kullanarak 3 kümedeki, aynı olan herhangi iki rakamın bir araya gelmediği

$$9(\frac{5!}{2!.2!} - (\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} - 3!)) = 108$$

şifre oluşturabilirim. Toplamda $120 + 432 + 108 = 660$ şifre oluşur.

22 $f(0) = \frac{2}{3}$ ve $n = 1,2,3,...$ için $f(n) \neq 0$ ve $(f(n+1)-1)(f(n)+3)+3 = 0$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + ... + \frac{1}{f(2016)} + \frac{1}{f(2017)}$$

toplamının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

a) $3^{2018} - 1010$ **b)** $3^{2017} - 1009$ **c)** $2.3^{2018} - 1009$ **d)** $2(3^{2017} - 505)$ **e)** $2.3^{2017} - 1009$

Çözüm:

Cevap : $\boxed{A}$

verilen ifadeyi düzenlersek $f(n+1) = \frac{f(n)}{f(n)+3}$ olarak bulunur. $f(1) = 2/11$, $f(2) = 2/35$, $f(3) = 2/107$, şeklinde devam edecektir. O halde

$a_0 = 3$, $a_1 = 11$, $a_2 = 35$,... şeklinde bir dizi oluşturursak

$$a_{n+1} = 3a_n + 2$$

şeklinde bir homojen olmayan yineleme bağıntısına sahip olduğuna görebiliriz. Diziye ve bağıntıya bakarak zorlanmadan $a_n = 4.3^n - 1$ olduğunu görebiliriz

$$\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + ... + \frac{1}{f(2016)} + \frac{1}{f(2017)} = 3/2 + 11/2 + 35/2 + 107/2 + ... = \frac{\sum_{n=0}^{2017}(4.3^n - 1)}{2}$$

olacaktır.

O halde $\sum_{n=0}^{2017}(4.3^n - 1) = 4(\frac{3^{2018}-1}{2}) - 2018$ olup sorudaki aradığımız toplam $3^{2018} - 1010$ olur.

23 $|AB| = |AC|$ ve $\tan B = \frac{5}{12}$ olan ABC üçgeni veriliyor. Yarıçapı 1 olan bir çember AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında teğet olup BC kenarını P ve Q noktalarında kesmektedir. P, B ile Q arasında ve $|BK| = \frac{12}{5}$ ise BQK üçgeninin alanı kaçtır ?

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{8}{5}$ **c)** $\frac{108}{65}$ **d)** $\frac{25}{13}$ **e)** $\frac{144}{65}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Çemberin merkezi O olsun. Merkezden K, L noktalarına yarıçapları çizelim. OKB ve OLC dik üçgenlerinde $\tan\widehat{OBK} = \tan\widehat{OCL} = \dfrac{1}{12/5} = \dfrac{5}{12}$ olduğundan $\widehat{OBK} = \widehat{CBL}$ dir. Yani O, $[BC]$ nin orta noktasıdır. Buradan $|BC| = \dfrac{26}{5}$ bulunabilir. $|BP| = |CQ| = x$ ve $|BQ| = \dfrac{26}{5} - x$ dersek B noktasının çembere göre kuvvetinden $|BK|^2 = |BP| \cdot |BQ|$ olup $\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 = x \cdot \left(\dfrac{26}{5} - x\right)$ denkleminden uygun x değeri $x = \dfrac{8}{5}$ bulunur. $|BQ| = \dfrac{26}{5} - x = \dfrac{18}{5}$ tir.

$$Alan(BQK) = \frac{1}{2}|BK| \cdot |BQ| \cdot \sin\widehat{KBQ} = \frac{108}{5}$$

elde edilir.

24 $n^2 - 1$, üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilen bir doğal sayıdır. Bu özelliği gerçekleyen en küçük birbirinden farklı ilk beş n sayısının toplamı kaçtır ?

a) 104 **b)** 110 **c)** 116 **d)** 124 **e)** 144

Çözüm:

Cevap : $\boxed{A}$

p , q , r sayıları asal sayılar olsun.

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = pqr$ olmasını istiyoruz. Bir kaç durum inceleyeceğiz.

$i) n - 1 = r$ ve $n + 1 = pq$ olsun. Bu durumda $pq - r = 2$ olacaktır. $T - C = T$ olduğundan asal sayılardan biri asla 2 olamaz. Bu durumu sağlayan asal sayılara bakacak olursak,

$(p, q, r) = (3, 5, 13), (3, 7, 19), (3, 11, 31), (3, 13, 37), (5, 11, 53), ...$ ise $n = 14, 20, 32, 38, 54$ şeklinde olacaktır.

$ii) n + 1 = r$ ve $n - 1 = pq$ olsun. Bu durumda $r = 2 + pq$ olur.

$(p, q, r) = (3, 5, 17), (3, 7, 23), (3, 13, 41), (3, 17, 53), (5, 7, 37), (3, 19, 59)...$ ise $n = 16, 22, 40, 52, 36, 58$ olur.

Olabilecek en küçük 5 tane n sayısının toplamı $14 + 16 + 20 + 22 + 32 = 104$ olarak bulunur.

25 Ali 7 arkadaşını bir hafta boyunca haftanın her günü 3'lü gruplar şeklinde akşam yemeğine davet etmektedir. Arkadaşlarından herhangi ikisi sadece bir akşam bir arada olmaları koşuluyla Ali, bu daveti kaç farklı şekilde gerçekler?

a) 15.7! **b)** 30.7! **c)** 35.7! **d)** 42.7! **e)** 60.7!

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: $30 \cdot 7!$.

Öncelikle her gün 3 kişi davete katılacağından toplam $7 \cdot \dbinom{3}{2}$ tane ikili oluşmaktadır. Diğer taraftan, $\dbinom{7}{2} = 7 \cdot \dbinom{3}{2}$ olduğundan her ikili tam olarak bir kez beraber davete katılmalıdır, bu da her arkadaşın tam olarak üç kez davete katılacağını gösterir. Ali'nin arkadaşlarına A, B, C, D, E, F, G diyelim. A nın davete katıldığı günleri $\dbinom{7}{3}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Pazartesi, Salı, Çarşamba olsun. Davete A ile beraber katılan arkadaşları $\binom{6}{2}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan B ve C olsun. B nin davete katıldığı günler, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar günlerinden ikisi olmalıdır, $\binom{4}{2}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Perşembe ve Cuma olsun. O zaman C nin davete katıldığı diğer günler Cumartesi ve Pazar olur. D, Salı-Çarşamba, Perşembe-Cuma, CumartesiPazar ikililerinden tam olarak birer tanesinde davete katılmış olmalıdır, 2^3 şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Salı, Perşembe, Cumartesi olsun. E, F, G nin her biri Salı-Perşembe-Cumartesi günlerinden farklı olan birer tanesi katılmalı, $3!$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan E Salı günü, F Perşembe günü, G Cumartesi günü katılmış olsun. Buradan E nin davete katıldığı diğer günler Cuma ve Pazar, F nin davete katıldığı diğer günler Çarşamba ve Pazar, G nin davete katıldığı diğer günler Çarşamba ve Cuma olarak belirlenmiş olur. Dolayısıyla cevap

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot 2^3 \cdot 3! = 30 \cdot 7! \text{ olur.}$$

Kaynak: Tübitak 25. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2017

26 $f(x) = x^3 - 12x^2 + Ax + B$, gerçel sayılarda tanımlı artan bir fonksiyon olsun. $f \circ f \circ f(3) = 3$ ve $f \circ f \circ f \circ f(4) = 4$ ise $f(7)$ kaçtır ?

a) 7 **b)** 12 **c)** 31 **d)** 38 **e)** 42

Çözüm:

Cevap : $\boxed{C}$

$f \circ f \circ f(3) = 3$ olduğundan, $f(3) > 3$ durumu zaten mümkün değildir. f artan olduğundan $f \circ f \circ f(3) > 3$ olacaktır. Aynı şekilde $f(3) < 3$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $f \circ f \circ f(3) < 3$ olacaktır. O halde tek çözüm, $f(3) = 3$ ve $f(4) = 4$ durumudur. Bu değerleri yerine yazarsak , $A = 48$ ve $B = -60$ bulunur. O halde fonksiyonumuz

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 60$$

olacaktır. $f(7) = 31$ olur.

27 $s(\widehat{A}) = 60$ olan ABC üçgeninin çevrel çemberi çiziliyor. B köşesinden çizilen teğet doğru ile CA kenarının uzantısı D noktasında kesişiyor. Burada A noktası, C ile D arasındadır. $|DC| = 4$, $|AB| + |AD| = |AC|$ ise $\dfrac{|BC|}{|AB|}$ oranı kaçtır ?

a) 2 **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\dfrac{3}{2}$ **d)** $\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{3}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$|AD| = x$ diyelim, $|AB| = 4 - 2x$, $|AC| = 4 - x$ olur.ABD üçgeni ile BCD üçgeni benzerliğinden

$$\frac{|BC|}{4-2x} = \frac{|BD|}{x} = \frac{\sqrt{4x}}{x} \Rightarrow |BC| = \frac{2(4-2x)}{\sqrt{x}}$$

bulunur.ABC üçgeninde kosinüs teoreminden

$$(4-x)^2 + (4-2x)^2 - (4-2x)(4-x) = \frac{4(4-2x)^2}{x} \Rightarrow 3x^3 - 28x^2 + 80x - 64 = (3x-4)(x-4)^2 = 0$$

olur. $x = 4$ olamayacağı için $x = \frac{4}{3}$ olmalı.Buradan $|BC| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ve $|AB| = \frac{4}{3}$ bulunur. Bu ikisinden

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sqrt{3}$$

bulunur.

28 $A = 64.10^{2014}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2017})$ koşulunu sağlayan en büyük 2017 basamaklı $A = a_1a_2a_3...a_{2017}$ doğal sayısının rakamlar toplamı kaçtır ?

a) 11 **b)** 13 **c)** 15 **d)** 19 **e)** 2017

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

A sayısı 10^{2014}'e bölündüğü için son 2014 basamağı 0 olmalı.Buradan $a_4 = a_5 = \ldots a_{2017} = 0$ bulunur.$A = a_1a_2a_3 \cdot 10^{2014}$ yazarsak,

$$100a_1 + 10a_2 + a_3 = 64a_1 + 64a_2 + 64a_3 \Rightarrow 4a_1 = 6a_2 + 7a_3$$

bulunur. $\max\{a_1\} = 9$ için $a_2 = 6, a_3 = 0$ olur. Buradan en büyük A'nın rakamları toplamı 15 bulunur.

29 $\binom{2017}{1} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{9} + ... + \binom{2017}{2017}$ toplamının değeri kaçtır?

a) $2^{2016} + 2^{1006}$ **b)** $2^{2017} - 2^{1007}$ **c)** $2^{2015} + 2^{1005}$ **d)** $2^{2015} + 2^{1007}$ **e)** $2^{2017} - 2^{1008}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$i^2 = -1$ ve $n = 4k + 1$ olmak üzere,

$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + ... + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n - (1 - 1)^n - i((1 + i)^n - (1 - i)^n)$

şeklinde olacağından $n = 2017$ için sonuç $2^{2015} + 2^{1007}$ bulunur.

30 1001^{20} sayısının son 12 rakamının toplamı kaçtır?

a) 15 **b)** 18 **c)** 21 **d)** 24 **e)** 32

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$1001^{20} = (10^3+1)^{20} = 10^{60} + \binom{20}{1}10^{57} + ... + \binom{20}{16}10^{12} + \binom{20}{17}10^9 + ... + 1 \equiv 14.10^{10} + 190.10^6 + 20.10^3 + 1(mod 10^{12})$ olup son 12 rakamı toplamı $1 + 4 + 1 + 9 + 2 + 1 = 18$ bulunur.

31 $|AB| = |AC|$ olan ABC ikizkenar üçgeninin AC kenarına A noktasında teğet ve B noktasından geçen, merkezi üçgenin dışında olan bir çember çiziliyor. Bu çember BC kenarını E noktasında kesmektedir. $2|BE| = 3|EC|$ ve ABC üçgeninin alanı 27 ise çemberin yarıçapı kaçtır?

a) 4 **b)** $\frac{9}{2}$ **c)** 5 **d)** $\frac{23}{4}$ **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|EC| = 4k$ diyelim. Kuvvetten $|AC|^2 = |CE|\,.\,|CB| = 40k^2$ bulunur. $\dfrac{2\sqrt{10}.3\sqrt{10}.k^2}{2} = 27$ eşitliğinden $k^2 = \dfrac{27}{30}$ bulunur. ABC ikizkenar üçgen olduğundan dikmesi indirilerek $cos\widehat{C} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ olacaktır. AEC üçgeninde kosinüs teoremi ile $|AE| = 2\sqrt{10}k$ olarak bulunur. Alan paylaşımından $A(AEB) = \dfrac{81}{5}$ olur. Çizilen çember, AEB üçgeninin çevrel çemberidir. AEB üçgeninin kenarları çarpımı 81 olduğundan, çemberin yarıçapına r dersek

$$\frac{81}{r} = \frac{81}{5}$$

eşitliğinden $r = 5$ bulunur.

32 $3^{2^{2017}} - 1$ sayısının 2^{2020} sayısına bölümünden kalan kaçtır?

a) 2^{2017} **b)** 2^{2019} **c)** $2^{2017}+1$ **d)** $2^{2018}+1$ **e)** $2^{2018}+2$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}}+1)(3^{2^{k-2}}+1)(3^{2^{k-3}}+1)\cdots(3^2+1)(3+1)(3-1)$ şeklindedir.

$$3^{2^k} + 1 \equiv 0 \pmod 2$$

$$3^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod 4 \quad (k \neq 0)$$

olacaktır. $k = 0$ için $3+1 = 4$ olup 4 e tam bölünecektir. O halde $3^{2^k} - 1$ ifadesindeki 2 çarpanlarının sayısı $(k-1).1+1+2 = k+2$ tanedir. Bu bilgi yardımıyla k bir tam sayı olmak üzere, bölme algoritması yardımıyla $\dfrac{3^{2^{2017}}-1}{2^{2019}} = 2k+1$ şeklinde yazabiliriz. $3^{2^{2017}} - 1 = 2^{2020}k + 2^{2019}$ bulunur.

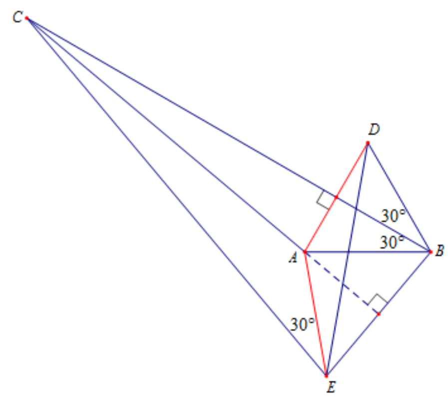
26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2018

$\boxed{1}$ $m(\widehat{BAC}) = 140°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 30°$ olan bir ABC üçgeninde A noktasının BC doğrusuna göre simetriği D, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği ise E dir. $m(\widehat{DEC})$ kaçtır?

a) 35° **b)** 40° **c)** 45° **d)** 50° **e)** 55°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$



Yansımalardan dolayı $|DB| = |BA| = |AE|$ ve $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CEA}) = 30°$ olur. Buna göre, ABD üçgeni eşkenardır ve $|AD| = |AE|$ elde edilir. ADE ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{EAD}) = 140°$ olduğundan $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED}) = 20°$ olup $m(\widehat{DEC}) = 20° + 30° = 50°$ bulunur.

$\boxed{2}$ $x_0, x_1, \ldots, x_{2018}$ tam sayıları $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ koşullarını sağlıyorsa x_{2018} sayısının 2018 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ koşullarını sağlayan bir dizideki terimler arasındaki fark her terimde 2 kat artar, böylece $x_2 = 4, x_3 = 8, x_4 = 16$ olduğu görülür ve her terim $x_n = 2^n$ koşulunu sağlar, ilk birkaç terim yazılarak tahmin de edilebilir, 2018. terim 2^{2018} olur.

$2018 = 2 \cdot 1009$ ve $2|2^{2018}$ olduğundan sadece mod 1009 da incelememiz yeterlidir. Fermat'ın Küçük Teoreminden $2^{1008} \equiv 1 \pmod{1009}$ ve $2^{2018} \equiv 2^{1008} \cdot 2^{1008} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{1009}$. Yani kalan 4 tür.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

İndirgemeli dizi yardımıyla soruyu çözelim. $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ doğrusal indirgemeli dizisinin karakteristik polinomu $r^2 - 3r + 2 = 0$ olup kökleri $r_1 = 1$ ve $r_2 = 2$ dir. Dolayısıyla genel terim $x_n = A \cdot 2^2 + B \cdot 1^n$ formundadır.

$n = 0$ için $x_0 = A + B = 1$

$n = 1$ için $x_1 = 2A + B = 2$

denklemlerinden $A = 1$ ve $B = 0$ bulunur. Dolayısıyla $x_n = 2^n$ elde edilir. Bu aşamadan sonra $x_{2018} = 2^{2018}$ sayısının 2018 ile bölümünden kalanı ilk çözümde olduğu gibi 4 olarak bulabiliriz.

$\boxed{3}$ $(x^2 - 2x\sqrt{2} + 7)(y^2 + 2y\sqrt{3} + 8) = 25$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(x^2 - 2x\sqrt{2} + 7)(y^2 + 2y\sqrt{3} + 8) = 25$ ifadesini $((x - \sqrt{2})^2 + 5)((y - \sqrt{3})^2 + 5) = 25$ olarak çarpanlarına ayırabiliriz.

Kare içi 0'dan küçük olamayacağından iki çarpanında 5den büyük eşit olduğu görülür ve bir çarpanı 5'ten büyük ise diğer çarpan 5ten küçük olması gerektiğinden tek olasılık iki çarpanında 5'e eşit olmasıdır.

$x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$den başka çözüm yoktur.

$\boxed{4}$ Her elemanı 6^{12} sayısının bir pozitif böleni olan ve herhangi iki farklı elemanının çarpımı tam küp olmayan bir kümede en çok kaç eleman bulunabilir?

a) 65 **b)** 70 **c)** 73 **d)** 77 **e)** 80

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 73.

Her $i, j \in \{0, 1, 2\}$ için $A_{ij} = \{2^s 3^t : 0 \leq s, t \leq 12, s \equiv i \pmod 3, t \equiv j \pmod 3\}$ olsun. Çarpımları tam küp olan iki eleman içermeyen bir küme; A_{00} dan en fazla 1, $A_{01} \cup A_{02}$ den en fazla 20, $A_{10} \cup A_{20}$ den en fazla 20, $A_{11} \cup A_{22}$ den en fazla 16, $A_{12} \cup A_{21}$ den en fazla 16, toplamda en fazla 73 eleman içerebilir. 73 elemanlı $\{1\} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12}$ kümesinde çarpımları tam küp olan iki eleman yoktur.

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

$\boxed{5}$ C açısı dik olan bir ABC üçgeninde $4|AC| = 3|BC|$ dir. ABC nin iç teğet çemberi BC ye D de, AC ye ise E de teğettir. AD doğrusu iç teğet çemberi D den farklı bir S noktasında, BE doğrusunu ise T noktasında kesiyor. $\dfrac{|AS|}{|TD|}$ kaçtır?

a) $\dfrac{3}{2}$ **b)** $\dfrac{5}{3}$ **c)** $\dfrac{11}{7}$ **d)** $\dfrac{18}{11}$ **e)** $\dfrac{22}{15}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$|AC| = 3k$, $|BC| = 4k$ olsun. $|CE| = |CD| = \dfrac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = k$ olur. Menalaus teoreminden

$$\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AT|}{|TD|} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{|AT|}{|TD|} = 1 \Rightarrow \frac{|AT|}{|TD|} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{|AD|}{|TD|} = \frac{11}{3} \Rightarrow |TD| = \frac{3|AD|}{11}$$

Kuvvet teoreminden

$$|EA|^2 = |AS| \cdot |AD| \Rightarrow |AS| = \frac{|EA|^2}{|AD|}$$

$$\Rightarrow \frac{|AS|}{|TD|} = \frac{11}{3} \cdot (\frac{|EA|}{|AD|})^2$$

ADC üçgeninde pisagordan $|AD| = k\sqrt{10}$ bulunur. Aynı zamanda $|AC| - |CE| = |EA| = 2k$ olur. Buradan

$$\frac{|AS|}{|TD|} = \frac{11}{3} \cdot \frac{4k^2}{10k^2} = \frac{22}{15}$$

bulunur.

6 Bir a pozitif tam sayısını tam bölmeyen en küçük pozitif tam sayıya *a nın ilk bölmeyeni* diyelim. Kaç $n \leq 26$ pozitif tam sayısı için ilk bölmeyeni n olan bir pozitif tam sayı bulunur?

a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Bir a sayısının bir sayının en küçük bölmeyeni olması için bir asal sayının kuvveti olmalıdır. Eğer değilse; p, m'in asal çarpanlarına ayrılışında üssü a'nin asal çarpanlarına ayrılışındaki üssünden küçük olan en küçük asal sayı olsun $a = p^k \cdot m$, $m > 1$ şeklinde yazılabilir fakat $p^k < a$'dır ve n'i bölmez yani a en küçük bölmeyeni değildir. Böyle $26 \geq a$ sayisi 14 tanedir.

7 $n_1, n_2, \ldots, n_{2018}$ tam sayılar olmak üzere

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2 + 4036 = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_{2018})$$

eşitliğini sağlıyorsa, $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 **b)** 2019 **c)** 6055 **d)** 2^{2018} **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Eşitlikte sağ tarafı sola atarsak,

$$\sum_{k=1}^{2018} (n_k - 1)(n_k - 2) = 0$$

bulunur. $f(n) = (n-1)(n-2)$ fonksiyonu sadece $(1, 2)$ aralığında negatif olduğu için her n tamsayısı için $(n-1)(n-2) \geq 0$ 'dir.

Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{2018}(n_k - 1)(n_k - 2) = 0$ olması için her k için $n_k = 1$ veya $n_k = 2$ olması gerekir. $n_k = 1$ olan k sayısı 2019 farklı değer alabileceğinden $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2$ toplamı 2019 farklı değer alabilir.

8 12×12 satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi kırmızı ve k tanesi mavi renge, hiçbir kırmızı birim karenin hiçbir komşusu (ortak kenar veya köşeye sahip birim kareler) boyanmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 26 **b)** 27 **c)** 28 **d)** 29 **e)** 30

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Soruda verilen ortak kenar veya köşelere sahip birim kareler boyanmayacak şekilde 2 sıra boyunca kırmızı ile boyayalım.

Çünkü kırmızı ortada bir yerlerde olduğunda çevresinde boyanamayacak kare sayısı artıyor. Buna göre şekli oluşturalım.

k	$*$	k		k		k		k		k	
k			k		k		k				k
									k		
k				m	m	m	m				k
		k		m	m	m	m		k		
k				m	m	m	m				k
		k		m	m	m	m		k		
k											k
		k		k		k		k			
k											k
		k		k		k		k			

<u>NOT</u>: k harfi kırmızı ile boyananan , m harfi mavi ile boyanabilen yerleri göstermektedir.(* sembolünü birimkareleri eşitlemek için koydum önemli bir nedeni yok.)

kare boyanabilir olduğundan 30 tane kırmızı kare ve 24 boyanabilir dolayısıyla hala daha maksimum kırmızı kare sayısına ulaşamadık.

soldaki en üst sıradan 1 kırmızı kare daha atalım seçtiğimiz kareye göre 25,26 veya 28 boyanabilir kare elde edilir. Fakat boyanabilir 29 kare elde edilemediğinden 1 Kırmızı kare daha attığımızda (Sol en üst ve 1 altındaki kare) $16 + 8 + 4 = 28$ tane boyanabilir kare elde edilir. Biz kırmızı kare sayısını $32 - 4 = 28$ e indirmiştik. Dolayısıyla $k = 28$ maximum alabileceği değeri olur.

m		k		k		k		k		k	
m											
m	m	m	m		k		k				k
		m	m						k		
k		m	m	m	m	m	m				k
		m	m	m	m	m	m		k		
k				m	m	m	m				k
		k		m	m	m	m		k		
k											k
		k		k		k		k			
k											k
		k		k		k		k			

<u>NOT</u>: k harfi kırmızı ile boyanan , m harfi mavi ile boyanan yerleri göstermektedir.

$\boxed{9}$ $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = |CD|$, $m(\widehat{ADB}) = 38°$,$m(\widehat{CDB}) = 42°$,$m(\widehat{ABC}) = 140°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaçtır?

a) 17° **b)** 18° **c)** 19° **d)** 20° **e)** 21°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Soruda verilen bilgilere göre dörtgenimizi oluşturduğumuzda $m(\widehat{ADB}) = 38°$ ve $m(\widehat{CDB}) = 42°$ olduğundan $m(\widehat{ADC}) = 80°$ olur. $m(\widehat{ADC}) + 2.m(\widehat{ABC}) = 360°$ ve $[AD]$ ile $[CD]$ yarıçap olacağından ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi D noktasıdır. Daha sonra $m(\widehat{ADB}) = 42°$ merkez açısının ölçüsü $\widehat{BAC}$ çevre açısının 2 katına eşit olacağından $m(\widehat{BAC}) = 21°$ bulunur.

10 Tam olarak 26 farklı tam kare ile bölünebilen en küçük pozitif tam sayının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Sayımız n olsun. n sayısının asal bölenleri sayısı 26 sayısının 2 ve 13 şeklinde 2 çarpanı olduğundan en fazla iki olabilir. Ve tamkare bölenleri sayısı 26 deniyor. o halde sayımız için $n = p^{2a}q^{2b}$, $p < q$ biçiminde olması gerektiğini söyleriz. En küçük olabilmesi için en küçük asal sayıları seçelim. $p = 2$, $q = 3$

daha sonra bölen sayısı kuralından ve tamkare bölen sayısı olduğunu göz önüne alarak $(a + 1)(b + 1) = 26$ olur. p daha küçük sayı olduğundan $a + 1 = 13$ seçersek sayımız daha küçük olur.

$a = 12$ ve $b = 1$ olduğundan sayımız $n = 2^{24} \cdot 3^2$ olacaktır. Fermat teoreminden $2^6 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan $2^{24} \equiv 1 \pmod 7$, $9 \equiv 2 \pmod 7$ olduğundan $n \equiv 2 \pmod 7$ bulunur.

11

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y^2 &= 10x \\ x^3 - xy^2 + y^2 &= 10y \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Verilen denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$x^2 + x^3 - y^2 - xy^2 + xy + y^2 = 10x + 10y$

ifadeyi çarpanlarına ayırırsak

$x^2(1 + x) - y^2(1 + x) + y(x + y) = 10(x + y)$

$(x^2 - y^2)(1 + x) + y(x + y) = 10(x + y)$

$(x - y)(x + y)(1 + x) + y(x + y) = 10(x + y)$

$(x + y)((x - y)(x + 1) + y) = 10(x + y)$

Buradan $x + y = 0$ veya $(x - y)(x + 1) + y = 10$ bulunur.

(1) $x + y = 0$ ise

$x = -y$ olduğunu kullanarak 1. denklemi çözelim.

$x = -y$ yazıldığında $-y^2 = -10y$ ve $y = 10$ veya $y = 0$ olabilir.

(a) $y = 0$ ise $x + y = 0$ olacağından $x = 0$ bulunur ve 2.denklemde yerine konulduğunda sağladığı görülür.

(b) Aynı şekilde $y = 10$ ise $x = -10$ bulunur. ve 2. denklemde yerine konulduğunda sağlandığı görülür.

(2) $(x - y)(x + 1) + y = 10$ ise

İfadeyi açıp düzenlersek $\frac{x^2+x-10}{x} = y$ olur.

Elde ettiğimiz bu ifadeyi ilk denklemde yerine yazıp düzenlersek

$x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 20x - 100 = 0$ denklemi elde edilir.

Şimdi bu ifadeye çarpanlarına ayıralım.

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 20x - 100$ deyip

Soldaki ifadeyi açıp katsayıları eşitlersek

$a + c = -11$

$ac + b + d = 9$
$ad + bc = 20$
$bd = -100$ denklemlerinden $a = -3$,$b = 5$,$c = -8$,$d = -20$ bulunur.
İfadeyi $(x^2 - 3x + 5)(x^2 - 8x - 20) = 0$ haline getirdik.
$x^2 - 3x + 5 = 0$ ifadesinin diskriminantı 0'dan küçük olduğundan reel kökü yoktur.
O halde $x^2 - 8x - 20 = 0$ ifadesinden gelen $x = 10$ ve $x = -2$ olmalıdır.

(a) $x = 10$ ise 1.denklemde yerine yazıp düzenlersek $y^2 = 10y$ yani $y = 10$ veya $y = 0$ elde ederiz. 2. denklemde bu değerleri denersek $y = 10$ olması gerektiğini anlarız.

(b) $x = -2$ ise $4 - 2y - y^2 = -20$ denkleminden $y = -6$ veya $y = 4$ olduğunu anlarız 2. denklemde yerine koyarsak $y = 4$ olması gerektiği görülür.

Yani ikililerimiz $(-10, 10)$,$(-2, 4)$,$(0, 0)$,$(10, 10)$ ikilileri bulunur. Yani 4 tane ikilimiz vardır.

Çözüm 2:

İlk denklemi x ile çarpalım ve x^3 ifadesini çekelim. Bunu 2. denklemde yerine koyalım.

$x^3 = 10x^2 + y^2x - x^2y$ ifadesini 2. denklemde yerine koyarsak

$10x^2 - x^2y + y^2 = 10y$ haline gelir. Bu ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$10x^2 - x^2y + y^2 - 10y = 0$

$x^2(10 - y) - y(10 - y) = 0$

$x^2 = y$ veya $y = 10$ olmalıdır.

$i)$ $y = 10$ ise ilk denklem $x^2 - 100 = 0$ yani $x = 10$ veya $x = -10$ elde edilir. 2. denklemde yerine konulduğunda sağlandığı görülür.

$ii)$ $x^2 = y$ ise ilk denklem $x^4 - x^3 - x^2 + 10x = 0$ haline gelir. Bu denklemin kökleri $x = -2$ ve $x = 0$ olduğundan

$a)$ $x = 0$ ise $y = 0$ olmalıdır. 2. denklemi sağlar.

$b)$ $x = -2$ ise $y = 4$ olmalıdır. 2. denklemi sağlar.

Buna göre çözüm kümemizdeki ikililer $(-10, 10)$, $(-2, 4)$, $(0, 0)$, $(10, 10)$ olmalıdır. Yani 4 tane ikilimiz vardır.

Çözüm 3:

Bir başka çözümünü daha vereyim ;

$y = xt$, $t \in \mathbb{R}$ dönüşümü yapabiliriz.

Denklemleri $y = xt$ yazıp düzenlediğimizde

$x + xt - xt^2 = 10$

$x^2 - x^2t^2 + xt^2 = 10t$ denklem sistemi veya $x = 0$ elde edilir.

İlk denklemden x ifadesini çekersek $x = \frac{10}{1+t-t^2}$ olur.

Elde ettiğimiz 2. denklemde yerine koyup düzenlersek

$t^5 - t^4 - 2t^3 + 11t^2 + t - 10 = 0$ denklemi elde edilir.

bu denklemin köklerinden birinin $t = 1$ olduğu açıktır. Basit bir polinom bölmesi ile

$(t - 1).(t^4 - 2t^2 + 9t + 10) = 0$ elde edilebilir.

$(t^2 + at + b).(t^2 + ct + d) = t^4 - 2t^2 + 9t + 10$ denilirse

$a + c = 0$

$ac + b + d = -2$

$ad + bc = 9$

$bd = 10$ eşitliklerinden $a = 3$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 5$ elde edilir.

Yani düzenlersek $(t-1)(t+1)(t+2)(t^2-3t+5)=0$ elde edilir. $t^2-3t+5=0$ ise $\Delta<0$ olacağından reel kökü olmayacaktır. $t\in\mathbb{R}$ dediğimizden yani $t=1$, $t=-1$, $t=-2$ ifadelerinden ve $x=\frac{10}{1+t-t^2}$ ile $y=xt$ eşitliklerinden

$i)$ $t=1$ ise $x=10$ ve $y=10$ bulunur.

$ii)$ $t=-1$ ise $x=-10$ ve $y=10$ bulunur.

$iii)$ $t=-2$ ise $x=-2$ ve $y=4$ bulunur.

Fakat biz bu denklem sistemini $x\neq 0$ için yapmıştık. O halde soruda verilen ilk denklemde $x=0$ yazarak $-y^2=0$ yani $y=0$ buluruz.

Buna göre çözüm kümemizdeki ikililer $(-10,10),(-2,4),(0,0),(10,10)$ elde edilir. Yani 4 tane ikilimiz vardır.

12 Tahtada başlangıçta 2018 sayısı yazılıdır. Her hamlede tahtadaki sayı silinip yerine o sayının 12 eksiği veya 9 katının 4 eksiği yazılıyor. Aşağıdaki sayılardan hangisi sonlu hamle sonucunda tahtada yazılı olabilir?

a) $2^{29}+2$ **b)** $3^{30}+1$ **c)** $4^{31}+1$ **d)** $5^{32}+4$ **e)** $6^{33}+2$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Tahtaya yazılan sayı her zaman 4 modunda 2'ye eşit olacak, C ve D şıkları olamaz. (12 çıkartılması veya 9 katının 4 eksiği alınması 4 modunda değeri değiştirmez ve $2018\equiv 2 \pmod 4$)'tür.)

2018'den 12 çıkartıp durduğumuzda değer 9 modunda $2,5,8$ şeklinde tekrar edecektir, bir sayının 9 katının 4 eksiği her zaman 9 modunda 5 kalanını vereceğinden sayımız 9 modunda yalnız $2,5,8$ değerlerini alabilir. A ve B şıkları da olamaz.

Yani içlerinden bir tanesi olabiliyorsa o şık E'dir.

13 Bir ABC üçgeninde $|AB|=|AC|=2,|BC|=\sqrt{2}$ dir. $[BC]$ nin orta noktası D, $[AC]$ nin orta noktası ise E dir. ABC nin çevrel çemberi üzerinde AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta olan ve $|PC|^2=|PD|^2+|PE|^2$ eşitliğini sağlayan bir P noktası alınıyor. $|PA|+|PB|$ kaçtır?

a) $1+\sqrt{2}$ **b)** $1+\sqrt{3}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** 3

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

PBC üçgeninde Stewart teoreminden,

$$\frac{PB^2+PC^2}{2}-\frac{1}{2}=PD^2$$

PAC üçgeninde Stewart teoreminden,

$$\frac{PA^2+PC^2}{2}-1=PE^2$$

Bu iki denklemi toplayıp $PC^2=PD^2+PE^2$ 'yi kullanırsak,

$$PA^2+PB^2=3$$

bulunur.PAB üçgeninde kosinüs teoreminden,

$$PA^2+PB^2-2\cdot PA\cdot PB\cdot\cos(\angle BPA)=AB^2\Rightarrow 3+2\cdot PA\cdot PB\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=4\Rightarrow PA\cdot PB=\sqrt{2}$$

$$PA+PB=\sqrt{PA^2+PB^2+2\cdot PA\cdot PB}=\sqrt{2}+1$$

$\boxed{14}$ $k, n_1, n_2, ..., n_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere $4^{n_1} + 4^{n_2} + ... + 4^{n_k}$ sayısı 43 ile tam bölünüyorsa, k en az kaç olabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$4^n \equiv 1, 4, 16, 21, 41, 35, 11 \pmod{43}$, 41, 1 ve 1 kalanlarını verecek şekilde 3 sayı seçersek toplam 43'e bölünür.

$\boxed{15}$ x bir irrasyonel sayı olmak üzere, $x^2 - 2x$ ve $x^3 - 5x$ rasyonel sayılar ise, $x^3 - 5x$ kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x^2 - 2x$ ifadesini $(x-1)^2 - 1$ biçiminde yazarsak x sayısının $\sqrt{a} + 1$ biçiminde olması gerektiğini görürüz. İkinci ifade olan $x^3 - 5x$ ifadesinde $\sqrt{a} + 1$ yazarsak $a\sqrt{a} + 3a + 3\sqrt{a} + 1 - 5(\sqrt{a} + 1)$ elde ederiz ve düzenlersek $(a-2)\sqrt{a} + 3a - 4$ elde ederiz. Köklü ifade olmaması için $a = 2$ seçersek $3 \cdot 2 - 4 = 2$ olduğu görülür.

Çözüm 2:

İki rasyonel sayının oranıda rasyonel olacağından ve $x \neq 0$ olduğunu bildigimizden

$$\frac{x^3 - 5x}{x^2 - 2x} = \frac{x^2 - 5}{x - 2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} \in \mathbb{Q}$$

yazılabilir. Bu oranda üst tarafın rasyonel ve alt tarafın irrasyonel olduğu açıktır. Bu durumda oranının rasyonel olması için üst taraf 0 olmalıdır. $x^2 - 2x - 1 = 0$ ve $x^2 = 2x + 1$ bulunur. $x(x^2 - 5) = x(2x - 4) = 2(x^2 - 2x) = 2$ bulunur.

$\boxed{16}$ $1, 2, ..., 7$ sayılarıyla yedi kutunun her birine en az 1 ve en çok 10 olmak üzere, bilyeler dağıtılacaktır. Böyle bir dağılımda $i < j$ olmak üzere, i numaralı kutudaki bilye sayısı j numaralı kutudaki bilye sayısından az değilse, (i, j) ikilisine *ters ikili* diyelim. Tam olarak bir ters ikili içeren kaç dağılım vardır?

a) 720 **b)** 1260 **c)** 1520 **d)** 1980 **e)** 2310

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Dağılımdaki ters ikili (i, j) olsun. Eğer $j - i > 1$ ise $(i, i+1)$ ters ikili değildir fakat (i, j) ikilidir. a. kutudaki bilye sayısı x_a dersek, $x_i < x_{i+1}$ ve $x_i \geq x_j$ olacağından $x_{i+1} > x_j$ olacaktır. Yani $(i+1, j)$ ikilisi de ters ikilidir. Bu da bir tane ters ikili içermesiyle çelişir. Dolayısıyla $j = i + 1$'dir. Yani tek ters ikili $(i, i+1)$'dir. 6 farklı $(i, i+1)$ ikilisi seçilebilir. Bu dağılım için $(i, i+1)$ ikilisi hariç kutulardaki bilye sayısı artan sırada olmalıdır. Örneğin $i = 3$ ise $x_1 < x_2 < x_4 \leq x_3 < x_5 < x_6 < x_7$ olacaktır. İki ihtimal vardır: $x_i = x_{i+1}$ veya $x_{i+1} < x_i$. Bu durumlardaki dağılım sayısını bulmak için $\{1, 2, \ldots, 10\}$ kümesinden elemanlar seçip artan sırada dizmeliyiz. $x_i = x_{i+1}$ ise 6 sayı $x_{i+1} < x_i$ ise 7 adet sayı seçmeliyiz. Bu durumda dağılım sayısı

$$6\left(\binom{10}{6} + \binom{10}{7}\right) = 1980$$

elde edilir.

$\boxed{17}$ $m(\widehat{ACB}) = 60°$ olan dar açılı bir ABC üçgeninde diklik merkezi H ve A dan karşı kenara indirilen dikmenin ayağı D dir. $[AC]$ üzerinde $|BD| \cdot |CD| = |ED|^2$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|BH| = 7|EH|$ ise $\frac{|AE|}{|CE|}$ kaçtır?

a) $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{1}{3}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: $\dfrac{1}{4}$.

$\triangle BDH \sim \triangle ADC$ olduğundan $|BD| \cdot |CD| = |DH| \cdot |DA|$ olur. Buradan da $|DE|^2 = |DH| \cdot |DA|$ buluruz. Yani $\triangle DHE \sim \triangle DEA$ olur. $\angle HBD = \angle DAE = \angle HED = 30°$ olur. $\angle ADE = \alpha$ olsun. $1/7 = |EH|/|BH| = |EH|/|HD| \cdot |HD|/|BH| = (\sin\alpha/\sin 30°) \cdot \sin 30° = \sin\alpha$ olur. $|AE|/|EC| = \tan\alpha/\tan 30° = 1/(4\sqrt{3})/(1/\sqrt{3}) = 1/4$ olur.

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

$\boxed{18}$ $2^{2^n} + 2^n + n$ ifadesinin 7 ile tam bölünmesini sağlayan kaç $n \leq 420$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 20 **b)** 30 **c)** 40 **d)** 50 **e)** 60

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$2 \equiv 2 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ dir. Dolayısıyla üslü olan ifadelerin üssünün 3'e bölümünden kalanlara bakmak gereklidir.

Bundan dolayı 2^{2^n} ifadesinden $2^n \equiv \cdots \pmod 3$ şeklinde de bakmamız gerekir.

$n = 2k+1$ olursa $2^n \equiv 2 \pmod 3$

$n = 2k$ olursa $2^n \equiv 1 \pmod 3$ olur. dolayısıyla soruyu 2 farklı duruma ayıralım.

a) $n = 2k$ olması halinde $2^n \equiv 1 \pmod 3$ olduğu için denkliğimiz $2 + 2^{2k} + 2k \equiv 0 \pmod 7$ elde edilir.

1) $k \equiv 0 \pmod 3$ olursa $(k = 3p)$ $3 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur. $2p + 1 \equiv 0 \pmod 7$, $p \equiv 3 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

2) $k \equiv 1 \pmod 3$ olursa $(k = 3p+1)$ $8 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur $3p + 4 \equiv 0 \pmod 7$, $p \equiv 1 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

3) $k \equiv 2 \pmod 3$ olursa $(k = 3p+2)$ $8 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur $p \equiv 1 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

b) $n = 2k+1$ olması halinde $2^n \equiv 2 \pmod 3$ olduğu için denkliğimiz $4 + 2^{2k+1} + 2k + 1 \equiv 0 \pmod 7$ elde edilir.

1) $k \equiv 0 \pmod 3$ olursa $(k = 3p)$ $7 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur $p \equiv 0 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

2) $k \equiv 1 \pmod 3$ olursa $(k = 3p+1)$ $8 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur $p \equiv 1 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

3) $k \equiv 2 \pmod 3$ olursa $(k = 3p+2)$ $13 + 6p \equiv 0 \pmod 7$ olur $p \equiv 6 \pmod 7$ (42 periyodunda 1 çözüm)

42 periyodunda 6 çözüm vardır ve $n \leq 420$ için $6 \cdot 10 = 60$ çözüm vardır

$\boxed{19}$ Bir $a_1, a_2, ..., a_{100}$ pozitif gerçel sayı dizisinde $a_1 = 1$ ve her $n = 1, 2, ..., 99$ için

$\frac{1}{a_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i + a_{i+1})\sqrt{a_i^2 + i^2}} = 1$

sağlanıyorsa, a_{100} kaçtır?

a) 5 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 20 **e)** 25

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$$\frac{1}{a_{n+1}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i+a_{i+1})\sqrt{a_i^2+i^2}}=1$$

n yerine $n-1$ yazarsak ve denklemden çıkarırsak,

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\sqrt{a_n^2+n^2}}=0$$

$n=1$ yazarsak $a_2=\sqrt{2}$ bulunur. Yani $a_n=\sqrt{n}$ olabilir. Tümevarımla gösterelim,

$n=1,2,\cdots,k$ için doğru olsun.$n=k+1$ için ispatlayalım. Denklemde $n=k$ yazarsak ve $a_{k+1}=x$ dersek,

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{(x+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}}=0$$

payda eşitlersek,

$$x^2\sqrt{k+1}-x-k\sqrt{k+1}=0\Rightarrow(x-\sqrt{k+1})(\sqrt{k+1}x+k)=0$$

bulunur. Dizi, pozitif gerçel sayı dizisi olduğundan $x=a_{k+1}=\sqrt{k+1}$ olur. Dolayısıyla her n için $a_n=\sqrt{n}$ olur. $a_{100}=10$ olur.

20 $1,2,\ldots,26$ sayılarıyla numaralandırılmış 26 böcek başlangıçta k numaralı böcek $(k,0)$ noktasında bulunacak şekilde koordinat düzlemine yerleştirilmiştir. Her hamlede tam olarak bir böcek bulunduğu (a,b) noktasından $(a+1,b)$, $(a-1,b)$, $(a,b+1)$, $(a,b-1)$ noktalarından birine, atlayacağı noktada başka bir böcek bulunmuyorsa, atlıyor. En az kaç hamle sonucunda her $k=1,2,\ldots,26$ için k nolu böcek $(27-k,0)$ noktasında bulunabilir?

a) 384 **b)** 386 **c)** 388 **d)** 390 **e)** 392

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

k numaralı böceğin yatay düzlemde yapacağı hamle en az $\mid(27-k)-k\mid=\mid 27-2k\mid$ olacaktır. Yatay düzlemde yapılan toplam hareket Y olsun.

$$Y\geq\sum_{k=1}^{26}\mid 27-2k\mid=\sum_{k=1}^{13}(27-2k)+\sum_{k=14}^{26}(2k-27)=\sum_{k=1}^{13}(27-2k)+\sum_{k=1}^{13}(2(k+13)-27)=\sum_{k=1}^{13}(27-2k+2k-1)=338$$

olur. Dikey yönde yapılan hareket sayısı D olsun. Her böcek çift sayıda hareket yapacaktır. Eğer bir böcek dikey harekette bulunursa en az 2 dikey hareket yapacaktır. İki böceğin dikey hareket yapmadığını varsayalım. Bu böceklerin numaraları k_1 ve k_2 olsun. Genelliği bozmadan $k_1>k_2$ olsun. $27-k_2>27-k_1$ olduğundan dikey hareket yapmadan bu iki böcek birbirlerinin arkasına geçemez. O yüzden dikey hareket yapmayan böcek sayısı en fazla 1 olabilir. Yani $D\geq 2\cdot 25=50$ olur. Dolayısıyla $Y+D\geq 388$ olur.

388 için örnek durum: 13. böcek ile 14. böcek toplamda 4 hamle ile yer değiştirir (13. böcek dikey hareket yapmaz). $1\leq k\leq 12$ için k. ve $(27-k)$. böceklerin birisi yukarı doğru diğeri aşağıya doğru hamle yapar ve yatayda hareket edip yer değiştirirler. Böylece 388 hamlede sonuca ulaşılır.

21 Bir ABC üçgeninde B köşesine ait iç açıortay karşı kenarı D de, C ye ait iç açıortay ise karşı kenarı E de kesiyor. $m(\widehat{AED})=m(\widehat{DEC})$ olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ kaçtır?

a) 15° **b)** 30° **c)** 45° **d)** 60° **e)** 75°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Açı eşitliklerinden dolayı D noktası BEC üçgeninin B noktasına göre dış teğet çemberinin merkezidir. Böylece $[CD$ ışını, BEC üçgeninin bir dış açıortayı olur. Fakat $[CE$, ABC üçgeninde iç açıortay olduğundan $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ECA}) = 60°$ elde edilir. Açıortaylar arasında kalan açılar ile ilgili

$$m(\widehat{EDB}) = \frac{m(\widehat{BCE})}{2}$$

eşitliğinden $m(\widehat{EDB}) = 30°$ bulunur.

22 m ve n tam sayılar olmak üzere, $(m + n^2)(m + 1) = 4mn$ eşitliği sağlanıyorsa $m + n$ ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır ?

a) -2 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$(m + n^2)(m + 1) = 4mn$ ifadesini açıp $4mn$ yi sol tarafa atarsak

$m^2 - 2mn + n^2 + n^2m + m - 2mn = 0$ şeklinde yazalım.

ifadeleri tam karelere tamamlarsak $(m - n)^2 + m.(n - 1)^2 = 0$ elde edilir. Aşağıdaki adımları takip edelim.

$(m - n)^2 = -m.(n - 1)^2$

$-m = k$ diyelim;

$(k + n)^2 = k.(n - 1)^2$ Kareköke alalım.

$k + n = (n - 1).\sqrt{k}$,$k = a^2$ dönüşümü yapalım.

$a^2 + n = an - a$

$a^2 + a = n.(a - 1)$

$n = \frac{a^2+a}{a-1}$ ifadesini polinom bölmesi ile $a + 2 + \frac{2}{a-1}$ şeklinde yazalım.

$a - 1 = 2$,$a - 1 = 1$,$a - 1 = -1$,$a - 1 = -2$ olabileceğinden ve $m = -a^2$ oldugundan

$i)$ $a = 2$ ise $m = -4$,$n = 6$ elde edilir.

$ii)$ $a = 3$ ise $m = -9$,$n = 6$ elde edilir.

$iii)$ $a = 0$ ise $m = 0$,$n = 0$ elde edilir.

$iv)$ $a = -1$ ise $m = -1$,$n = 0$ elde edilir.

olabilecek $m + n$ değerlerinin toplamı $2 - 3 + 0 - 1 = -2$ elde edilir.

23 x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $2x + 16y = x^2 + y^2$ eşitliği sağlanıyorsa, $7x + 4y$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -32 **b)** -30 **c)** -28 **d)** -26 **e)** -24

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$2x + 16y = x^2 + y^2$ ifadesini $(x-1)^2 + (y-8)^2 = 65$ haline getirirebiliriz.

$x - 1 = a$

$y - 8 = b$ dönüşümleri yapılırsa bizden minimumu istenen ifade için $7a + 4b$ nin minimumuna bakmak yeterlidir.

$a^2 + b^2 = 65$ eşitliğinden $b = \sqrt{65 - a^2}$ denilebilir. Bunu bizden istenen ifadede yerine koyarsak

$(7a + 4\sqrt{65 - a^2})' = 0$ denklemini çözüp ekstremum değerleri bulalım.

$7 - \frac{8a}{2\sqrt{65-a^2}} = 0$ elde ederiz.Bu denklemi düzenleyip her iki tarafın karesi alınırsa

$49.65 = 65a^2$ elde edilir ve $a = 7$ veya $a = -7$ elde edilir. $a = 7$ için $x = 8$, $a = -7$ için $x = -6$ bulunur.

Minimum istendiğinden $x = -6$ alıp denklemde yerine koyarsak

$y^2 - 16y + 48 = 0$ denklemi elde edilir $y = 12$ veya $y = 4$ bulunur. Minimum istendiğinden $y = 4$ alalım.

sonuç olarak $x = -6$ ve $y = 4$ için $7x + 4y = -26$ oldugundan $7x + 4y \geq -26$ bulunur.

Çözüm 2:

Önceki çözümdeki $x - 1 = a$ ve $y - 8 = b$ dönüşümlerinden sonra $7, 4$ ve a, b üzerinde C - S eşitsizliği uygulanırsa:

$|7a + 4b| \leq \sqrt{7^2 + 4^2} \times \sqrt{a^2 + b^2}$, $a^2 + b^2 = 65$ olduğu kullanılıp düzenlenirse $-65 \leq 7a + 4b \leq 65$ bulunur. Minimum değer -65dir. Baştaki dönüşümlerden sonra istenilen $7a+4b+39$ olduğundan, $-65+39 = -26$dır.

Çözüm 3:

Lise düzeyi analitik geometri bilgilerimizi kullanabileceğimiz bir çözüm sunabilirim.

$2x+16y = x^2+y^2$ denklemi analitik düzlemde $(x-1)^2+(y-8)^2 = 65$ çemberini belirtir. Bu çemberin merkezi $M(1, 8)$ noktası olup yarıçap $r = \sqrt{65}$ tir. $7x + 4y = n$ dersek, bun denklem de analitik düzlemde bir doğru gösterir. n parametresinin alacağı değerlere göre, bu doğru çemberle kesişecek, çembere teğet olacak veya çemberle kesişmeyecektir. Doğrunun çembere teğet olması durumunda n nin en büyük-en küçük değerlerini alabileceğini görebiliriz. (Bunu daha kolay görmek için çemberi ve $-7/4$ eğimine sahip bazı doğruları çizmek faydalı olacaktır.) $M(1, 8)$ noktasından $7x + 4y - n = 0$ doğrusuna inen dikme ayağı H olsun. Teğet olma şartından dolayı $|MH| = r$ olmalıdır. Böylece, noktanın doğruya uzaklığı formülünden

$$\frac{|7 \cdot 1 + 4 \cdot 8 - n|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \sqrt{65}$$

olup $n = -28$ ve $n = 104$ değerleri elde edilir. $n_{\text{min}} = -28$ dir.

Not: Bu soruda n nin ekstremum değerlerinin tam sayı çıkmasında $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$ eşitliğinin fayda sağladığını görebiliriz. Modifiye sorular yazmak isterseniz $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ eşitliğini sağlayan ($(a, b) \neq (c, d)$ olması tercih edilir) a, b, c, d pozitif tam sayıları bulmanız gerekecektir.

- $7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$
- $12^2 + 1^2 = 8^2 + 9^2$
- $32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2$

...vb örnekler türetebiliriz.

Çözüm 4:

Yanıt : $\boxed{D}$

Verilen eşitlikte her iki tarafa $12x$ ekleyip $8y$ çıkarırsak

$$x^2 + 12x + y^2 - 8y = 14x + 8y$$

elde edilir. Tamkareye tamamlarsak

$$(x+6)^2 + (y-4)^2 = 36 + 16 + 14x + 8y = 14x + 8y + 52$$

elde edilir. Sol taraf 0'dan büyük eşit olduğundan

$$14x + 8y + 52 \geq 0 \Rightarrow 7x + 4y \geq -26$$

elde edilir. $(x, y) = (-6, 4)$ örnek durumdur.

24 Bir sözlü sınava katılan 26 öğrencinin her birine sabah seansında 1 ve akşam seansında 1 olmak üzere, 2 farklı soru soruluyor. Sorulan soruların hepsinin aynı kitaptan olduğu ve aynı seansta birden fazla öğrenciye sorulmadığı ve her öğrenci için o öğrenciye 2 sorudan en az birinin başka öğrenciye sorulmadığı biliniyor. Buna göre kitapta en az kaç soru bulunabilir?

a) 28 **b)** 33 **c)** 36 **d)** 42 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 39.

Sabah seansında sorulan sorular kümesi S_1, akşam seansında sorulan sorular S_2 olsun. Bir soru A ve B, bir diğer soru ise C ve D öğrencilerine sorulduysa, bu dört öğrenciye sorulan ikinci sorular birbirinden farklı olacaktır. Bu nedenle, $2|S_1 \cap S_2| \leq |S_1 - S_2| + |S_2 - S_1|$ ve buradan $|S_1 \cup S_2| \geq 3|S_1 \cap S_2|$. O zaman $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$ olduğundan $|S_1 \cup S_2| \geq \frac{3}{2} \cdot 26 = 39$.

39 için örnek: $i = 1, \ldots, 13$ olmak üzere, s_i sorusu birinci seansta i nolu öğrenciye, ikinci seansta $13+i$ nolu öğrenciye sorulsun ve bütün öğrencilerin ikinci soruları birbirinden farklı olsun.

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

25 Bir A_1,A_2...A_{26} düzgün 26-geninde A_1A_2,A_1A_{15},A_1A_{16} doğruları A_8A_{21} doğrusunu sırasıyla B,C,D noktalarında kesiyorlar. $\dfrac{|A_8B|}{|CD|}$ kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2 **e)** 3

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 2.

$k = 0, 1, \ldots, 13$ için X_k noktasını A_1A_{k+8} ile A_8A_{21} in kesişimi olarak tanımlayalım. Yani sorudaki notasyona göre $A_8 = X_0, B = X_1, C = X_7, D = X_8, A_{21} = X_{13}$ olur. İki adet önemli eşitlik elde edeceğiz: Birincisi, A_8A_{21} ve A_1A_{14} ün her biri çokgenin çevrel çemberinin çaplarıdır, o halde X_6 merkezdir. Yani $|X_0X_6| = |X_6X_{13}|$. İkincisi, $A_1A_{15} \perp A_8A_{21}$ ve $|X_7X_i| = |X_7X_{14-i}|$ eşitliği ve daha genel olarak her $i, j = 1, 2, \ldots, 6$ için $|X_iX_j| = |X_{14-j}X_{14-i}|$. İkinci eşitliğin $i = 1, j = 6$ durumundaki özel $|X_1X_6| = |X_8X_{13}|$ eşitliğini birinci eşitlikten çıkarırsak $|X_0X_1| = |X_6X_8| = |X_6X_7| + |X_7X_8| = 2 \cdot |X_7X_8|$ bulunur. Buradan $\dfrac{|A_8B|}{|CD|} = \dfrac{|X_0X_1|}{|X_7X_8|} = 2$ olduğu görülür.

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

26 2 nin alabileceği tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin p ile bölümünden kalanların alabileceği farklı değerlerin toplamının p ye eşit olmasını sağlayan 2018 den küçük kaç p asalı vardır ?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Öncelikle $p = 2$ için sağlamadığı açıktır. $p > 2$ için $2^r < p < 2^{r+1}$ olsun. Buna göre

$$p \leq 2^{r+1} - 1$$

olacağını aklımızda tutalım. $2^0, 2^1, ..., 2^r$ değerleri p'den küçük olduklarından p modunda kalan kendisine eşittir. 2'nin alabileceği tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin p ile bölümünden farklı kalanlarının toplamı A olsun.

$$A \geq 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^r = 2^{r+1} - 1$$

yazılır. $A = p$ olabilmesi için $p = 2^{r+1} - 1$ olması gerekir. Bu formattaki 2018'den küçük asal sayılar; $2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^5 - 1, 2^7 - 1$ olur. Yani 4 tane asal sayı vardır.

27 a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (a+b+ab)x^2 + (a^2+b^2)x + ab$ polinomunun gerçel kökü yoksa, $(a-2)^2 + (b-2)^2$ ifadesinin alabileceği en büyük tamsayı değeri nedir?

a) 9 **b)** 7 **c)** 5 **d)** 3 **e)** 1

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Verilen ifadeyi tahmin ederek çarpanlarına ayıralım.

$(x^2+mx+n).(x^2+kx+l) = x^4+(a+b)x^3+(a+b+ab)x^2+(a^2+b^2)x+ab$ ifadesinde terimlerin katsayılarını eşitlersek

$m + k = a + b$

$mk + n + l = a + b + ab$

$ml + nk = a^2 + b^2$

$nl = ab$ elde edilir. bu denklem sistemini çözersek $m = b$, $n = a$, $k = a$,$l = b$ elde edilir.

$(x^2 + bx + a).(x^2 + ax + b) = 0$ elde edilir.

reel kökü olmaması için diskriminantı 0 dan küçük olmalıdır.

$b^2 - 4a < 0$ ve $a^2 - 4b < 0$ elde edilir.

İstenen ifadeyi açarsak $a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4$

$(a^2 - 4b) + (b^2 - 4a) + 8$ olduğundan $(a-2)^2 + (b-2)^2 < 8$ olmalıdır. Alabileceği en büyük tamsayı değeri 7 bulunur.

28 Masadaki üç kutuda başlangıçta k,l ve m bilye bulunuyor. İki oyuncu sırasıyla hamle yaparak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncuların birini veya ikisini seçip seçtiği kutu veya kutulardan birer bilye alıyor. Hamle yapamayan oyuncu kaybediyor. Oyun $(k, l, m) = (2017, 2018, 2018)$, $(2017, 2018, 2019)$, $(2018, 2018, 2018)$, $(2018, 2019, 2019)$ ve $(2019, 2019, 2019)$ için birer kez oynanırsa , oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 **b)**2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 3.

$(2p, 2q, 2s)$ durumunda hangi hamle yapılırsa yapılsın, rakip oyuncu durumu yeniden $(2r, 2e, 2h)$ durumuna getirebiliyor. Bu nedenle $(2p, 2q, 2s)$ durumunda başlayan oyuncu oyunu kaybediyor. Buradan $(2p+1, 2q+1, 2s+1)$ durumunda da başlayan oyuncunun oyunu kaybedeceği görülüyor. Diğer tüm durumlardan bu iki duruma hamle bulunuyor.

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

29 Ayrıt uzunlukları $1, 2, 3$ cm olan dikdörtgenler prizmasında A köşesine en uzak köşe F olsun. Daima dikdörtgenler prizmasının üzerinde hareket etmek şartı ile A köşesinden F köşesine giden karınca en az kaç cm yol gitmelidir?

a) 4 **b)**$3\sqrt{2}$ **c)**$2\sqrt{5}$ **d)** $3+\sqrt{5}$ **e)** $2+\sqrt{10}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Dikdörtgenler prizmasını açarsak kenar uzunlukları x, y, z olan bir prizma için en kısa yolun $\sqrt{x^2+(y+z)^2}$ formatında olması gerektiğini görürüz. $x = 1, 2, 3$ değerlerini yerine koyarsak minimum değer $x = 3$ için $3\sqrt{2}$ bulunur.

30 m ve n tamsayılar, p bir asal sayı olmak üzere kaç farklı (m, n, p) üçlüsü için $\dfrac{13^m + p\cdot 2^n}{13^m - p\cdot 2^n}$ bir pozitif tamsayıdır?

a)0 **b)**1 **c)**2 **d)**3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Soruda istenen ifadeye a diyelim.

$\dfrac{13^m + p.2^n}{13^m - p.2^n} = a$ diyelim. İçler dışlar çarpımı yapıp düzenlersek ifademiz

$$(1+a).p.2^n = 13^m.(a-1)$$

4 bilinmeyenli diyafont denkleme dönüşür. Bu ifadeden yola çıkarak

$p.2^n = 13^m.\dfrac{a-1}{a+1}$ haline gelir. Sağ taraf birlikte düşünüldüğünde tamsayı olmalıdır.

$p.2^n = 13^m - \dfrac{2.13^m}{a+1}$ haline gelir. Buradan

$a+1=2$,$a+1=1$, $a+1=-1$, $a+1=-2$, $a+1=13^k$, $a+1=-13^k$, $a+1=2.13^k$, $a+1=-2.13^k$; $(k \le m)$ eşitlikleri elde edilir. Bu ifadelerden eşitliği mümkün olan durumları bulalım.

Eşitliğin sol tarafı $0 \pmod 2$ olduğundan eşitliğin sağ tarafında da ifade çift olmalıdır. $13^m \equiv 1 \pmod 2$ olduğundan $\dfrac{2\cdot 13^m}{a+1} \equiv 1 \pmod 2$ olmalıdır. Bunun için $a+1$ çift olmalıdır. $a > 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$a+1=2$ veya $a+1=2\cdot 13^k$, $k \le m$ olabilir.

1) $a+1=2$ olması durumunda $2.p.2^n = 0$ olur ve $2^n > 0$ ve $p > 0$ olduğundan mümkün değildir.

2) $a+1=2.13^k$, $k \le m$ olması durumunda $a = 2.13^k - 1$ olur ve

$p.2^n = 13^m - 13^{m-k}$ elde edilir. $m \neq k$ için ifade $13^g.(13^t - 1)$,$g \in N$ ve $t \in N$ olması gerektiğinden daima 12 ve 13 ile bölünür. dolayısıyla p asal olamaz. $m = k$ olmalıdır.

$p.2^n = 13^m - 1$ Bu ifadenin içinde daima 12 çarpanı bulanacağından ve başka tek çarpan daha bulunacağından $m > 1$ için p asal olamaz

İddia: $m > 1$ için $p.2^n = 13^m - 1$ ifadesine $13^m - 1$ sayısının 2 asal carpanı olan p asal sayısı yoktur.

İspatı ise bu adreste mevcuttur.

$m = 1$ alınmalıdır.

$p.2^n = 12$ olur. $n = 2$ ve $p = 3$ elde edilir.

$(m, n, p) = (1, 2, 3)$ elde edilir.

31 $0 < x \leq 1$ olmak üzere, $\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} - \sqrt{1 - x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** $3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $\sqrt{5}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$(\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} - \sqrt{1 - x})\prime = 0$ denklemini çözüp ekstremum değerleri bulalım.

Türevi alırsak;

$d\dfrac{-2}{x^2\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}} = 0$ denklemini elde ederiz.

İfadeyi düzenleyip her tarafın karesini aldığımızda

$x^4 + 4x^3 + 16x - 16 = 0$ denklemi elde edilir.

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + 4x^3 + 16x - 16$ yazıp katsayıları eşitlersek

$a + c = 4$

$ac + b + d = 0$

$ad + bc = 16$

$bd = -16$ denklemlerinden $a = 0$, $b = 4$, $c = 4$ ve $d = -4$ bulunur.

$(x^2 + 4).(x^2 + 4x - 4) = 0$ elde ettik.

Sol tarafın da diskriminantı 0 dan küçük olduğundan reel kökü yoktur.

$x^2 + 4x - 4$ ifadesindeki kökler $x = \dfrac{-4 + \sqrt{32}}{2}$ veya $x = \dfrac{-4 - \sqrt{32}}{2}$ bulunur.

$0 < x \leq 1$ olduğundan $x = \dfrac{-4 + \sqrt{32}}{2}$ yani $x = 2\sqrt{2} - 2$ olmalıdır.

$1 + \dfrac{4}{x} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2} - 1}$ yani $3 + 2\sqrt{2}$ ve $1 - x = 3 - 2\sqrt{2}$ olduğundan $\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} - \sqrt{1 - x}$ ifadesi düzenlendiğinde $\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2$ olduğundan

$0 < x \leq 1$ için $\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} - \sqrt{1 - x} \geq 2$ bulunur.

32 26 takımın katıldığı bir turnuvada her takım ikilisi arasında tam olarak bir maç yapıyor. A takımı B takımını, B takımı C takımını, C takımı da A takımını yenerse A, B, C kümesine tuhaf küme diyelim. Bu turnuvada tuhaf küme sayısı en çok kaç olabilir?

a) 684 **b)** 694 **c)** 712 **d)** 728 **e)** 736

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 728.

Tuhaf olmayan her $\{A, B, C\}$ kümesinde bir takımın diğer iki takımı yenmesi gerekiyor. m tane takımı yenmiş her takım $\binom{m}{2}$ tane tuhaf olmayan küme oluşturacaktır. Demek ki tuhaf olmayan kümelerin sayısının en az olması için takımların kazandıkları maç sayıları birbirlerine mümkün oldukça yakın olmalıdır ve bu durumda da 13 takımın 13, kalan 13 takımın ise 12 takımı yenmesi gerekiyor. Bunun için bir çember ertafına dizilmiş 26 takımın her birinin saat yönündeki ilk 12 takımı yenmesi gerekiyor, diğer maç sonuçları önemli değildir. Sonuç olarak cevap:

$$\binom{26}{3} - 13\binom{13}{2} - 13\binom{12}{2} = 728.$$

Kaynak: Tübitak 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2018

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2019

1 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası ve $[AD]$ üzerinde bir E noktası alınıyor. $|DE| = 1$, $|AE| = 2$ ve $|BD| = |CD| = \sqrt{3}$ ise, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BEC})$ kaçtır?

a) 90° **b)** 120° **c)** 135° **d)** 150° **e)** 180°

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

BEC üçgenini $BE'C$ olarak $|BE'| = |EC|$ olacak şekilde üçgenin dışına yapıştıralım. A, D, E' nin doğrusal olduğunu söylemek çok zor değil. $|BD| \cdot |DC| = |AD| \cdot |DE'| = 3$ olduğundan $ABE'C$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BE'C}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BEC}) = 180°$dir.

2 2020^{2019} sayısının 27 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 10 **b)** 13 **c)** 16 **d)** 19 **e)** 22

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Öncelikle $2020 \equiv 22 \pmod{27}$ olduğunu görelim.

Daha sonra $(2020, 27) = 1$ olduğundan $\varphi(27) = 18$ olarak hesaplayalım.

$2019 \equiv 3 \pmod{18}$ olduğundan $2020^{2019} \equiv 22^3 \pmod{27}$ olarak bulalım.

$22^3 \equiv (-5)^3 \pmod{27} \equiv -125 \pmod{27} \equiv 10 \pmod{27}$ olarak bulunur.

3 k bir sabit gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x + 4z &= 2 \\ kx + 2y &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü bulunmuyorsa, k kaçtır?

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

İlk denklemi $x + y - 1 = 2z$, $2x + 2y - 2 = 4z$ şeklinde yazıp 2. denklemde yerine koyarsak

$5x + 2y = 4$

$kx + 2y = 3$ denklem sisteminde çözüm kümesinin boş küme olması için $\dfrac{5}{k} = \dfrac{2}{2}$ yani $k = 5$ olmalıdır.

4 İki basamaklı pozitif tam sayılardan oluşan ve herhangi iki elemanının çarpımı 100 ile tam bölünmeyen bir kümenin eleman sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 74 **b)** 76 **c)** 78 **d)** 80 **e)** 82

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\dot{I} = \{10, 11, \ldots, 99\}$

$s(\dot{I}) = 90$'dır ve seçilen iki elemanın çarpımının 100 ile bölünebilmesi için 2 durum vardır, sayıların ikisinde de 2 ve 5 çarpanları olması ya da sayılardan birisinde 2^2 diğerinde 5^2 çarpanı bulunması. Seçilen sayıların bu durumlara uymaması ve kümesinin maksimum elemanlı olması(2^2 çarpanına sahipler yerine 5^2 çarpanına sahip olanları çıkartmak) için çıkartacağımız kümeler:

$B = \{10, 20, \ldots, 90\}$

$C = \{25, 50, 75\}$

kümeleridir bu iki kümede de bulunan bir elemanı da geri eklemeliyiz ve belirtilen ilk durumda seçilen iki elemanın ikisinin de 2 ve 5 içermesi gerekiyordu, bir tane olması durumu sağlamaz yani herhangi birini geri ekleyebiliriz.

$s(\dot{I}) - s(B) - s(C) + s(B \cap C) + 1 = 90 - 9 - 3 + 1 + 1 = 80$

$\boxed{5}$ Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{EDA})$ olacak biçimde bir E noktası alınıyor. $[BD]$ doğru parçasının orta noktası F olmak üzere, $|AD| = 6$ ve $|BE| = 9$ ise, $|EF|$ kaçtır?

a) 3 **b)** 4 **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{6}$ **e)** $2\sqrt{5}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|AE| = x$ birim yazıp $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{EDA}) = a$ diyelim. ADE ve BDC üçgenlerinden $\tan a$ değerlerini eşitleyelim. $\tan a = \dfrac{x}{6} = \dfrac{6}{9+x}$ denkleminden $x = 3$ birim olarak bulunur. Daha sonra dik üçgenler ve F nin orta nokta olduğu kullanılarak EDB üçgeninin kenar uzunlukları bulunur.

Kenarortay teoremini kullanalım.

$|EF|^2 = \dfrac{|EB|^2 + |ED|^2}{2} - |DF|^2$

$|EF|^2 = \dfrac{81 + 45}{2} - 45 = 18$

$|EF| = 3\sqrt{2}$ elde edilir.

$\boxed{6}$ $\dfrac{2019^p - 27^p}{p}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan p asal sayılarının toplamı kaçtır ?

a) 46 **b)** 58 **c)**66 **d)**78 **e)** 88

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$2019^p - 27^p$ sayının çarpanlarından biri daima $2019 - 27 = 1992$ olmalıdır.

$1992 = 2^3.3.83$ olduğundan $p = 2$, $p = 3$, $p = 83$ için bu sayı tamsayı olur .

p asal sayılarının toplamı $2 + 3 + 83 = 88$ elde edilir.

Çözüm 2:

$\dfrac{2019^p - 27^p}{p} \in \mathbb{Z} \iff 2019^p - 27^p \equiv 0 \pmod{p}$ olmasıdır.

Fermat teoremine göre her $a \in \mathbb{Z}$ ve her p asal sayısı için $a^p \equiv a \pmod{p}$ dir. Buna göre, $2019^p \equiv 2019 \pmod{p}$ ve $27^p \equiv 27 \pmod{p}$ olup bunların farkı $2019^p - 27^p \equiv 2019 - 27 \equiv 1992 \pmod{p}$ dir. O halde $1992 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğini sağlayan p asal sayılarını bulmak gerekli ve yeterlidir. $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ olduğundan p nin alabileceği değerlerin toplamı $2 + 3 + 83 = 88$ olarak bulunur.

$\boxed{7}$ $P(x) = (x+1)^{2019} + (x-1)^{2019}$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan polinomu nedir?

a) $2^{2019}x$ **b)** $2^{1010}x$ **c)** $2^{1009}x$ **d)** $2019x$ **e)**$1010x$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerini bulup $P(x)$ polinomunda yerine koyalım. Çözersek $x_1 = i$ ve $x_2 = -i$ elde edilir. Polinomumuzda yerine koyalım. $(i+1)^2 = 2i$ ve $(i-1)^2 = -2i$ olduğunu kullanmaya çalışalım.

$(i+1)^{2019} + (i-1)^{2019} = ((i+1)^2)^{1009}.(i+1) + ((i-1)^2)^{1009}.(i-1)$

$= 2^{1009}.(i^2)^{504}.i.(i+1) + (-2)^{1009}.(i^2)^{504}.i.(i-1) = 2^{1009}.(i^2 + i + i - i^2) = 2^{1009}.2i = 2^{1010}i$

benzer işlemleri $x = -i$ için de yaparsak $-2^{1010}i$ sonucunu elde ederiz.

$P(x) = (x^2+1).B(x) + K(x)$ formunda polinomumuz yazılabilir.

2. dereceden bir polinoma bölümünden kalan $ax + b$ formundadır.

$P(i) = ai + b = 2^{1010}i$

$P(-i) = -ai + b = -2^{1010}i$ denklem sistemi çözülürse $a = 2^{1010}$ ve $b = 0$ yani $K(x) = 2^{1010}x$ bulunur .

$\boxed{8}$ $1, 2, \ldots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 top, $1, 2, \ldots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 kutuya her bir kutuda bir top bulunacak şekilde dağıtılacaktır. Her bir top için topun numarası bulunduğu kutunun numarasının iki katını geçmeyecek şekilde bu dağılım kaç farklı biçimde yapılabilir?

a) $13! \cdot 14!$ **b)** $14! \cdot 14!$ **c)** $2 \cdot 14! \cdot 15!$ **d)** $9! \cdot 14! \cdot 14!$ **e)** $9! \cdot 9! \cdot 9!$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Cevap: $14! \cdot 14!$.

1 numaralı top sadece 1 ve 2 numaralı kutulara yerleştirilebilir. 2 numaralı top sadece $1, 2, 3$ ve 4 numaralı kutulara yerleştirilebilir, bu sayılardan birinde 1 numaralı top olduğuna göre, 3 seçenek bulunuyor. Benzer şekilde devam edersek, $i = 3, 4, \ldots, 13$ olmak üzere, i numaralı topu $i + 1$ farklı şekilde yerleştirebiliriz. Bundan sonra her top herhangi bir boş kutuya yerleştirilebilir. Buna göre cevap $14! \cdot 14!$ olur.

Kaynak: Tübitak 27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2019

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. D noktasından $[BC]$ kenarına inen dikmenin ayağı E olmak üzere , $|AD| = 1$, $|BE| = 2$, $|CE| = 4$ ve $|CD| = \sqrt{21}$ ise, $|AC|$ kaçtır?

a) 4 **b)** 5 **c)** $2\sqrt{6}$ **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Öncelikle verilen ABC üçgenini çizelim. DEC üçgeninde Pisagor teoreminden $|ED| = \sqrt{5}$ bulunur. DBE üçgeninde Pisagor teoreminden $|BD| = 3$ daha sonra ABC üçgeninde $[CD]$ kesenine göre Stewart Teoremini yazalım.

$$\sqrt{21}^2 = \frac{x^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1}{3+1} - 3 \cdot 1$$

Buradan $x^2 = 20$ ve $x = 2\sqrt{5}$ bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{E}$

Pisagor teoremi ile $|DE| = \sqrt{5}$ ve $|DB| = 3$ bulunduktan sonra $|BD| \cdot |BA| = |BE| \cdot |BC|$ çemberde kuvvet bağıntısı sağlandığından $ADEC$ bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $AD \perp AC$ olup ADC dik üçgeninden $|AC|^2 + 1^2 = 21$ ve $|AC| = 2\sqrt{5}$ bulunur.

$\boxed{10}$ x ve y tam sayılar ve $x^2y - 15 = 2x(y+1)$ olmak üzere, $x+y$ nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır ?

a) -25 **b)** -14 **c)** -8 **d)** -6 **e)** 0

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Her tarafı x ile bölelim.

$xy - \dfrac{15}{x} = 2y + 2$ $\dfrac{15}{x}$ dışındaki tüm ifadeler tam sayı olduğundan $\dfrac{15}{x}$ tam sayı olmalıdır.

$x \in \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$ olabilir. x negatif olursa çözümün tam sayı olmadığını görebiliriz.

(a) $x = 1$
$y - 15 = 2y + 2$ $y = -17$, $x + y = -16$

(b) $x = 3$
$3y - 5 = 2y + 2$, $y = 7$, $x + y = 10$

(c) $x = 5$
$5y - 3 = 2y + 2$, $y \notin \mathbb{Z}$

(d) $x = 15$
$15y - 1 = 2y + 2$, $y \notin \mathbb{Z}$

Sonuç olarak $-16 + 10 = -6$ alabileceği farklı değerlerin toplamı olur.

$\boxed{11}$ Ahmet'in 2019 yılındaki yaşı, doğum yılının son iki basamağının çarpımından 4 eksiktir. Buna göre Ahmet'in doğum yılının rakamları toplamı kaçtır?

a) 21 **b)** 22 **c)** 23 **d)** 24 **e)** 25

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Doğum yılı $ABXY$ olsun. 2000 den büyük olmadığını görelim $2000-2010$ arası yaşı varsa $X=0$ olduğundan $X.Y-4=-4$ olur insanın yaşı negatif olamaz.

$2011-2014$ arası $XY-4<0$ dır.

2015 için 4 yaşında olması gerekirken $XY-4=1$

2016 için 3 yaşında olması gerekirken $XY-4=2$

2017 için 2 yaşında olması gerekirken $XY-4=3$

2018 için 1 yaşında olması gerekirken $XY-4=4$

2019 için 0 yaşında olması gerekirken $XY-4=5$

Dolayısıyla yaşı $19XY$ formunda olmalıdır.

$2019-19XY=119-10X-Y=XY-4$ şeklinde diyafont denklemimizi kuralım. X ve Y nin rakam olduğunu mutlaka not edelim.

Denklemimizi $123-10X=Y\cdot(X+1)$ $\dfrac{123-10X}{X+1}=Y$ ve $Y\in\mathbb{Z}$ olduğundan yandaki ifade tamsayı olmalıdır. Polinom bölmesi yapalım.

$-10+\dfrac{133}{X+1}=Y\in\mathbb{Z}$ ve $X+1\mid 133$ olmalıdır. X in rakam olduğunu bildiğimizden dolayı ve $19\cdot 7=133$ olduğundan ancak ve ancak $X+1=7$ olduğunu söyleriz $-10+\dfrac{133}{X+1}=9=Y$ bulunur. Yani Ahmet'in doğum yılı 1969 olarak bulunur.

$1+9+6+9=25$ bulunur.

$\boxed{12}$ Özdeş 6 kırmızı top ve özdeş 6 beyaz top A,B,C,D ve E kutularına, A kutusunda kırmızı toplar beyaz toplardan fazla, B kutusunda beyaz toplar kırmızı toplardan fazla, C,D ve E kutularının her birinde ise eşit sayıda kırmızı ve beyaz top olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

a) 240 **b)** 252 **c)** 256 **d)** 275 **e)** 288

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

A kutusuna 1 kırmızı ve B kutusuna 1 beyaz top konduktan sonra KB,KB,KB,KB,KB şeklinde 5 top düşünülüp 5 farklı kutuya dağıtırız. Bu işlem $\binom{9}{4}$ yolla yapılır. A kutusuna 2 kırmızı ve B kutusuna 2 beyaz top konduktan sonra KB,KB,KB,KB şeklinde 4 top düşünülüp 5 farklı kutuya dağıtırız. Bu işlem $\binom{8}{4}$ yolla yapılır. Benzer şekilde devam edersek $\binom{9}{4}+\binom{8}{4}+\binom{7}{4}+\binom{6}{4}+\binom{5}{4}+\binom{4}{4}=\binom{10}{5}$ farklı yolla yapılır.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$

A kutusuna x tane kırmızı top, B kutusuna x tane beyaz top koymuş olalım. $1\le x\le 6$ dır. Bu x, fazla olması gereken topların sayısını göstermektedir. $y=6-x$ tane de kırmızı-beyaz top ikilisi grubu oluşturalım. Sonra da y tane top ikilisini 5 kutuya dağıtırız. $a+b+c+d+e=y\le 5$ tir. Bir $f\ge 0$ tam sayısı için

$$a+b+c+d+e+f=5$$

eşitliği sağlanır. Dağılım prensibi gereği, bu denklemin negatif olmayan tam sayılardaki çözüm sayısı $\binom{10}{5} = 252$ olur.

$\boxed{13}$ $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası için, $|BE| > |EC|$, $Alan(ABE) = 15$, $Alan(AED) = 23$ ve $Alan(ECD) = 4$ ise, $\frac{|BE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

E noktasından AB ve DC inilen dikme ayakları sırasıyla K, L olsun. $|EK| = |BE| \cdot h$ dersek $|EL| = |EC| \cdot h$ olur. Alan bağıntılarını yazarsak

$Alan(AEB) = |AB| \cdot |BE| \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 15$

$Alan(DCE) = |DC| \cdot |EC| \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 4$ ve yamuk alan formülünden

$(|AB| + |DC|) \cdot (|EC| \cdot h + |BE| \cdot h) \cdot \frac{1}{2} = 84$ elde edilir.

Son eşitlik açılır ve ilk iki eşitlikten elde edilenler yerine konursa

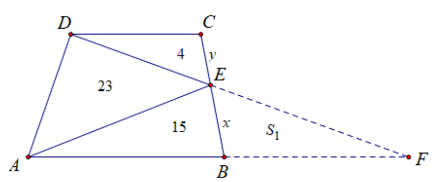
$|AB| \cdot |EC| \cdot h + |DC| \cdot |BE| \cdot h = 46$ elde edilir.

İlk iki eşitlikten $|AB|$ ve $|DC|$ çekilip son eşitlikte yazılırsa,

$30 \cdot \frac{|EC|}{|BE|} + 8 \cdot \frac{|BE|}{|EC|} = 46$ elde edilir. $\frac{|BE|}{|EC|} = x$ denirse

$\frac{30}{x} + 8x = 46$ denklemi elde edilir, x ile genişletilirse ve denklem sol tarafa alınır, 2 ile sadeleştirilirse $4x^2 - 23x + 15 = 0$ elde edilir. Bu denklem $(x-5)(4x-3) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Soruda verilen $|BE| > |EC|$ şartı yüzünden $x = \frac{BE}{EC} = 5$ bulunur.

Çözüm 2:



$|BE| = x, |CE| = y$ olsun. $z = \dfrac{x}{y}$ dersek $x > y$ verildiğinden $z > 1$ olmalıdır. DE ve BC doğrularının kesişimi F olsun. $Alan(BFE) = S_1$ diyelim. $BEF \sim CED$ (açı-açı-açı) benzerliği olup, alanlar oranı ve benzerlik ilişkisinden $\dfrac{S_1}{4} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ dir. Ayrıca, yükseklikleri aynı üçgenlerde taban-alan ilişkisinden $\dfrac{Alan(AEF)}{Alan(AED)} = \dfrac{|EF|}{|DE|} = \dfrac{x}{y}$ olup $\dfrac{15+S_1}{23} = \dfrac{x}{y}$ dir. Bu eşitliklerden,

$$S_1 = 23z - 15 = 4z^2$$

olup $4z^2 - 23z + 15 = 0 \implies (4z-3)(z-5) = 0$ denklemi bulunur. Denklemin 1'den büyük olan kökü $z = 5$ tir.

14 A, B ve C farklı rakamlar olmak üzere $A477$, $B477$, $C477$ sayılarının her biri asal sayı olduğuna göre, $A+B+C$ kaçtır?

a) 8 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 14 **e)** 16

Çözüm:

[Yanıt: $\boxed{D}$

$x477$ tipindeki sayıların 3 ile bölünebilmesi için $x = 3, 6, 9$ değerlerini alır. 7 ile bölünebilmesi için $2.4 - x = 7k$ dan $x = 1, 8$ değerlerini alır. 11 ile bölünebilmesi için $x = 4$ değerini alır. Dolayısıyla sayının asal olması için x adına geriye kalan rakamlar 2, 5,7 olduğundan sorunun kurgusu gereği $A + B + C = 14$ elde edilir.

15 $2x^2 + y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $2x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Maks-min değer sorularında bu değerleri veren noktaların bulunması da çözümün doğruluğunu tamamlayan unsurlardır.

Lise matematik müfredatı bilgilerini kullanmanın yeterli olduğu bazı çözümleri sunalım. İlk olarak klasik bir türev yöntemi uygulayalım:

Çözüm 1. $y = \mp\sqrt{1 - 2x^2}$ yazalım. $2x + y$ toplamını en büyük yapmak için x ve y nin pozitif değerini kullanalım. $f(x) = 2x + \sqrt{1 - 2x^2}$ dersek, $f'(x) = 2 - \dfrac{4x}{2\sqrt{1 - 2x^2}}$ olur. $f'(x) = 0$ denkleminin pozitif kökü $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ tür. Buna karşılık $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olduğu hesaplanabilir. Bu x_0 değeri f fonksiyonunu maksimum yapar ve $f_{\max} = f(x_0) = \sqrt{3}$ bulunur.

Çözüm 2. $2x + y = n$ olsun. Bu değeri kullanarak $2x^2 + (n - 2x)^2 - 1 = 0$ biçiminde x e göre ikinci dereceden bir denklem elde ederiz. x in bir gerçel sayı olması için diskriminant $\Delta_x \geq 0$ olmalıdır. Buradan $n^2 \leq 3$ eşitsizliğine ulaşılabilir ve $n_{\max} = \sqrt{3}$ olur. $2x^2 + (n - 2x)^2 - 1 = 0$ denkleminden $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ değeri elde edilebilir. Buna karşılık $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olur.

Eski müfredatlarda konikler vardı. Konikler ile ilgili bilgisi olan öğrenciler için şu çözüm de mümkündür:

Çözüm 3. $2x + y = n$ olsun. $2x^2 + y^2 = 1$ elipsi ile $2x + y = n$ doğrusu birbirine teğet olduğunda, n maks veya min değerlerini alacaktır. Teğet olma şartı incelenirse $n^2 = 3$ denklemine ulaşılır. $n_{\max} = \sqrt{3}$ olur. Teğet değme notasını $(x_0, y_0) = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$ olarak hesaplayabiliriz. Bu bize maks n değerini veren noktadır.

Mevcut lise müfredatında ortalama eşitsizlikleri konusu olmamakla beraber, olimpiyata uygun olan bir çözüm de bu eşitsizliği kullanarak yapılabiliriz.

Çözüm 4. $2x + y$ nin maks değer için, $2x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan x ve y sayılarını pozitif olarak seçmeliyiz. Aritmetik-karesel ortalama eşitsizliğinden $\dfrac{x + x + y}{3} \leq \sqrt{\dfrac{x^2 + x^2 + y^2}{3}}$ olup $2x + y \leq \sqrt{3}$ elde edilir. Ortalama eşitsizliklerinde eşitlik durumu ancak ve ancak terimler eşitken sağlanır. Buradan $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ elde ederiz. Bu şekilde, önceki çözümlerde neden $x_0 = y_0$ olduğunu da basit biçimde anlamış oluyoruz.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

(Can Doğan, Cambridge)

$x = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, y = \cos\theta$ denirse, $2x + y = \sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta \le \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ olur. $(2x+y)_{\max} = \sqrt{3}$ olması için $\tan\theta = \sqrt{2}$ olmalıdır. Bunu sağlayan değerler de $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sayılarıdır.

Çözüm 3:

$2x + y = A$ diyelim.

$$A^2 = 4x^2 + y^2 + 4xy = 2x^2 + 4xy + 1 \le 2x^2 + 2(x^2 + y^2) + 1 = 4x^2 + 2y^2 + 1 = 3$$

olacaktır. Yani $A \le \sqrt{3}$'dür. Eşitlik durumu için $x^2 + y^2 \ge 2xy$ eşitsizliğinin eşitlik durumunun $x = y$ olmasından dolayı $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ iken $A = \sqrt{3}$ elde edilir.

$\boxed{16}$ A, B, C, D ve E noktaları çevresi 15 birim olan bir çember üzerinde bulunmaktadır. A noktasında bulunan bir böcek, A dan B ye, B den C ye, C den D ye, D den E ye ve E den A ya çember boyunca ilerleyerek gidiyor. Böceğin katettiği mesafeler sırasıyla $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ olmak üzere, $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ beşlisi $(3, 7, 6, 5, 6)$, $(3, 6, 5, 2, 6)$, $(6, 4, 3, 7, 7)$ ve $(5, 3, 4, 5, 6)$ beşlilerinden kaçı olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Dört durumun mümkün olduğunun örnekleri vardır:

$(3, 7, 6, 5, 6)$ için $3 + 7 + 6 + 5 - 6 = 15$

$(3, 6, 5, 2, 6)$ için $3 - 6 - 5 + 2 + 6 = 0$

$(6, 4, 3, 7, 7)$ için $-6 + 4 + 3 + 7 + 7 = 15$

$(5, 3, 4, 5, 6)$ için $5 + 3 - 4 + 5 + 6 = 15$

Bu örnekleri oluşturma biçimi için şöyle bir yol izlenebilir: Önce beşlideki tüm sayıları toplarız. $(3, 7, 6, 5, 6)$ için toplam 27 dir. x sayısının işareti değişince toplam $27 - 2x = 15$ olmalıdır. Buradan $x = 6$ bulunur. $3 + 7 + 6 + 5 - 6 = 15$ örnek durumu elde edilir.

$\boxed{17}$ $k < n$ olmak üzere $A_1A_2 \dots A_k$ düzgün k-geni $A_1A_2B_3B_4 \dots B_n$ düzgün n-geninin içindedir. $A_3A_4B_4$ bir eşkenar üçgen ise, $k + n$ kaçtır?

a) 36 **b)** 33 **c)** 30 **d)** 27 **e)** 24

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$A_2B_3B_4A_3$ eşkenar dörtgendir. $m(\widehat{A_3A_2B_3}) = a$ dersek $m(\widehat{A_2A_3B_4}) = 180° - a$ ve tam açıdan dolayı $m(\widehat{A_2A_3A_4}) = 120° + a$ bulunur. Çokgenler düzgün olduğundan $m(\widehat{A_1A_2A_3}) = 120° + a$ ve $m(\widehat{A_1A_2B_3}) = m(\widehat{A_2B_3B_4}) = 120° + 2a = 180° - a$ buradan $a = 20°$ bulunur.

Küçük düzgün çokgenin dış açısı $40°$, büyük düzgün çokgenin dış açısı $20°$ dir. $k = \dfrac{360}{40} = 9$ ve $n = \dfrac{360}{20} = 18$ olup $k + n = 27$ bulunur.

18 a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $a*b$ işlemi, a nın b ile bölümünden kalan sayı ile b nin a ile bölümünden kalan sayının çarpımı olarak tanımlanıyor. Örneğin, $18*7 = 28$ ve $5*10 = 0$ dır. $n*23 = 30$ eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 16 **b)** 21 **c)** 26 **d)** 31 **e)** 36

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 16.

$n \geq 23$ ise $n * 23$ sayısı 23 ün tam katı olur. $\Rightarrow n < 23$. O halde n ile 23 ün n ile bölümünden kalan sayının çarpımı 30 dur. Mümkün ikililer 30 ve 1, 15 ve 2, 10 ve 3, 6 ve 5 tir. Bu durumlardan sadece son ikisi için eşitlik sağlanır. Cevap $10 + 6 = 16$.

Kaynak: Tübitak 27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2019

19 $x = \dfrac{8}{(16+\sqrt{240})(4+\sqrt[4]{240})(2+\sqrt[8]{240})}$ olmak üzere, $\dfrac{1}{1-(1-x)^8}$ kaçtır?

a) 2 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 16 **e)** 64

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İfadeyi eşlenik ile çarpalım.

$x = \dfrac{8\cdot(2-\sqrt[8]{240})}{(16+\sqrt{240})(4+\sqrt[4]{240})(2+\sqrt[8]{240})(2-\sqrt[8]{240})} = \dfrac{8\cdot(2-\sqrt[8]{240})}{256-240} = 1-\dfrac{\sqrt[8]{240}}{2}$ elde edilir. İstenen ifadede yerine koyalım.

$(1-x)^8 = (\dfrac{\sqrt[8]{240}}{2})^8 = \dfrac{240}{256}$

$\dfrac{1}{1-(1-x)^8} = \dfrac{1}{1-\dfrac{240}{256}} = 16$ olarak bulunur.

20 Aslı ve Berk, başlangıçta hiçbir birim karesi boyalı olmayan 27×27 bir tahta üzerinde sırayla hamleler yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna ilk başlayan Aslı, sırası geldiğinde boyalı olmayan bir birim kareyi kırmızıya boyuyor. Sıra Berk'e geldiğinde ise Berk, tahtanın birim karelerinden oluşan ve hiçbir birim karesi boyalı olmayan bir 2×2 karenin dört birim karesini de maviye boyuyor. Bir oyuncu hamle yapamıyorsa oyun bitiyor ve Berk boyadığı birim kare sayısı kadar puan kazanıyor. Buna göre, Berk en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebilir?

a) 316 **b)** 324 **c)** 336 **d)** 348 **e)** 364

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

27×27 tahtayı $1, 2, 3, 4$ numaralı renklerle aşağıdaki gibi boyayalım:

1	2	1	2	1	2	1	$\cdots$	1
3	4	3	4	3	4	3		3
1	2	1	2	1	2	1		1
3	4	3	4	3	4	3		3
1	2	1	2	1	2	1		1
3	4	3	4	3	4	3		3
1	2	1	2	1	2	1		1
$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$
1	2	1	2	1	2	1	$\cdots$	1

Çözümdeki önemini vurgulamak için 4 ü farklı bir renkle, turuncuyla boyayalım. Berk her hamlesinde $1, 2, 3, 4$ numaralı karelerden birer tanesini boyamış olacaktır:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{veya} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Bu sebeple, bunlar arasındaki sayıca en az olanına, 4 numaralı karelere bakalım: 169 tanedir. Aslı, Berk'in mümkün olduğunca engellemek istiyorsa 4 numaralı kareleri kırmızıya boyamalıdır. Berk için en azından $\dfrac{169-1}{2} = 84$ tane 4 numaralı kare kalmış olur. Elbette Aslı daha kötü bir strateji izlerse Berk'e daha fazla sayıda 4 numaralı kare kalması mümkündür. Sonuç olarak Berk 84 tane 2×2 türünde kareyi maviye boyamayı garantilemiş olur ve en azından $4 \cdot 84 = 336$ puan almayı garantileyebilir.

$\boxed{21}$ $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninde C ye ait yükseklik ayağı D olmak üzere $|AD| = 8$ ve $|BD| = 17$ dir. $\widehat{ACB}$ ve $\widehat{CDB}$ açılarının iç açıortaylarının kesişim noktası E ise, $|CE|$ kaçtır?

a) 15 **b)** 14 **c)** 12 **d)** 10 **e)** 9

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{D}$

"Bash" çözüm:

ABC üçgeninde öklit teoreminden $|DC|^2 = |AD| \cdot |DB|$, $|DC| = 2\sqrt{34}$, DBC dik üçgeninde Pisagor Teoreminden $|BC| = 5\sqrt{17}$ olur ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ dersek $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ olur, çözüme geçelim. DE nin BC ile kesiştiği nokta F olsun. $m(\widehat{DFC}) = 45 + \alpha$ olur. F'den CE'ye indirilen dikme ayağı H olsun. FHC ikizkenar bir dik üçgen, FHE ise açılarının trigonometrik oranları bilinen bir üçgen olur. $|FC| = x\sqrt{2}$ dersek, $|FH| = x$ ve $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ olduğundan $|EH| = x\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ olur. İstenilen uzunluk olan $|EC| = |EH| + |CH| = x\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} + x$ olur. Açıortay teoreminden $\frac{|FC|}{|BF|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$dir. $|FC| = 2\sqrt{2}k$ dersek $|BF| = \sqrt{17}k$ olur. $|FC| + |BF| = |BC|$'dir. $2\sqrt{2}k + \sqrt{17}k = 5\sqrt{17}$ olur, buradan $k = \frac{5\sqrt{17}}{2\sqrt{2}+\sqrt{17}}$ bulunur, $|FC| = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}k$ den x bulunur ve $|EC|$ yi bulduran denklemde yerine yazılırsa $|EC| = 10$ bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\angle ACE = \angle ADE = 45^\circ$ olduğu için $ACDE$ bir kirişler dörtgenidir. Bu durumda $\angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$, dolayısıyla $\triangle AEC$ ikizkenar bir dik üçgendir. Öklit'ten $AC^2 = AD \cdot AB = 8 \cdot 25 = 200 \Rightarrow AC = 10\sqrt{2}$, buradan da $CE = AE = 10$ elde edilir.

22 Ardışık iki pozitif tam sayının her ikisinin de rakamları toplamı 11 ile tam bölünüyorsa, bu ardışık sayılardan küçük olanı en az kaç basamaklıdır?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 9 **e)** 11

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Ardışık iki pozitif tam sayının her ikisinin de rakamları toplamı 11 ile bölünüyorsa sayının en az sondan 1 basamağı 9 olmalıdır.

n sayısının rakamlarının toplamını $S(n)$ ile gösterelim.

n sayısını $a_1a_2a_3\dots a_x99\dots9$ gibi düşünelim. 9 ların sayısı y olsun.

$S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_x + 9y$

$S(n+1) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_x$ bunların farkı olan $9y - 1$ de 11 in katı olmalıdır. $y = 11p + 5$, $y \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $y_{\min} = 5$ olmalıdır.

Şimdi geriye kalan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_x$ basamaklarını oluşturalım. $a_1 + a_2 + \dots + a_x + 45$ 11'in katı olması için $a_1 + a_2 + \dots + a_x \equiv 10 \pmod{11}$ olmalıdır. Bu kalanı elde etmek için en az 2 rakam kullanılmalıdır. Dolayısıyla sayımız en az $5 + 2 = 7$ basamaktan oluşur.

23 Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her x gerçel sayısı için

$f(x^2 - 4x + 1) = (f(x) - 5x + 5)(x^2 - 4x)$

eşitliğini sağlıyorsa, $f(5)$ kaçtır?

a) 28 **b)** 32 **c)** 35 **d)** 40 **e)** 42

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Bu fonksiyonel denkleme bakıldığında fonksiyon polinom fonksiyonlar olamayacağını anlayabiliriz.

O halde değer seçmemiz gerektiğini anlamalıyız.

$x = 0$ vererek başlayalım.

$f(1) = 0$ elde edilir.

$x = 1$ verelim.

$f(-2) = (0 - 5 + 5).(1 - 4) = 0$

$x = -2$ verelim.

$f(13) = (0 - 5.(-2) + 5).((-2)^2 - 4.(-2)) = 15.12$ elde edilir.

$x^2 - 4x + 1 = 13$ deyip diğer kök bulunursa $x = 6$ bulunur.

$x = 6$ verelim. $f(13) = (f(6) - 5.6 + 5).12 = 15.12$ olup $f(6) = 40$ bulunur.

son olarak $x = 5$ verelim.

$f(6) = (f(5) - 20).5 = 40$ olur ve buradan $f(5) = 28$ bulunur.

24 $A_1, A_2, \ldots, A_8$ adalar olmak üzere, her $k = 1, 2, \ldots, 7$ için A_k ile A_{k+1} ve A_8 ile A_1 arasında ikişer köprü bulunmaktadır. A_1 adasında bulunan bir kişi, bu 16 köprünün her birinden tam olarak bir kez geçerek A_1 adasına dönecek şekilde kaç farklı güzergah izleyebilir?

a) 4096 **b)** 4608 **c)** 4864 **d)** 5012 **e)** 5632

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Soruyu en genel halde $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ için $(n+1).2^{n+1}$ durumun olduğunu gösterelim.

Şekil dönel olduğu için çember gibi düşünebiliriz. Saat yönünde giden durum sayısı , saat yönü tersinde giden durum sayısına eşittir.

Bundan böyle saat yönünde gitsin.

A_2 ye gidip geri dönerse saat yönü tersinden tüm yolları geçmesi gerekeceğinden dolayı 2^n durum olur.

A_3 e gidip geri dönerse saat yönü tersinden tüm yolları geçmesi gerekeceğinden dolayı 2^n durum olur.

.

.

.

A_{n-1} e gidip geri dönerse saat yönü tersinden tüm yolları geçmesi gerekeceğinden 2^n durum olur.

A_n için durum biraz farklıdır isterse 1 tur daha atar ya da geri döner. Bu nedenle 2.2^n durum olur.

Toplanırsa $(n-1).2^n + 2.2^n = (n+1).2^n$ durum olur.

Saat yönündeki durum sayısı saat yönü tersindeki durum sayısına eşit olduğundan $2.(n+1).2^n = (n+1).2^{n+1}$ durum olmalıdır.

$n = 8$ için $9.2^9 = 4608$ olduğu görülebilir.

25 $C \in [AB]$ olmak üzere, $[AB]$ çaplı bir yarım çember üzerinde D ve E noktaları $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCE}) = 30°$ olacak biçimde alınıyor. $|AC| = 27$ ve $|CB| = 3$ ise, $|CD| - |CE|$ kaçtır?

a) 15 **b)** 18 **c)** 21 **d)** $10\sqrt{3}$ **e)** $12\sqrt{3}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

D ve E noktalarının çapa göre simetrileri sırasıyla K ve L olsun. CEL ve DCK üçgenleri eşkenar üçgendir. EL ile CB doğruları H'da kesişsin. H noktası CEL için yükseklik ayağıdır. $|CE| = 2x\sqrt{3}$ dersek $|CH| = 3x$ ve $|HB| = 3 - 3x$, $|AH| = 27 + 3x$ olur. Kuvvetten,

$$|EH| \cdot |HB| = |AH| \cdot |HB| \Rightarrow x^2 = (1-x)(27+3x) \Rightarrow |CE| = 3\sqrt{21} - 6\sqrt{3}$$

bulunur. Yine kuvvetten,

$$|AC| \cdot |CB| = 81 = |CD| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CE| \Rightarrow |CD| = 3\sqrt{21} + 6\sqrt{3}$$

bulunur. Dolayısıyla $|CD| - |CE| = 12\sqrt{3}$ bulunur.

26 n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in -3, 2$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^{n} a_k \binom{n}{k} = 87$ eşitliği sağlanıyorsa, n nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{D}$

Tüm katsayılar olan a_i leri 2'ye eşitleyelim ve 87'yi a_i leri -3 'e çevirerek elde etmeye dönüştürelim soruyu, açıktır ki seçilen bir n pozitif tamsayısı için a_i ler 2 ye eşitken ifade $2^{n+1}-2$ ye eşittir, katsayılarını değiştirdiğimiz a_i lerin toplamlarına K diyelim ve ifademizi artık biraz düzenleyerek yazarsak $2^{n+1}-5K=89$ olur, bu denklem $\mod 5$ de incelenirse, $n \equiv 1 \mod 4$ olması gerektiği görülür, şıklarda "Hiçbiri" şıkkı olmadığından ve $\mod 4$ de 1 'e denk olan tek şık 9 olduğundan hiç düşünmeden 9'u işaretleyebiliriz.

Gerçekten de $n=1$, $n=5$ değerlerinin sağlamadığı açıktır ve yukarıdaki eşitliği kullanarak $n=9$ için $K=187$ olması gerektiği görülür ve kısa deneme yanılmalar sonucu görülür ki,

$-3\binom{9}{1}+2\binom{9}{2}-3\binom{9}{3}+2\binom{9}{4}+2\binom{9}{4}+2\binom{9}{5}-3\binom{9}{6}+2\binom{9}{7}-3\binom{9}{8}-3\binom{9}{9}=87$ dir.

Çözüm 2:

Ayrıca $n \geq 6$ olduğu da şu şekilde kanıtlanabilir:

$a_i \leq 2$ olduğundan $87 = a_1\binom{n}{1}+a_2\binom{n}{2}+\cdots+a_n\binom{n}{n} \leq 2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\right] = 2^{n+1}-2$ olduğundan $2^{n+1} \geq 89$ olup $n \geq 6$ elde edilir.

27

$$\begin{aligned} x &= y^2+y+1 \\ 5y &= 2-x-x^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x,y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

1. denklemi 2. denklemde yerine koyalım ve düzenleyelim.

$y^4+2y^3+4y^2+8y=0$ denklemi elde edilir.

$y.(y^3+2y^2+4y+8)=0$

$y.[(y+2).y^2+(y+2).4]=0$

$y.(y+2).(y^2+4)=0$ denklemin kökleri $y=0$ ve $y=-2$ olur.

a) $y=0$ ise

$x=0^2+0+1=1$ elde edilir.

b) $y=-2$ ise

$x=(-2)^2+(-2)+1=3$ elde edilir.

Sonuç olarak denklem sisteminin 2 farklı çözümü bulunur.

28 Bir ağaç üzerinde bulunan 22 yuvanın herhangi ikisi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ renklerinden biri ile boyalı bir iple birleştirilmiştir. Bir salyangoz, her $k=1,2,\ldots,n$ için herhangi bir yuvadan herhangi başka bir yuvaya sadece r_k rengine boyalı ipler üzerinde ilerleyerek varabiliyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 21 **b)** 20 **c)** 16 **d)** 12 **e)** 11

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$A = \binom{22}{2}$ elemanlı, ağaç üzerinde bulunan yuvalar arası yollar, kümesini; n renk sayısı olmak üzere, n alt kümeye ayıralım: $(r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n)$. Bu kümelerden eleman sayısı en az olan veya olanlardan biri r_i olsun. r_i'nin en az 21 eleman içermesi gerektiği açıktır. Güvercin yuvası prensibi gereğince: $\left\lfloor \frac{\binom{22}{2}-1}{n} \right\rfloor + 1 = 21$ olmalıdır. Buradan da renk sayısının alabileceği en büyük değer $n = 11$ olarak bulunur.

29 Bir dikdörtgenler prizmasının bir yüzeyi kırmızıya, iki yüzeyi maviye ve üç yüzeyi sarıya boyanmıştır. Kırmızı renkli yüzeyin alanı 100 cm^2, mavi renkli yüzeylerin alanları toplamı 109 cm^2 ve sarı renkli yüzeylerin alanları toplamı 59 cm^2 ise, bu prizmanın hacmi kaç cm^3 tür?

a) 150 **b)** 160 **c)** 180 **d)** 200 **e)** 240

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Prizmanın ayrıtlarının uzunlukları a, b, c olsun.

$ab = 100$, $ab + bc = 109$, $2ca + bc = 59$ olup $bc = 9$, $ca = 25$ buluruz.

$a^2b^2c^2 = 9 \cdot 25 \cdot 100$ olduundan Hacim $= abc = 150$ cm^3 elde edilir.

30 Ahmet aklında bir pozitif tam sayı tutuyor. Sonrasında Ahmet Betül'e, bu sayının üç basamaklı olduğunu ve bu sayının sırasıyla 10, 11 ve 12 ile bölümünden kalanları söylüyor. Betül yalnızca bu bilgileri kullanarak Ahmet'in sayısını bulabiliyor. Buna göre, Ahmet'in tuttuğu sayının alabileceği en büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark kaçtır?

a) 419 **b)** 479 **c)** 539 **d)** 599 **e)** 629

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 419.

Ahmet'in tuttuğu sayı n olsun. okek$(10, 11, 12) = 660$ olduğundan Ahmet'in verdiği bilgiler $100 \leq r \leq 999$ ve n nin 660 ile bölümünden kalan sayıdır. $100 \equiv 760 \pmod{660}$, $101 \equiv 761 \pmod{660}$, $\ldots, 339 \equiv 999 \pmod{660}$ olduğundan n sayısı $100, \ldots, 339, 760, \ldots, 999$ saylarından biri olamaz. $340, 341, \ldots, 759$ saylarından herhangi biri için o sayıya $\pmod{660}$ da denk üç basamaklı yalnızca bir sayı bulunduğundan Ahmet'in tutuğu sayının alabileceği değerler $340, 341, \ldots, 759$ dur ve dolayısıyla cevap $759 - 340 = 419$ olur.

Kaynak: Tübitak 27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2019

31 $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 - x - 1$ polinomunun gerçel kökler toplamı A ve çarpımı B olmak üzere, $A(B + 1)$ kaçtır?

a) -2 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

İlk olarak denkleme x^3 terimini ekleyip çıkartıyoruz. Böylece ortak çarpanları $(x^3 + x + 1)$ olan ifadeler elde edebileceğiz. $x^6(x^3+x+1)+x^2(x^3+x+1)-(x^3+x+1)$ ifadesini düzenlediğimizde $(x^6+x^2-1)(x^3+x+1) = 0$ denklemini elde ederiz. İlk denklemde $x^2 = t$ dönüşümü yaptığımızda elimizde $(t^3 + t - 1)(x^3 + x + 1) = 0$

gibi bir denklem kalır. Fonksiyonların türevleri $3x^2+1$ veya $3t^2+1$ olduğundan sürekli artanlardır ve tek kökleri vardır. Burada denklemlerde fark edebileceğimiz x^3+x fonksiyonunu bir birim yukarı kaydırdığımızda x^3+x+1 fonksiyonunu elde ederiz ve X eksenini kestiği nokta negatif olacaktır. Diğer yandan incelendiğinde t^3+t-1 fonksiyonunun ekseni kestiği nokta az önceki noktanın ters işaretlisi yani pozitif olmalıdır. $x^3+x+1=0$ denkleminin köküne $-a$ diyelim öte yandan diğer denklemi sağlayan t değeri de a ya eşit olmalıdır. Buradan denklemi sağlayan x değerlerimizi $-a, \sqrt{a}\ ve -\sqrt{a}$ buluruz. Soruda $A(B+1)$ yani $-a^3-a$ sorulmaktadır. $x^3+x+1=0$ denkleminin bir kökünün $-a$ olduğunu söylemiştik, kökü yerine koyduğumuzda $-a^3-a=-1$ gelmektedir.

$\boxed{32}$ Düz bir yol üzerinde yan yana yer alan 27 bahçenin herhangi ikisinde aralarındaki hiçbir bahçede bulunmayan aynı bir ağaç türü yer almaktadır. Buna göre, bu bahçelerin en az birinde yer alan ağaç türü sayısı en az kaçtır?

a) 108 **b)** 152 **c)** 182 **d)** 196 **e)** 351

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 182.

Bahçelerin koordinat doğrusu üzerinde $1, 2, \ldots, 27$ noktalarında bulunduklarını varsayalım. $1, 2, \ldots, 13$ noktalarındaki bahçeler birinci, $14, 15, \ldots 27$ noktalarındaki bahçeler ise ikinci bahçe grubunu oluştursun. Biri birinci, bir diğeri ikinci gruptan olan bahçelerin oluşturdukları $13 \cdot 14 = 182$ tane bahçe ikilisi vardır. Bu bahçe ikililerine temel ikili diyelim. Koşullara göre, herhangi temel bahçe ikilisinde diğer temel bahçe ikililerinde bulunmayan bir ağaç türü bulunuyor. Buna göre, en az 182 ağaç türü vardır. Diğer taraftan, x ve y noktalarındaki bahçelerin oluşturduğu temel bahçe ikilisinde bulunup diğer temel bahçe ikililerinde bulunmayan ağaç türü, k pozitif tam sayı olmak üzere, $x-k|y-x|$ ve $y+k|y-x|$ noktalarındaki bahçelerde de bulunursa, bu 182 ağaç türü yeterli olur.

Kaynak: Tübitak 27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2019

28. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2020

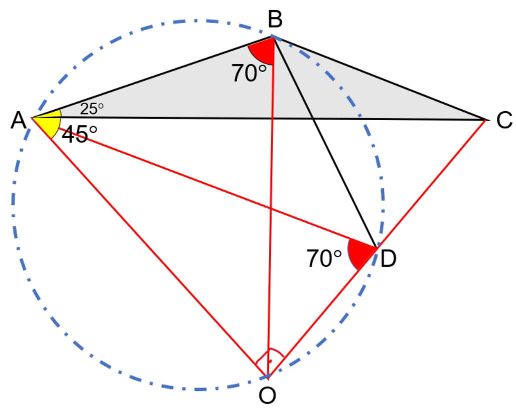
$\boxed{1}$ $m(\widehat{ABC}) = 135°$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. $[OC]$ doğru parçası üzerindeki bir D noktası için $m(\widehat{DBA}) = 90°$ ve $m(\widehat{ADO}) = 70°$ ise, $m(\widehat{BAC})$ nedir?

a) 20° **b)** 25° **c)** 30° **d)** 35° **e)** 40°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

BD doğrusunun $[AC]$ kenarını kestiği nokta E olsun. Çemberde açıları yazarsak $m(\widehat{AOC}) = 90°$ olur ve $AODB$ kirişler dörtgeni olduğu görülür. $m(\widehat{OAD}) = 20°$ ise $m(\widehat{OBD}) = 20°$ olur. OB ve OC yarıçap olduğundan OBC ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{BOC}) = 50°$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = 25°$ olarak bulunur.

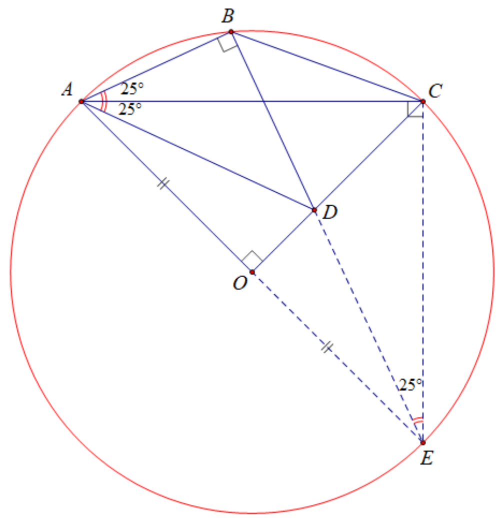


Çözüm 2:

Açı takibi ile $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{CAO}) = 45°$, $m(\widehat{DAO}) = 20°$ ve $m(\widehat{CAD}) = 25°$ dir. ABD üçgeninde C noktasının bir dış teğet çember merkezi oluğunu gösterelim. $[BC$ bir dış açıortaydır. Ayrıca $m(\widehat{ACD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ADB})$ sağlandığından C noktası ABD üçgeninin A noktasına göre dış teğet çemberinin merkezidir. O halde $[AC$ bir iç açıortay olup $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}) = 25°$ elde edilir.

Çözüm 3:

Açı takibi ile $m(\widehat{DAC}) = 25°$ dir. BD ve AO doğrularının kesişimi E olsun. $m(\widehat{ABE}) = 90°$ olduğundan E noktası çevrel çember üzerindedir. $CO \perp AE$ olduğundan, CO doğrusu ACE ikizkenar dik üçgeninin simetri ekseni olur. Böylece $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{DAC}) = 25°$ dir. Çevre açılardan, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BEC}) = 25°$ elde edilir.



2 $2^{p-3} + 3^{p-3} + 4^{p-3}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan p tek asal sayılarının toplamı kaçtır?

a) 48 **b)** 56 **c)** 64 **d)** 72 **e)** 80

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

İfadeyi $\dfrac{2^{p-1}}{2^2} + \dfrac{3^{p-1}}{3^2} + \dfrac{4^{p-1}}{4^2}$ biçiminde yazalım. $p > 3$ ise Fermat Teoreminden dolayı $3^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 3^2$ ifadesinin p ile tam böldüğünü söyleyebiliriz ki bu sayı 61'dir. Ancak 3 de bir tek asal sayı olduğundan onu da ayrıca denememiz gerekir (ki ifadenin p ile tam bölünmesini sağlar). O yüzden cevap $61 + 3 = 64$ olur.

3 x bir gerçel sayı olmak üzere $(x+4)(x^2+16) = 11$ ise, $x^4 - 11x$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) 175 **b)** 183 **c)** 196 **d)** 204 **e)** 212

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Parantezleri açarsak $x^3 + 4x^2 + 16x + 64 = 11$ elde ederiz. Şimdi 11 yerine onu yazalım: $x^4 - x(x^3 + 4x^2 + 16x + 64) \to -4$
212

Çözüm 2:

Denklemi $x-4$ ile çarparsak $(x^2-16)(x^2+16) = 11x-44$ elde edilir. Buradan $x^4-256 = 11x-44$ olur. 11'i sola 256'yı sağa atarsak. $x^4-11x = 212$ olur.

$\boxed{4}$ Bir sincap 101 fındık içeren bir kesedeki fındıkların tümünü ya da bir kısmını üç gün içinde yiyecektir. Bu sincap, ikinci ve üçüncü günlerde eşit sayıda fındık ve her gün en az bir fındık yiyecek şekilde bu işlemi kaç farklı biçimde yapabilir?

a) 2350 **b)** 2460 **c)** 2476 **d)** 2500 **e)** 2692

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

İlk gün yenen fındık sayısı x, ikinci gün ve üçüncü gün y olmak üzere, $x+2y \le 101$ eşitsizliğini sağlayan $50+2\cdot 49+\cdots+2\cdot 1 = 2500$ farklı (x,y) pozitif tam sayı ikilisi vardır.

Çözüm 2:

İlk gün yenen fındık sayısı x, ikinci gün ve üçüncü gün y olmak üzere, $x+2y \le 101$ eşitsizliğini sağlayan (x,y) pozitif tam sayı ikililerinin sayısını bulmalıyız.

$y=1$ için $x \le 99$ olup 99 tane çözüm çifti vardır.

$y=2$ için $x \le 97$ olup 97 tane çözüm çifti vardır.

$\vdots$

$y=50$ için $x \le 1$ olup 1 tane çözüm çifti vardır.

Toplam, $1+3+5+\cdots+97+99 = 50^2 = 2500$ çözüm çifti vardır.

$\boxed{5}$ Düzgün bir $ABCDEF$ altıgeninin $[DE]$ kenarı üzerinde bir P noktası alınıyor. Alan$(PAB) = 60$ ve Alan$(PBC) = 44$ ise, Alan(PAF) kaçtır?

a) 46 **b)** 48 **c)** 50 **d)** 52 **e)** 54

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$AB \parallel CF \parallel DE$ olduğu için Alan$(PFABC)$ = Alan$(EFABC)$ ve Alan(PAB) = Alan$(BEA) = 60$.

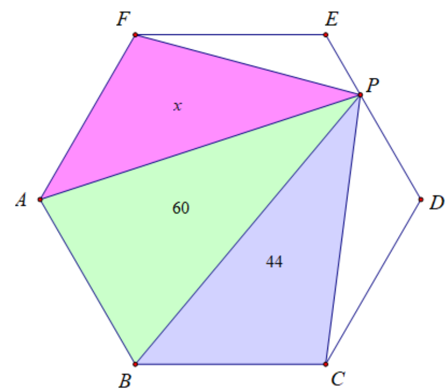
Basit hesaplamalarla ($BE = 2\cdot AF$ ve $BE \parallel AF$) Alan(BEC) = Alan$(BEA) = 2\cdot$ Alan$(AFE) = 60$, Alan$(PFABC)$ = Alan$(EFABC) = 150$ ve Alan$(PAF) = 46$.

Çözüm 2:

Genel halde, düzgün altıgendeki bazı alan bağıntılarını ifade edelim.

$Alan(ABCDEF) = 6S$ olsun. $Alan(BCD) = Alan(AFE) = S$ ve $Alan(ABDE) = 4S$ dir. Böylece $Alan(ABP) = \dfrac{1}{2}Alan(ABDE) = 2S$ elde edilir. Yine $Alan(PEF)+Alan(PDC) = Alan(PEC)+Alan(PDC) = Alan(CDE) = S$ dir. Buradan $Alan(ABCPF) = 5S$ olup $Alan(PAF) + Alan(PBC) = 3S$ bulunur.

Bu alan eşitliklerini kullanarak $S = 30$ bulunur. $Alan(PAF) = x$ denirse $x + 44 = 3S = 90$ eşitliğinden $x = 46$ sonucuna ulaşılır.



Not: Ayrıca bu soru ile benzer fikirlere sahip olan Düzgün altıgen ve alan başlıklı soruyu sitemizde sorup çözmüştük.

6 $\sqrt{n+11}+\sqrt{n+\sqrt{n+11}}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 71 **b)** 92 **c)** 113 **d)** 134 **e)** 155

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

a ve b tam kare olmayan doğal sayılar olmak üzere, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ bir tam sayı olamaz. İfadenin karesi alınarak bu görülebilir.

$\sqrt{n+11}=x$ olsun. O halde x^2+x-11 tam kare olmalıdır. $\dfrac{(2x+1)^2-45}{4}$ tam karedir. Payda tam kare olduğundan $(2x+1)^2-45=y^2$ tam karedir: $(2x+1-y)(2x+1+y)=45$ olur. Eşitliği sağlayan değerleri bulmak kolaydır. Bunlar n yerine konulup test edilirse $n:-2,5,110$ değerlerini alabilir. Yani cevap 113 olur.

7 $a>0$ ve $b\neq c$ koşullarını sağlayan a,b,c,d gerçel sayıları için $P_1(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ve $P_2(x)=ax^3+cx^2+bx+d$ polinomları tanımlanıyor. $P_1(x+1)-P_1(x)$ ve $P_2(x+1)-P_2(x)$ polinomlarının alabilecekleri en küçük değerler eşitse, $\dfrac{b+c}{a}$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) -3 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 3 **e)** Hicbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$P_1(x+1)-P_1(x)=x^2(3a)+x(3a+2b)+a+b+c$ ve $P_2(x+1)-P_2(x)=x^2(3a)+x(3a+2c)+a+b+c$ olur. Burada farklılık yaratan x'in katsayısıdır ve bu katsayılar mutlak değerce birbirlerine eşit olursa ifadenin minimum değeri değişmez çünkü oluşacak farklılık parabollere koordinat sisteminde sadece yatay hareket yaptırır (grafik ile de gösterilebilir). $|3a+2b|=|3a+2c|$ olur ve sorudaki koşuldan dolayı $6a=-2b-2c$ elde edilir ve istenen oran -3 bulunur.

8 N pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a_1,a_2,\cdots,a_k$ pozitif tam sayıları $N=a_1+a_2+\cdots+a_k$ ve her $1\le i\le k$ için $a_i=a_{k+1-i}$ koşullarını sağlıyorsa, $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ sıralı k-lisine N'nin bir *simetrik dağılımı* diyelim. Örneğin, $(5),(2,1,2)$ ve $(1,1,1,1,1)$ sıralılarının her biri 5'in bir simetrik dağılımıdır. Buna göre 28 sayısının kaç farklı simetrik dağılımı vardır?

a) 12842 **b)** 13174 **c)** 14312 **d)** 15968 **e)** 16384

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Tüm terimler pozitif olduğundan dolayı k, 28'den büyük olamaz. Şimdi incelemeye geçelim.

i) $k = 2m$ ise $14 \geq m \geq 1$ olur. Ayrıca $a_i = a_{2m+1-i}$ olduğundan

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{2m} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = 28$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 14$$

bulunur. Tüm terimler en az 1 olacağından, dağılım formülünden $\binom{(14-m)+m-1}{m-1} = \binom{13}{m-1}$ farklı dağılım bulunur. m, 1 ile 14 arasındaki herhangi bir tamsayı olduğundan toplam durum

$$\sum_{m=1}^{14} \binom{13}{m-1} = 2^{13}$$

bulunur.

ii) $k = 2m - 1$ ise benzer şekilde $14 \geq m \geq 1$ olur.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{2m} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + a_m = 28$$

bulunur. a_m çift olmalıdır. $a_m = 2n$ için

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + n = 14$$

bulunur. İlk şıktakinin aynısı bir durum olduğundan burada da toplam durum 2^{13}'dür.

Her iki durumda da 2^{13} dağılım olduğundan toplamda $2^{13} + 2^{13} = 2^{14} = 16384$ simetrik dağılım vardır.

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = 120^\circ$ ve $m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$'dir. $|AD| = 6$ ve $|DC| = 21$ ise, $|AB|$ kaçtır?

a) 9 **b)** 10 **c)** 11 **d)** 12 **e)** 13

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

AC, ABD üçgeninin dış açıortayıdır. DAC üçgeninde Kosinüs teoreminden $|AC| = 15\sqrt{3}$ ve dış açıortay teoreminden $[BD] = 14$ olarak bulunur. BAD üçgeninde Kosinüs teoreminden $|AB| = 10$ olarak bulunur.

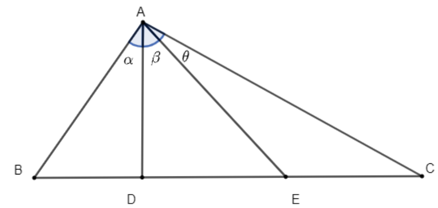
Çözüm 2:

Benim gibi dışaçıortay teoremi, açıortay teoremi veya kenarortay teoremi yerine Stewart teoremini ezberliyenler için başka bir genelleştirilmiş teoremi verip oradan çözelim,

Teorem: Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üzerinde D ve E noktaları alalım (D, $[BE]$ üzerinde olacak şekilde). Ayrıca $m(\widehat{BAD}) = \alpha$, $m(\widehat{DAE}) = \beta$ ve $m(\widehat{EAC}) = \theta$ olsun. Buna göre

$$\frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \theta)}{\sin\alpha \cdot \sin\theta} = \frac{|DE| \cdot |BC|}{|BD| \cdot |EC|}$$

sağlanır.



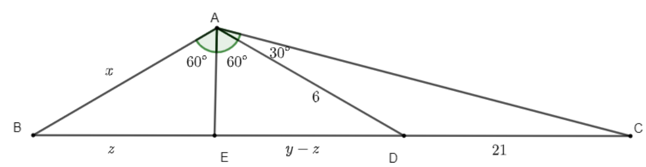
Teoremin ispatı için ABC, BAD, DAE ve EAC üçgenlerinde sinüs teoremini uygulayın. Bu teoremin literatürde bir adı var mı bilmiyorum. Ben bu teoremi harmonik demetleri incelerken kendim keşfedip kullanmaya başlamıştım.

Soruya dönersek BAD üçgeninin açıortayının BD'yi kestiği noktaya E diyelim. Ayrıca $|AB| = x$, $|BD| = y$ ve $|BE| = z$ diyelim. ABC üçgeninde üstteki "Aydemir" teoremini uygularsak (adsız kalacağına Aydemir teoremi diyelim ;D)

$$\frac{\sin 60° \cdot \sin 150°}{\sin 60° \cdot \sin 30°} = \frac{|DE| \cdot |BC|}{|BE| \cdot |DC|}$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{(y-z)(y+21)}{21z}$$

elde edilir.



ABD'de açıortay teoreminden

$$\frac{6}{y-z} = \frac{x}{z} \Longrightarrow \frac{6}{x} = \frac{y-z}{z}$$

Buradan $\dfrac{(y-z)(y+21)}{21z} = \dfrac{2(y+21)}{7x} = 1$ bulunur. $y = 7k$ dersek $x = 2k + 6$ bulunur. BAD üçgeninde kosinüs teoreminden

$$(2k+6)^2 + 6^2 + 6(2k+6) = (7k)^2 \Longrightarrow 5k^2 - 4k - 12 = 0 \Rightarrow (5k+6)(k-2) = 0$$

bulunur. $k = 2$ olabilir, yani $x = 2k + 6 = \boxed{10}$ bulunur.

Çözüm 3:

D den BA ya çizilen paralel AC yi E de kessin. $\triangle EDA$ bir $120° - 30° - 30°$ üçgenidir. EA nın orta noktası F olsun. $FD = 3$, $AF = FE = 3\sqrt{3}$, $\triangle FDC$ de Pisagor'dan $FC = 12\sqrt{3}$ elde edilir. $EC = 9\sqrt{3}$, $AC = 15\sqrt{3}$, $ED = 6$ oldugu icin paralellikten dolayı $AD = 10$ elde edilir.

10 m, n ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, m sayısının n ile bölümünden kalan k'dir. Ayrıca m sayısı 28 ile bölündüğünde kalan 27, bölüm ise n dir. Buna göre, k nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 4 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 14 **e)** 27

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$m = an + k = 28n + 27$ olsun. $n(a-28) = 27 - k$ ve $k < n$ olduğundan $28 \le a$ olmalıdır, yoksa n negatif olur. $a = 28$ olursa $k = 27$ olur, $a = 29$ olursa $n = 27 - k \to k > 27 - k$ olur ki a nın daha büyük değerlerinde daha küçük aralıklar elde ederiz. $14 \le k \le 27$ olduğundan k 14 farklı değer alabilir.

$\boxed{11}$ Negatif olmayan a, b ve c gerçel sayıları $a + b + c = 1$ eşitliğini sağlıyorsa,

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} + \frac{1}{1+4c^2}$$

İfadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 1 **b)** 2 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{5}{2}$ **e)** $\frac{4}{3}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Genelliği bozmadan $a \ge b \ge c \ge 0$ olsun. c'yi sabitleyelim. $a + b = 1 - c = t \le 1$ olsun. $\frac{1}{1+4c^2}$ de sabit olacağından

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} = \frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4(t-a)^2}$$

ifadesinin minimum değerini bulmaya çalışalım.

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4(t-a)^2} \ge \frac{2}{1+t^2}$$

olduğunu gösterelim. Payda eşitlersek,

$$\frac{8a^2 - 8ta + (4t^2+2)}{16a^4 - 32a^3t + a^2(16t^2+8) - 8ta + (4t^2+1)} \ge \frac{2}{1+t^2}$$

olur, burada da sadeleştirme ve içler dışlar çarpımı yapıp terimleri bir tarafta toplayalım.

$$0 \ge 16a^4 - 32a^3t + a^2(12t^2+4) + a(4t^3 - 4t) - (2t^4 - t^2)$$

olur. Göstermek istediğimiz eşitsizlikte $a = \frac{t}{2}$ için eşitliğin sağlandığı görülür, yani $(2a - t)$ kök olacaktır. Bunu kullanarak çarpanlarına ayırırsak,

$$0 \ge (2a-t)^2(-2t^2 - 4at + 4a^2 + 1)$$

olduğunu göstermeliyiz. $(2a-t)^2 \ge 0$ olduğundan

$$0 \ge -2t^2 - 4at + 4a^2 + 1 \Rightarrow 2t^2 + 4at - (4a^2+1) \ge 0$$

olduğunu göstermek gerekir. $a \ge b \ge c$ ve $a + b + c = 1$ olduğundan $1 \ge a \ge \frac{1}{3}$ ve $2a \ge t \ge \frac{a+1}{2}$ bulunur. (t yerine $a + b$ ve 1 yerine $a + b + c$ koyularak kolaylıkla gösterilebilir.)
$f(x) = 2x^2 + 4ax - (4a^2+1)$ olsun.

$$f(2a) = 12a^2 - 1 \ge 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 > 0$$

bulunur.

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = \frac{-3a^2 + 6a - 1}{2}$$

olur. Ortaya çıkan denklemin köklerinin oluşturduğu aralık $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ aralığını kapsadığı için a değeri iki kök arasındadır, dolayısıyla $f\left(\frac{a+1}{2}\right)$ pozitiftir. f fonksiyonunun köklerinin en az birinin negatif olduğu Vieta formülüyle rahatlıkla görülebilir. Bu fonksiyonun pozitif değer alabilmesi için $\frac{a+1}{2}$ ve $2a$ değerlerinin f fonksiyonunun köklerinin arasında olmaması gerekir. Bu ifadeler pozitif olduğundan en küçük kökten daha küçük olamazlar yani en büyük kökten daha büyük olmalıdır. t değeri bu iki ifadenin arasında olduğundan t de en büyük kökten daha büyüktür yani $f(t) = 2t^2 + 4at - (4a^2 + 1) \geq 0$ bulunur. Yani

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} \geq \frac{2}{1+t^2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} + \frac{1}{1+4c^2} \geq \frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{1+4(1-t)^2}$$

olur. $a \geq b \geq c$ olduğundan $c \leq \frac{1}{3}$ olur. Buradan $t = 1 - c \geq \frac{2}{3}$ elde edilir. Şimdi $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ aralığında son bulunan ifadenin 2'den büyük olduğunu gösterelim:

$$\frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{1+4(1-t)^2} \geq 2 \Rightarrow \frac{9t^2 - 16t + 11}{4t^4 - 16t^3 + 18t^2 - 16t + 10} \geq 2 \Rightarrow -8t^4 + 16t^3 - 9t^2 + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-t)(8t^3 - 8t^2 + t + 1) \geq 0$$

elde edilir. $1 - t \geq 0$ olduğunu biliyoruz. $8t^3 - 8t^2 + t + 1$ ifadesinin de $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ aralığında artan olduğu türevle rahatlıkla gösterilebilir. Dolayısıyla bu ifade minimum değerini $t = \frac{2}{3}$ noktasında alır ve bu değer $\frac{13}{27}$'dir yani pozitiftir. Buradan ifadenin minimum değerinin 2 olduğu bulunur. Eşitlik durumu $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$'dır.

Not: Bu sorunun 1. aşama sorusu olduğu göz önüne alırsak daha basit bir çözümünün var olduğunu düşünüyorum. Daha basit çözüm bulamadığım için bu uzun halini paylaştım. Eğer daha estetik bir çözüm bulursanız ve paylaşırsanız daha faydalı olacağını düşünüyorum.

12 Her pozitif tam sayı k renkten birine, farkları veya oranları 2 olan herhangi iki sayı farklı renkte olacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Sayı doğrusu üzerinde herhangi iki ardışık tek ve çift sayılar farklı renge boyanacaktır. Burada sorun çıkaranlar çift sayılar çünkü hem 2 eksikleri hem de yarıları da boyanıyor, bunlar farklı renkte olabilir. $\{a, 2a-2, 2a\}$ şeklinde kümeler oluşturalım. Bu kümede elemanların hepsinin farklı renkte olduğu durumlar olabilir. Öte yandan bu kümenin herhangi iki elemanı başka bir kümede beraber olamaz, Dolayısıyla toplam en az 3 renk kullanılmalıdır. Öneğin indisler kullanılan rengi belirtmek üzere:

$(1_1, 2_2, 3_2, 4_1, 5_1, 6_3, 7_2, 8_2, \cdots)$ burada stratejimiz her bir sayının indisini mümkün olan en küçük sayıda tutmaktır.

13 Bir ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde alınan K ve L noktaları için $|AK| = 12$, $|BK| = 16$ ve $|CL| = 6$'dır. $[BC]$ kenarı üzerinde D ve E noktaları $E \in [DC]$ ve $|BD| = |DE| = |EC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{BKE}) = m(\widehat{CLD})$ ise, $|AL|$ kaçtır?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

$[KE]$'ye C'den çizilen paralel $[AB]$'yi X'de kessin. BKE ile BXC benzer olacağından $|BX| = 24$, $|AX| = 4$ olur, ayrıca paralel olduklarından dolayı $m(\widehat{BKE}) = m(\widehat{BXC})$ olur. B'den $[DL]$'ye paralel çizelim ve $[AC]$'yi Y'de kessin. Benzer şekilde CLD ile CYB benzer üçgenlerdir ve benzerlikten $|CY| = 9$, paralellikten $m(\widehat{CLD}) = m(\widehat{CYB})$ bulunur.

$m(\widehat{CXB}) = m(\widehat{CYB})$ olduğundan $BXYC$ kirişler dörtgenidir. A noktasından kuvvet alınırsa,

$$|AX| \cdot |AB| = |AY| \cdot |AC| \Rightarrow 4 \cdot 28 = |AC| \left(|AC| - 9\right) \Rightarrow |AC| = 16$$

bulunur. $|CL| = 6$ olduğundan $|AL| = 10$ bulunur.

$\boxed{14}$ Her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1799$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisinde en az iki tam kare bulunuyorsa, a_{2020} sayısının 28 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 2 **b)** 6 **c)** 14 **d)** 22 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Diziyi 7 modunda inceleyelim: $a_2 \equiv 0, 1, 6 (\bmod 7)$ olabilir ve geri kalan terimler de onun aldığı değeri alabilir, çünkü 1799, 7 ile kalansız bölünür. 7 ile bölümünden kalan bu 3 değerden biri olan herhangi bir sayı 28 ile bölümünden 2 kalanını veremez.

$a_i = a_{i-1}^3 + 1799$ ve a_i tam kare olsun. Bir tam sayının kübünün 7 modunda alabileceği değerler $0, 1, 6$ ve bir tam sayının karesinin 7 modunda alabileceği değerler $0, 1, 2, 4$ dir, denklik sağlanması için bahsi geçen sayının 7 ile bölümünden 6 kalanını vermemesi gerekir. Dolayısıyla 28 ile bölümünden kalan 6 da olamaz.

Eğer a_i, 7 ile kalansız bölünüyorsa 49 ile de kalansız bölünecektir (tam kare olduğu için). $1799 \equiv -14 (\bmod 49)$ olduğundan $a_{i-1}^3 \equiv 14 (\bmod 49)$ olmalıdır ki denklik sağlansın ancak bir tam küp verilen denkliği sağlamaz, çelişki.

22 şu şekilde olabilir: İlk terim: $a_1 = 5^2$ olarak alınırsa ikinci terim $a_2 = 132^2$ olur, en az 2 tam kare terim şartı sağlanır ve $a_{2020} \equiv 22 (\bmod 28)$ olur.

$\boxed{15}$ $P(x)$ bir polinom olmak üzere, her a gerçel sayısı için $P(a) = P(b)$ eşitliğini sağlayan a dan farklı en az bir b gerçel sayısı bulunuyorsa, $P(x)$ polinomuna *çok tersli* polinom diyelim. $P_1(x) = x^2 - 2020x$, $P_2(x) = x^3 - 2020x^2 + x$, $P_3(x) = x^4 - 2020x^2$ ve $P_4(x) = x^5 - 2020x^3$ polinomlarmdan kaç tanesi çok terslidir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bu çok tersli polinomlarda hiçbir görüntü tek bir elemanla eşleşmez. Dikkat edilmesi gereken yer bunun minimum/maksimum değer aldığı noktalar için de geçerli olduğudur o yüzden öncüllerde verilen parabol $P_1(x)$ verilen şartı sağlamaz. $P_3(x)$ çift fonksiyondur ve verilen şartı sağlar. $P_2(x)$ ve $P_4(x)$ ise grafiklerinde orijine soldan uzaklaştıkça aldığı değerler eksi sonsuza ıraksar, orijine sağdan uzaklaştıkça da artı sonsuza ıraksar. Verilen şartı sağlamadıkları açıktır.

Çözüm 2:

Cevap: $\boxed{B}$

Grafiksel yorumun yanında cebirsel bir bakış bakalım. Bizden istenilen, her x için $x \neq y$ olacak şekilde $P_i(x) = P_i(y)$ denkleminin y için çözümünün olmasıdır.

$P_1(x)$ polinomu için

$$P_1(x) = P_1(y) \Rightarrow x^2 - 2020x = y^2 - 2020y \Rightarrow (x-y)(x+y-2020) = 0 \Rightarrow x+y = 2020$$

olur. Yani her x için $2020 - x$ eşitliği sağlar fakat $x = 1010$ için $x = y$ olur. Çelişki

$P_2(x)$ için

$$\begin{aligned} x^3 - 2020x^2 + x = y^3 - 2020y^2 + y \quad &\Rightarrow \quad (x-y)(x^2+xy+y^2-2020x-2020y+1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad y^2 + y(x-2020) + (x^2 - 2020x + 1) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $x = 2020$ için $y^2 + 1 = 0$ olur fakat bu denklemin çözümü yoktur. Dolayısıyla $x = 2020$ için bir y değeri bulamayız.

$P_3(x)$ için fonksiyon bir çift fonksiyon olduğundan $P_3(x) = P_3(-x)$'dir. Yani $y = -x$ için istenen durum sağlanır fakat $x = 0$ durumunda $x = -x$ olacağından ayrı incelenmelidir.

$$P(y) = P(0) \Rightarrow y^4 - 2020y^2 = 0$$

olur. $y = \sqrt{2020}$ istenilen durumu sağlar. Dolayısıyla her x için x'den farklı bir y değeri bulabiliriz.

$P_4(x)$ için fonksiyon x sonsuza giderken sonsuza gittiğinden ve bir $x = a$ değerinden sonra fonksiyon sürekli artmalıdır. Fonksiyon sadece x sonsuza giderken pozitif sonsuza yaklaştığından öyle bir $N > a$ değeri vardır ki her $x_0 > N$ ve $N > x_1$ için $P_4(x_0) > P_4(N) > P_4(x_1)$ sağlanır. Eğer $P_4(x_0) = P_4(y)$ olacak şekilde x_0'dan farklı bir y değeri varsa $y > N$ olmalıdır fakat $N > a$ olduğundan $x > N$ için fonksiyon artan olacağından $P_4(x_0) = P_4(y)$ olması için $x_0 = y$ olması gerekir. Çelişki

Dolayısıyla sadece $P_3(x)$ polinomu çok terslidir.

16 6 farklı renkten 100 er top n kutuya, aynı renkli herhangi iki top farklı kutularda yer alacak şekilde dağıtılmıştır. Herhangi iki kutu için bu 6 renkten öyle biri vardır ki bu iki kutunun hiçbirinde o renge boyalı top bulunmamaktadır. Buna göre n nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 180 **b)** 200 **c)** 220 **d)** 240 **e)** 260

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Amacımız herhangi iki kutuda bulunmayan renklerin sayısını en az yapmak ki bu sayı sorudaki şarttan ötürü 0 ve 1 olamaz. Biz 2 olamayacağını gösterelim: Genelliği kaybetmeden k_1 kutusunda r_5 ve r_6 renkli top bulunmasın. k_2 kutusunda r_5 ya da r_6 bulunmaz. Yine genelliği kaybetmeden r_4 ve r_5 bulunmasın. Mevcut şartlar altında k_3 kutusu için 2 durum söz konusu olabilir: Ya r_i ve r_5 bulunmaz ($i \leq 5$). Ya da r_4 ve r_6 bulunmaz. Eğer ilk durum olursa sonraki kutuda ve ondan sonrakiler de r_5 bulunmaz. Eğer ikinci durum olursa sonraki kutuda bulunmayan 3 top olması gerekir. İki durumun da olamayacağı açıktır. Şimdi de herhangi iki kutuda bulunmayan renklerin sayısının nasıl 3 olabileceğini gösterelim: Genelliği kaybetmeden k_1 de r_4, r_5 ve r_6 bulunmasın. Sorunun şartını en kolay sağlamak için k_2 de r_2, r_3 ve r_4 bulunmasın, k_3 de r_1, r_2 ve r_6 bulunmasın ve k_4 de r_1, r_3 ve r_5 bulunmasın. Şuan her rengin bulunduğu kutu sayıları (2) eşit. O yüzden yaptığımız işlemi periyodik olarak devam ettirebiliriz de. Cevap da $\dfrac{100}{2} \times 4 = 200$ olarak bulunur. Tablo yaparsak da şu şekilde olabilir örneğin:

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
k_1				✓	✓	✓
k_2		✓	✓	✓		
k_3	✓	✓				✓
k_4	✓		✓		✓	
$\vdots$						
k_{197}				✓	✓	✓
k_{198}		✓	✓	✓		
k_{199}	✓	✓				✓
k_{200}	✓		✓		✓	

Burada bulunmayan renkler ✓ ile gösterilmiştir.

17 $|AB| = 10$ ve $m(\widehat{BAC}) = 124°$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|AD| = 4$ ve $m(\widehat{BAD}) = 68°$ dir. $[BD]$ doğru parçası üzerinde alınan bir E noktası için $|BE|/|ED| = 5$ tir. $[AB]$ kenarının orta noktası F olmak üzere, CF dogrusu AD ve AE doğrularını sırasıyla P ve N noktalarında kestiğine göre, APN üçeninin alanının $DENP$ dörtgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{7}{8}$ **d)** $\frac{10}{11}$ **e)** $\frac{16}{17}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$(\widehat{BAD}) = 68°$ ve $m(\widehat{DAC}) = 56°$ olduğundan AC, ABD ve APF üçgeninin dış açıortay doğrusudur. Dış açıortay teoreminden: $\dfrac{|CD|}{|CB|} = \dfrac{2}{5}$ elde edilir. Şimdi, $|BE| = 5k$ ve $|DE| = k$ ise $|DC| = 4k$ olur. ABC üçgeninde Menelaus teoreminden $\dfrac{|AP|}{|DP|} = \dfrac{5}{2}$ ve $\dfrac{|AN|}{|EN|} = 2$ olur. $A(DENP) = A(AED) - A(APN)$ olduğundan ve AED ve APN üçgenlerin kenarlarının oranlarını bildiğimizden ve tepe açıları aynı olduğundan çok kolay bir şekilde $\dfrac{A(APN)}{A(DENP)} = \dfrac{10}{11}$ olduğunu görebiliriz.

18 $n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 4n - 62$ ifadesinin bir tam kare olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

İfade bir tam kare olsun ve bu tam kare a^2 olsun. İfadeyi $(n^2 + n - 7)(n^2 + n + 9) = (a - n - 1)(a + n + 1)$ biçiminde yazalım. Birkaç deneme-yanılma ile n nin alabileceği değerler $-9, 3, 7$ olarak bulunur. Rahatlıkla A seçeneğini işaretleyebiliriz. Orijinal çözüm nasıl bilmiyorum ama bunu ileri götürerek ifadenin sol tarafındaki çarpanların arasındaki fark 16 olduğu kullanılarak veya Obeb-Okek ile bir ispat yapılabilir. Zaman bulunca ispatını ekleyeceğim ama benden erken orijinal çözüm ekleyen olursa çok iyi olur tabi :)

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

İki ardışık tamkare arasında tamkare sayı bulunamaz teoreminden yardım alalım.

$(n^2 + n + 1)^2 < n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 4n - 62 < (n^2 + n + 2)^2$ olursa çelişki olur ve asla tamkare olamaz.

eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse $n^2 + 66 > 0$ yani daima sağlanır. O halde

$(n^2+n+1)^2 < n^4+2n^3+4n^2+4n-62$ eşitsizliğinin sağlanmamasını istiyoruz.

$(n^2+n+1)^2 \geq n^4+2n^3+4n^2+4n-62$

$n^4+2n^3+3n^2+2n+1 \geq n^4+2n^3+4n^2+4n-62$ yani

$n^2+2n-63 \leq 0$ bulunur.

Bu eşitsizlik çarpanlarına ayırılarak çözülürse $-9 \leq n \leq 7$ bulunur. Modüler aritmetik de göz önüne alınarak hızlıca denenirse $-9, 3, 7$ çözümleri bulunur.

Not:

https://geomania.org/forum/index.php?topic=6419.0

Bu sorunun benzeri olması açısından $2, 36, 76, 133$ numaralı sorular incelenebilir.

Çözüm 3:

Atakan'ın yaptığı şekilde aralığa sokmaya çalışalım fakat farklı olarak

$$(n^2+n)^2 < n^4+2n^3+4n^2+4n-62 < (n^2+n+2)^2$$

eşitsizliğini elde etmeye çalışalım. Bu eşitsizlik sağlanırsa $n^4+2n^3+4n^2+4n-62 = (n^2+n+1)^2$ olmak zorunda olacaktır. Yukarıdaki çözümlerde eşitsizliğin sağ tarafının her zaman sağlandığı gösterilmiştir. Sol tarafına bakarsak,

$$(n^2+n)^2 < n^4+2n^3+4n^2+4n-62 \iff 3n^2+4n-62 > 0$$

Dolayısıyla istediğimiz eşitsizlik sadece $3n^2+4n-62 \leq 0$ iken sağlanılmaz. Bu ikinci dereceden polinomun kökleri $x_1 < x_2$ ise $[x_1, x_2]$ aralığı bu polinomu 0 veya negatif yapar. $n = -6$ ve $n = 4$ için ifade pozitiftir fakat $n = -5$ ve $n = 3$ için negatiftir o yüzden $n \notin \{-5, -4, \dots, 2, 3\}$ için en başta düşündüğümüz eşitsizlik sağlanır ve $n^4+2n^3+4n^2+4n-62 = (n^2+n+1)^2$ olur. Buradan $n^2+2n-63 = (n+9)(n-7) = 0$ bulunur ve $n = -9$, $n = 7$ çözümleri bulunur.

Geriye $\{-5, -4, \dots, 2, 3\}$ aralığını denemek kalır. Eğer n çiftse $n^4+2n^3+4n^2+4n-62 \equiv 2 \pmod 4$ olacağından tamkare olamaz. n tek sayısı için $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ ve $4n^2+4n \equiv 0 \pmod 8$ olacağından

$$n^4+2n^3+4n^2+4n-62 \equiv n^2+2n+2 \equiv (n+1)^2+1 \pmod 8$$

Eğer ifade tamkareyse 8 modunda 1 kalanı vermelidir (tek sayı olacağı barizdir). O yüzden $(n+1)^2 \equiv 0 \pmod 8$ olmalı. Yani $n+1 \equiv 0 \pmod 4$ olmalıdır. Buradan incelememiz gereken değerler $\{-5, -1, 3\}$ kalır. Bunları incelersek $n = 3$ için tamkare olur. Toplam $-9+7+3 = \boxed{1}$'dir.

$\boxed{19}$ Bir $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $f(1) = f(2) = 0$ ve her n pozitif tam sayısı için

$$f(3n) = f(n) + 1 \quad \text{ve} \quad f(3n+1) = f(3n+2) = f(n)$$

koşullarını sağlıyor. Buna göre $f\left(\dfrac{3^{2020}-1}{8}\right)$ kaçtır?

a) 504 **b)** 673 **c)** 1009 **d)** 2019 **e)** 3029

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Bizden fonksiyondaki görüntüsü istenen değeri inceleyelim.

$$\frac{3^{2020}-1}{8} = \frac{(3^2)^{1010}-1}{3^2-1} = (3^2)^{1009} + (3^2)^{1008} + \dots + (3^2)^1 + (3^2)^0 = 3^{2018} + 3^{2016} + \dots + 3^2 + 1$$

olur. Bu sayıyı 3 tabanında yazacak olursak 1010 tane 1 ve 1009 tane 0 olmak üzere,

$$\frac{3^{2020}-1}{8} = (1010\dots0101)_3$$

elde ederiz. Fonksiyona dönecek olursak $n = (a_1a_2 \ldots a_k)_3$ olmak üzere,

Eğer $a_k = 1$ veya $a_k = 2$ olursa

$$f((a_1a_2 \ldots a_k)_3) = f((a_1a_2 \ldots a_{k-1})_3)$$

olacaktır.

Eğer $a_k = 0$ olursa

$$f((a_1a_2 \ldots a_k)_3) = f((a_1a_2 \ldots a_{k-1})_3) + 1$$

olacaktır. Yani n sayısının 3 tabanındaki halinin sağından başlayarak rakamları atıp $f(1)$ veya $f(2)$'ye ulaşabiliriz. 1 fazlalık sadece 0 rakamıyla karşılaşılınca ekleneceğinden $f(n)$ değeri n'nin 3 tabanındaki halinde bulunan 0 rakamının sayısına eşit olacaktır. Bizden istenen değerde 1010 tane 1, 1009 tane 0 vardır. Dolayısıyla, $f\left(\dfrac{3^{2020}-1}{8}\right) = 1009$ olacaktır.

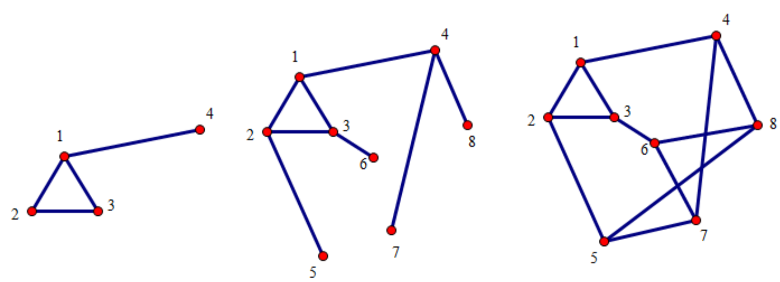
$\boxed{20}$ Bir satranç turnuvasına katılan üç arkadaş, turnuvadaki herkesin en fazla üç arkadaşı bulunduğunu ve arkadaş olmayan her iki kişinin ortak en az bir arkadaşı bulunduğunu farkediyor. Bu turnuvaya katılan kisi sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Kişilere $1, 2, 3, \ldots, n$ biçiminde numara verelim ve bu kişileri noktalarla gösterelim. Arkadaş olan iki kişi arasına bir çizgi çizelim. Problemde verilen üç arkadaş $1, 2, 3$ olsun. Bu durumu, köşeleri $1, 2, 3$ sayıları olan bir üçgen ile ifade ederiz. 4. kişi $1, 2, 3$ den en az biriyle arkadaş olmak zorundadır. Aksi halde 4. kişi, $1, 2, 3$ den hiçbiriyle arkadaş olmazsa problemin koşulu ile çelişir. O halde 4 ile 1 in arkadaş olduğunu varsayabiliriz. (Şekil 1)



Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

Herkesin en fazla üç arkadaşı olacağından; 2, 3, 4 ile arkadaşlık kurabilecek yeni kişilerin sayısı sırasıyla 1, 1, 2 dir. Yani 4 kişilik grubumuza toplamda en fazla $1 + 1 + 2 = 4$ kişi daha ekleyebiliriz. Böylece kişi sayısı $n \leq 8$ olur.

Şimdi $n = 8$ için bir örnek durum bulmalıyız. Bu örneği bulmak zor olabilir. Kolaylık olması için 2 ile arkadaş yeni bir kişi, 3 ile arkadaş yeni bir kişi, 4 ile arkadaş yeni iki kişi ekleyerek çizgemizi dolduralım. (Şekil 2) Daha sonra da deneme yaparak gerekli ara çizgileri çizerek şeklimizi tamamlayabiliriz. (Şekil 3)

$\boxed{21}$ $|AB| = 25$ ve $|AC| = 40$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|BD| = 15$ ve $|DC| = 24$ tür. Buna göre ABD ve ACD üçenlerinin diklik merkezleri arasındaki uzaklık kaçtır?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

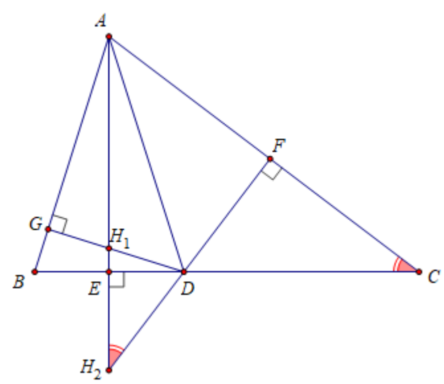
$\dfrac{25}{15} = \dfrac{40}{24}$ oranı sağlandığından $[AD]$ iç açıortaydır. Açıortay uzunluğu $|AD| = 8\sqrt{10}$ olarak hesaplanabilir. ABD ve ACD üçgenlerinin diklik merkezleri sırasıyla H_1, H_2 olsun. Diklikleri kullanarak $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DH_2H_1})$ ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DH_1H_2})$ eşitlikleri kolayca görülebilir. Böylece $ABC \sim DH_1H_2$ benzerliği vardır.

$$\frac{|BC|}{|H_1H_2|} = k \tag{1}$$

benzerlik oranı olsun. Ayrıca k benzerlik oranını yükseklikler oranı olan

$$k = \frac{|AE|}{|DE|} \tag{2}$$

eşitliği ile hesaplayalım.



(2) oranı aynı zamanda $\tan(\widehat{ADE})$ değerine eşittir. Bu sebeple ABD üçgeninde kosinüs teoremini uygulayarak

$$\cos(\widehat{ADE}) = \frac{15^2 + 640 - 25^2}{2 \cdot 15 \cdot 8\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

değerini bulalım. Buradan

$$k = \tan(\widehat{ADE}) = 3$$

bulunur. Bu değeri (1) de yazarsak $|H_1H_2| = \dfrac{39}{3} = 13$ elde edilir.

Çözüm 2:

AH yükselik, H_1 $\triangle ABD$ nin diklik merkezi, H_2 $\triangle ADC$ nin diklik merkezi olsun.

$\angle H_1BH = \angle HAD = \angle HCH_2 = \alpha$ olur. Bu durumda $HH_1 = BH \cdot \tan\alpha$ ve $HH_2 = HC \cdot \tan\alpha$; $H_1H_2 = BC \cdot \tan\alpha = 39\tan\alpha$ olur.

$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 \Rightarrow (40-25)(40+25) = (HC - BH)(24+15) \Rightarrow HC - BH = 25.$

$HC = 32$, $BH = 7$. $\triangle ABH$ bir $7-24-25$ dik üçgenidir. $AH = 24$ ve $HD = BD - BH = 8$ olduğu için $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ ve $H_1H_2 = 13$ elde edilir.

22 $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = 2a_n + 4n^2 a_{n-1}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2020} sayısını tam bölen en büyük asal sayı kaçtır?

a) 97 **b)** 101 **c)** 2011 **d)** 2017 **e)** 2027

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Dizinin birkaç terimini hesaplayarak bir bağıntı bulmayı deneyelim. $a_3 = 48$, $a_4 = 384$, $a_5 = 3840$ olarak bulunur.

$a_2 = 2 \cdot 4 = a_1 \cdot 4$

$a_3 = 8 \cdot 6 = a_2 \cdot 6$

$a_4 = 48 \cdot 8 = a_3 \cdot 8$

$a_5 = 384 \cdot 10 = a_4 \cdot 10$

olduğundan $n \geq 2$ için

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2n$$

olduğunu tahmin edebiliriz. Bu bağıntının doğru olup olmadığını $a_{n+1} = 2a_n + 4n^2 a_{n-1}$ indirgeme bağıntısında yazarak görebiliriz. İndirgeme bağıntısı sağlandığından gerçekten $a_n = a_{n-1} \cdot 2n$ dir. Bu ifadede $n = 2, 3, \ldots, n$ yazarak taraf tarafa çarparsak teleskopik çarpım sonucunda

$$a_n = 2^n \cdot n!$$

elde edilir. $a_{2020} = 2^{2020} \cdot 2020!$ olup 2020 den küçük en büyük asal sayıyı bulmalıyız. Bu sayı asal 2017 dir.

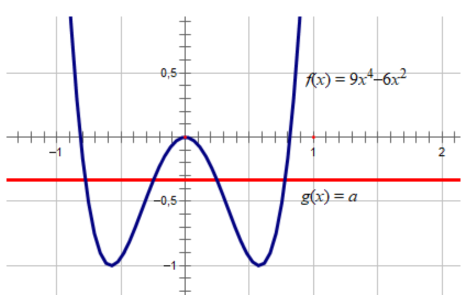
23 L ve U gerçel sayılar ve $L < U$ olmak üzere, her $L < a < U$ gerçel sayısı için $9x^4 - 6x^2 = a$ denkleminin dört farklı gerçel kökü bulunuyorsa, $U - L$ nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$f(x) = 9x^4 - 6x^2$ polinom fonksiyonu ile ve $g(x) = a$ sabit fonksiyonunun grafiklerini çizelim. $f(x) = g(x)$ denkleminin dört farklı gerçel kökü olması için grafiklerin dört farklı noktada kesişmesi gerekir. $y = f(x)$ çift fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir ve aşağıdaki gibi çizilebilir. $a = 0$ iken $g(x) = 0$ olup f ve g grafikleri orijinde birbirine teğettir. Üç farklı kök oluşur. $a > 0$ iken iki farklı kök oluşur. Açıkça $U = 0$ bulunur.



Ayrıca $f(x) = (3x^2 - 1)^2 - 1$ yazılabildiğinden $L = f_{\min} = -1$ olur. Elbette $a < -1$ iken $f(x) = g(x)$ denkleminin gerçel kökü yoktur.

Sonuç olarak $-1 < a < 0$ iken verilen denklemin dört farklı gerçel kökü vardır. $U - L = 1$ dir.

24 Tek kişilik bir oyun oynayan Aslı, ilk hamlesinde boş bir tahtaya iki basamaklı bir pozitif tam sayı yazıyor. Aslı, bundan sonraki her hamlesinde, tahtada yazılı olan sayılardan birinin hem iki katını hem de üç katını tahtaya yazıyor. Birkaç hamle sonucunda tahtadaki bütün sayıların toplamı 2018, 2020, 2022, 2024 sayılarından kaçına eşit olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Başlangıçta tahtada yazılı olan sayımız iki basamaklı x olsun. Bu durumda toplam $T = x$ olur.

Şimdi ilk adım sonucunda tahtada $x, 2x, 3x$ sayıları yazılı olur. Toplam $T = 6x$ olur.

Şimdi de ikinci adımı inceleyelim.

x için işlem yapılırsa tahtada $x, 2x, 3x, 2x, 3x$ yazılı olur. Toplam $T = 11x$ olur.

$2x$ için işlem yapılırsa tahtada $x, 2x, 3x, 4x, 6x$ yazılı olur. Toplam $T = 16x$ olur.

$3x$ için işlem yapılırsa tahtada $x, 2x, 3x, 6x, 9x$ yazılı olur. Toplam $T = 21x$ olur.

Görüldüğü gibi bu aşamaya kadar, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $T = (5k+1)x$ biçimindedir. Bundan sonra da T nin içinde $5k+1$ biçiminde bir çarpan olma özelliği değişmez. Çünkü tahtada yazılı olan mx gibi bir sayıya işlem yapılınca $2mx, 3mx$ sayıları da oluşur. Bu durumda yeni toplam $T = (5k+1)x + 2mx + 3mx = (5t+1)x$ biçimide olur. $(m, t \in \mathbb{Z})$

O halde $2018, 2020, 2022, 2024$ sayıları arasında $5k+1$ çarpanına sahip olanları inceleyelim.

$2018 = 2 \cdot 1009$ olduğundan $5k+1$ çarpanı yoktur.

$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ olduğundan $5k+1 = 101$ ve $x = 40$ seçilebilir.

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ olur. $5k+1$ formunda çarpan bulunabilir ancak iki basamaklı bir x çarpanı yoktur.

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ olur. $5k+1 = 23 \cdot 2 = 26$ ve $x = 4 \cdot 11 = 44$ seçilebilir.

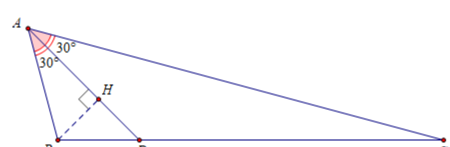
25 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{ADB}) < 90^\circ$ şartını sağlayan bir D noktası alınıyor. $|AB| \cdot |AC| = 4, |BD| \cdot |CD| = 2$ ve $|AD| = \sqrt{2}$ ise, $m(\widehat{ADB})$ nedir?

a) 15° **b)** 30° **c)** 45° **d)** 60° **e)** 75°

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

$|AD|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |CD|$ bağıntısı sağlandığından hızlı bir yanıt amacıyla test mantığı ile $[AD]$ nin iç açıortay olduğunu varsayabiliriz. İç açıortay ile ilgili detaylı bir ispat bulunursa çözüme eklenebilir.



Şimdi $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$ olur. İç açıortay teoreminden $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|CD|} = k$ olduğundan $\dfrac{|AB|}{|BD|} \cdot \dfrac{|AC|}{|CD|} = k^2$ dir. $\dfrac{4}{2} = k^2$ olup $k = \sqrt{2}$ bulunur. Buna göre $|AB| = \sqrt{2}|BD|$ dir. Ayrıca B den $[AD]$ ye inilen dikme ayağına H dersek, ABH $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde $|AB| = 2|BH|$ olur. Böylece $|BD| = \sqrt{2}|BH|$ olup BDH ikizkenar dik üçgendir. $m(\widehat{ADB}) = 45^\circ$ bulunur.

Çözüm 2:

B ile C noktalarını ayıran bir özellik olmadığı için $AB \leq AC$ kabul edelim.

$AB = AC$ ise $AB = AC = BC = 2$ ve üçgenin yüksekliği AD den büyük olduğu için ($\sqrt{3} > \sqrt{2} = AD$) için çözüm yoktur.

O halde $AB < AC$ üzerinden çözüme devam edelim.

$AB = AE$ olacak şekilde $[AC]$ üzerinde bir E noktası alalım.

A nın D ye göre simetriği F olsun.

$BD \cdot DC = AD \cdot DF = 2$ olduğu için $ABFC$ bir kirişler dörtgenidir.

$AD \cdot AF = AE \cdot AC = AB \cdot AC = 4$ olduğu için de $DECF$ bir kirişler dörtgenidir.

$\angle ABE = \angle AEB$ ve kirişler dörtgenlerinin özelliklerinden $\angle ABD = \angle AEC = \angle AED$ olduğu için $\angle EBD = \angle BED$ olur. Yani $ABDE$ bir deltoid ve $\angle BAD = \angle DAC = 30°$ dir. Bu durumda $ABFC$ kirişler dörtgeninde $BF = FC$ ve $\angle CBF = \angle BCF = 30°$ olur. İkizkenar üçgende Stewart'ın özel halinden $FC^2 = BD \cdot CD + FD^2 = 4 \Rightarrow BF = 2$ elde edilir. BC nin orta noktası M olsun. $\triangle BFM$ bir $30° - 60° - 90°$ üçgeni olduğu için $FM = 1$. $\triangle FMD$ dik üçgeninde $FD = \sqrt{2}$ olduğu için $\angle FDC = 45°$ ve $\angle ADB = 45°$ elde edilir.

26 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a^3 - 1$ in n ile tam bölündüğü her a tam sayısı için $a^{2020} - 1$ de n ile tam bölünüyorsa, n ye *tuhaf sayı* diyelim. Aşağıdakilerden hangisi bir tuhaf sayıdır?

a) 61 **b)** 63 **c)** 65 **d)** 67 **e)** 69

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

$a^3 \equiv 1 \pmod{n}$ olması $a^{2020} \equiv 1 \pmod{n}$ olmasını gerektiriyorsa buradan $a \equiv 1 \pmod{n}$ elde edilir. O halde $a^3 \equiv 1 \pmod{n}$ denkliğinin tek çözümü $a \equiv 1 \pmod{n}$ ise n tuhaf sayı olur. Eğer $a^3 \equiv 1 \pmod{n}$ denkliğinin $a \equiv 1 \pmod{n}$ den farklı çözümleri varsa bu durumda n tuhaf sayı olmayacaktır.

$n = 61$ asalı için $a^3 \equiv 1 \pmod{61}$ ise $(a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod{61}$ olur. $a \equiv 1 \pmod{61}$ veya $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{61}$ olur. Bu ikinci dereceden denkliği 4 ile genişleterek tam kareye tamamlayalım. $(2a+1)^2 \equiv -3 \pmod{61}$ olur. $(2a+1)^2 \equiv -3 \equiv 58 \equiv 119 \equiv \cdots \equiv 729 \pmod{61}$ olup $2a + 1 \equiv \pm 27 \pmod{61}$ yazılır. Buradan $a \equiv 13, 47 \pmod{61}$ çözümleri elde edilir. Örneğin $a = 13$ için $61 \mid 13^3 - 1$ olurken $61 \nmid 13^{2020} - 1$ dir. $n = 61$ tuhaf sayı değildir.

$n = 63$ bileşik sayısı için $a^3 \equiv 1 \pmod{63}$ ise $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$ ve $a^3 \equiv 1 \pmod{9}$ olur. Bu denklikleri çözersek $a \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$, $a \equiv 1, 4, 7 \pmod{9}$ dir. Denkliklerin her ikisini de sağlayan bir çözüm $a = 4$ olduğundan $a \equiv 4 \pmod{63}$ bulunabilir. Çin kalan teoremi ile tüm çözümler $a \equiv 1, 4, 16, 22, 25, 37, 43, 46, 58 \pmod{63}$ olup 9 tanedir fakat bunların hepsini bulmaya ihtiyaç yoktur. $a = 4$ için $63 \mid 4^3 - 1$ olurken $63 \nmid 4^{2020} - 1$ dir. Dolayısıyla $n = 63$ sayısı da tuhaf sayı değildir.

$n = 65$ bileşik sayısı için $a^3 \equiv 1 \pmod{65}$ ise $a^3 \equiv 1 \pmod{5}$ ve $a^3 \equiv 1 \pmod{13}$ olur. $a^3 \equiv 1 \pmod{5}$ denkliğinin tek çözümü $a \equiv 1 \pmod{5}$ tir. $a^3 \equiv 1 \pmod{13}$ denkliğinin çözümleri ise $a \equiv 1, 3, 8 \pmod{13}$ tür. Ortak çözüm yapılırsa $a \equiv 1, 16, 61 \pmod{63}$ bulunur. $a = 16$ için $65 \mid 16^3 - 1$ olurken $65 \nmid 16^{2020} - 1$ dir.Dolayısıyla $n = 65$ sayısı da tuhaf sayı değildir.

$n = 67$ asalı için $a^3 \equiv 1 \pmod{67}$ ise $(a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod{67}$ olur. $a \equiv 1 \pmod{67}$ veya $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{67}$ olur. Bu ikinci dereceden denkliği 4 ile genişleterek tam kareye tamamlayalım. $(2a+1)^2 \equiv -3 \pmod{67}$ olur. $(2a+1)^2 \equiv -3 \equiv 64 \pmod{67}$ olup $2a + 1 \equiv \pm 8 \pmod{67}$ yazılır. Buradan $a \equiv 29, 37 \pmod{67}$ çözümleri elde edilir. Örneğin $a = 29$ için $67 \mid 29^3 - 1$ olurken $67 \nmid 29^{2020} - 1$ dir. $n = 67$ tuhaf sayı değildir.

$n = 69$ bileşik sayısı için $a^3 \equiv 1 \pmod{69}$ ise $a^3 \equiv 1 \pmod{3}$ ve $a^3 \equiv 1 \pmod{23}$ olur. $a^3 \equiv 1 \pmod{3}$ denkliğinin tek çözümü $a \equiv 1 \pmod{3}$ tür. $a^3 \equiv 1 \pmod{23}$ denkliğinin $a \not\equiv 1 \pmod{23}$ olacak biçimde bir çözümü var mıdır? Bunu araştıralım. $(a, 23) = 1$ olduğundan Fermat teoreminden $a^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ olur. $a^3 \equiv 1 \pmod{23}$ olduğundan, $a^{22} \equiv a \equiv 1 \pmod{23}$ yazılabilir. Yani $a \equiv 1 \pmod{23}$ dışında çözüm yoktur. $n = 69$ sayısı tuhaf sayı olur.

Çözüm 2:

Lokman hocamın çözümünün en başında belirtildiği gibi $a^3 \equiv 1 \pmod n$ denkliğinin $a \equiv 1 \pmod n$'den farklı çözümleri varsa bu durumda n tuhaf sayı olmayacaktır. $a^3 - 1 \equiv (a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod n$ olduğundan $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod n$ denkliğinin 1'den farklı çözümü yoksa n tuhaf sayıdır. $p \mid n$ olan bir p tek asal sayısı için

$$a^2+a+1 \equiv \frac{(2a+1)^2+3}{4} \equiv 0 \pmod p \implies (2a+1)^2 \equiv -3 \pmod p$$

olur. Yani -3, p modunda karekalandır. $p \neq 3$ için

$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) \equiv (-1)^{\frac{(p-1)(3-1)}{4}} \equiv (-1)^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv \left(\frac{-1}{p}\right) \implies \left(\frac{p}{3}\right) \equiv \left(\frac{-3}{p}\right) \equiv 1$$

Dolayısıyla $p \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır (3 modundaki 0 haricindeki tek karekalan 1'dir). Şıklara bakarsak, $61 \equiv 1 \pmod 3$'dür. Dolayısıyla $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod{61}$ denkliğinin 1'den farklı çözümü vardır.

$63 = 9 \cdot 7$'dir. $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod 7$ denkliğinin 1'den farklı çözümü vardır. $a \equiv 1 \pmod 9$ ve $a \equiv a_0 \not\equiv 1 \pmod 7$ çözümünü alırsak ikisinden elde ettiğimiz çözüm 63 modunda 1 kalanı vermeyecektir. Dolayısıyla 63 de tuhaf sayı değildir.

$65 = 5 \cdot 13$'dür. Benzer şekilde $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod{13}$ denkliğinin 1'den farklı çözümü vardır. $a \equiv 1 \pmod 5$ çözümünü ve mod 13'den gelen 1'den farklı çözümü birleştirirsek 1'den farklı bir çözüm elde ederiz. 65 de tuhaf sayı değildir.

67 asal sayıdır ve $67 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan tuhaf sayı değildir.

$69 = 3 \cdot 23$'dür. $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod{23}$ denkliğinin çözümü yoktur çünkü $23 \equiv 2 \pmod 3$'dür. Ayrıca $a^2+a+1 \equiv 0 \pmod 3$ denkliğinin de tek çözümü $a \equiv 1 \pmod 3$'dür. Dolayısıyla buradan $a \equiv 1 \pmod{69}$ haricinde çözüm elde edemeyiz. Dolayısıyla $\boxed{69}$ bir tuhaf sayıdır.

Daha genelleştirirsek $p \mid n$ olacak şekilde $3k+1$ formatında bir tek asal sayı yoksa n tuhaf sayıdır.

$\boxed{27}$ $x^2 - x + 1 = y^3$ ve $y^2 - y = x^3$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

denklemleri $x = -1$ için çözülemediğini görelim ardından ilk denklemi $x+1$ ile çarpalım. aynı zamanda $y = 0$ için çözüm olmadığını da görelim.

$x^3 = y^3.(x+1) - 1$ bulunur. 2. denklemde yerine koyup x i yalnız bırakırsak

$x = \dfrac{-y^3+y^2-y+1}{y^3}$ olur bunu 1. demklemde yerine koyalım

$\left(\dfrac{-y^3+y^2-y+1}{y^3}\right)^2 - \left(\dfrac{-y^3+y^2-y+1}{y^3}\right) + 1 = y^3$ düzenlersek.

$y^9 - 3y^6 + 3y^5 - 4y^4 + 5y^3 - 3y^2 + 2y - 1 = 0$ bulunur.

Çarpanlarına ayırırsak ;

$(y-1).(y^8+y^7+y^6-2y^5+y^4-3y^3+2y^2-y+1) = 0$ olur. $y \neq 1$ için Aşağıdaki reel sayılardan reel sayılara $P(x)$ polinomunu tanımlayalım ve daima pozitif olduğunu ispatlayalım.

$P(x) = x^8 + x^7 + x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ olsun. Türev yardımıyla işaret tablosu yapılırsa global minimumunun olacağı görülür. Bu sayı m reel sayısı olsun.

$P(m) = m^8 + m^7 + m^6 - 2m^5 + m^4 + 3m^3 + 2m^2 - m + 1 = a$

$P'(m) = 8m^7 + 7m^6 + 6m^5 - 10m^4 + 4m^3 - 9m^2 + 4m - 1 = 0$

$8P(m) - P'(m) = 8a = 8m^8 + m^7 + m^6 - 22m^5 + 18m^4 - 28m^3 + 25m^2 - 12m + 9 = 8a$ olur.

1) $25m^2 - 28m^3 > 0$

2) $18m^4 - 22m^5 > 0$

3) $8m^8 + m^7 + m^6 - 12m + 9 > 0$ olduklarını göstermeliyiz.

İlk olarak 3) ü ispatlayalım.

Reel sayılardan reel sayılara

$Q(x) = 8x^8 + x^7 + x^6 - 12x + 9$ polinomunun daima pozitif olduğunu gösterelim.

$Q'(x) = 64x^7 + 7x^6 + 6x^5 - 12$ olur.

$R(x) = 8Q(x) - xQ'(x)$ olarak tanımlayalım.

$Q'(x) = 0$ yapan tek değer vardır o da $Q(x)$ i global minimum yapan değerdir. (Türev ile ispatlanabilir.) Bu değer n olsun. $Q(n) = b$ ise

$8Q(n) - nQ'(n) = n^7 + 2n^6 - 84n + 72 = 8b$ olur.

$R(x)$ fonksiyonu $0 < x < 1$ için azalandır. çünkü $R'(x) = 7x^6 + 12x^5 - 84$ olur ve $7x^6 + 12x^5$ daima artan olduğundan $0 < x \leq 1$ için $R'(x) \leq R'(1) < 0$ bulunur. O halde

$R'(0,7)$ ve $R'(0,8)$ in yaklaşık değerlerinin hesaplanmasından yardım alarak $0,7 < n < 0,8$ elde edilebilir. $R(0,8) > 0$ ise

$R(n) = 8b > 0$ yani $b > 0$ olur Q polinomunun daima pozitif olduğu gösterilmiş olur.

$R(0,8) = 22,3340032$ olduğundan ispat biter.

1) ve 2 eşitlikleri sadeleştirilir ve incelenirse $m < 0,81$ olmasının gerektiğini göstermenin ispatı bitireceği görülür.

$P'(0,81) = 0,055 > 0$, $P'(0,8) = -0,129 < 0$ olur. o halde $0,8 < m < 0,81$ olur. İspat biter.

Bu ispatlanan 3 eşitsizlik yardımıyla $8P(m) - P'(m) = 8a = 8m^8 + m^7 + m^6 - 22m^5 + 18m^4 - 28m^3 + 25m^2 - 12m + 9 > 0$ bulunur. $a > 0$ yani P polinomunun minimum değeri pozitif olur. Buna göre $P(y) = 0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme olmalıdır.

$y = 1$ çözümü bulunduğuna göre 2. eşitlikte yerine koyalım.

$y^2 - y = 1^2 - 1 = x^3 = 0$ ise $x = 0$ olunur ve bu 1. eşitliği de sağlar.

$(0, 1)$ tek çözümü olur.

Çözüm 2:

$x \neq 0$ ve $y \neq 0$ için $y = xt$, $t \in R$ reel sayısı vardır.

$x^2 - x + 1 = x^3t^3$

$x^2t^2 - xt = x^3$ olur.

2. eşitlik düzenlenirse $t.(xt - 1) = x^2$ yani $xt - 1 = \dfrac{x^2}{t}$ olsun.

1. eşitlikte düzenlemeler yapalım.

$x^2 - x = x^3t^3 - 1 = (xt - 1).((xt - 1)^2 + 3xt)$

$x^2 - x = \dfrac{x^2}{t}.(\dfrac{x^4}{t^2} + 3xt)$

$x^2t^3 - xt^3 = x^6 + 3x^3t^3$ buradan

$t^3 = \dfrac{x^6}{-3x^3 + x^2 - x}$

1. eşitlikte bunu yerine koyarsak

$(x^2 - x + 1).(-3x^3 + x^2 - x) = x^9$ her iki taraf $x \neq 0$ kabulunden dolayı x e bölünürse

$(x^2 - x + 1).(-3x^2 + x - 1) = x^8$ eşitliğin sağ tarafı pozitif fakat sol tarafı daima negatif olacağından dolayı çelişki elde edilir.

Diskriminant negatifse 2. derece polinomların başkatsayısı pozitif olup olmadığını belirler.

1. çarpan $\triangle_1 = (-1)^2 - 4.(1).(1) = -3 < 0$ olur. Daima pozitiftir.

2. çarpan $\triangle_2 = 1^2 - 4.(-3).(-1) = -11 < 0$ olur. Daima negatiftir.

O halde çelişki ispatlanır. $x = 0$ olmalıdır veya $y = 0$ olmalıdır.

$a)$ $x = 0$ için $0^2 - 0 + 1 = y^3$ buradan $y = 1$ elde edilir. 2. eşitliği de sağladığı görülür.

$b)$ $y = 0$ için $0^2 - 0 = x^3$ buradan $x = 0$ gelir ancak 1. eşitliği $(0, 0)$ sağlamaz.

Buradan tek çözüm $(0, 1)$ olarak bulunur.

Çözüm 3:

$x^2 - x + 1$ ifadesini tamkare yaparsak

$$4x^2 - 4x + 4 = (2x-1)^2 + 3 = 4y^3 > 0 \Rightarrow y > 0$$

bulunur. $y = 1$ için $(x, y) = (0, 1)$ çözümü geldiği görülebilir.

$1 > y > 0$ ise

$$x^3 = y^2 - y = y(y-1) < 0 \Rightarrow x < 0$$

bulunur.

$$x^2 - x + 1 = y^3 < 1 \Rightarrow x(x-1) < 0$$

bulunur. $x < 0$ olduğundan $x - 1 < -1 < 0$'dır. Dolayısıyla çarpımları pozitif olmalıdır. Çelişki.

Geriye kalan tek durum $y > 1$ durumudur.

$$x^3 = y^2 - y = y(y-1) > 0 \Rightarrow x > 0$$

bulunur.

$$x^2 - x + 1 = y^3 > 1 \Rightarrow x(x-1) > 0$$

elde edilir. $x > 0$ olduğundan $x - 1 > 0$ olmalıdır. Buradan $x > 1$ elde edilir. Şimdi x ve y'i birbiriyle kıyaslayalım.

$i)$ $x = y$ ise $x^2 - x + 1 = x^3$ bulunur. Bu denklemden $(x-1)(x^2+1) = 0$ elde edilir. $x = 1$ için $y = 1$ olmalıdır fakat ikinci denklem sağlanmaz. Çelişki.

$ii)$ $x > y$ ise

$$y^2 - y = x^3 > y^3 \Rightarrow 0 > y(y^2 - y + 1)$$

bulunur. $y > 1$ olduğundan y ve $y^2 - y + 1$ ifadeleri pozitiftir, çarpımları da pozitif olmalıdır. Çelişki.

$iii)$ $x < y$ ise

$$x^2 - x + 1 = y^3 > x^3 \Rightarrow 0 > (x-1)(x^2+1)$$

olur. $x > 1$ ve $x^2 + 1 > 0$ olduğundan çarpımları da pozitiftir. Çelişki

Dolayısıyla çözüm gelen tek durum $y = 1$ durumudur, $(x, y) = (0, 1)$ tek çözümdür.

Çözüm 4:

İlk denklemde her tarafı $x+1$ ile çarparak $y^3(x+1) = x^3+1$ bulunur. İkinci denklemden $x^3+1 = y^2-y+1$ olduğunuda biliyoruz. Zaten $x^3 = y^2 - y$'den $x = \sqrt[3]{y^2 - y}$ olduğu barizdir. Bunu kullanarak iki denklemi birleştirirsek

$$y^3(\sqrt[3]{y^2-y} + 1) = y^2 - y + 1 \Rightarrow y^3(\sqrt[3]{y^2-y}) = -(y-1)(y^2+1) \text{ ve}$$
$$y^{10}(y-1) = -(y^2+1)^3 \cdot (y-1)^3$$

elde edilir. $y = 1$ bir çözümdür. $y \neq 1$ ise $y - 1$ ile sadeleştirmeyle $y^{10} = -(y-1)^2 \cdot (y^2+1)^3$ elde edilir. Sol tarafın ≥ 0 sağ tarafın ≤ 0 olduğu açıktır. 0 durumu için herhangi bir kesişim olmadığıda açıktır. Buradan çözüm gelmez. $y = 1$ durumunu ilk denklemlerde denersek $x = 0$'in tek çözüm olduğu açıktır. Denklemin 1 çözümü vardır.

28 Her birinin uzunluğu 1 olan n tane kapalı doğru parçasının bileşimi $[0, 28]$ doğru parçasına eşittir. Bu doğru parçalarının her birinde, diğer $n-1$ doğru parçasının hiçbirinde bulunmayan en az bir nokta varsa, n en fazla kaç olabilir?

a) 28 **b)** 34 **c)** 41 **d)** 48 **e)** 54

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$n = 54$ durumuna örnek verelim. $[0,1]$, $\left[\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right]$, $[1,2]$, $\left[1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right]$, $[2,3], \dots, [25,26]$, $\left[25\frac{1}{4}, 26\frac{1}{4}\right]$, $[26,27]$, $\left[26\frac{3}{4}, 27\frac{3}{4}\right]$, $[27,28]$ aralıkları istenen özelliktedir.

Seçeneklerde 54 ten daha büyük bir değer olmadığı için bu örnek şimdilik yeterlidir. $n > 54$ olamayacağının ispatını bulursak çözüme ekleyelim.

Not: Bu verdiğimiz örneğe göre genel olarak, $[0, m]$ aralığı için istenen özellikte $2(m-1)$ tane doğru parçasının seçilebileceği görülmektedir. ($m > 2$ bir tam sayı).

29 Uzayda bir D düzlemi üzerinde çakışık veya doğrusal olmayan A, B ve C noktaları alınıyor. Bu üç noktadan geçen O merkezli bir küre üzerindeki P ve Q noktaları için $|PA| = |PB| = |PC| = 30$ ve $|QA| = |QB| = |QC| = 40$ ise, O noktasinin D düzlemine uzaklığı kaçtır?

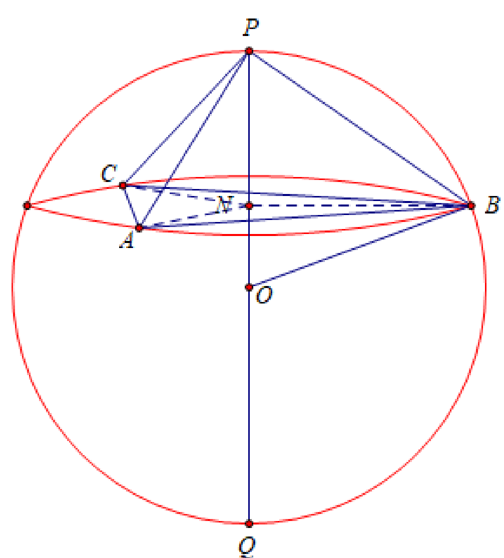
a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Kürenin yarıçapını R ile gösterelim. O noktasından ABC üçgeninin düzlemine inilen dikme ayağı N olsun. $|ON| = x$ uzunluğunu bulmalıyız. (ABC üçgeni çeşitkenar olabilir, eşkenar olmak zorunda değildir). N noktasının, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olduğunu kanıtlayalım:

$|AN|^2 = |AO|^2 - |ON|^2 = R^2 - x^2$, $|BN|^2 = |BO|^2 - |ON|^2 = R^2 - x^2$, $|CN|^2 = |CO|^2 - |ON|^2 = R^2 - x^2$ olduğundan $|AN| = |BN| = |CN| = a$ dır. Yani N noktası, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.



ON doğrusunun küreyi kestiği noktalar, problemde ifade edilen P ve Q noktalarıdır. $|PA|^2 = |PN|^2 + |AN|^2$ ve $|QA|^2 = |QN|^2 + |AN|^2$ olduğundan $|PN| < |QN|$ dir. Bu eşitlikleri

$$a^2 + (R - x)^2 = 30^2$$

$$a^2 + (R + x)^2 = 40^2$$

olarak ifade edebiliriz. Taraf tarafa toplayarak ve çıkararak

$$2(a^2 + R^2 + x^2) = 50^2 \quad (1)$$

$$4Rx = 700 \quad (2)$$

eşitliklerine ulaşırız. Ayrıca ONC dik üçgeninde

$$R^2 = x^2 + a^2 \quad (3)$$

olup (1) ve (3) ten $R = 25$ bulunur. Bu değeri (2) de yazarsak $x = 7$ elde edilir.

Not: ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı da $a = 24$ olur.

Çözüm 2:

Kürede çapı gören çevre açıdan dolayı $m(\widehat{PBQ}) = 90°$ dir. PBQ, $3k - 4k - 5k$ özel dik üçgeni olduğundan $|PQ| = 2R = 50$ dir. Böylece kürenin yarıçapı $R = 25$ tir. Yine PBQ dik üçgeninde Öklid'in dik kenar bağıntısı uygulanırsa $|PB|^2 = |PN| \cdot |PQ| \implies 30^2 = 50 \cdot |PN|$ dir. $|PN| = 18$ olup $|ON| = 25 - 18 = 7$ elde edilir.

30 Pozitif bölenleri toplamı 8 ile tam bölünmeyen bir pozitif tam sayıya *özel* sayı diyelim. Her biri özel sayı olan en fazla kaç ardışık pozitif tam sayı vardır?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Öncelikle; $n \equiv -1 \pmod 8$ olmak üzere, hiçbir n sayısının özel sayı olmadığını gösterelim. Bir tam kare 8 modunda $0, 1, 4$ değerlerini alabilir. Ön kabulden dolayı n çift çarpan içermediğinden n'nin çift dereceli asal çarpanları 8 modunda sadece 1 değerini alabilir. Bu yüzden çift dereceli asal çarpan sayısının bir önemi yoktur. n asal sayıysa özel sayı olamaz. n'nin tek dereceli 2 asal çarpanı varsa bunlar 8 modunda $1, -1$ veya $3, -3$ değerlerini alabileceğinden yine özel sayı olamaz. n'nin tek dereceli en az 3 asal çarpanı varsa zaten özel sayı olamaz. Sonuç olarak, en fazla 7 ardışık özel sayı olabilir. $[3(8-1)^2 - 3, 3(8-1)^2 + 3] = [144, 150]$ aralığındaki ardışık sayılar örnek olarak gösterilebilir.

31 x ve y gerçel sayılar olmak üzere $x^2 - 2y^2 = \dfrac{3}{8}$ ise, $x^4 - y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $-\dfrac{1}{4}$ **b)** $-\dfrac{1}{8}$ **c)** 0 **d)** $\dfrac{1}{8}$ **e)** $\dfrac{1}{4}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

$x^2 = 2y^2 + \dfrac{3}{8}$ ifadesinin karesini alalım ve istenilen ifadede yerine yazalım,

$$x^4 = \left(2y^2 + \frac{3}{8}\right)^2 \Rightarrow x^4 - y = \left(2y^2 + \frac{3}{8}\right)^2 - y = 4y^4 + \frac{3y^2}{2} - y + \frac{9}{64}$$

olur. $f(y) = 4y^4 + \dfrac{3y^2}{2} - y + \dfrac{9}{64}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$f'(y) = 16y^3 + 3y - 1 = (4y-1)(4y^2 + y + 1)$$

buluruz. $f'(y) = 0$ denkleminin tek çözümü $y = \dfrac{1}{4}$'dür. $y \geq \dfrac{1}{4}$ için $f'(y) \geq 0$ ve $y \leq \dfrac{1}{4}$ için $f'(y) \leq 0$ olur yani $y = \dfrac{1}{4}$ yerel minimumdur. f fonksiyonu en küçük değerini $y = \dfrac{1}{4}$ için alır.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

olduğundan minimum değer $\boxed{0}$ bulunur. Eşitlik durumu $(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ değerlerinde sağlanır.

32 12×12 bir satranç tahtasının 71 birim karesi işaretlenecektir. Bu işlem, ortak bir kenar paylaşan işaretli iki birim kare bulunmayacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

a) 132 **b)** 136 **c)** 140 **d)** 144 **e)** 148

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 148.

Satranç tahtasını 36 tane 2×2 kareye bölelim. Bu 2×2 karelerin 35 tanesinde iki birim kare, 1 tanesinde ise bir birim kare işaretlenecektir. İki işaretli birim kare içerecek 2×2 karelere normal, bir adet işaretli birim kare içerecek 2×2 kareye ise özel kare diyelim. Normal karelerin herhangi birinde işaretli birim karelerin seçimi kalan bütün normal karelerdeki işaretli birim kare seçimlerini tek türlü belirliyor. Normal karelerde sağ üstteki ve sol alttaki birim karelerin işaretlediğini varsayalım. Geriye kalan özel karedeki işaretlenecek birim kare, özel kare sol üst ve sağ alt köşede ise 3, değilse 2 farklı biçimde seçilebilir. Buna göre, toplamda $2 \cdot (34 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 148$ farklı işaretleme yapılabilir.

Kaynak: Tübitak 28. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2020

29. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2021

1 $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda $|CD| = 6$, $|AC| = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ve $|BC| = 2\sqrt{3}+2$ eşitlikleri sağlanmaktadır. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCB})$ ise, $|AB|$ kaçtır?

a) 3 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{6}-1$ **e)** 2

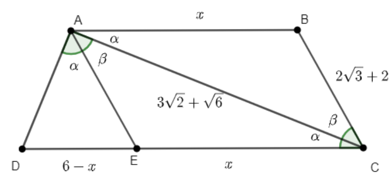
Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{E}$

A noktasından geçen ve BC'ye paralel olan doğru CD'yi E'de kessin. $ABCE$ paralelkenardır ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, $m(\widehat{BCA}) = \beta$ dersek, açılar şekildeki gibi olur. ABC ve ADC üçgenlerinde sinüs teoreminden $\dfrac{2\sqrt{3}+2}{\sin\alpha} = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sin(\alpha+\beta)}$ ve $\dfrac{6}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{|AD|}{\sin\alpha}$ elde edilir. Bu iki eşitlikten $|AD| = 2\sqrt{6}$ bulunur. $m(\widehat{AED}) = \alpha+\beta$ olduğundan AED ile CAD benzerdir.

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|DC|} \implies \frac{6-x}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \implies x = 2$$

bulunur. $|AB| = 2$'dir.



Çözüm 2:

DA ile BC doğruları E noktasında kesişsin. $\angle DAC = \angle DCB \implies \angle CAE = \angle ABC \implies \angle AEC = \angle CAB$ olacaktır.

Bu da $AC^2 = BC \cdot EC$ olmasını gerektirir. $AC = \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$ ve $BC = 2(\sqrt{3}+1)$ olduğu için $EC = 3(\sqrt{3}+1)$ ve $AE = \sqrt{3}+1$. $AB : DC = EB : EC$ olduğu için $AB = 2$ elde edilir.

2 Kaç farklı p asal sayısı için $29^{p+1}-1$ sayısı p ile tam bölünür?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Öncelikle $p \neq 29$ olduğunu görelim. Dolayısıyla $(p, 29) = 1$ olacaktır. $29^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olduğundan

$$29^{p+1} - 1 \equiv 29^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

olacaktır. $29^2 - 1 = (29-1)(29+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ olduğundan $p = 2, 3, 5, 7$ olabilir. Buradan $\boxed{4}$ farklı p asalı bulunur.

3 Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilmek üzere, bir $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu $f(1) = 1$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(7n+1) = f(n), \quad f(7n+2) = 2f(n), \quad f(7n+4) = 4f(n)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Buna göre $f(3900)$ kaçtır?

a) 16 **b)** 32 **c)** 64 **d)** 128 **e)** 256

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

$3900 = 7 \cdot 557 + 1$ olduğundan $f(3900) = f(557)$ bulunur.

$557 = 7 \cdot 79 + 4$ olduğundan $f(557) = 4f(79)$ bulunur.

$79 = 7 \cdot 11 + 2$ olduğundan $f(79) = 2f(11)$ bulunur.

$11 = 7 \cdot 1 + 4$ olduğundan $f(11) = 4f(1) = 4$ bulunur. Buradan $f(3900) = f(557) = 4f(79) = 8f(11) = 32$ elde edilir.

4 7 farklı top 5 farklı kutuya, en az 2 kutu boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

a) 19325 **b)** 19675 **c)** 19855 **d)** 20015 **e)** 20185

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

2 kutu boş, 3 kutu doluysa $\binom{5}{2} = 10$ farklı şekilde boş kutular seçilir. Her topun gidebileceği 3 yer vardır. 3^7 durum gelir ama kutuların 3 tanesinin veya 4 tanesinin boş olabilir. $3^7 - \binom{3}{1} \cdot 2^7 + \binom{3}{2} \cdot 1^7 = 1806$ olur. 10 farklı şekilde boş kutuları seçmiştik 18060 farklı dağıtım yapılır.

3 kutu boş, 2 kutu doluysa $\binom{5}{3} = 10$ farklı şekilde boş kutular seçilir. Her topun gidebileceği 2 yer vardır ama hepsi aynı kutuya gidemez. $2^7 - 2 = 126$ olur. $126 \cdot 10 = 1260$ farklı dağıtım yapılır.

4 kutu boş, 1 kutu doluysa $\binom{5}{4} = 5$ farklı şekilde boş kutuyu seçeriz ve tüm toplar son kutuya verilir. 5 farklı dağıtım yapılabilir.

Tüm durum: $18060 + 1260 + 5 = 19325$ bulunur.

5 Çeşitkenar bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = |EC| < |BE|$ olacak şekilde D ve E noktaları alınıyor. $|AB| = 3|AD| + |AE|$ ve $|AC| = |AD| + 3|AE|$ ise, $\dfrac{|BC|}{|DE|}$ kaçtır?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

$|BD| = |EC| = a$ ve $|ED| = b$ diyelim. $|AD| = x$ ve $|AE| = y$ ise $|AB| = 3x + y$ ve $|AC| = 3y + x$ olacaktır. ABE ve ACD üçgenlerinde Steward teoreminden,

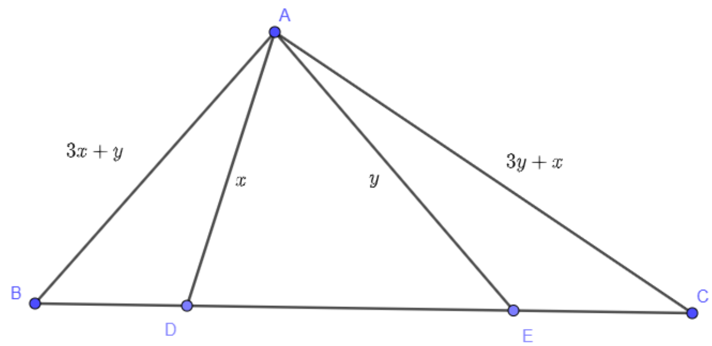
$$\frac{b(3x+y)^2 + ay^2}{a+b} - ab = x^2$$

$$\frac{b(3y+x)^2 + ax^2}{a+b} - ab = y^2$$

olur. Taraf tarafa çıkartırsak,

$$\frac{b\left((3x+y)^2-(3y+x)^2\right)-a\left(x^2-y^2\right)}{a+b}=\frac{(8b-a)\left(x^2-y^2\right)}{a+b}=x^2-y^2 \implies \frac{8b-a}{a+b}=1 \Rightarrow 7b=2a$$

elde edilir (Üçgen çeşitkenar olduğundan $x \neq y$ olur). Bizden istenilen oran, $\dfrac{2a+b}{b}=\dfrac{8b}{b}=8$ olur.



Çözüm 2:

Stewart yerine yükseklik ile alakalı formülü kullanarak da sonuca gidebiliriz.
A dan BC ye inilen yüksekliğin ayağı H olsun.
$AB^2-AC^2=BH^2-GC^2$ ve $AD^2-AE^2=DH^2-HE^2$ eşitlikleri elde edilir. Taraf tarafa oranlarsak
$\dfrac{AB^2-AC^2}{AD^2-AE^2}=\dfrac{BH^2-HC^2}{DH^2-HE^2}=\dfrac{(BH+HC)(BH-HC)}{(DH+HE)(DH-HE)}=\dfrac{BC}{DE}\cdot\dfrac{(BD+DH)-(CE+EH)}{DH-EH}$
$BD=CE$ eşitliğini kullanırsak $\dfrac{AB^2-AC^2}{AD^2-AE^2}=\dfrac{BC}{DE}$
$AB=3AD+AE$ ve $AC=AD+3AE$ eşitliklerini de yerine yazarsak

$$\frac{BC}{DE}=\frac{(4AD+4AE)(2AD-2AE)}{AD^2-AE^2}=8$$

$\boxed{6}$ Kaç tane n pozitif tam sayısı için n^3 sayısının rakamları toplamı $4n$ sayısına eşittir?
a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$
$n^3=a_1a_2\dots a_k$ diyelim. m sayısının rakamları toplamına $s(m)$ dersek, $s(n^3)=a_1+a_2+\cdots+a_k$'dir. a_i sayıları birer rakam olduğundan $s(n^3)=4n\leq 9k$'dır. Ayrıca $n^3\geq 10^{k-1}$ olduğundan $4n\geq 4\cdot 10^{\frac{k-1}{3}}$ olacaktır. Buradan

$$9k\geq 4\cdot 10^{\frac{k-1}{3}}$$

elde edilecektir. İfadenin sağ tarafı üstel fonksiyon, sol tarafı ise polinom olduğundan k arttınca eşitsizlik bozulacaktır ($10^{\frac{1}{3}}>2$ olduğundan sağ taraf çok hızlı büyüyecektir). Ufak değerleri denerse, $k\geq 4$ için eşitsizliğin sağlanmadığı görülür. Yani en fazla 3 basamaklı tam küpler denenmelidir. Bunlar ise $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729$'dur. Bunlardan sadece 8 istenileni sağlar. Yani, şartı sağlayan tek sayı $n=2$'dir.

7 Bir $(a_n)_{n=1}^{100}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 3$ ve her $n = 1, 2, \ldots, 99$ için

$$a_{n+1} = a_n + 1 - \frac{2}{n^2+n}$$

eşitliğini sağlıyorsa, $a_1 + 2a_2 + \cdots + 100a_{100}$ toplamı kaçtır?

a) 335850 **b)** 338505 **c)** 338550 **d)** 383505 **e)** 383550

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle $\frac{2}{n^2+n}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım. $\frac{2}{n^2+n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ olduğundan

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}$$

olacaktır. $n \leq 99$ için n yerine $1, 2, \ldots n$ yazıp taraf tarafa toplarsak

$$a_{n+1} - a_1 = n - \frac{2}{1} + \frac{2}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = n + 1 + \frac{2}{n+1}$$

elde edilir. Yani $n = 1, 2, \ldots, 100$ için $a_n = n + \frac{2}{n}$ olacaktır.

$$\sum_{n=1}^{100} na_n = \sum_{n=1}^{100}(n^2+2) = 200 + \sum_{n=1}^{100} n^2$$

olacaktır. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğundan istenilen toplam $200 + \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338550$ elde edilir.

8 Bir çember etrafına yazılmış olan sıfırdan farklı 200 sayı, komşu sayılar farklı renkte olacak şekilde kırmızı ve beyaz renge boyanmıştır. Her kırmızı sayı iki komşusunun çarpımına, her beyaz sayı ise iki komşusunun toplamına eşittir. Buna göre bu 200 sayının toplamı kaçtır?

a) 60 **b)** 65 **c)** 70 **d)** 75 **e)** 80

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

Her kırmızı boyalı sayı $\frac{1}{4}$ ve her beyaz boyalı sayı $\frac{1}{2}$ olursa koşullar sağlanır, kırmızı ve beyaz boyalı 100 tane sayı vardır, toplam da $100 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 100 \cdot (\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4}) = 100 \cdot (\frac{2+1}{4}) = 100 \cdot \frac{3}{4} = 25 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 25 \cdot 3 = 75$ elde edilir.

Çözüm 2:

Cevap: $\boxed{D}$

Yukarıdaki ispat sınav sırasında öğrenciler tarafından test taktiğiyle her kırmızı ve beyaz boyalı sayıların kendi içinde eş olmasıyla $2x^2 = x$ ve x sıfır olmadığından $\frac{1}{2}$ olarak bulunabilir. Lakin daha akla yatar bir çözüm verelim.

$a_1 = x, a_2 = xy, a_3 = y$ olsun. Buna göre

$$a_4 = y(1-x)$$

$$a_5 = 1-x$$

$$a_6 = (1-x)(1-y)$$

$$a_7 = 1-y$$

$$a_8 = x(1-y)$$

olarak elde edilir ve bundan sonra $a_9 = x$ olduğundan dizi periyodik bir hal alır. Yani 8'lik bir tekrar bulduk. 0 zaman

$$Toplam = 25\left(\sum_{i=1}^{8} a_i\right) = 25(x + xy + y + y - xy + 1 - x + 1 - x - y + xy + 1 - y + x - xy) = 25.3 = 75$$

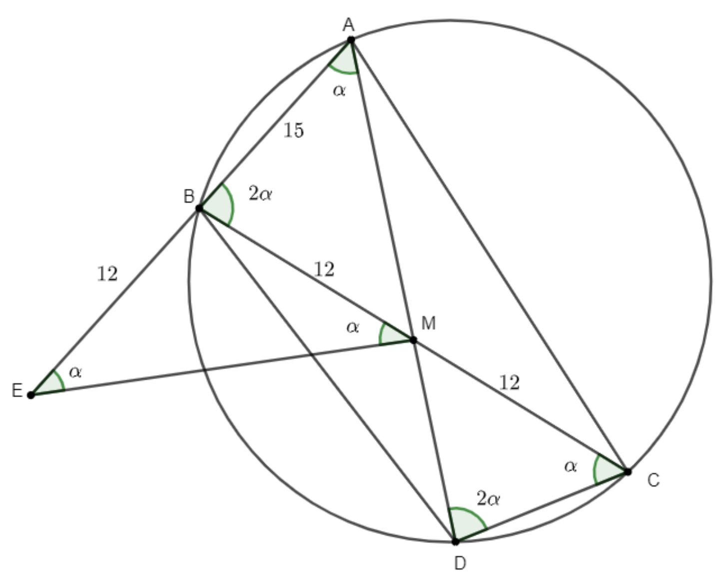
olarak bulunur.

$\boxed{9}$ Bir ABC üçgeninde A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen doğru ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez D noktasında kesmektedir. $|AB| = 15$, $|BC| = 24$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot m(\widehat{BCD})$ ise, $|DC|$ kaçtır?

a) 9 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 14 **e)** 15

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{B}$



AB kenarını uzatıp B tarafında $|BE| = 12$ olacak şekilde bir nokta seçelim. Açıları yazarsak ekteki gibi olur. EBM ve AME benzerdir. Benzerlikten $\dfrac{|EM|}{|AE|} = \dfrac{|EB|}{|AM|}$ olur, buradan $|MA| = 18$ elde edilir. ABM ile CDM benzer olduğundan

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|MC|}{|MA|} \Rightarrow \frac{|CD|}{15} = \frac{12}{18} \Rightarrow |CD| = 10$$

bulunur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{B}$.

B noktasından geçip CD 'ye paralel olan doğru AM yi F de kessin. BF doğrusu $\angle ABM$ nin açıortayıdır. $AF = 5p$ ve $FM = 4p$ diyelim. $FM = MD$ olduğundan $AM = 9p$ ve $MD = 4p$ dir. M noktasında kuvvetten $36p^2 = 144 \iff p = 2$ bulunur. Dolayısıyla $AB/CD = 15/CD = BM/MD = 12/8$ olduğundan $CD = 10$ dur.

10 $n = 5, 7, 11, 13, 121$ değerlerinden kaç tanesi için $\dfrac{k^2 + 3k + 5}{n}$ tam sayı olacak şekilde k tam sayısı bulunmaz?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Bizden $k^2 + 3k + 5 \equiv 0 \pmod{n}$ olacak şekilde k tamsayısı olup olmadığını bulmamız isteniliyor. Verilen değerlerin hepsi tek sayı olduğundan n'yi tek sayı olarak değerlendirebiliriz. Dolayısıyla

$$4k^2 + 12k + 20 \equiv (2k + 3)^2 + 11 \equiv 0 \pmod{n}$$

olması yeterlidir. -11, n modunda karekalandır. Öncelikle $n = 11$ için karekalan olduğu barizdir fakat $n = 121$ için karekalan değildir. Çünkü $(2k + 3)^2 \equiv 0 \pmod{11}$ ise $(2k + 3)^2 \equiv 0 \pmod{121}$ olacaktır. $n = 5, 7, 13$ için de karekalanları hesaplamak kolaydır. $n = 5$ için karekalandır fakat $n = 13$ ve $n = 7$ için -11 karekalan değildir. Dolayısıyla sadece $n = 7, 13, 121$ için verilen ifadeyi tam sayı yapan bir k tamsayısı bulunmaz.

11 a ve b gerçel sayılar olmak üzere,

$$x^4 - x^3 + (a + b - 2)x^2 + (b - 2a)x + ab$$

polinomunun 4 farklı gerçel kökü varsa, $4a+b$ toplamı $\frac{5}{16}, \frac{7}{12}, \frac{7}{6}, \frac{17}{8}$ ve $\frac{5}{2}$ değerlerinden kaç tanesini alabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen ifadeyi iki tane ikinci dereceden polinomun çarpımı olarak yazmaya çalışalım. Sabit terim ab olduğundan $(x^2 + mx + a)(x^2 + nx + b)$ olarak ayıracağımızı tahmin edebiliriz. Bu ifadeyi açıp terimleri eşitlersek $m = 1$ ve $n = -2$ bulunur. Yani ifadeyi

$$(x^2 + x + a)(x^2 - 2x + b)$$

olarak çarpanlarına ayırabiliriz. 4 farklı gerçel kök olduğundan bu çarpanların ikişer tane farklı kökü olmalıdır. Yani diskriminantları pozitiftir. Buradan $1 > 4a$ ve $1 > b$ bulunur. Taraf tarafa toplarsak $2 > 4a + b$ elde edilir. Verilen değerlerden 3 tanesi bu şartı sağlar.

Not: Bu çözümde "Ya bu iki çarpanın ortak kökü varsa?" sorusu sorulabilir fakat toplam 2'den net bir şekilde küçük olduğundan, sonsuz (a, b) çifti olacaktır, bunların arasında ortak kök olmayacak şekilde a ve b reel sayılarını bulabileceğimiz barizdir. Ama tam kanıt istiyorsanız eşitliği sağlayan örnek (a, b) çiftleri bulup ekleyebilirsiniz :D

12 Bir sıraya dizilmiş 58 cücenin 29 tanesinin kavuğu kırmızı, diğer 29 tanesinin kavuğu ise beyaz renktedir. Başlangıçta diziliş nasıl olursa olsun, en fazla k tane kırmızı ve en fazla k tane beyaz kavuklu cüceyi sıradan çıkartarak sırada kalan farklı renkte kavuğa sahip en fazla bir ardışık cüce ikilisi bulunması sağlanabiliyorsa, k en az kaçtır?

a) 14 **b)** 16 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 24

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

58 kişiyi ilk 29 ve son 29 olarak iki gruba ayıralım ve genelliği bozmadan ilk grupta kırmızı kavuklular daha fazla olsun, ilk gruptaki beyazların rengi dolayısıyla 14 veya 14ten küçük olacak ve ikinci grupta da kırmızı kavuklular 14 veya 14ten küçük olacak dolayısıyla $k = 14$ olursa ilk gruptan tüm beyazları, ikinci gruptan tüm kırmızıları çıkartırsak yalnız bir ardışık farklı renkli kavuk sahibi cüce ikilisi olur.

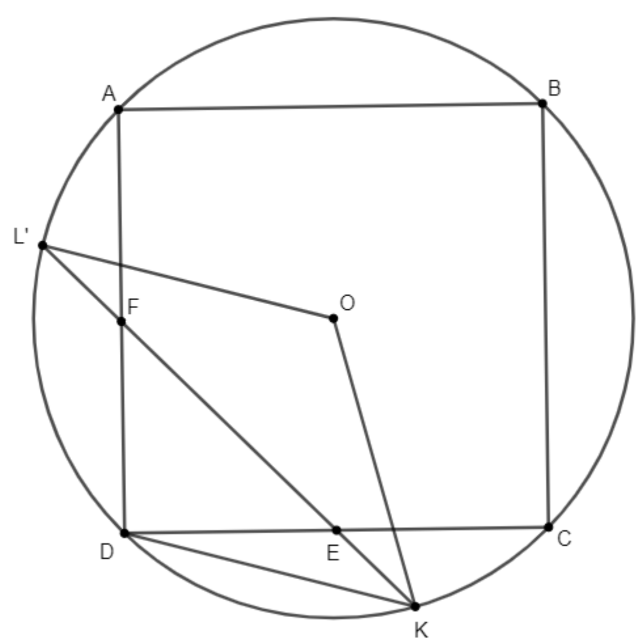
$k = 13$ için $KBKBKBKB \dots KBKB$ dizilimini ele alalım. 29 tane KB var ve her silişte bir tanesini silebiliriz dolayısıyla elimizde en az 3 KB kalır ve koşul sağlanmaz.

13 Köşeleri O merkezli ω çemberi üzerinde yer alan bir $ABCD$ karesi veriliyor. $[CD]$ kenarının orta noktasından geçen bir doğru ω çemberinin küçük CD yayını K'de, küçük AD yayını L noktasında kesiyor. $m(\widehat{KOL}) = 120°$ ise, $m(\widehat{KDC})$ kaçtır?

a) 15° **b)** 20° **c)** 22, 5° **d)** 25° **e)** 30°

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{A}$



AD kenarının orta noktası F olsun. EF doğrusu küçük CD yayını K' noktasında, küçük AD yayını ise L' noktasında kessin. Karenin bir kenarına $2x$ dersek, çemberin yarıçapı $x\sqrt{2}$ ve $|DE| = |EC| = |DF| = |FA| = x$ olur. K' ve L', OD'ye göre simetrik olduğundan $|L'F| = |K'E| = y$ diyebiliriz. Çemberde kuvvetten, $|AF||FD| = |L'F||FK'|$ olacaktır. Buradan, $x^2 = y(y + x\sqrt{2})$ elde edilir. Bunu, y'ye bağlı ikinci dereceden denklem olarak yazıp, diskriminant ile çözümünü bulunursak, $y = \dfrac{x\sqrt{6} - x\sqrt{2}}{2}$ elde edilir. $|L'K'| = x\sqrt{6}$ elde edilir. $OL'K'$ üçgeninin kenarları $x\sqrt{2} - x\sqrt{2} - x\sqrt{6}$ olduğundan $m(\widehat{L'OK'}) = 120°$ bulunur. Yani K noktası ile K' noktası çakışıktır (Eğer değillerse soru hatalı olacaktır, o yüzden ispatlama gereği duymadım). $m(\widehat{KOC}) = 30°$ olacağından (simetrik olduğundan $m(\widehat{KOC}) = m(\widehat{LOA})$ olmalıdır) $m(\widehat{KDC}) = 15°$ bulunur.

Not: Soru içerisinde de bahsettiğim gibi aslında klasik bir sınav olsaydı, bu çözüm tam bir çözüm olmazdı çünkü neden $K = K'$ olması gerektiği ispatlanmamış. Test mantığı ile K ve K', sorudaki şartları sağladığı için $K' = K$ olmalıdır çünkü olmasaydı bariz bir şekilde $m(\widehat{KDC}) \neq m(\widehat{K'DC})$ olacaktı.

Çözüm 2:

CD'nın orta noktası E ve karenin bir kenarı $2x$ olsun. O'dan CD'ye inen dikme ayağının E olduğu açıktır. $|OE| = x$ ve OL yarıçap olduğundan $|OL| = x\sqrt{2}$ bulunur. $m(\widehat{LEO}) = \alpha$ olsun, OEL üçgeninde sinüs teoreminden $\dfrac{x}{\sin 30°} = \dfrac{x\sqrt{2}}{\sin\alpha}$ dan $\alpha = 45°$ bulunur, OEL'de üçgenin iç açıları toplamından $m(\widehat{LOE}) = 105°$ ve $m(\widehat{KOE}) = 15°$ bulunur, $m(\widehat{COE}) = 45°$ olduğundan $m(\widehat{KOC}) = 30°$ bulunur ve aynı yayı gördüklerinden $m(\widehat{KOC}) = 2m(\widehat{KDC}) = 30°$ den $m(\widehat{KDC}) = 15°$ bulunur.

Çözüm 3:

DC'nin orta noktası E olsun. $OE \perp DC$ olduğu açıktır. EOC ikizkenar dik ücgendir. $LO \cap w = T$ olsun. LT çap olduğundan OKT eşkenar üçgendir. OEK üçgenini, OK kenarı OT kenarı ile çakışacak ve E noktası OKT ücgeninin iç bölgesinde kalacak şekilde taşıyalım ve E noktasının yeni konumuna L diyelim. OLD üçgeninin eşkenar olduğu açıktır. $\angle OLT = 30°$ olduğundan LT, OKT üçgeninde simetri eksenidir. $|OL| = |LK|$'dır. OLK ve DOE ücgenlerinin eş olduğu görülür. Açılar yazılırsa istenen açı $15°$ elde edilir.

$\boxed{14}$ $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 29\}$ olmak üzere,

$$\frac{a^5 + b^6 + c^7 - 2021}{29}$$

ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan kaç farklı (a, b, c) üçlüsü vardır?

a) 812 **b)** 832 **c)** 836 **d)** 839 **e)** 841

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$a^5 + b^6 + c^7 \equiv 2021 \equiv 20 \pmod{29}$ olacak şekildeki (a, b, c) üçlülerinin sayısı aranmaktadır. Eğer $x^5 \equiv y^5 \pmod{29}$ ise $x \equiv y \pmod{29}$ olduğunu gösterirsek, her farklı a değeri için a^5 değeri $\{1, 2, \ldots, 29\}$ kümesinin farklı bir elemanı olacağını göstermiş oluruz (birebir ve örten olacaktır da diyebiliriz), dolayısıyla her (b, c) çifti için tam olarak 1 tane a değeri olmuş olur. (b, c) çiftlerinin sayısı $29^2 = 841$ olduğundan cevap 841 bulunur.

Şimdi $x^5 \equiv y^5 \pmod{29}$ ise $x \equiv y \pmod{29}$ olduğunu gösterelim. Eğer x veya y'den en az biri 0 ise ispatlanacak bir şey yoktur. İkisi de 0'dan farklı ise

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 \equiv 1 \pmod{29}$$

olacaktır. $\dfrac{x}{y} \equiv z \pmod{29}$ olacak şekilde bir z vardır. Eğer $z = 1$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Yani $z^5 - 1 \equiv 0 \pmod{29}$ denkleminin tek çözümünün $z \equiv 1$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için ilk 14 sayının 1 veya -1 olmadığını (1'in kendisi haricinde) göstermemiz yeterlidir çünkü 14'den büyük değerler için $z^5 \equiv -(29-z)^5$ olacaktır. Gerçekten de hiçbir değer için sağlanmadığından $z = 1$ tek çözümdür.

Dolayısıyla cevap 841'dir.

Not: Aklıma ilk olarak 14 sayıyı denemek geldiği için denersek çıkar yazdım ama bu biraz uzun bir yol olabilir. Eğer kısa bir çözümünü eklerseniz sevinirim.

15 n sayısının 2041, 2042, 2043, 2044 ve 2045 değerlerinden kaç tanesi için,

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 2021 \quad \text{ve} \quad P(m) = n$$

olacak şekilde tam sayı katsayılı bir $P(x)$ polinomu ve m tam sayısı bulunur?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 2021$ olduğundan Tam sayı katsayılı bir $Q(x)$ polinomu için $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2021$ olarak yazılabilir. Ardışık k tane tamsayının çarpımı $k!$ ile bölünür. Dolayısıyla x tamsayısı için $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ifadesi 24 ile tam bölünür. Dolayısıyla

$$n \equiv P(m) \equiv 2021 \equiv 5 \pmod{24}$$

olacaktır. Verilenlerden sadece 2045 sayısı bu şartı sağlar. $n = 2045$ için örnek durum verelim, $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2021$ için $P(5) = 2045$'dir.

16 Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir tablonun birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, hem herhangi bir satırdaki sayıların toplamı hem de herhangi bir sütundaki sayıların toplamı tek sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

a) 72 **b)** 96 **c)** 108 **d)** 128 **e)** 144

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Tabloyu koşullara uygun bir şekilde doldurmak için iki satır ve iki sütuna üç tane 1 koymalıyız. Satır ve sütunları $\dbinom{4}{2}\dbinom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$ farklı şekilde belirledikten sonra belirlenen satır ve sütunların kesişimine 1'leri yazdıktan sonra kalan 2 tane 1'i (üç tane 1 içeren satırları tamamlamak için) 2 farklı şekilde yazarız. Kalan 2 tane 1'i (üç tane 1 içeren sütunları tamamlamak için) 2 farklı şekilde yazarız. Dolayısıyla $36 \cdot 2 \cdot 2 = 144$ farklı tablo elde edilir.

17 Herhangi üçünden bir geniş açılı üçgen oluşturulabilen n çubuk bulunuyorsa, n en fazla kaç olabilir?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Öncelikle $n \geq 5$ için çözüm olmadığını gösterelim. Aksini kabul edelim. En küçük 5 parçayı ele alalım, bu parçaların uzunlukları $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ olsun. (x_1, x_2, x_5) bir üçgen belirttiği için $x_1 + x_2 > x_5$ olmalıdır. Ayrıca

$$x_1^2 + x_2^2 < x_3^2$$
$$x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$$
$$x_3^2 + x_4^2 < x_5^2$$

olacaktır. Yani

$$(x_1 + x_2)^2 > x_5^2 > x_3^2 + x_4^2 > 2x_3^2 + x_2^2 > 2x_1^2 + 3x_2^2$$

olacaktır. $2(x_1^2 + x_2^2) \geq (x_1 + x_2)^2$ olduğundan $2(x_1^2 + x_2^2) > 2x_1^2 + 3x_2^2$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. $n \geq 5$ olamaz.

$n = 4$ için örnek durum $(3, 4, \sqrt{26}, \sqrt{43})$ uzunluğundaki çubuklardır.

18 a, b, c ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, $a + b + c = 939$ ve $a \cdot b \cdot c$ sayısı 10^k ile tam bölünebiliyorsa, k en fazla kaç olabilir?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle $k \geq 8$ olamayacağını gösterelim. Aksini kabul edelim, 10^k sayısı abc'yi tam böldüğünden 5^8 de abc'yi tam bölecektir. a, b ve c sayılarının hepsi birden 5 ile bölünemez çünkü toplamı 5 ile bölünmemektedir. $5^5 > 939$ olduğundan sayılardan herhangi birisinin bölündüğü 5'in en büyük kuvveti 4'ü aşamaz. Çarpım 5^8 ile bölündüğünden sayılardan ikisi $5^4 = 625$ ile bölünmelidir. Fakat $625+625 > 939$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $k \geq 8$ olamaz.

Şimdi $k = 7$ için örnek durum bulalım. $(a, b, c) = (64, 250, 625)$ için $a + b + c = 939$ ve $abc = 10^7$'dir. Dolayısıyla cevap 7'dir.

19 a bir gerçel sayı olmak üzere, $x^3 + ax^2 + 108 = 0$ denklemini sağlayan tam olarak iki farklı x gerçel sayısı bulunmaktadır. Buna göre a kaçtır?

a) -6 **b)** -3 **c)** 4 **d)** 8 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen üçüncü dereceden denklemin tam olarak 2 çözümü olması için katlı kökü olmalıdır. $P(x)$ polinomu için $(x - c)^2 \mid P(x)$ ise $(x - c) \mid P'(x)$'dir. Dolayısıyla c, verilen denklemde katlı bir kökse, türevinin de köküdür. Türevi $3x^2 + 2ax = 3x\left(x + \dfrac{2a}{3}\right)$ olduğundan katlık kök $x = 0$ veya $x = \dfrac{-2a}{3}$'dür. $x = 0$ ana denklemde çözüm olmadığından katlı kök $x = \dfrac{-2a}{3}$'dür. Köklerin toplamı $-a$ olduğundan da $x_1 + x_2 + x_3 = \left(\dfrac{-2a}{3}\right) + \left(\dfrac{-2a}{3}\right) + x_3 = -a$'dır ve buradan son kök de $x_3 = \dfrac{a}{3}$ bulunur. Yani ifadenin çarpanlara ayrılmış hali

$$\left(x + \frac{2a}{3}\right)^2 \left(x - \frac{a}{3}\right) = 0$$

olacaktır. Sabit terim $-\dfrac{4a^3}{27} = 108$ olduğundan $a = -9$ bulunur.

Çözüm 2:

Tam olarak iki reel kök varsa $P(x) = (x+b)^2(x+c)$ formundadır. Açarsak $x^3 + ax^2 + 108 = x^3 + (2b + c)x^2 + (2bc + b^2)x + cb^2$ elde edilir ve polinom eşitliğinden

$(I) 2b + c = a$

$(II) 2bc + b^2 = 0$

$(III) cb^2 = 108$

denklemleri elde edilir. (II)'yi düzenlersek $b(2c+b) = 0$ elde edilir. (III)'ten $b = 0$ olamayacağını görebiliriz. O halde $b = -2c$ olmalıdır. (III)'te yerine yazarsak $4c^3 = 108$, $c = 3$ bulunur. Bunu da (I)'de yazarsak $-3c = -9 = a$ bulunur.

20 Başlangıçta bir tahtada 29 sayısı yazılıdır. Her işlemde tahtada yazılı a sayısı silinip yerine $17a+1$ ya da $a-7$ sayılarından biri yazılıyor. Sonlu sayıda işlem sonucunda tahtada yazılı olamayacak en küçük beş basamaklı pozitif tam sayı kaçtır?

a) 10002 **b)** 10003 **c)** 10004 **d)** 10005 **e)** 10006

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Tahtada yazılı olan sayıya $a \to a - 7$ işlemini uygularsak 7'ye bölümünden kalanı değişmez.

Tahtada yazılı olan sayıya $a \to 17a + 1$ işlemini uygularsak 7'ye bölümünden kalanını inceleyelim:

29'un 7'ye bölümünden kalan 1'dir ve $a \to 17a + 1$ işlemi 7 modunda $3a + 1$ işlemine denktir, her ok bir kez işlem uygulanmasını göstermek üzere,

$1 \to 4 \to 6 \to 5 \to 2 \to 0 \to 1 \to \dots$

şeklinde periyodik olacaktır ve 7'ye bölümünden kalan asla 3 olmayacaktır, 10006 sayısı elde edilemeyecek en küçük beş basamaklı pozitif tam sayıdır.

Diğer şıklar, 29 sayısını şıklardaki sayılarla 7'ye bölümünden kalan aynı ve şıklardan büyük olana kadar $a \to 17a + 1$ işlemi uygulanıp $a \to a - 7$ işlemi sayıya ulaşana kadar uygulanarak elde edilebilir.

21 Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 100°$, $m(\widehat{ACD}) = 30°$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 20°$ ise, $m(\widehat{DAC})$ kaçtır?

a) 40° **b)** 45° **c)** 50° **d)** 55° **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{A}$

Açılar derece cinsinden olmak üzere, $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ ve AC ile BD'nun kesişimi K olsun. Basit açı hesaplarıyla $m(\widehat{ACD}) = 30$, $m(\widehat{CAB}) = 40$ bulunur. $ABCD$ dörtgeninde K'na göre trigonometrik ceva yazılırsa, $\dfrac{\sin 20}{\sin 40} \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\sin(120-\alpha)} \cdot \dfrac{\sin 30}{\sin 30} \cdot \dfrac{\sin 100}{\sin 20} = 1$ elde edilir, aynı olanlar sadeleştirilip α içeren terimler bir tarafa toplanırsa $\dfrac{\sin \alpha}{\sin(120-\alpha)} = \dfrac{\sin 40}{\sin 100} = \dfrac{\sin 40}{\sin 80}$ elde edilir, $\alpha = m(\widehat{DAC}) = 40$ sağlar.

Çözüm 2:

AC ile BD, E noktasında keşissin.

A nın BD ye göre simetriği F olsun.

B, C, F doğrusal, $AB = BF$ ve $\angle BAE = \angle EFB = 40^\circ$ olacaktır.

Basit açı hesapları ile $\angle DCF = 50^\circ$, $\angle EDC = \angle ECD = 30^\circ$ ve $\angle CEF = \angle DEF = 60^\circ$ bulunur.

$EF \perp DC$ ve $ED = EC$ olduğu için $DECF$ bir deltoittir. Bu durumda $\angle DFE = \angle EFC = 40^\circ$ ve $BD = BF = AB$ olacaktır. $\triangle ABD$ ikizkenar üçgeninde $\angle BAD = 80^\circ$ ve $\angle CAD = 40^\circ$ dir.

Çözüm 3:

Bu sorunun daha genel hali şudur:

$ABCD$ dörtgeninde $\angle ABD = \angle DBC$ ve $\angle EDC = \angle ECD = 30^\circ$ ise $\angle BAC = \angle DAC$ olduğunu gösteriniz.

Genel hali için şöyle bir çözüm yolu izlenebilir:

DAC üçgeninin çevrel çemberi BD yi P de kessin.

$\angle BAP = \alpha$ dersek $\angle PAC = 30^\circ$, $\angle ABP = \angle PBC = 30^\circ - \alpha$ olacaktır. Bu da soruyu Model 4.3 ile özdeş hale getiriyor. Buradan da $\angle BCP = 2\alpha$, $\angle DAC = \angle DPC = 30^\circ + \alpha = \angle BAC$ elde edilir.

Soruyu, Model 4.3 e dönüştürüp çözüme gidebileceğimiz gibi, Model 4.3 çözümlerinden esinlenerek de çözüm oluşturabiliriz.

22 $n^3 - 4m^3 + 3n^2m = 20$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Verilen ifadede $m = n$ alırsak ifade 0 olacaktır. Yani sol taraf $(n - m)$ ile bölünür. Bölme işlemi yaparsak $(n - m)(2m + n)^2 = 20$ bulunur. 20'yi bölen tam kareler sadece 1 ve 4'dür.

$(2m + n)^2 = 1$ için $n - m = 20$ bulunur. Ayrıca $2m + n = 1$ veya $2m + n = -1$ olabilir. Bu denklemler çözülürse, sadece $(m, n) = (-7, 13)$ çözümü bulunur.

$(2m + n)^2 = 4$ için $n - m = 5$ bulunur. $2m + n = 2$ veya $2m + n = -2$ olabilir. Bu denklemler çözülürse, sadece $(m, n) = (-1, 4)$ çözümü bulunur.

Toplamda 2 tane çözüm vardır.

23 $f(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{12} f(x_n) = -4$$

denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_{12})$ tam sayı 12-lilerinin sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 0 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

İstenen toplam S olsun

Polinomun alabileceği minimum pozitif değer $x = -1$ için 8'dir. Toplamın -4 gelmesi için k tane 8, $2k+1$ tane -4 ve $11-3k$ tane 0 olmalıdır.

Bu durumda k, $2k+1$ ve $11-3k$'nın alabileceği değerler $(0,1,11)$ $(1,3,8)$ $(2,5,5)$ $(3,7,2)$ dir.

1.durum için $\binom{12}{1} \cdot \binom{11}{3} \cdot 3^8 \equiv 0 \pmod{11}$

2.durum için $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot 3^5 \equiv 0 \pmod{11}$

3.durum için $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{7} \cdot 3^2 \equiv 0 \pmod{11}$

4.durum için $\binom{12}{1} \cdot\ 3^{11} \equiv 3 \pmod{11}$

Taraf tarafa toplarsak $S \equiv 3 \pmod{11}$

24 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümeleri $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümeleridir. Bu alt kümelerin herhangi ikisinin kesişimi en fazla bir eleman içeriyorsa, k en fazla kaçtır?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Bir eleman en fazla 3 kümede kullanılabilir. 4 kümede kullanılabileceğini varsayalım, bu elemanın yanında her küme 3 elemanlı olduğundan $4 \cdot 2 = 8$ eleman olur fakat $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesinde geriye kalan 7 eleman vardır dolayısıyla bu 4 kümeden birinde ortak 2 eleman bulunur, çelişki. $k = 9$ olursa, kümelerin eleman sayıları toplamı $9 \cdot 3 = 27$ olur ve güvercin yuvası ilkesinden bir eleman 4 kümede kullanılır, çelişki yani $k < 9$'dur.

$k = 8$ için örnek verelim: $\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,5,6\}, \{2,7,8\}, \{3,4,7\}, \{3,5,8\}, \{4,6,8\}$

25 Bir ABC üçgeninde sırasıyla $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde alınan D, E ve F noktaları için AD, BE ve CF noktadaştır. $|BD| = |CD|$, $CF \perp AB$, $|CF| = 8$, $|DF| = 5$ ve $|EF| = 6$ ise, $|BE|$ kaçtır?

a) $\dfrac{18}{\sqrt{5}}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $5\sqrt{5}$ **d)** $6\sqrt{5}$ **e)** $\dfrac{24}{\sqrt{5}}$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$CF \perp AB$ ve $|BD| = |DC|$ olduğundan $|DF| = |BD| = |DC| = 5$ olur. Ceva teoreminden $\dfrac{|AF|}{|FB|}\dfrac{|BD|}{|DC|}\dfrac{|CE|}{|AE|} = 1$ olur, buradan $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ bulunur, yani $EF \parallel BC$'dir. Tales teoreminden $|AF| = 9$ buluruz. $m(\widehat{FEB}) = m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC})$ olacağından BE açıortaydır. Açıortay teoreminden, bir k reel sayısı için $|AE| = 15k$ ve $|EC| = 10k$ bulunur. $|BE| = \sqrt{15 \cdot 10 - 15k \cdot 10k} = \sqrt{150(1-k^2)}$ olacaktır. AFC'de pisagor teoreminden $25k = \sqrt{9^2+8^2} = \sqrt{145}$ olur. $|BE| = \sqrt{150\left(1 - \dfrac{145}{625}\right)} = \dfrac{24}{\sqrt{5}}$ elde edilir.

26 n bir pozitif tam sayı olmak üzere, n^2 yi tam bölen ancak n'yi tam bölmeyen pozitif tam sayıların sayısı 9 ise, n sayısının pozitif tam bölen sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

n'yi bölen her sayı n^2'yi de böleceğinden n^2yi tam bölen ancak n'yi tam bölmeyen pozitif tam sayıların sayısı bu iki sayının pozitif bölenlerin sayısının farkıdır. $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ ise

$$(2a_1 + 1)(2a_2 + 1)\cdots(2a_k + 1) - (a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1) = 9$$

olacaktır. Sol taraftaki ifade, her değişkeni için artan bir ifadedir. $(2a_i + 1)$ dışında kalan katsayıya A_i ve (a_i+1) dışında kalan katsayıya B_i dersek, sol taraf $A_i(2a_i+1)-B_i(a_i+1) = a_i(2A_i-B_i)+(A_i-B_i)$ olacaktır. $A_i > B_i$ olduğu bariz olduğundan ifade artandır. Dolayısıyla en küçük değerini $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$ iken alır. Bu durumda da $3^k - 2^k$ ifadesine eşittir. $9 \geq 3^k - 2^k$ olması gerektiği için ve sağ taraf çok hızlı büyüdüğü için $k \geq 3$ için eşitsizlik sağlanmayacaktır. Dolayısıyla $k = 1, 2$ olabilir (Hiç asal sayının olmadığı 1 durumunun çözüm olmadığı barizdir).

Eğer $k = 1$ ise $(2a_1 + 1) - (a_1 + 1) = a_1 = 9$ olur. $n = p^9$ formatındadır ve pozitif bölen sayısı 10'dur.

Eğer $k = 2$ ise $(2a_1+1)(2a_2+1) - (a_1+1)(a_2+1) = 3a_1a_2 + a_1 + a_2 = 9$ olur. $a_1, a_2 \geq 2$ için ifadenin 9'dan büyük olacağı barizdir. Dolayısıyla genelliği bozmadan $a_1 = 1$ diyebiliriz. Bu durumda $a_2 = 2$ bulunur. Yani $n = pq^2$ formatındadır ve pozitif bölen sayısı 6'dır.

n'nin pozitif bölen sayısı 2 farklı değer alabilir.

27 $x_1, x_2, \ldots x_5$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{64}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + 8x_5^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{119}{4}$ **b)** $\frac{121}{4}$ **c)** $\frac{251}{8}$ **d)** $\frac{63}{2}$ **e)** 32

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

En küçük değeri istenen ifade S olsun.

32 tane $\dfrac{2}{x_1}$, 16 tane $\dfrac{x_1^2}{16x_2}$, 8 tane $\dfrac{x_2^2}{8x_3}$, 4 tane $\dfrac{x_3^2}{4x_4}$, 2 tane $\dfrac{x_4^2}{2x_5}$, 1 tane $8x_5^2$ için $AO \geq GO$ eşitsizliği yazılırsa $x_1, x_2, \ldots x_5$ terimlerinin eşitsizliğin GO tarafı hesaplanıyorken sadeleşeceği ve AO tarafının $\dfrac{S}{32+16+8+4+2+1}$ olacağı açıktır,

$$\frac{S}{63} \geq \sqrt[63]{\frac{2^{32} \cdot 8}{16^{16} \cdot 8^8 \cdot 4^4 \cdot 2^2}} = \sqrt[63]{\frac{1}{2^{63}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S \geq \frac{63}{2} \text{ bulunur.}$$

Eşitlik durumu için, $\dfrac{2}{x_1} = \dfrac{x_1^2}{16x_2} = \dfrac{x_2^2}{8x_3} = \dfrac{x_3^2}{4x_4} = \dfrac{x_4^2}{2x_5} = 8x_5^2 = k$ olması gerekir, yerine yazılırsa:

$S = 32k + 16k + 8k + 4k + 2k + k = \dfrac{63}{2}$ den $k = \dfrac{1}{2}$ bulunup, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ bulunur.

28 Bir koordinat düzleminin orijininde bir bilye bulunmaktadır. k verilmiş bir pozitif tam sayı olmak üzere, her hamlede eksenlerden biri seçiliyor ve bilye önce seçilen eksene paralel şekilde k birim, sonra diğer eksene paralel şekilde 1 birim öteleniyor. $k = 4, 7, 10, 29, 42$ değerlerinin kaçı için bilye tam sayı koordinatlı istenilen herhangi bir noktaya taşınabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

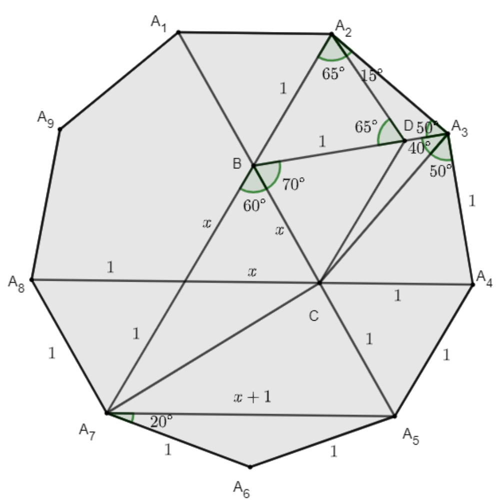
k tek olursa, bilyenin bulunduğu yerin apsis ve ordinatının paritesi aynı olur, her noktaya ulaşılamaz. $k = 2m$ için $(0,0) \to (2m,1) \to (2m-1, 2m+1) \to (2m-2, 1) \to \cdots \to (0,1)$ sol taraf çift iken sağ taraf 1 olacağından yeterince kez yapılırsa sol taraf 0 ve sağ taraf 1 olup elde edilebilir dolayısıyla işlemin simetriği ya da kendisi uygulanarak her tam sayı koordinatlı noktaya ulaşılabilir, verilen k değerlerinden çift olan $4, 10, 42$ için sağlar.

29 Bir $A_1A_2 \ldots A_9$ düzgün dokuzgeninde A_1A_5 ie A_2A_7 doğruları B noktasında, A_1A_5 ile A_4A_8 doğruları da C noktasında kesişiyor. $[A_3B]$ üzerinde $m(\widehat{A_3A_2D}) = 15°$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. A_7BC üçgeninin BCD üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$



Düzgün dokuzgenin bir iç açısı 140°'dir. Açıları yazarsak A_1A_2B, A_4A_5C ve A_5A_7B üçgenleri eşkenar üçgen elde edilir. Dokuzgenin bir kenarına 1 diyelim (Oran bulacağımız için sorun olmaz). $|A_2B| = 1$ olacaktır. Dolayısıyla A_2BA_3 ikizkenardır. Buradan $m(\widehat{A_2A_3B}) = 50°$ elde edilir. Dolayısıyla $m(\widehat{A_2DB}) = 65°$ olacaktır. A_2BD ikizkenar olacağından $|BD| = 1$ olacaktır. Benzer şekilde $m(\widehat{A_4A_3C}) = 50°$ olacaktır. Buradan $m(\widehat{BA_3C}) = 40°$ olur ve BA_3C ikizkenar olacağından $m(\widehat{A_3BC}) = 70°$ elde edilir. $|BC| = x$ dersek $|A_5A_7| = x + 1$ elde edilir. $A_5A_6A_7$ $20 - 140 - 20$ üçgeni olduğundan $\cos 20° = \dfrac{x+1}{2}$ elde edilir.

$$\frac{|A_7BC|}{|BCD|} = \frac{|A_7B||BC| \sin 60°}{|BD||BC| \sin 70°} = \frac{(x+1)\sqrt{3}}{2\cos 20°} = \sqrt{3}$$

bulunur.

30 $p > 2$ bir asal sayı olmak üzere, $2^1, 2^2, \ldots, 2^{p-1}$ sayılarının p ile bölümünden kalanlarının kümesi m elemanlı olmak üzere $2^{m-1} < p$ sağlanıyorsa, p sayısına *güzel asal* diyelim. 2021'den küçük kaç tane güzel asal sayı vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Eğer verilen küme m elemanlı ise $2^m \equiv 1 \pmod p$ olacaktır. Bunun sebebi için mertebe kavramını bilmeniz gerekmektedir (m burada 2'nin p modunda mertebesidir), bu kısmı okuyucuya bırakıyorum. $2^{m-1} \equiv \dfrac{1}{2} \equiv \dfrac{p+1}{2} \pmod p$'dir. $\dfrac{p+1}{2} < p$ olduğundan $2^{m-1} = \dfrac{p+1}{2}$ olacaktır ve buradan $p = 2^m - 1$ elde edilir. Burada $m = 1$ olamaz, ayrıca bileşik sayıda olamaz çünkü $m = ab$ ise $2^a - 1 | 2^m - 1$ olacaktır. Dolayısıyla m asal sayıdır. $2^m - 1 < 2021$ olduğundan $m \leq 10$ elde edilir. Ayrıca asal sayı olduğundan $m = 2, 3, 5, 7$ olabilir. Bu değerler için $p = 3, 7, 31, 127$ bulunur. Şimdi bu değerler için m'nin gerçekten de mertebe olup olmadığını kontrol etmek kaldı ki $2^m \equiv 1 \pmod p$ olduğundan mertebe ya m'dir ya da m'nin bir bölenidir. m asal sayı olduğundan ve 1 mertebe olamayacağından m olmalıdır. Dolayısıyla 4 tane güzel asal sayı vardır.

31 $xy(x - y - 1) = 6$ eşitliğini sağlayan x ve y pozitif gerçel sayıları için $x + y$'nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 4 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{21}$ **d)** $2\sqrt{6}$ **e)** $2\sqrt{7}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Verilen ifadede $x - y - 1 = a$ diyelim. $xy = \dfrac{6}{a}$ olacaktır. $x = a + y + 1$ olduğundan $y^2 + (a+1)y = \dfrac{6}{a}$ olur.

$$(x+y)^2 = (2y + a + 1)^2 = 4y^2 + 4(a+1)y + (a+1)^2 = (a+1)^2 + \frac{24}{a}$$

olduğundan $x + y = \sqrt{(a+1)^2 + \dfrac{24}{a}}$ olacaktır. $xy = \dfrac{24}{a}$ olduğundan $a > 0$'dır. $\sqrt{(a+1)^2 + \dfrac{24}{a}}$ ifadesinin minimum değeri için $(a+1)^2 + \dfrac{24}{a}$ minimum olmalıdır. Türevini alıp 0'a eşitlersek kritik noktasını buluruz,

$$2a + 2 - \frac{24}{a^2} = 0 \Rightarrow a^3 + a^2 - 12 = (a-2)(a^2 + 3a + 6) = 0$$

olur. $a = 2$ tek çözümdür ve yerel minimum olduğu kolayca kontrol edilebilir. $a = 2$ için $x + y = \sqrt{21}$ bulunur. Eşitlik durumunu verelim. $x + y = \sqrt{21}$ için $a = 2$ olduğundan $x = y + 3$ ve $xy = 3$ olacaktır. Yani

$$y(y+3) = 3 \Rightarrow y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$$

elde edilir. $(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{21} + 3}{2}, \dfrac{\sqrt{21} - 3}{2}\right)$ eşitlik durumu bulunur.

Çözüm 2:

Eşitliğin her iki tarafını xy ile bölüp karesini alarak $(x-y)^2 = \left(\dfrac{6}{xy}+1\right)^2$ denklemini elde ediyoruz. Buradan, $(x+y)^2 = \dfrac{36}{x^2y^2} + \dfrac{12}{xy} + 4xy + 1$ geliyor. $xy = a$ olmak üzere, AGO eşitsizliğinden:

$$\frac{\dfrac{36}{a^2} + \dfrac{12}{a} + \left(\dfrac{1}{3} \times 4a\right)}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{36}{a^2} \cdot \frac{12}{a} \cdot \left(\frac{4a}{3}\right)^3} = 4$$

$(x+y) \geq \sqrt{4 \cdot 5 + 1} = \sqrt{21}$ olarak bulunur. Eşitlik ise $\dfrac{36}{a^2} = \dfrac{12}{a} = \dfrac{4a}{3}$ durumunda $a = 3$ yani, $xy = 3$ iken sağlanır. Verilen eşitlikte $xy = 3$ alırsak $x - y = 3$ ve bu iki eşitlikten, $(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{21}+3}{2}, \dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\right)$ sıralı ikilisinin eşitlik durumunu sağladığı görülür.

32 Aslı ve Zehra başlangıçta hiçbir köşesi boyalı olmayan bir düzgün $2n$-gen üzerinde bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor ve oyuncular sırayla hamle yapıyorlar. Sırası gelen oyuncuya boyalı olmayan bir köşeyi ya da çokgenin merkezine göre simetrik olan ve hiçbiri boyalı olmayan iki köşeyi boyuyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $n = 6, 12, 17, 29, 32$ değerleri için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaç tanesi kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Öncelikle verilen problemi şu soruya indirgeyelim: Her birinde 2 top bulunan n adet kutu veriliyor. Aslı ve Zehra, Aslı başlamak üzere herhangi bir kutudan sırayla 1 ya da 2 top alıyorlar. Hamle yapamayan kaybetmiş sayılıyor. $n = 6, 12, 17, 29, 32$ değerlerinden kaç tanesi için Aslı kazanmayı garantileyebilir?

Sırası gelen oyuncu, her kutuda 1 top varsa $n \equiv 0 \pmod 2$ durumunda kaybeder, $n \equiv 1 \pmod 2$ durumunda kazanır. 1 kutuda 2 top, diğerlerinde 1 top varsa $n \equiv 0 \pmod 2$ durumunda 2 top olan kutudan 1 top alarak, $n \equiv 1 \pmod 2$ durumunda 2 top alarak kazanır. 2 kutuda 2 top, diğerlerinde 1 top varsa $n \equiv 0 \pmod 2$ durumunda kaybeder, $n \equiv 1 \pmod 2$ durumunda kazanır: 1 kutuda 2 top, diğerlerinde 1 top varsa sırası gelen kaybeder bu yüzden her biri birer top alır. 2 kutuda 2 top kaldığında sırası gelen oyuncu kaybeder. (1 kutuda 2 top diğerinde 1 top bırakamaz. 2 top alırsa da diğeri 2 top alır ve oyunu sırası gelen kaybetmiş olur.) Benzer yaklaşımlarla tüm kutularda 2 top olduğunda $n \equiv 0 \pmod 2$ durumunda başlayan kaybeder. $n \equiv 1 \pmod 2$ durumunda başlayan kazanır.

30. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2022

1 Bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ düzgün yedigeninde $[A_2A_6]$ doğru parçası üzerinde $|A_6B| + |A_6A_7| = |A_4A_7|$ olacak biçimde bir B noktası alınıyor. $m(\widehat{BA_7A_6})$ kaç derecedir?

a) $90°$ **b)** $\dfrac{540°}{7}$ **c)** $75°$ **d)** $60°$ **e)** $\dfrac{360°}{7}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Eşit uzunluklu köşegenler incelenirse, $|A_4A_7| = |A_2A_6|$ olur. $|A_6A_7| = a$, $|A_6B| = b$ denirse $|A_4A_7| = |A_2A_6| = a+b$ olup $|A_2B| = a$ olur. Böylece, $A_1A_2BA_7$ bir eşkenar dörtgen olur. Ayrıca $|A_7B| = |A_6A_7| = a$ olup A_6A_7B üçgeni ikizkenardır. Düzgün yedigenin bir dış açısı $\dfrac{2\pi}{7}$ olduğundan $m(\widehat{A_1A_2A_6}) = m(\widehat{A_7BA_6}) = m(\widehat{A_7A_6B}) = \dfrac{2\pi}{7}$ dir. Böylece, $m(\widehat{BA_7A_6}) = \dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{540°}{7}$ bulunur.

2 Tüm pozitif tam sayı bölenlerinin çarpımı kendisinin küpü olan kaç iki basamaklı pozitif tam sayı vardır?

a) 4 **b)** 8 **c)** 12 **d)** 16 **e)** 20

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

n sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $v(n)$ ise pozitif bölenlerinin çarpımı $n^{\frac{v(n)}{2}}$'dır. Yani istenilen şartı sağlayan n sayıları için $v(n) = 6$ olmalıdır. n sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ olsun. O halde $v(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1) = 6$ olur. $6 = 2\cdot 3$ olduğundan $n = p^5$ veya pq^2 formatında olmalıdır. Bu formattaki sayılar,

$n = p^5$: sadece 32.

$n = pq^2$: $2\cdot 3^2 = 18$, $2\cdot 5^2 = 50$, $2\cdot 7^2 = 98$, $3\cdot 2^2 = 12$, $3\cdot 5^2 = 75$, $5\cdot 2^2 = 20$, $5\cdot 3^2 = 45$, $7\cdot 2^2 = 28$, $7\cdot 3^2 = 63$, $11\cdot 2^2 = 44$, $11\cdot 3^2 = 99$, $13\cdot 2^2 = 52$, $17\cdot 2^2 = 68$, $19\cdot 2^2 = 76$, $23\cdot 2^2 = 92$.

Toplamda 16 tane sayı vardır.

3 Her a gerçel sayısı için $\lfloor a\rfloor$ ile a sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösteriliyor. x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere, $\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \lfloor 5x\rfloor$ sayısının birler basamağı kaç farklı değer alabilir?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle şunu gözlemleyelim; x sayısını $\lfloor x\rfloor + \{x\}$ olarak yazarsak, $\lfloor x\rfloor$ kısmı tamsayı olduğundan a pozitif tamsayısı için

$$\lfloor ax\rfloor = \lfloor a\lfloor x\rfloor + a\{x\}\rfloor = a\lfloor x\rfloor + \lfloor a\{x\}\rfloor$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \lfloor 5x\rfloor = 10\lfloor x\rfloor + \lfloor 2\{x\}\rfloor + \lfloor 3\{x\}\rfloor + \lfloor 5\{x\}\rfloor$$

Bu da demek oluyor ki kesirli kısmı aynı olan iki sayı için istenilen ifadenin birler basamağı değişmez. Dolayısıyla bizim de x sayını $[0,1)$ aralığında incelememiz yeterlidir.

İkinci olarak dikkat etmemiz gereken kısım $[0,1)$ aralığını hangi parçalara bölüp incelememiz gerektiğidir. Tamdeğer fonksiyonunun grafiği merdiven gibidir ve sonucu sadece yeni bir tamsayıya ulaşıldığında 1 artar.

Dolayısıyla ifadedeki tamdeğer fonksiyonlarının tamsayı olacakları kısımlar bizim kritik noktalarımızdır. Dolayısıyla $[0,1)$ aralığını şu şekilde ayırmalıyız,

$$\left[0,\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)\cup\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)\cup\left[\frac{3}{5},\frac{2}{3}\right)\cup\left[\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right)\cup\left[\frac{4}{5},1\right)$$

Buradaki her aralıktan istenilen ifadenin birler basamağını hesaplayabiliriz. Bu değerler $0,1,2,3,4,5,6,7$ olmak üzere 8 tanedir.

4 n adet özdeş top, 30 kız ve 77 erkek öğrenciye dağıtılacaktır. Bu dağıtım, her öğrenci en az bir adet, herhangi iki kız öğrenci eşit sayıda ve herhangi iki erkek öğrenci eşit sayıda top alacak biçimde tek bir şekilde yapılabiliyorsa, n en fazla kaç olabilir?

a) 321 **b)** 963 **c)** 2695 **d)** 4620 **e)** 6930

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

Problem, K, kızlara dağıtılan top sayısına; E, erkeklere dağıtılan top sayısına denk olmak üzere "$30K + 77E = n$ denkleminin pozitif sayılarda tek çözümü vardır, n'in alabileceği en büyük tam sayı değeri nedir?" problemine denktir.

Şıklarda "Hiçbiri" gibi bir şık olmadığından test tekniğiyle en büyük şıktan denemeye başlarsak,

$n = 6930$ için 6930'un 30'a bölünebildiği açıktır. $30K + 77E = 6930$ ise $E \equiv 0 \pmod{30}$ elde edilir. $6930 = 30 \cdot 231$ olduğu göze alınırsa $(K,E) = (154,30)$ ve $(77,60)$ çözümlerinin olduğu görülür.

$n = 4620$ için 4620'nin 30'a bölünebildiği açıktır. $30K + 77E = 4620$ ise $E \equiv 0 \pmod{30}$ elde edilir. $4620 = 30 \cdot 140$ olduğu göze alınırsa $(K,E) = (77,30)$ tek çözümünün olduğu görülür, dolayısıyla cevap $n = 4620$'dir.

Tabii; bu çözüm, sınav dışında tam bir çözüm değil fakat şıklar, şıkların denenmesi için yazılmış gibi.

Çözüm 2:

$30K + 77E = n$ denkleminde tam sayılarda (K_1, E_1) bir çözüm ise $(K_1 - 77, E_1 + 30)$ ve $(K_1 + 77, E_1 - 30)$ de çözümdür.

Pozitif tam sayılarda tam olarak bir çözüm olması için $K_1 - 77 \leq 0$ ve $E_1 - 30 \leq 0$ olmalı. Bu durumda $\max K_1 = 77$ ve $\max E_1 = 30$ olacaktır.

Bu durumda n en fazla $30 \cdot 77 + 77 \cdot 30 = 4620$ olabilir. mod77 ve mod30 da incelediğimizde $n = 4620$ için tam olarak bir çözüm olduğu görülebilir.

Ayrıca bkz. Bezout Özdeşliği

5 Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait kenarortay ile B açısının iç açıortayı D noktasında dik kesişmektedir. CD doğrusunun $[AB]$ kenarını kestiği nokta E ise $\dfrac{|BC|}{|AE|}$ nedir?

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

D noktasından BC kenarına çizilen paralel AB kenarını L noktasında kessin. Bu durumda DL orta taban ve $m(LDB) = m(LBD)$ olacağından BLD üçgeni ikizkenar olur. $BF = 6k$, $BL = LA = LD = 3k, EL = k$ diyelim. ABF üçgeninde CE kesenine göre Menelaüs teoremini uygulayarak

$$\frac{BE}{AE} = 2$$

bulunur. $BE = 4k$, $AE = 2k$ ve AF kenarortay olduğundan $BC = 12k$ alınırsa

$$\frac{BC}{AE} = 6$$

olarak bulunur.

Çözüm 2:

BN söz konusu açıortay, AM de kenarortay olsun.

D noktası için Ceva teoremi uygulandığında $AE/BE = AN/NC$ olacaktır. Bu da $EN \parallel BC$ demektir. $\angle ENB = \angle NBC = \angle EBN$ olduğu için $EN = EB$.

$\triangle ABM$ de, açıortay yükselik olduğu için $AB = BM$ elde edilir.

$AE = x$ ve $AB = c$ dersek, $BC = 2c$ ve $AE/AB = EN/BC \Rightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{c-x}{2c} \Rightarrow c = 3x$ elde ederiz. Bu durumda $\dfrac{BC}{AE} = \dfrac{6x}{x} = 6$ olur.

$\boxed{6}$ $a_1 = 12$ ve her $n = 1, 2, ..., 2021$ için $a_{n+1} = 12^{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2022} sayısının 67 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 1 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 16 **e)** 25

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Hesaplamalarımız yüksek kuvvetli üslü sayılarla alakalı olduğundan "indeks" kavramını kullanmamız iyi olacaktır (Bu terimin halihazırda kullanımda olan türkçe karşılığı varsa belirtirseniz sevinirim). Bunun için öncelikle ilkel kök bulmalıyız. En küçük ilkel kök adayı 2'den başlarsak $67 - 1 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ olduğundan $2^{\frac{66}{11}}$, $2^{\frac{66}{3}}$ ve $2^{\frac{66}{2}}$ sayılarının 67 modunda 1'e denk olmadığını göstermemiz ilkel kök olması için yeterlidir. Bunlar kolay hesaplamalar olduğundan burada yapmıyorum. 2'nin bir ilkel kök olduğu bulunduğundan 2'ye göre indeks alabiliriz.

$$a_{2022} \equiv 12^{a_{2021}} \equiv x \pmod{67} \iff \text{ind}_2\left(12^{a_{2021}}\right) \equiv \text{ind}_2 x \pmod{66}$$

İndeks kavramı ile logaritma benzer konsepte sahip terimlerdir ve çoğu özelliği ortaktır.

$$\text{ind}_2\left(12^{a_{2021}}\right) \equiv a_{2021}\text{ind}_2(12) \equiv a_{2021}\left(\text{ind}_2(4) + \text{ind}_2(3)\right) \equiv a_{2021}\left(2 + \text{ind}_2(3)\right) \pmod{66}$$

$\text{ind}_2(3)$'ü hesaplamak için normalde $2^k \equiv 3 \pmod{67}$ olan bir k sayısı bulmalıyız ve bu deneyerek hesaplaması uzun süren bir şey olabilir ama $2^6 \equiv 64 \equiv -3 \pmod{67}$ olması ve 2 ilkel kök olduğundan $2^{33} \equiv -1 \pmod{67}$ olmasından dolayı

$$2^{39} \equiv 3 \pmod{67} \implies \text{ind}_2 3 \equiv 39 \pmod{66}$$

Buradan da $\text{ind}_2 x \equiv 41 a_{2021} \pmod{66}$ bulunur. a_{2021} sayısı 12'nin bir kuvveti olduğundan

$$a_{2021} \equiv 0 \pmod{6}$$

$$a_{2021} \equiv 12^{a_{2020}} \equiv 1 \pmod{11}$$

olacaktır. Çin kalan teoremiyle bu iki denkliği birleştirirsek

$$a_{2021} \equiv 12 \pmod{66} \implies \text{ind}_2 x \equiv 41 \cdot 12 \equiv 30 \pmod{66} \implies x \equiv 2^{30} \pmod{67}$$

elde edilir.

$$2^{30} \equiv 64^5 \equiv (-3)^5 \equiv -243 \equiv 25 \pmod{67}$$

bulunur.

Çözüm 2:

$a_{2022} = 12^{a_{2021}} \equiv x \pmod{67}$ diyelim. Fermat teoreminden $12^{66} \equiv 1 \pmod{67}$ olduğundan $a_{2021} = 12^{a_{2020}} \equiv y \pmod{66}$ denkliği ile ilgilenmeliyiz. $66 \equiv 6 \cdot 11$ dir. Burada ilginç bir şey oluşuyor. Her n pozitif tam sayısı için

$$\begin{cases} 12^n \equiv 0 \pmod{6} \\ 12^n \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

olduğundan $12^n \equiv 12 \pmod{66}$ elde ediyoruz. Yani 12 nin modülo 66 içindeki (mertebesi demeyelim ama buna benzer bir terim kullanarak) periyodu 1 dir, diyelim. Kendimden şüphe edip bir de $12^2 \equiv 144 \equiv 2 \cdot 66 + 12 \equiv 12 \pmod{66}$ işlemiyle kontrol ediyorum. Bu da, yine her n pozitif tam sayısı için $12^n \equiv 12 \pmod{66}$ olduğunu gösteriyor. Dolayısıyla, $a_{2021} = 66k + 12$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır.

Böylelikle $a_{2020} = 12^{66k+12} = (12^{66})^k \cdot 12^{12} \pmod{67} \equiv 12^{12} \pmod{67}$ buluruz. $x \equiv 12^{12} \pmod{67}$ problemini çözeceğiz.

$12^2 = 144 \equiv 10 \pmod{67}$

$12^4 \equiv 10^2 \equiv 33 \pmod{67}$

$12^8 \equiv 33^2 \equiv 1089 \equiv 17 \pmod{67}$

$x \equiv 12^{12} = 12^8 \cdot 12^4 \equiv 17 \cdot 33 \equiv 561 \equiv 25 \pmod{67}$ elde edilir.

7 $1 \le a, b \le 2022$ ve $\sqrt{a - \sqrt{a+b}} = b$ koşullarını sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 21 **d)** 36 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$$\sqrt{a+b} = x$$

diyelim.

$$\sqrt{a-x} = b$$

olur. Kare alıp oluşan denklemleri birbirinden çıkartırsak

$$x^2 - b^2 - (b+x) = 0$$

$$(x+b)(x-b-1) = 0$$

ve buradan da

$$x + b = 0, x - b - 1 = 0$$

olur.

Bu eşitliklerden

$$x = \sqrt{a+b} = -b, \sqrt{a+b} = b+1$$

bulunur. b pozitif olduğundan ikinci eşitlik geçerlidir. Bu eşitliğin karesini alarak

$$a = b^2 + b + 1$$

bulunur.

Şimdi b için bir üst sınır bulalım.

$$1 \leq a, b \leq 2022$$

verildiğinden

$$b^2 + b + 1 = (b + 1/2)^2 + 3/4 < 2022$$

olmalı. Biraz denemeyle b nin en çok 44 olabileceği görülebilir.

Sonuç olarak her b için yalnız bir a sayısı bulunabileceğinden verilen denklemi sağlayan 44 tane (a, b) tam sayı ikilisi mevcuttur.

$\boxed{8}$ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere, her biri çift sayıda eleman içerecek ve herhangi iki tanesinin kesişiminde çift sayıda eleman bulunacak şekilde S nin en fazla kaç farklı alt kümesi seçilebilir? (Boş kümede çift sayıda eleman olduğu kabul ediliyor.)

a) 16 **b)** 14 **c)** 12 **d)** 10 **e)** 8

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$0, 2, 4, 6$ elemanlı altkümeler seçebiliyoruz ve $\emptyset$ ile S kümelerinin istenilen şartı diğer kümeler nasıl seçilirse seçilsin sağlayacaktır. Bu yüzden önemli olan 2 ve 4 elemanlı kümelerden seçim yapmaktır.

Eğer 2 farklı 2 elemanlı altkümenin kesişimi boş küme değilse kesişimleri 1 elemanlı olacaktır. Bu yüzden seçilen iki elemanlı kümeler ayrık olmalıdır. Toplamda 6 eleman olduğundan en fazla 3 tane iki elemanlı küme seçilebilir.

Eğer 4 elemanlı 4 tane veya daha fazla altküme seçersek, bunların ikişerli kesişimi 2 eleman içermelidir çünkü ayrık olamazlar (toplamda 6 eleman var fakat iki kümede toplam 8 eleman var). Bu altkümelerden farklı A, B, C, D seçelim ve $A \cap B = \{a, b\}$ diyelim,

$C \cap D = \{a, b\}$ ise bu dört kümenin herhangi ikisinin kesişimi $\{a, b\}$ olmalıdır fakat her kümede a, b dışında 2 eleman daha vardır ve bunlardan toplamda 8 eleman gelir. S kümesi 6 elemanlı olduğundan bunların hepsinin farklı olması imkansızdır.

$C \cap D = \{a, c\}$ $(b \neq c)$ ise a elemanı bu dört kümenin hepsinde vardır. Bu yüzden $A \cap B \cap C \cap D = \{a\}$ olur. Ayrıca C ve D'den tam olarak bir tanesi b'yi içerdiğinden $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| = 2 + 1 = 3$ olur. Benzer şekilde $|A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| = 3$ olur. İçerme-dışarma prensibinden

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum_X |X| - \sum_{X \neq Y} |X \cap Y| + \sum_{X \neq Y, X \neq Z, Y \neq Z} |X \cap Y \cap Z| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

$$= 4 \cdot \binom{4}{1} - 2 \cdot \binom{4}{2} + 6 - 1 = 9$$

olur fakat bu imkansızdır.

Eğer $C \cap D = \{c, d\}$ ise $(\{c, d\} \cap \{a, b\} = \emptyset)$ a ve b elemanlarından biri C'de diğeri D'dedir. Buradan $|A \cap B \cap C| = 1$ bulunur. Benzer şekilde diğer tüm üçlü kesişimler de tek elemanlıdır. İçerme-dışarma prensibinden

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum_X |X| - \sum_{X \neq Y} |X \cap Y| + \sum_{X \neq Y, X \neq Z, Y \neq Z} |X \cap Y \cap Z| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

$$= 4 \cdot \binom{4}{1} - 2 \cdot \binom{4}{2} + 4 - 0 = 8$$

olur ve bu da imkansızdır. Dolayısıyla 4 elemanlı en fazla 3 altküme seçilebilir. Toplamda en fazla $1+1+3+3 = 8$ altküme seçilebilir. Buna örnek olarak,

$$\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}$$

altkümeleri örnek verilebilir.

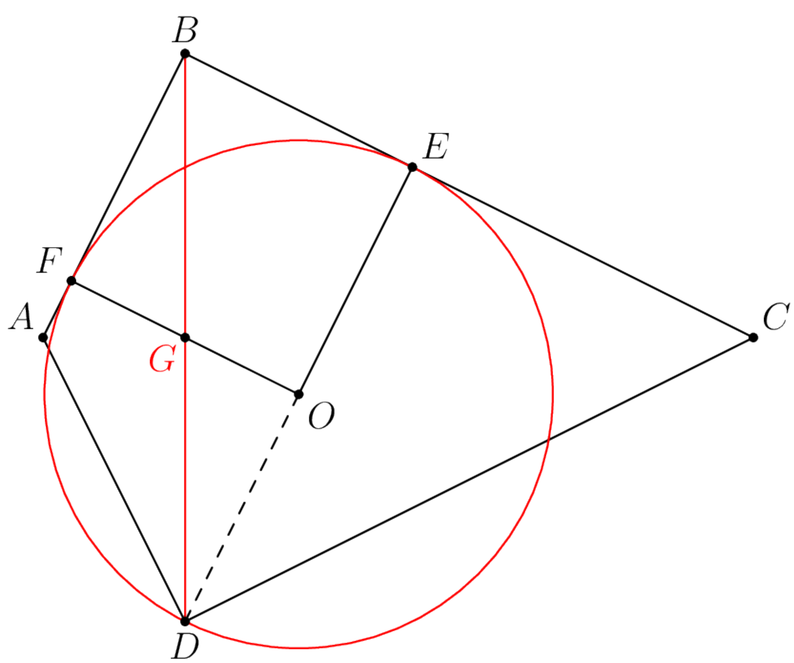
9 $|AB| = 1$, $|BC| = 2$ ve $m(\widehat{ABC}) = 90°$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde D noktası, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği olsun. $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına teğet olan ve D noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{4}{5}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Çemberin merkezi O olsun. Çember, BC ye E noktasında, AB ye F noktasında dokunsun.



$OE = OF = r$ olduğu için $BEOF$ bir karedir.

OF ile BD, G noktasında kesişsin.

$\angle BCA = \angle ABD = \alpha$ ve $\tan\alpha = 1/2$ olduğu için $FG = GO = r/2$ dir.

O dan AB ye çizilen paralel BD ile X noktasında kesişsin. $FG/GO = BF/OX \Rightarrow OX = r$ olduğu için $X = D$ dir. Bu durumda $\angle DOF = 90°$ ve D, O, E doğrusaldır.

$\triangle DEB$ dik üçgeninde $BD^2 = BE^2 + DE^2 = r^2 + (2r)^2 = 5r^2$.

$\triangle ABC$ de hipotenüse ait yükseklik $\dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ olduğu için $BD = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 2r^2 \Rightarrow r = \dfrac{4}{5}$.

10 Kaç $n < 2023$ pozitif tam sayısı için $\dfrac{n^6 + n^4 - n^2 - 1}{2022}$ ifadesi bir tam sayıdır?

a) 8 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 3 **e)** 2

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ ve $n^6 + n^4 - n^2 - 1 = (n^2+1)^2(n-1)(n+1)$'dir. Çin kalan teoreminden $\dfrac{n^6+n^4-n^2-1}{2022}$ sayısının tamsayı olması için gerekli ve yeterli şart

$$(n^2+1)^2(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod 2$$
$$(n^2+1)^2(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod 3$$
$$(n^2+1)^2(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{337}$$

denkliklerinin sağlanmasıdır. İlk iki denkliğin çözümü $n \equiv 1 \pmod 2$ ve $n \equiv 1, 2 \pmod 3$'dir. Son denklemde ise $n^2 \equiv -1 \pmod{337}$ denkliğinin çözümlerine r_1 ve r_2 dersek (337 asalı $4k+1$ formatında olduğundan bu denkliğin 2 farklı çözümü vardır), bu köklerin 1 veya -1'den farklı olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla bu denkliğin çözümleri $n \equiv 1, 336, r_1, r_2 \pmod{337}$ olacaktır.

2 modunda tek çözüm, 3 modunda 2 çözüm, 337 modunda 4 çözüm olduğundan 2022 modunda $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ çözüm olacaktır. Verilen aralıktaki 2022 sayının hepsi farklı kalanlar verdiğinden 8 tanesi ifadeyi tamsayı yapar.

11 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2022}$ pozitif tam sayılar olmak üzere,

$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \cdots + \dfrac{2022}{a_{2022}}$

şeklinde yazılabilen kaç pozitif tam sayı vardır?

a) 100 **b)** 501 **c)** 812 **d)** 1011 **e)** 2022

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Öncelikle ifadenin alabileceği maksimum değeri bulalım. Bunun için a_i sayılarını olabildiğince küçük seçmeliyiz. $(a_1, a_2, \ldots, a_{2022}) = (1, 2, \ldots, 2022)$ için sonuç 2022 çıkar. Dolayısıyla elde edilebilecek en büyük pozitif tamsayı 2022'dir. Şimdi 2022'den küçük her sayıyı elde edebileceğimizi gösterelim.

$0 < a < 2022$ bir tamsayı olsun. Biz öyle a_i'leri öyle seçelim ki $\dfrac{i}{a_i}$ kesri 1 veya $\dfrac{1}{2}$ olsun. k tanesi 1 olsun dersek $2022 - k$ tanesi $\dfrac{1}{2}$ olur. Bu durumda

$$k + \frac{2022-k}{2} = a \implies k = 2a - 2022$$

olur. Yani $a \geq 1011$ ise böyle bir seçim yapabiliriz ve a sayısını elde edebiliriz.

Eğer $0 < a < 1011$ ise k tanesini $\dfrac{1}{2}$, $2022 - k$ tanesini $\dfrac{1}{4}$ olarak seçelim. Bu durumda

$$\frac{k}{2} + \frac{2022-k}{4} = a \implies k = 4a - 2022$$

elde edilir. Yani $a \geq \dfrac{1011}{2}$ ise bu şekilde bir seçim yapabiliriz.

Bu iki durumdan şöyle bir genel durum elde edebiliriz. Eğer $\dfrac{2022}{2^{n+1}} \leq a < \dfrac{2022}{2^n}$ ise $2^{n+1}a - 2022$ adet $\dfrac{1}{2^n}$ seçip, $4044 - 2^{n+1}a$ adet $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ seçersek a sayısına ulaşabiliriz.

Yani 2022'dn küçük veya eşit tüm pozitif tamsayılar bu formatta yazılabilir. Fakat ispatı bitirebilmek için her $0 < a < 2022$ için $\dfrac{2022}{2^{n+1}} \leq a < \dfrac{2022}{2^n}$ olacak şekilde bir n negatif olmayan tamsayısı olduğunu ve yaptığımız kesir seçimlerini sağlayacak a_i sayıları seçebilecek olduğumuzu göstermemiz gerekir. Bunların bariz olduğunu düşünüp üzerine burada uğraşmayacağım. Cevap 2022'dir.

12 21 öğrenciden oluşan bir sınıfta bazı öğrenciler arkadaştır (arkadaşlık karşılıklıdır). Bu sınıfta arkadaş sayıları eşit olan iki arkadaş bulunmuyorsa, bu sınıftaki arkadaş ikililerinin sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 175 **b)** 177 **c)** 179 **d)** 181 **e)** 183

Çözüm:

21 öğrencinin olduğu sınıfta 1 öğrenci diğer 20 öğrenci ile arkadaş olsun.

19 arkadaşı olan en fazla 2 öğrenci olabilir. Bu durumda bu 2 öğrenci birbiri ile arkadaş değildir. Diğerleri ile arkadaştır.

18 arkadaşı olan en fazla 3 öğrenci olabilir. Bu durumda bu 3 öğrenci birbiri ile arkadaş değildir. Diğerleri ile arkadaştır.

17 arkadaşı olan en fazla 4 öğrenci olabilir. Bu durumda bu 4 öğrenci birbiri ile arkadaş değildir. Diğerleri ile arkadaştır.

16 arkadaşı olan en fazla 5 öğrenci olabilir. Bu durumda bu 5 öğrenci birbiri ile arkadaş değildir. Diğerleri ile arkadaştır.

15 arkadaşı olan en fazla 6 öğrenci olabilir. Bu durumda bu 6 öğrenci birbiri ile arkadaş değildir. Diğerleri ile arkadaştır.

$1+2+3+4+5+6=21$ öğrenci oldular.

$\frac{1.20+2.19+3.18+4.17+5.16+6.15}{2} = \frac{20+38+54+68+80+90}{2} = \frac{350}{2} = 175$ arkadaş ikilisi vardır.

Veya

21 öğrenci $\frac{21.20}{2} = 210$ ikili oluşturabilir. Ancak,

2 öğrenci birbiri ile arkadaş değilse $\frac{2.1}{2} = 1$ ikili yok,

3 öğrenci birbiri ile arkadaş değilse $\frac{3.2}{2} = 3$ ikili yok,

4 öğrenci birbiri ile arkadaş değilse $\frac{4.3}{2} = 6$ ikili yok,

5 öğrenci birbiri ile arkadaş değilse $\frac{5.4}{2} = 10$ ikili yok,

6 öğrenci birbiri ile arkadaş değilse $\frac{6.5}{2} = 15$ ikili yok,

Öyleyse $210-1-3-6-10-15 = 210-35 = 175$ arkadaş ikilisi vardır.

13 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenler E noktasında kesişmektedir. $|AD|=6$, $|AE|=3\sqrt{2}$, $|ED|=3$, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC})$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADB})$ ise $|BC|$ nedir?

a) $2\sqrt{6}$ **b)** 5 **c)** $3\sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt{7}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

(AA) dan $\triangle EAD \sim \triangle DAC$. $AE : AD = AD : AC \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow EC = 3\sqrt{2}$.

$\triangle DAB$ de iç açıortay teoreminden $AD : DE = AB : BE = 2$ ve $AB \cdot AD - BE \cdot ED = AE^2$ den $AB = 4$ ve $BE = 2$.

$\triangle BAC$ de kenarortay teoreminden $BC^2 + AB^2 = 2(BE^2 + AE^2) \Rightarrow BC^2 = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}$.

Not: DC nin ve BC nin $\triangle BAD$ de birer dış açıortay olduğunu, dolayısıyla C nin $\triangle BAD$ nin dış merkezlerinden biri olduğunu dikkatli okuyucu fark edecektir.

14 $p > 3$ bir asal sayı olmak üzere, $4p+91$ ve $12p+7$ sayıları da asal sayılar ise aşağıdakilerden hangisi bir asal sayı olabilir?

a) p^2+6 **b)** p^2-4 **c)** $8p+1$ **d)** $2p+11$ **e)** $p+2$

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$p > 3$ verildiğinden dolayı $p \equiv 1, 2 \pmod 3$ olabilir ancak $p \equiv 2 \pmod 3$ olması durumunda $4p + 91 \equiv 0 \pmod 3$ olacağından ve ifade 3'e eşit olmadığından sonuç çıkmaz. Yani $p \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. Bu durumda B, C, E şıklarındaki ifadeler 3'ün katı olurlar ve 3 olamayacaklarından elenirler. Ayrıca $p = 5$'in sağlanmadığı ve 5 modunda incelendiğinde $(4p+91), (12p+7) \not\equiv 0 \pmod 5$ olması gerektiğinden dolayı $p \equiv 2, 3 \pmod 5$ olması gerektiği görülür. Yani $p^2+6 \equiv 4+6 \equiv 0 \pmod 5$ olacaktır. Bu durumda $p^2+6 > 5$ ifadesi de asal değildir.

Geriye sadece $2p+11$ kalır ki $p = 43$ için istenilen durum sağlanır.

15 $x, y, z \geq -2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^3+2 &= 5y+z \\ y^3+2 &= 2z+7x \\ z^3+2 &= -2y-4x \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Verilen denklemleri taraf tarafa toplarsak $x^3+y^3+z^3+6 = 3x+3y+3z$ buluruz. Bu ifadeyi tek tarafta toplarsak

$$(x^3-3x+2)+(y^3-3y+2)+(z^3-3z+2) = \sum (x-1)^2(x+2) = 0$$

elde edilir. $(t-1)^2(t+2)$ polinomu $t \geq -2$ için negatif olamayacağından $t = x, y, z$ için toplamların 0 etmesinin tek yolu her biri için 0'a eşit olmasıdır. Buradan x, y, z sayıları 1 veya -2 bulunur.

Eğer $x = -2$ ise ilk denklemden $5y+z = -6$ bulunur fakat y ve z sayıları da 1 veya -2 olduğundan çözüm gelmez.

Eğer $x = 1$ ise $5y+z = 3$ elde edilir. Bu denklem sadece $(y, z) = (1, -2)$ için sağlanır. Yani sadece $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ çözümü elde edilir. Bu üçlünün diğer denklemleri sağladığı görülebilir.

16 Rakamları toplamı 9 olan pozitif tam sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında baştan 2022. sayının birler basamağı kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Öncelikle en fazla n basamaklı olan ve rakamları toplamı 9 olan kaç sayı olduğuna bakalım. $x_1x_2\dots x_n$ bu şartı sağlayan bir sayıysa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 9$ olacaktır. Burada değişkenlere $x_i \geq 0$ haricinde bir koşul koymaya gerek yoktur çünkü değişkenler 9'u aşamaz. $x_1 \neq 0$ gibi durumları da incelemeye gerek yoktur çünkü bu durumlar bize $n-1$ veya daha az basamaklı rakamları toplamı 9 olan sayıları verir. Yani şartı sağlayan $\binom{n+9-1}{9-1} = \binom{n+8}{8}$ sayı vardır.

$$2002 = \binom{6+8}{8} < 2022 < \binom{7+8}{8} = 5005$$

olduğundan biz 7 basamaklı sayılardan başlayıp 2022. sayıya ulaşmalıyız.

$$2003.\ \text{sayı} \to 1000008$$

$$2004.\ \text{sayı} \to 1000017$$

$$\vdots$$

$$2022.\ \text{sayı} \to 1000224$$

olur. Yani 2022. sayının birler basamağı 4'dür.

17 Bir ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarına sırasıyla D ve E noktalarında teğet olan bir çember $[AB]$ kenarını F ve G noktalarında kesmektedir. F noktası A ile G arasında, $|AB| = 81$, $|BC| = 72$, $|AC| = 63$ ve $|CD| = 45$ ise $|GB| - |AF|$ farkı nedir?

a) 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 5 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Verilenlerden $|AD| = 18$, $|BE| = 27$ olur. $|GB| = x$, $|AF| = y$ diyelim. $|GF| = 81 - x - y$ olacaktır.

B noktasına göre kuvvet yazılırsa

$$27^2 = x \cdot (81 - y)$$

ve C noktasına göre kuvvet yazılırsa

$$18^2 = y \cdot (81 - x)$$

elde edilir. Taraf tarafa çıkarırsak $81(x-y) = 27^2 - 18^2 = 9 \cdot 45 \Rightarrow x - y = 5$ elde ederiz.

18 Ondalık yazılımı $9ABA9$ formunda olan ve 63 ile tam bölünen kaç farklı beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Verilen sayıyı $90009 + 1010A + 100B$ olarak yazalım ve 7 ile 9 modunda inceleyelim (Çin kalan teoreminden 7 ve 9'a bölünmesi yeterlidir).

$$9ABA9 \equiv 2A + B \equiv 0 \pmod 9$$

$$9ABA9 \equiv 3 + 2A + 2B \equiv 0 \pmod 7 \implies A + B \equiv 2 \pmod 7$$

A ve B rakam olduğundan $0 \leq 2A+B \leq 27$ ve $0 \leq A+B \leq 18$ olabilir. Yukarıda bulduğumuz denkliklerden $A+B$ ifadesinin $2, 9, 16$ olabileceğini, $2A+B$ ifadesinin ise $0, 9, 18, 27$ olabileceğini görebiliriz. $2A+B=27$ olursa A en az 11 olmalıdır ki bu imkansızdır. $2A+B=0$ olursa A negatif olmalıdır.

Eğer $2A+B=18$ ise $A+B$ ifadesi 2 veya 16 olamaz ve 9 değerleri için $(A,B)=(9,0)$ elde edilir.

Eğer $2A+B=9$ ise $A+B$ ifadesi yine 2 veya 16 olamaz. 9 değeri için $(A,B)=(0,9)$ elde edilir. Toplamda 2 tane şartı sağlayan beş basamaklı sayı vardır.

19 n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=87$ ve $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=51$ eşitliklerini sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ gerçel sayıları bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right) \geq \left(x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n\right)^2$$

$$\implies 87 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq 51^2 \implies n(n+1)(2n+1) \geq \frac{5202}{29} \implies n(n+1)(2n+1) \geq 180$$

Eşitsizliğin sol tarafı artan olduğundan ve $n=4$ için 180'e eşit olduğundan $n \geq 4$ olmalıdır.

$n=4$ için $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,3,5,7)$ sağlar.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

İkinci eşitliğin 2 katını alıp taraf tarafa çıkarma yapılırsa

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i-i)^2-i^2=-15$$

elde edilir. Buda

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i-i)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-15$$

şeklinde yazılabilir. Yani

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq 15$$

olur. Buradan $n \geq 4$ olur. Örnek durum olarak $(2,3,5,7)$ verilebilir.

20 Başlangıçta koordinat düzleminde $(1,1)$ noktası kırmızıya boyalıdır. Her adımda kırmızıya boyalı bir (x,y) noktası için hem $(x+2, y+1)$ noktası hem de $(2x+y, 2x)$ noktası kırmızıya boyanıyor. Buna göre $(100,60)$, $(70,70)$, $(150,100)$ ve $(120,200)$ noktalarından kaç tanesi sonlu adım sonunda kırmızıya boyanmış olabilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Her adımda x ve y koordinatlarının pozitif olduğunu rahatça görebiliriz. Eğer $x \geq y$ ise $x+2 > y+1$ ve $2x + y > 2x$ olacaktır. Dolayısıyla başlangıç noktası hariç tüm kırmızı noktalar $x = y$ doğrusunun altında olacaktır. Bu yüzden $(120, 200)$ ve $(70, 70)$ noktaları kırmızı olamaz.

$$x + y \equiv (x+2) + (y+1) \equiv (2x+y) + 2x \pmod 3$$

olduğundan kırmızı noktalarının koordinatlarının toplamı 3'e bölündüğünden $1+1=2$ kalanı vermelidir. Dolayısıyla $(100, 60)$, $(150, 100)$ noktaları kırmızı olamaz. Verilen hiçbir nokta kırmızı olamaz.

$\boxed{21}$ Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olsun. $[AC]$ köşegeni üzerinde bir E noktası, $[AE]$ üzerinde ise bir F noktası alınıyor. $s(\widehat{DEC}) = s(\widehat{DFM}) = 90°$, $|AF| = 4$ ve $|EC| = 18$ olduğuna göre $ABCD$ dikdörtgeninin alanı nedir?

a) 156 **b)** 192 **c)** 250 **d)** 312 **e)** 390

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

$DFMC$ dörtgeni, $\angle DFM + \angle DCM = 180°$ olduğu için bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $\angle MDC = \angle CFM = \alpha$.

$\angle EFD = 90° - \alpha$ ve $\angle FDE = \alpha$ dır.

$\triangle MAB \cong \triangle MDC$ olduğu için $\angle MAB = \angle MDC = \alpha$.

$\angle FDA = \beta$ olsun. $\angle EDA = \angle BAC = \alpha + \beta$, dolayısıyla $\angle MAC = \beta$ olacaktır.

(AA) dan $\triangle BAC \sim \triangle EDA$ olduğu için, bu üçgenlerin kenarortayları da benzerdir. Bu durumda AM kenarortayı ile BA, α lık bir açı yaptığı için, DF de $\triangle EDA$ da kenarortaydır. Bu durumda $AF = FE = 4 \Rightarrow AE = 8$ olur.

Öklit'ten $DE^2 = AE \cdot EC \Rightarrow DE^2 = 8 \cdot 18 \Rightarrow DE = 12$

$[ADC] = \dfrac{12 \cdot (8+18)}{2} \Rightarrow [ABCD] = 12 \cdot 26 = 312$ dir.

$\boxed{22}$ p bir asal sayı olmak üzere, $p \mid a - b^2$, $p \mid b - a^2$ ve $p \nmid a - b$ olacak şekilde a ve b tam sayıları varsa p ye tuhaf asal sayı diyelim. 73, 79, 83, 89, 97 asal sayılarından kaç tanesi tuhaftır?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle verilen ifadeleri p modunda düzenleyelim.

$$a \equiv b^2 \equiv \left(a^2\right)^2 \equiv a^4 \pmod p$$

olacaktır. Eğer $(a, p) \neq 1$ ise $a \equiv b \equiv 0$ olacağından istenilen şartlar sağlanmaz. Eğer $a \equiv 1$ ise de benzer şekilde $a \equiv b \equiv 1$ olacaktır. Buradan

$$a^4 - a \equiv a(a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod p \implies a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod p$$

elde edilir. Benzer şekilde b de $b^2 + b + 1 \equiv 0 \pmod p$ denkliğini sağlar. İfadeleri tamkareye dönüştürürsek (verilen asallardan dolayı p tek olsun diyebiliriz),

$$(2a+1)^2 \equiv (2b+1)^2 \equiv -3 \pmod p$$

elde edilir. Burada a ve b'nin farklı seçilebileceğini ekstradan göstermeye gerek yok çünkü a'yı $0, 1$'den farklı olduğunu kabul ettiğimizden $a \not\equiv a^2$ olacaktır. Yani -3 karekalan olsa yeterlidir. Verilen asallar 3'ten büyük olduğundan $(p, 3) = 1$'dir. Buradan

$$\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right) \implies \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)$$

Yani -3 karekalan olması için $p \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. Buradan da şartı sağlayan asalların $73, 79, 97$ olduğunu görürüz.

23 Her x gerçel sayısı için $(x-27)P(3x) = (27x-27)P(x)$ koşulunu sağlayan ve sabit olmayan $P(x)$ polinomunun gerçel kökleri toplamı nedir?

a) 30 **b)** 33 **c)** 36 **d)** 39 **e)** 42

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Verilen denklemde $x = 27$ ve $x = 1$ yazarsak $P(27) = 0$ ve $P(3) = 0$ elde edilir. $x = 3$ yazarsak $P(9) = 0$ elde edilir. Yani $3, 9, 27$ sayıları polinomun köklerindendir. Eğer $P(x) = Q(x)(x-3)(x-9)(x-27)$ olacak şekilde bir Q polinomu tanımlayıp denklemde yerine yazarsak $Q(3x) = Q(x)$ elde edilir. Eğer $Q(1) = a$ dersek $a = Q(1) = Q(3) = Q(3^2) = \cdots$ olur. Yani $Q(x) - a$ polinomunun sonsuz tane kökü olur, yani $Q(x) \equiv a$ olmalıdır. Buradan $P(x) = a(x-3)(x-9)(x-27)$ elde edilir. P sabit olmadığından $a \neq 0$'dır ve tüm kökleri $3, 9, 27$ olur ve toplamları 39'dur.

24 5×5 bir satranç tahtasının her birim karesine bir sayı, her satırda ve her sütunda en fazla 3 farklı sayı olacak şekilde yazılmıştır. Buna göre, bu tahtanın tamamında en fazla kaç farklı sayı yer alabilir?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Çözüm:

11 sayının yerleştirilebildiğine örnek verebiliriz.

Önce $1, 2, 3$ sayılarını şekildeki gibi yerleştirelim.

1	1	1		
1	1	1		
1	1	3	2	2
		2	2	2
		2	2	2

Sonra kalan boş yerlerin her birine $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ sayılarından birer tane gelecek şekilde yerleştirelim.

1	1	1	4	5
1	1	1	6	7
1	1	3	2	2
8	9	2	2	2
10	11	2	2	2

11 den daha fazla sayı yerleştirilemeyeceğini de ispatlamalıyız. Bu kısmı, yayınlanan resmi çözüm kitapçığından aktarıyorum:

Her satırda en fazla 2 farklı sayı varsa, tahtada en fazla $5 \cdot 2 = 10$ farklı sayı olabilir. Sadece bir satırda 3 farklı sayı olsun. Kalan 4 satırın her birinde, bu 3 sayıdan en az bir tanesi bulunuyorsa, tahtada en fazla $3 + 4 \cdot 2 = 11$ farklı sayı olabilir. Son olarak, bir satırda a, b, c bir diğer satırda bu sayılardan farklı d, e, f

sayılarının bulunduğu durumu inceleyelim. Bu durumda, her sütunda bu 6 sayıdan farklı en fazla bir yeni sayı olabilir ve buna göre, tahtada en fazla $6 + 5 \cdot 1 = 11$ farklı sayı olur.

25 Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına indirilen dikmenin ayağı E noktasıdır. $|AD| = 1$, $|DC| = 2$ ve $2|AB|^2 + |BC|^2 = 18$ ise $|AB| - |DE|$ farkının alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** 1

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Stewart'tan $BD^2 = \dfrac{2AB^2 + BC^2}{3} - 2 = 4$.

$DE = x$ ve $AB = c$ olsun.

Pisagor'dan $BE^2 = CE^2 = 4 - x^2$ ve $BC^2 = 4(4 - x^2) = 16 - 4x^2$.

$2c^2 + 16 - 4x^2 = 18 \Rightarrow c = \sqrt{2x^2 + 1}$.

$y = c - x = \sqrt{2x^2 + 1} - x$ sayısının en küçük değerini arıyoruz.

Türev kullanarak, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y_{\min} = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ elde edilir.

Çözüm 2:

y nin en küçük değerini türev kullanmadan aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$y = \sqrt{2x^2 + 1} - x = \sqrt{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - x \geq \sqrt{0 + \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Çözüm 3:

$c^2 = 2x^2 + 1$ den devam edelim.

$AO \geq GO$ uygularsak: $c^2 = 2x^2 + 1 \geq 2x\sqrt{2}$

$2c^2 = c^2 + 2x^2 + 1 \geq 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{2}$

$(c\sqrt{2})^2 \geq (x\sqrt{2} + 1)^2$

$c\sqrt{2} \geq x\sqrt{2} + 1$

$c - x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Eşitlik $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ iken sağlanır.

Kaynak: AoPS

26 $x^3 - y^3 = 9^z + 60$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

a) 12 **b)** 8 **c)** 6 **d)** 4 **e)** 2

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Verilen eşitliği 9 modunda inceleyelim. Eğer $z < 0$ ise eşitliğin sol tarafı tamsayı iken sağ tarafı olmaz. Eğer $z > 0$ ise

$$x^3 - y^3 \equiv 60 \equiv 6 \pmod 9$$

fakat herhangi bir tamsayının küpü 9 modunda sadece $0, 1, 8$ kalanlarını verir, dolayısıyla $x^3 - y^3$ ifadesi 6 kalanı veremez.

Geriye sadece $z = 0$ durumu kalır. Denklem $x^3 - y^3 = 61$ olur. Öncelikle burada $x > y$ olduğunu görelim.

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 61$$

olduğundan $x - y = 1$ veya $x - y = 61$ olabilir.

i) $x - y = 1$ ise $x^2 + y^2 + xy = 61$'dir. $x = y + 1$ yazarsak

$$(y+1)^2 + y^2 + y(y+1) = 3y^2 + 3y + 1 = 61 \implies y^2 + y - 20 = (y+5)(y-4) = 0$$

Buradan $(x, y, z) = (-4, -5, 0)$ ve $(5, 4, 0)$ çözümleri elde edilir.

ii) $x - y = 61$ ise $x^2 + xy + y^2 = 1$ elde edilir. $x = y + 61$ yazarsak

$$(y+61)^2 + y(y+61) + y^2 = 3y^2 + 183y + 61^2 = 1 \implies y^2 + 61y + 1240 = 0$$

fakat bu denklemin diskriminantı $\Delta = 61^2 - 4 \cdot 1240 = -1239 < 0$ olduğundan çözümü yoktur.

Yani denklemin toplamda 2 adet tamsayı çözümü vardır.

$\boxed{27}$ $x + y \neq 0$ koşulunu sağlayan x ve y gerçel sayıları için $4x(x+2y) + \left(\dfrac{1-y^2}{x+y}\right)^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -8 **b)** -6 **c)** -4 **d)** -2 **e)** 0

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen ifadede $x+y$ yerine x yazarsak herhangi bir şey değişmez. Sadece $x \neq 0$ için $4(x^2 - y^2) + \left(\dfrac{1-y^2}{x}\right)^2$ ifadesinin minimum değerini bulmalıyız. Bu ifadede x'i sabitlersek ve y'ye bağlı bir fonksiyon olarak düşünürsek

$$f(y) = 4x^2 - 4y^2 + \frac{(1-y^2)^2}{x^2} \implies f'(y) = -4y\left(\frac{2x^2 + 1 - y^2}{x^2}\right)$$

olur. Yani f fonksiyonunun extremum noktaları $y = -\sqrt{2x^2+1} < -1$, $y = 0$ ve $y = \sqrt{2x^2+1} > 1$ olacaktır. $y = 1$ koyarak $f'(1) = -8 < 0$ olduğunu ve $f'(y)$ fonksiyonunun $\left(0, \sqrt{2x^2+1}\right)$ aralığında negatif olduğunu çıkartabiliriz. Bu bilgiyle tablo çıkartırsak $y = \sqrt{2x^2+1}$ ve $y = -\sqrt{2x^2+1}$ noktalarında yerel minimum, $y = 0$'da ise yerel maksimum olduğunu buluruz. Yani ifademizin minimum değerini $y^2 = 2x^2 + 1$ koyarak bulabiliriz (Yerel minimumun en küçük değeri vermesi için fonksiyonun, y artı veya eksi sonsuza giderken yerel minimum değerlerinden daha düşük değerlere gitmemelidir. Bunu göstermiyorum çünkü böyle bir durum olsaydı zaten soru hatalı olurdu.)

$$f(\sqrt{2x^2+1}) = f(-\sqrt{2x^2+1}) = 4(x^2 - 2x^2 - 1) + \left(\frac{1 - 2x^2 - 1}{x}\right)^2 = -4$$

Yani ifadenin minimum değeri -4'dür.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{C}$

İfadeyi açarsak

$$4x^2+8xy+(\frac{1-y^2}{x+y})^2$$

elde edilir. $4y^2+4$ ekleyip çıkaralım.

$$4x^2+8xy+4y^2+4-4y^2+(\frac{1-y^2}{x+y})^2-4$$

elde edilir. Buda

$$(2x+2y+\frac{1-y^2}{x+y})^2-4$$

olur. Bu ifadenin ≥ -4 olduğu açıktır. Eşitlik durumu $(x,y)=(-1,3)$ olduğunda sağlanır.

28 11×11 satranç tahtasının birim karelerinden oluşan n tane 2×2 karenin herhangi ikisinin en fazla bir ortak birim karesi varsa n en fazla kaç olabilir?

a) 44 **b)** 46 **c)** 48 **d)** 50 **e)** 52

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

11×11 tahtayı $1,2,3,4$ numaralı renklerle aşağıdaki gibi boyayalım:

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

2×2 türündeki bir kare içinde bu dört renkten her biri birer kez görülür. 4 lerin sayısı 25 tir. Belli bir 4'ün olduğu birim kareyi paylaşan en fazla 2 tane 2×2 türünde kare olabilir. Böylece, istenen özellikteki kareleri sayısı $2\cdot 25=50$ den fazla olamaz. $n=50$ durumuna örnek olarak 25 er tane

1	2
3	4

ve

4	3
2	1

biçimindeki kareleri verebiliriz.

29 Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB|=|AC|=3\sqrt{2}$ ve $|BC|=2\sqrt{2}$ dir. $[BC]$ kenarının orta noktası D ve B noktasından $[AC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E noktasıdır. Buna göre D den geçen ve AC doğrusuna E noktasında teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\frac{5}{4}$ **b)** 1 **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{4}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$

Çemberin merkezini O ile gösterelim ve A ve D noktalarını ve O ve D noktalarını birleştirelim. $OD = OE = r$ olsun. ABC ikizkenar olduğundan AD doğrusu BC tabanına dik olur. D ve E noktalarını birleştirirsek diklikten dolayı BDE ve DEC üçgenleri $BD = DE = DC = \sqrt{2}$ birim olan ikizkenar üçgenler olur. $m(\widehat{DAC}) = \alpha, m(\widehat{ACD}) = \theta$ dersek $m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{BED}) = \alpha$ ve $m(\widehat{EDC}) = 2\alpha$ olur. Buna göre ADC ve BEC üçgenlerin benzerliğinden

$$EC/DC = BC/AC$$

ve

$$\frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

eşitliğinden $EC = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ bulunur. Şimdi EDC üçgeninde kosinüs teoremi uygularsak

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 4 - 4\cos 2\alpha$$

eşitliğinden $\cos 2\alpha = 7/9$ bulunur. Şimdi de DOE üçgeninde kosinüs teoremi yazarak

$$2 = 2r^2 - 2r^2\cos(180^\circ - 2\alpha)$$

eşitliğinden $r = 3/4$ bulunur.

Çözüm 2:

Çemberin merkezi $[BE]$ üzerinde, $OE = OD$ olacak şekilde alınan, bir O noktasıdır.
$\triangle BEC$ dik üçgeninde $BD = DC$ olduğu için $ED = BD = \sqrt{2}$ dir.
$\angle DAE = \angle EBC = \angle BEC = \angle ODE = \alpha$ dır.
$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 16 \Rightarrow AD = 4$.
DE nin orta noktası M olsun. $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DM}{OD} \Rightarrow \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{OD} \Rightarrow OD = \dfrac{3}{4}$.
Not: Bu sorunun benzeri Ortaokul 2. Aşama 1997/2 de sorulmuş. Söz konusu sorunun AoPS forumlarında çözümü mevcuttur.
Yine benzer bir soru, AoPS forumunda yakın zamanda soruldu.

Çözüm 3:

Yanıt: $\boxed{C}$

Bahsi geçen çember BC ile ikinci defa F noktasında kesişsin. $AE = \dfrac{7\sqrt{2}}{3}$ ve $EC = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tür. Buna göre çemberin C'ye göre kuvvetinden $\dfrac{8}{9} = CF.\sqrt{2} \iff CF = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ olur. Yani $DF = \dfrac{5\sqrt{2}}{9}$ dur. Benzer şekilde $CE/CD = EF/ED$ olduğundan $EF = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tür. $\sin(\angle EDF)$ yi bulalım:

$$[DEC] = \frac{[BEC]}{2} = \frac{[ABC]}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sin(\angle EDF)$$

O zaman $\sin(\angle EDF) = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ ve $2R = \dfrac{EF}{\sin(\angle EDF)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.\dfrac{9}{4\sqrt{2}} = 3/2$ olur, yarıçap $R = 3/4$ tür.

30 m ve n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere, $2m^2+3m-44=3p^n$ eşitliğini sağlayan kaç (m,n,p) üçlüsü vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

Cevap: 3.

$2m^2+3m-44=(2m+11)(m-4)\cdot m-4=k$ olsun. Bu durumda k bir pozitif tam sayıdır ve $k(2k+19)=3p^n$ olur. obeb$(k,2k+19)=1$ veya 19 olmalı. obeb$(k,2k+19)=1$ olsun. O zaman $k=1$ ve $2k+19=3p^n$ veya $k=3$ ve $2k+19=p^n$ olmalı. İlk durumda $p=7$ ve $n=1$ olur iken ikinci durumda $p=5$ ve $n=2$ olur. O halde obeb$(k,2k+19)=1$ iken $(5,1,7)$ ve $(7,2,5)$ çözümleri elde edilir.

obeb$(k,2k+19)=19$ olsun. Bu durumda $p=19$ olmalı ve $k=19\cdot r$ dersek $r(2r+1)=3\cdot 19^{n-2}$ olur. O zaman $n\geq 2$ bulunur. $n=2$ ise, $r=1$ olur ve buradan $(23,2,19)$ çözümü elde edilir. $n\geq 3$ ise, $1<r<2r+1, 3<19^{n-2}$ ve obeb$(r,2r+1)=1$ olduğu için $r=3$ ve $2r+1=19^{n-2}$ olmalı. Ancak bu durumda n tam sayı olmaz ve çözüm gelmez.

Sonuç olarak tüm çözümler $(5,1,7)$, $(7,2,5)$ ve $(23,2,19)$ üçlüleridir.

Kaynak: Tübitak 30. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2022

31 Bir $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu tüm x ve y pozitif rasyonel sayıları için

$$f(x)+f(y)-f(x+y)=\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}$$

eşitliğini sağlıyor. $f(x)$ fonksiyonunun aldığı en küçük değer 1 ise $f(1)$ nedir?

a) 1 **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 2

Çözüm:

$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$ olsun.

$$\begin{aligned} f(x)+f(y)-f(x+y) &= g(x)+\frac{1}{x}+g(y)+\frac{1}{y}-g(x+y)-\frac{1}{x+y} \\ &= g(x)+g(y)-g(x+y)+\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)} \end{aligned}$$

Buradan da $g(x)+g(y)=g(x+y)$ elde edilir. (bkz.Cauchy Fonksiyonel Denklemi)

İddia: $g(x)=cx$.

İspat:

$$g(2x)=g(x)+g(x)=2g(x)$$

$$g(3x)=g(2x)+g(x)=3g(x)$$

$$g(nx)=ng(x) \quad ,\forall n\in\mathbb{Z}^+ \tag{1}$$

(1) de $x\to x/n$ şeklinde değişken değiştirelim

$$g(x)=ng\left(\frac{x}{n}\right) \tag{2}$$

(1) de $x \to x/n$ ve $n \to m$ şeklinde değişken değiştirelim

$$g\left(\frac{m}{n}x\right) = mg\left(\frac{x}{n}\right) = m\frac{g(x)}{n} = \frac{m}{n}g(x) \tag{3}$$

$q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ ve $g(1) = c$ olsun. $x = 1$ yazarsak

$$g(qx) = qg(x)$$

buradan da

$$g(q) = qg(1) = qc \Rightarrow g(x) = cx$$

elde ederiz.

■

Bu durumda $f(x) = cx + \dfrac{1}{x}$ elde ederiz.

$AO \geq GO$ dan $f(x) = cx + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{c}$ fonksiyonu en küçük değerini $cx = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ de alır. $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right) = 2\sqrt{c} = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{4}$.

$f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(1) = \dfrac{5}{4}$ elde edilir.

32 Aslı ve Zehra, başlangıçta boş olan 30×30 bir satranç tahtası üzerinde sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor. Aslı her hamlesinde, kırmızı bir bilye içeren bir birim kareyle ortak bir kenarı bulunmayan boş bir birim kareye bir kırmızı bilye yerleştiriyor. Zehra ise her hamlesinde, boş bir birim kareye bir beyaz bilye yerleştiriyor. Oyunculardan herhangi biri hamle yapamazsa oyun sonlandırılıyor. Aslı her zaman en az k tane kırmızı bilye yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, k en fazla kaç olabilir?

a) 200 **b)** 225 **c)** 250 **d)** 275 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

30x30 birim karesi olan satranç tahtasını 2x2 birimlik karelere bölersek 225 adet

2x2 birimlik kareler oluşur.

Bir adet 2x2 birimlik kareye en fazla iki kırmızı bilye yerleştirilebilir.

İki kırmızı bilye yerleştirilmiş 2x2 birimlik karenin diğer iki adet boş birim karesine

Zehra'nın beyaz bilye yerleştirmesi, Aslının toplam yerleştireceği kırmızı bilye sayısını artırır.

Dolayısı ile Zehra bunu yapmayacaktır.

Bir kırmızı bilye yerleştirilmiş 2x2 birimlik karede kırmızı bilye yerleştirilmiş 1x1 birimlik

karenin kenarları ile değil köşesi ile ortak olan 1x1 birimlik kareye Zehra bir beyaz bilye

yerleştirebilir. Diğer iki adet 1x1 birim kareye Zehra'nın beyaz bilye yerleştirmesi Aslının

toplam yerleştireceği kırmızı bilye sayısını artırır.

Dolayısı ile Zehra bunu da yapmayacaktır.

Eğer bir 2x2 birimlik kareye bir kırmızı biye yerleştirilemiyorsa tamamına beyaz bilye

yerleştirilmiş demektir.

a tane 2x2 birimlik kareye 2 tane kırmızı bilye,

b tane 2x2 birimlik kareye 1 tane kırmızı bilye ve

c tane 2x2 birimlik kareye 0 tane kırmızı bilye yerleştirilsin.

$a + b + c = 225$

Eğer Aslı için yapacak hamle kalmadıysa;

4c hamlede c tane 2x2 birimlik karenin her birinin tamamına beyaz bilye yerleştirilmiştir.

2b hamlede b tane 2x2 birimlik kareye b tane kırmızı b tane beyaz bilye yerleştirilmiştir.

2a hamlede a tane 2x2 birimlik kareye 2a tane kırmızı bilye yerleştirilmiştir.

Aslının ve Zehra'nın hamle sayıları eşit olduğuna göre;

$2a + b = b + 4c$ ve $a = 2c$ bulunur.

Öyleyse $a + b + c = 225$ ve $a + b + \frac{a}{2} = 225$

$3a + 2b = 450$ olur. Burada $a = 2m$ ve $b = 3n$ olmak üzere,

$m + n = \frac{450}{6} = 75$ bulunur.

Kırmızı bilyelerin sayısı $2a + b = 4m + 3n = 3(m + n) + m$ olur.

$2a + b = 3(m + n) + m = 3.75 + m = 225 + m \geq 225$ bulunur.

$m = 0$ iken eşitlik oluşur. $m = 0$ ise $a = 0$ dır. Dolayısı ile $c = 0$ dır.

Yani $b = 225$ olur.

Aslı her zaman 225 kırmızı bilye yerleştirmeyi garantileyebilir.

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2023

1 $s(\widehat{B}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, M den AC ye çizilen dikmenin BC ile kesişimi N olsun. $|BN| = 8$ ve $|CN| = 17$ ise $|MN|$ kaçtır?

a) 10 **b)** 13 **c)** 15 **d)** 17 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

MN'nin AC'yi kestiği nokta D olsun. Menelaus teoreminden

$$\frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} \cdot \frac{|MA|}{|MB|} = 1 \implies \frac{|CD|}{|DA|} = \frac{17}{8}$$

elde edilir. $|CD| = 17k$ ve $|DA| = 8k$ diyelim. ADM ve NBM üçgenlerinin benzerliğinden, eğer $|MN| = x$ dersek, $|MA| = |MB| = xk$ ve $|MD| = xk^2$ elde edilir. Yine Menelaus teoreminden,

$$\frac{|AD|}{|AC|} \cdot \frac{|CB|}{|BN|} \cdot \frac{|MN|}{|MD|} = \frac{9}{25k^2} = 1 \implies k = \frac{3}{5}$$

elde edilir. NBM üçgeninin kenarları $8 - \frac{3x}{5} - x$ olduğundan Pisagor teoreminden $x = 10$ bulunur. Ayrıca $\frac{3}{5}$ oranından dolayı aslında üçgenin $6 - 8 - 10$ üçgeni olduğu da görülebilir. Dolayısıyla $|MN| = 10$'dur.

2 $3^{p^2+p+1} + 7^{p^2+p+1}$ sayısının p ile bölünmesini sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Fermat teoreminden $3^p \equiv 3 \pmod p$ ve $7^p \equiv 7 \pmod p$'dir. Burada p için asallık dışında herhangi bir kısıtlama yoktur.

$$3^{p^2+p+1} \equiv (3^p)^p \cdot 3^p \cdot 3 \equiv 3^p \cdot 3 \cdot 3 \equiv 27 \pmod p$$
$$7^{p^2+p+1} \equiv (7^p)^p \cdot 7^p \cdot 7 \equiv 7^p \cdot 7 \cdot 7 \equiv 343 \pmod p$$
$$\implies 3^{p^2+p+1} + 7^{p^2+p+1} \equiv 27 + 343 \equiv 370 \pmod p$$

olacağından $p \mid 370$ olmalıdır. $370 = 2 \cdot 5 \cdot 37$ olduğundan $p = 2, 5, 37$ olabilir. Bu değerler için sağlama yapmamıza gerek yoktur çünkü yukarıdaki işlemlerin aynısından çıkacaktır.

3 x bir gerçel sayı olmak üzere, $4^x + 7^x + 8^x + 10^x + 14^x + 15^x = 17^x + 19^x$ denklemini sağlayan kaç tane x sayısı vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Sonsuz çoklukta

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x < 0$ ise $17^x < 4^x$ ve $19^x < 7^x$ olacağı için $17^x + 19^x < 4^x + 7^x + 8^x + 10^x + 14^x + 15^x$ olacaktır. Yani denklemin negatif çözümü yoktur.

$x = 0$ ın sağlamadığı kolayca görülür.

$x > 0$ olsun.

$17^x + 19^x = a^x$ olsun.

$19^x < 17^x + 19^x = a^x$ olduğu için $19 < a$ dır. (Her x e karşılık bir $a > 19$ gerçel sayısı bulunur. Başka bir deyişle; a, x'e bağlı bir fonksiyondur.)

$4^x + 7^x + 8^x + 10^x + 14^x + 15^x = a^x$

$f(x) = \left(\frac{4}{a}\right)^x + \left(\frac{7}{a}\right)^x + \left(\frac{8}{a}\right)^x + \left(\frac{10}{a}\right)^x + \left(\frac{14}{a}\right)^x + \left(\frac{15}{a}\right)^x$ olsun.

$y = f(x) = 1$ denkleminin pozitif çözümlerini arıyoruz.

$0 < b < a$ ve $x > 0$ olmak üzere $g(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ fonksiyonu azalandır (burada a ve b'nin sabit sayı olmasına gerek yoktur). O halde $f(x)$ de azalandır.

$y = f(x)$ azalan fonksiyonu ile $y = 1$ sabit fonksiyonu en fazla bir noktada kesişebilir.

$f(1) = \frac{4+7+8+10+14+15}{17+19} = \frac{58}{36} > 1$ ve yeterince büyük $x > x_0$ ler için $f(x) < 1$ olduğu için $f(x) = 1$ denkleminin tam olarak 1 çözümü vardır.

Özel olarak bu denklemin çözümü $x = 2$ dir. bkz. Wolfram Alpha

Çözüm 2:

Cevap: 1.

Her tarafı 17^x ile bölersek, denklem $\left(\frac{4}{17}\right)^x + \left(\frac{7}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{10}{17}\right)^x + \left(\frac{14}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1 + \left(\frac{19}{17}\right)^x$ haline gelir. Sol taraf x'in azalan bir fonksiyonu ve sağ taraf da x'in artan bir fonksiyonu olduğu için, bu iki fonksiyon en fazla bir noktada kesişebilir. $x = 0$ durumunda da sol taraf daha büyük, x çok büyükken de sağ taraf daha büyük olduğu için ara değer teoreminden dolayı ortadaki bir değerde bir kök bulunmak zorundadır.

Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

$\boxed{4}$ 31 kişiden oluşan bir sınıfta, 4 öğrenci içeren her grubun içinde kendisi dışındaki diğer 3 öğrenciyle arkadaş olan en az bir öğrenci bulunuyor. Buna göre bu sınıfta kendisi dışındaki tüm öğrencilerle arkadaş olan öğrenci sayısı en az kaç olabilir?

a) 26 **b)** 27 **c)** 28 **d)** 29 **e)** 30

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

En az arkadaşı olan bir A kişisini alalım. A nın n tane arkadaşı olsun. O halde en çok n kişi, diğer herkesle arkadaş olabilir. $30 - n$ kişi A nın arkadaşı değildir.

• $30 - n \geq 3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda A ile arkadaş olmayan B, C, D gibi en az 3 kişi vardır. Problemde verilenden dolayı A, B, C, D dörtlü grubunda diğer üçü ile arkadaş olan biri olmalıdır. Fakat A, bu üç kişiyle arkadaş olmadığı için çelişki oluşur.

• O halde $30 - n \leq 2$ olmalıdır. Buradan $n \geq 28$ elde edilir. $n_{\min} = 28$ olduğu bir örnek verelim. A kişisi, B ve C kişileriyle arkadaş olmasın. Geri kalan tüm ikililer arasında arkadaşlık olsun. A, B, C dışındaki 28 kişi, kendisi dışındaki herkesle arkadaş olmuş olur.

Not: Sınav esnasında minimum değeri hissederek çözen öğrenciler olmuş olabilir. Bu çizge (graph) teorisi sorusunun çözümü kısa görünmekle beraber, tam bir ispat sunulmak istendiğinde sınavın en seçici sorularından birisi olabileceğini düşünüyorum.

5 $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay ve dış açıortay uzunlukları birbirine eşit ise $2 \cdot \widehat{A} + 3 \cdot \widehat{B} + \widehat{C}$ kaç derecedir?

a) $360°$ **b)** $420°$ **c)** $540°$ **d)** $630°$ **e)** Hiçbiri

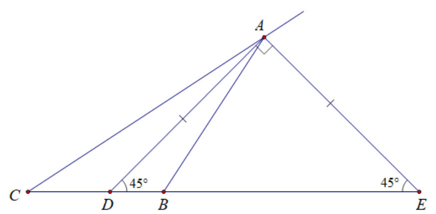
Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

$m(\widehat{A}) = 2x$, $m(\widehat{C}) = y$ olsun. A köşesinden geçen iç ve dış açıortay BC doğrusunu sırasıyla D, E noktalarında kessin. $m(\widehat{ADE}) = x+y$ dir. $|AD| = |AE|$ ve $AD \perp AE$ olduğundan $x+y = 45°$ dir. Böylece $m(\widehat{B}) = 135° - x$ tir. Buradan,

$$2 \cdot m(\widehat{A}) + 3 \cdot m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 4x + 3(135° - x) + y = 405° + x + y = 450°$$

bulunur.



6 $(3m+4n)(4m+3n) = 3^{63}$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 44 **b)** 64 **c)** 88 **d)** 128 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

$a + b = 63$ olmak üzere $3m + 4n = 3^a$ ve $4m + 3n = 3^b$ olacak şekilde a, b negatif olmayan tam sayılarını araştıralım. Denklemleri toplayalım ve $a > b$ ise $7(m+n) = 3^a + 3^b = 3^b(3^{a-b} + 1)$ biçiminde yazalım. Eğer $a < b$ ise $7(m+n) = 3^a + 3^b = 3^a(3^{b-a} + 1)$ biçiminde yazalım. $m + n$ nin bir tam sayı olmasını istiyoruz. Bu durumda, $4m + 3n$ de bir tam sayı olduğundan, m ve n birer tam sayı olacaktır.

• $a > b$ durumunda $c = a - b$ diyelim ve $3^c + 1 \equiv 0 \pmod 7$ olur. $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ ve $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan $c = 3 + 6k$ şeklindedir. $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ için $c = 3, 9, 15, \ldots, 63$ değerlerini alır. Buna karşılık $a > b$ doğal sayı değerleri vardır. $(a, b) = (33, 30), (36, 27), (39, 24), \ldots, (63, 0)$ biçiminde 11 çözüm bulunur.

• $a < b$ durumunda $c = b - a$ diyelim. Yine $3^c + 1 \equiv 0 \pmod 7$ olur. $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ ve $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan $c = 3 + 6k$ şeklindedir. Benzer şekilde $(a, b) = (30, 33), (27, 36), (24, 39), \ldots, (0, 63)$ biçiminde 11 çözüm bulunur.

• Son olarak, $3m + 4n = -3^a$ ve $4m + 3n = -3^b$ negatif çarpan biçimlerini de düşünürsek, benzer biçimde 22 çözüm daha elde ederiz.

Toplamda 44 tane (m, n) tam sayı ikilisi elde edilir.

Çözüm 2:

Cevap: $\boxed{A}$

(m, n) çözümse $(-m, -n)$ de çözüm olacağından sadece $3m + 4n > 0$ olduğu durumları inceleyelim. Eğer $x \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le x \le 63$ için için $3m + 4n = 3^x$ ve $4m + 3n = 3^{63-x}$ dersek

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^x \\ 3^{63-x} \end{pmatrix}$$

olur. R_i ile i. satırı gösterirsek, $R_2 \to 4R_1 - 3R_2$ dönüşümü yaparsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^x \\ 4 \cdot 3^x - 3^{64-x} \end{pmatrix}$$

Şimdi de $R_1 \to 7R_1 - 4R_2$ dönüşümü yaparsak,

$$\begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^{x+2} + 4 \cdot 3^{64-x} \\ 4 \cdot 3^x - 3^{64-x} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3^{x+1} + 4 \cdot 3^{63-x} \\ 4 \cdot 3^x - 3^{64-x} \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla $m - n = \frac{1}{7}\left(-7 \cdot 3^x + 7 \cdot 3^{63-x}\right) = 3^{63-x} - 3^x$ olduğundan sadece m'nin tamsayı olması yeterlidir. Yani

$$4 \cdot 3^{63-x} - 3^{x+1} \equiv -3^{64-x} - 3^{x+1} \equiv 0 \pmod 7 \implies -3^{x+1} \equiv 3^{64-x} \pmod 7$$

olmalıdır. Basit bir kontrol ile 3'ün 7 modundaki mertebesinin 6 olduğu görülebilir (sadece 2 ve 3'üncü kuvvetleri kontrol etmemiz yeterlidir). Buradan

$$-3^{x+1} \equiv 3^{64-x} \pmod 7 \iff 3^3 \cdot 3^{x+1} \equiv 3^{x+4} \equiv 3^{64-x} \pmod 7 \iff x+4 \equiv 64 - x \pmod 6$$

$$\iff 2x \equiv 0 \pmod 6 \iff x \equiv 0 \pmod 3$$

bulunur.

$0 \leq x \leq 63$ olduğundan x'in alabileceği değerler $0, 3, 6, 9, \ldots, 63$ olup toplamda $\frac{63-0}{3} + 1 = 22$ çözüm bulunur. $(-m, -n)$ şeklindeki çözümleri de eklersek 44 çözüm olacaktır.

$\boxed{7}$ x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ şeklinde yazılamayan 2023'ten küçük kaç tane pozitif tam sayı vardır?

a) 1 **b)** 12 **c)** 22 **d)** 44 **e)** 90

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

$S = \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ diyelim. S azalmayan bir fonksiyondur. Soruyu daha iyi kavramak için x e bazı değerler vermeyi tavsiye edebiliriz.

İlk olarak $0 < x < 1$ için $0 < x^2 < 1$ olup $S = \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = 0 + 0 = 0$ olur. $x = 1$ için $S = 1 + 1 = 2$ olur. Yani $S \neq 1$ dir. $x = \sqrt{2}$ için $S = 2 + 1 = 3$ olur. $x = \sqrt{3}$ için $S = 3 + 1 = 4$ olur. $S = 5$ olabilir mi, inceleyelim. $\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = 5$ ise $\lfloor x^2 \rfloor = 4, \lfloor x \rfloor = 1$ ya da $\lfloor x^2 \rfloor = 3, \lfloor x \rfloor = 2$ olmalıdır. Bu iki durumun da imkansız olduğunu anlamak zor değildir. $S \neq 5$ tir. $x = 2$ için $S = 4 + 2 = 6$ olur. Şu ana kadar $S \notin \{1, 5\}$ olduğunu anladık. Şimdi daha genel bir çözüme geçebiliriz.

$a \geq 0$ bir tam sayı ve $0 \leq b < 1$ olmak üzere $x = a + b$ olsun. Yani $\lfloor x \rfloor = a$ olacaktır. $S = \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \lfloor a^2 + 2ab + b^2 \rfloor + a$ olur. a^2 bir tam sayı olduğundan $S = a^2 + a + \lfloor 2ab + b^2 \rfloor$ yazabiliriz. Bu durumda b yi değiştirerek S nin hangi değerleri alabileceğini belirleyelim.

S nin en küçük değerini alması için $b = 0$ alırız ve $S_{\text{min}} = a^2 + a$ olur. S nin en büyük değerini alması için $b \to 1^-$ (yani 1 e çok yakın ama 1 den küçük) alırız. Bu durumda $2ab \to 2a^-$ (yani $2a$ ya çok yakın ve $2a$ dan küçük) ve $b \to 1^-$ olduğundan $2ab + b^2 \to (2a+1)^-$ olur. $\lfloor (2a+1)^- \rfloor = 2a$ ve $S_{\text{max}} = a^2 + 3a$ olur. Böylece $\lfloor x \rfloor = a$ iken $S \in [a^2 + a, a^2 + 3a]$ olur. $\lfloor x \rfloor = a + 1$ iken $S \in [(a+1)^2 + a + 1, (a+1)^2 + 3(a+1)] = [a^2 + 3a + 1, a^2 + 5a + 2]$ olur. Bu iki aralıkta da bulunmayan tam sayı $a^2 + 3a + 1$ dir. $S \neq a^2 + 3a + 1$ dir.

Başta da bulduğumuz bilgilerle uyumlu olarak $a = 0$ için $S \neq 1$, $a = 1$ için $S \neq 5$ tir. $a^2 + 3a + 1 < 2023$ olan en büyük a tam sayı değerini araştıralım. $a^2 < 2025$ olup $a < 45$ tir. $a = 44$ denenirse $44^2 + 3 \cdot 44 + 1 = 1936 + 132 + 1 = 2069 > 2023$ tür. $a = 43$ denenirse $43^2 + 3 \cdot 43 + 1 < 2023$ olur. $0 \leq a \leq 43$ tam sayıları ile elde edilen $a^2 + 3a + 1$ formundaki 44 tane tam sayıyı S e eşit olacak biçimde yazamayız.

Çözüm 2:

$x = n + r$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $0 \leq r < 1$ olsun. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$S_n = \{\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor : \lfloor x \rfloor = n\}.$$

$x^2 = n^2 + 2nr + r^2$ kullanılarak,

$$\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = n^2 + n + \lfloor 2nr + r^2 \rfloor$$

elde edilir. Şimdi, sabit bir n sayısı için $\lfloor 2nr + r^2 \rfloor$ ifadesinin $0 \leq r < 1$ iken alacağı değerler kümesinin $\{0, 1, \ldots, 2n\}$ nin altkümesi olduğunu görelim (çünkü $2nr + r^2 < 2n + 1$). Buradan, $S_n \subseteq \{n^2 + n, \ldots, n^2 + 3n\}$ bulunur. Şimdi, herhangi bir $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ için, $r = \sqrt{n^2 + k} - n$ alarak $r^2 + 2nr = k$ elde edilebilir. Dahası, $0 \leq r < 1$ sağlanır, yani $S_n = \{n^2 + n, \ldots, n^2 + 3n\}$. Bu şekilde yalnızca $n^2 + 3n + 1$ şeklindeki sayıların yazılamayacağını görmüş oluruz, dolayısıyla cevap 44 olur.

$\boxed{8}$ Bir yuvarlak masa etrafına oturmuş 31 öğrenciden üçü, seçilen herhangi iki öğrenci arasında en az 4 öğrenci bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

a) 1450 **b)** 1471 **c)** 1512 **d)** 1543 **e)** 1581

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Öğrencileri 1 den 31 e kadar, saatin dönme yönünde numaralandırmış olalım. Seçilen üç öğrencinin numaraları saatin dönme yönüne göre sırasıyla a, b, c olsun. $a = 1$ olduğunu varsayalım. $a = 1$ ile b arasında x_1 tane öğrenci, b ile c arasında x_2 tane öğrenci, c ile $a = 1$ arasında x_3 tane öğrenci olsun. $x_1 + x_2 + x_3 = 31 - 3 = 28$ dir. $x_i \geq 4$ olduğundan $x_i = y_i + 4$ dönüşümü yaparsak

$$y_1 + y_2 + y_3 = 28 - 3 \cdot 4 = 16$$

denklemini negatif olmayan tam sayılarda çözmeliyiz. Dağılım prensibinden dolayı $\binom{18}{2}$ tane (y_1, y_2, y_3) üçlüsü bulunur.

Şimdi $a = 1, 2, \ldots, 31$ değerlerini alabileceğinden bu sayıyı 31 ile çarparak $31 \cdot \binom{18}{2}$ elde ederiz. Öte yandan, saatin dönme yönünde seçilen numaralar a, b, c; b, c, a; c, a, b iken aynı öğrenciler seçilmiş olacaktır. Dolayısıyla elde ettiğimiz sayıyı 3 ile bölmeliyiz. Böylelikle

$$\frac{31}{3} \cdot \binom{18}{2} = 1581$$

sonucuna ulaşırız.

Notlar:

• Dairesel olarak dizilmiş n farklı nesneden m tanesinin seçimi, herhangi iki seçilmiş ardışık nesne arasında en az k tane seçilmemiş nesne bulunması koşuluyla

$$\frac{n}{m}\binom{n - km - 1}{m - 1}$$

yolla yapılabilir. Elbette kombinasyonun pozitif bir tam sayı üretebilmesi için $n \geq km + m$ olmalıdır. $n < km + m$ iken istenen şekilde bir seçim mümkün olmadığı için, yanıt 0 olacaktır. **Dairesel dağılım** ismini verebileceğimiz bu problem, **Cayley Problemi** olarak bilinir.

• Uzun süredir “Acaba Ulusal Matematik Olimpiyatları’nda ne zaman sorulur?” diye beklediğim bir problemdir, Cayley Problemi. 1993’te düzenlenen 1. UMO’dan günümüze kadar olan sürede ilk kez 2023’te Cayley Problemi soruldu. Ayrıca, ilki 1996’da yapılan Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatlarında da Cayley Problemi ilk kez 2023’te soruldu. Yani bu yıl, ülkemizdeki iki önemli olimpiyat sınavında Cayley Problemi ile karşılaşmış olduk.

Çözüm 2:

Cevap: 1581.

Öğrencileri saat yönünde $1, 2, \ldots, 31$ sayılarıla numaralandıralım. 1. öğrenci seçilmiş olsun. Bu durumda 2., 3., 4., 5., 28., 29., 30. ve 31. öğrenciler seçilmeyecek. 1. öğrenciden sonra saat yönünde seçilen ilk öğrenci 6. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 17 seçenek, 7. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 16 seçenek, . . ., 22. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 1 seçenek bulunacaktır. Buna göre, toplam $17+16+\cdots+1 = 17\cdot 9 = 153$ seçenek elde edilir. Seçilen her öğrenci üçlüsü 3 kez sayılacağına göre, cevap $\dfrac{153 \cdot 31}{3} = 1581$ olur.

Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

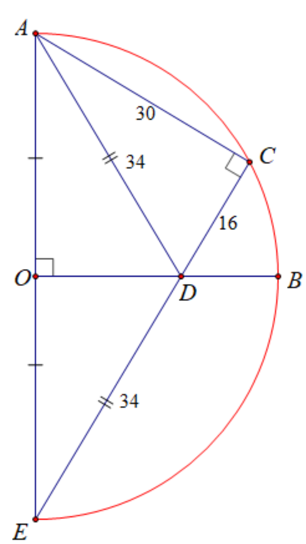
9 O merkezli bir çember üzerinde alınan A ve B noktaları için $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ dir. Çemberin küçük AB yayı üzerinde alınan bir C noktası ve $[OB]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$ dir. $|AC| = 30$, $|CD| = 16$ ise $|BD|$ uzunluğu kaçtır?

a) $\sqrt{66}$ **b)** $2\sqrt{34}$ **c)** $3\sqrt{34}$ **d)** $2\sqrt{66}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

CD doğrusunu çizelim ve çemberi C, E noktalarında kessin. Tales teoreminden, çapı gören çevre açı 90° olduğundan A, O, E doğrusaldır. Böylece ADE ikizkenar üçgen olur. ACD dik üçgeni; $8, 15, 17$ özel üçgeni (2 katı alınmış) olduğundan $|AD| = |DE| = 34$ tür. $|CE| = 16 + 34 = 50$ olduğundan ACE dik üçgeninden $|AE| = 10\sqrt{34}$ bulunur. Yarıçap uzunluklarından $|OA| = |OB| = |OE| = 5\sqrt{34}$ bulunur. AOD dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|OD|^2 = 34^2 - 25 \cdot 34 = 9 \cdot 34$ ve $|OD| = 3\sqrt{34}$ bulunur. $|BD| = 5\sqrt{34} - 3\sqrt{34} = 2\sqrt{34}$ olur.



10 $2^n + 3^n + 5^n$ sayısının 100 ile tam bölünmesini sağlayan 2023 ten küçük kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 50 **b)** 101 **c)** 150 **d)** 202 **e)** 251

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Çin kalan teoreminden

$$2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{100} \iff 2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ve } 2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{25}$$

olacaktır. $n = 1$ için 0 kalanı gelmediğinden $n \geq 2$ kabul edebiliriz ve buradan

$$2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{100} \iff 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ve } 2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{25}$$

olacaktır.

$$3^n + 5^n \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod 4 \iff n \equiv 1 \pmod 2$$

olur. n'nin tek olmasını kullanarak

$$2^n+3^n \equiv 2^n+(5-2)^n \equiv 2^n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k(-2)^{n-k} \equiv 2^n+\binom{n}{0}(-2)^n+\binom{n}{1}5\cdot(-2)^{n-1} \equiv 5n\cdot 2^{n-1} \equiv 0 \pmod{25}$$

$$\iff n \equiv 0 \pmod 5$$

bulunur. Dolayısıyla $n \geq 2$ için

$$2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{100} \iff n \equiv 5 \pmod{10}$$

elde edilir.

$10k + 5$ formatındaki sayılar $5, 15, 25, \ldots, 2015$ olmak üzere $\frac{2015-5}{10} + 1 = \boxed{202}$ tanedir. Hatırlamayanlar için aritmetik dizideki eleman sayısı $\frac{\text{Son terim}-\text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$ olarak hesaplanır.

11 $a_1, a_2, ..., a_{31}$ dizisi $a_1 = \dfrac{1}{31}$ ve her $n = 1, 2, ..., 30$ değeri için $(n+2)a_n = na_{n+1}$ olarak tanımlanmıştır. Buna göre, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{31}$ kaçtır?

a) 176 **b)** 179 **c)** 181 **d)** 187 **e)** 192

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+2}{n}$ biçiminde yazıp $n = 1, 2, \ldots, N-1$ için taraf tarafa çarparsak, oluşan teleskopik çarpımdan $\dfrac{a_N}{a_1} = \dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\cdots\dfrac{N}{N-2}\cdot\dfrac{N+1}{N-1} = \dfrac{N(N+1)}{2}$ olup

$$a_n = \frac{n^2+n}{62}$$

elde edilir. İstenen toplam

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{31} = \frac{1}{62}\sum_{n=1}^{31}(n^2+n) = \frac{1}{62}\left(\frac{31\cdot 32\cdot 63}{6} + \frac{31\cdot 32}{6}\right) = 176$$

bulunur.

12 Bir sıraya dizilmiş 7 topun her biri kırmızı, mavi ve siyah renklerden birine, yan yana iki siyah top olmayacak şekilde kaç farklı biçimde boyanabilir?

a) 1128 **b)** 1158 **c)** 1186 **d)** 1224 **e)** 1296

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

İstenen özellikte n tane topun boyanma sayısı a_n olsun. $a_1 = 3$ ve $a_2 = 3^2 - 1 = 8$ dir.

Şimdi, son topun siyah olması durumunda, sondan bir önceki top mavi veya kırmızı olabilir. Geriye $n-2$ top kalır ve bu halde istenen özellikte $2a_{n-2}$ boyama yapılabilir.

Son topun mavi veya kırmızı olması durumunda, geriye kalan $n-1$ top olduğundan bu halde $2a_{n-1}$ yolla boyama yapabiliriz. Toplamda, $n \geq 3$ için

$$a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. $a_3 = 2(3+8) = 22$, $a_4 = 2(8+22) = 60$, $a_5 = 2(22+60) = 164$, $a_6 = 2(60+164) = 448$, $a_7 = 2(164+448) = 1224$ bulunur.

13 Bir kenarının uzunluğu 6 olan $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BE| = 4$ olan bir E noktası alınıyor. $DE \cap AB = \{K\}$ ve $AE \cap DC = \{L\}$ olmak üzere, EKL üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı nedir?

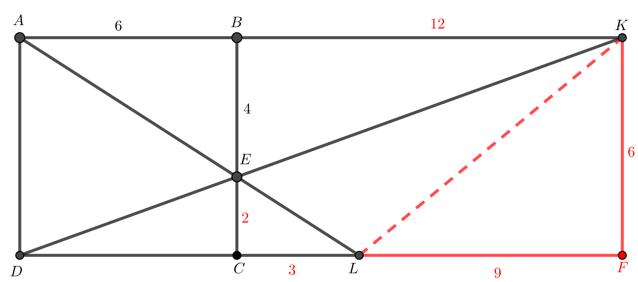
a) $\dfrac{13\sqrt{10}}{6}$ **b)** 6 **c)** 9 **d)** $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

$KBCF$ dikdörtgenini kuralım.

$BK = 12$, $BE = 4$, $CE = 2$, $LF = 9$, $KF = 6$.



$$\begin{aligned}
\text{Alan}(KEL) &= \text{Alan}(BKFC) - \text{Alan}(BEK) - \text{Alan}(CEL) - \text{Alan}(KFL) \\
&= 72 - 24 - 3 - 27 \\
&= 18
\end{aligned}.$$

(Alternatif olarak $\text{Alan}(KEL) = \text{Alan}(AED) = \text{Alan}(ABCD)/2 = 18$)

Üçgenin çevrel yarıçapının kullanıldığı alan formülünden

$$\text{Alan}(KEL) = \frac{KE \cdot EL \cdot LK}{4R} = 18$$

$$R = \frac{4\sqrt{1^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2} \cdot 3\sqrt{2^2+3^2}}{4 \cdot 18} = \frac{13\sqrt{10}}{6}.$$

14 $a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 18b^3 = 2023$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Sol taraftaki $a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 18b^3$ kısmını çarpanlarına ayırmak için $\frac{a}{b} = t$ diyebiliriz. Bu dönüşüm ile sol taraf $b^3(t^3 + 4t^2 - 3t - 18)$ olacaktır ve paydaki polinomu çarpanlarına ayırarak asıl denklemi çarpanlarına ayırabiliriz. Bu kısmı geçiyorum, çarpanlarına ayrılmış hali

$$(a - 2b)(a + 3b)^2 = 2023 = 7 \cdot 17^2$$

olacaktır. 2023'ün tamkare bölenleri sadece 1 ve 17^2'dir. Buradan

$$a - 2b = 2023, \quad a + 3b = 1$$

$$a - 2b = 2023, \quad a + 3b = -1$$

$$a - 2b = 7, \quad a + 3b = 17$$

$$a - 2b = 7, \quad a + 3b = -17$$

olabilir. Bu lineer denklem sistemlerini çözersek, $(a, b) = (11, 2)$ tamsayı ikilisi buluruz. Tek çözüm vardır.

15 x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $x^2 - xy + y^2 - x - 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -3 **b)** $-\dfrac{7}{3}$ **c)** -2 **d)** $-\dfrac{4}{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{B}$

$A = x^2 - xy + y^2 - x - 2y = x^2 - x(y + 1) + (y^2 - 2y)$ olsun.

$$4A = 4x^2 - 4x(y+1) + 4(y^2 - 2y) = (2x - y - 1)^2 - (y + 1)^2 + 4(y^2 - 2y) = (2x - y - 1)^2 + 3y^2 - 10y - 1$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 - \frac{10}{3}y - \frac{1}{3}\right) = (2x - y - 1)^2 + 3\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{28}{3} \geq -\frac{28}{3}$$

olacaktır. Buradan $A \geq -\frac{7}{3}$ olacaktır. Eşitlik durumu $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ iken sağlanır.

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac \end{aligned}$$

Taraf tarafa toplayıp her iki tarafa $a^2 + b^2 + c^2$ eklersek $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ elde ederiz. (3 terimli Karesel Ortalama - Aritmetik Ortalama Eşitsizliğinin sadece pozitif gerçel sayılar için değil tüm gerçel sayılar için sağlandığını göstermiş olduk.)

$a = y - x, b = x - 1, c = 2 - y$ olsun.

$3\left((y - x)^2 + (x - 1)^2 + (2 - y)^2\right) \geq y - x + x - 1 + 2 - y = 1$

$3(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 4y + 5) \geq 1$

Sorudaki toplama S dersek $3(2S + 5) \geq 1 \Longrightarrow S \geq -\dfrac{7}{3}$

Eşitlik durumu $y - x = x - 1 = 2 - y$ iken yani $x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$ iken sağlanır.

Çözüm 3:

Bu problem için, parabolde tepe noktası fikri gibi bir temel yöntemi kullanarak farklı bir çözüm daha verebiliriz.

Yanıt: $\boxed{B}$

$A(x) = x^2 - xy + y^2 - x - 2y = x^2 - x(y+1) + (y^2 - 2y)$ olsun. Bu ifadeyi x e göre ikinci dereceden bir fonksiyon gibi düşünebiliriz. Şu temel gerçeği hatırlayalım:

$a > 0$ bir sabit ve $A(x) = a(x-r)^2 + k$ iken $A(x) \geq k$ olur, eşitlik durumu $x = r$ için vardır.

Buna göre $r = \dfrac{y+1}{2}$ olup $A(r) = \dfrac{(y+1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{2} + (y^2 - 2y) = \dfrac{3y^2 - 10y - 1}{4}$ olur. O halde $A \geq \dfrac{3y^2 - 10y - 1}{4}$ olur. Şimdi de $\dfrac{3y^2 - 10y - 1}{4}$ için minimum değeri araştıralım. Yine tepe noktası formülünü kullanırsak, bu ifadenin $y = \dfrac{5}{3}$ için en küçük değerini alacağını biliyoruz. Bu değeri hesaplarsak $\dfrac{1}{4}\left(3 \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 10 \cdot \dfrac{5}{3} - 1\right) = -\dfrac{7}{3}$ bulunur. Bu en küçük değeri elde etmek için $x = \dfrac{y+1}{2}$ olmalı. Yani $x = \dfrac{4}{3}$. Böylece $A_{\min} = -\dfrac{7}{3}$ tür.

$\boxed{16}$ 7 kişilik bir grup içinde bazı tokalaşmalar olmuştur. Tam olarak 1 kişiyle tokalaşan kişi sayısı 1, tam olarak 2 kişiyle tokalaşan kişi sayısı 2 ve tam olarak 3 kişi ile tokalaşan kişi sayısı 3'tür. Buna göre, toplam tokalaşma sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Kişileri bir düzlemde 7 nokta ile gösterelim. Bu kişilerden tokalaşanları ise birleştirelim. Bir graf elde etmiş olacağız. Verilen bilgiden 1 kişinin derecesi (yaptığı bağlantı sayısı) 1, 2 kişinin 2 ve 3 kişinin 3 olduğunu biliyoruz. Bilinmeyen 7. noktanın derecesi de d olsun. Her tokalaşmada 2 kişi yer aldığından derecelerin toplamı çift olacaktır. Buradan

$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + d = 14 + d \equiv 0 \pmod 2 \implies 2 \mid d$$

elde edilir. Ayrıca $d \neq 1, 2, 3$ olduğundan $d = 0, 4, 6$ olabilir. Dolayısıyla toplam tokalaşma sayısı $\frac{14+d}{2}$ de $7, 9, 10$ olabilir.

Şimdi bu d değerleri için örnek verelim. Kişiler A, B, C, D, E, F, G olsun. Tokalaşanları $\leftrightarrow$ ile gösterelim,

$d = 0$ için

$$A \leftrightarrow B, \quad B \leftrightarrow C, \quad B \leftrightarrow D, \quad C \leftrightarrow D, \quad C \leftrightarrow F, \quad D \leftrightarrow E, \quad E \leftrightarrow F$$

şeklinde tokalaşmalar olursa, A, 1 kişi ile E, F, 2 kişiyle B, C, D, 3 kişiyle ve G ise 0 kişiyle tokalaşmış olur.

$d = 4$ için

$$A \leftrightarrow G, \quad B \leftrightarrow C, \quad B \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow G, \quad C \leftrightarrow D, \quad C \leftrightarrow F, \quad D \leftrightarrow E, \quad G \leftrightarrow E, \quad G \leftrightarrow F$$

şeklinde tokalaşmalar olursa, A, 1 kişi ile E, F, 2 kişiyle B, C, D, 3 kişiyle ve G ise 4 kişiyle tokalaşmış olur.

$d = 6$ için

$$A \leftrightarrow G, \quad B \leftrightarrow C, \quad B \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow G, \quad C \leftrightarrow G, \quad D \leftrightarrow G, \quad C \leftrightarrow F, \quad D \leftrightarrow E, \quad G \leftrightarrow E, \quad G \leftrightarrow F$$

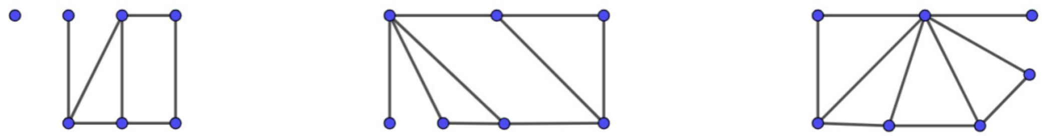
şeklinde tokalaşmalar olursa, A, 1 kişi ile E, F, 2 kişiyle B, C, D, 3 kişiyle ve G ise 6 kişiyle tokalaşmış olur.

Dolayısıyla toplam tokalaşma sayısı $7, 9, 10$ olabilir.

Çözüm 2:

Cevap: 3.

Bu $1+2+3=6$ kişi dışındaki kişinin tokalaştığı kişi sayısı k olsun. Toplam tokalaşma sayısının 2 katı $1+2+2+3+3+3+k=14+k$ olacağı için k çift olmalı. Ayrıca $k \neq 2$ olduğu için k 'nin alabileceği değerler 0,4 ve 6'dır. Bu durumların her biri mümkündür ve toplam tokalaşma sayısı 7,9 ve 10 olabilir.



Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

17 $|AB|=6$, $|AC|=8$, $|BC|=10$ olan bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin çevrel çemberinde A noktasını içermeyen BC yayının orta noktası D olsun. Çevrel çembere D noktasında teğet olan doğrunun AB doğrusuyla kesiştiği nokta E ise $|ED|$ uzunluğu nedir?

a) 8 **b)** $\dfrac{36}{5}$ **c)** 9 **d)** $\dfrac{28}{3}$ **e)** $\dfrac{35}{4}$

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

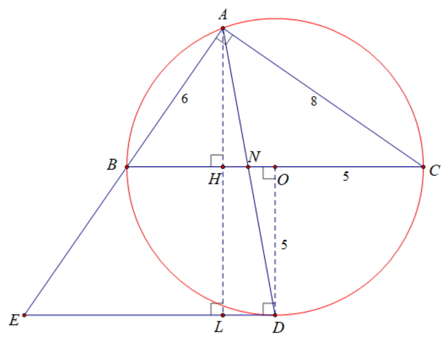
$6,8,10$ üçgeninden dolayı $m(\widehat{BAC})=90^\circ$ dir. D noktası BC yayının orta noktası olduğundan $[AD$, $\widehat{BAC}$ nin açıortayıdır. Dolayısıyla $DO \perp BC$ ve $|OB|=|OC|=|OD|=5$ tir. Yarıçapın teğete dik oluşundan, $OD \perp ED$ dir. Böylece, aslında iyi bilinen bir özellik olarak $BC \parallel ED$ bulunur. AD ile BC nin kesişimi N olsun. Bu paralellikten dolayı $ABN \sim AED$ dir. A dan BC ve ED ye inilen yükseklik ayakları sırasıyla H ve L ise, yükseklikler oranını benzerlik oranına eşitlersek

$$\frac{|ED|}{|BN|}=\frac{|AL|}{|AH|}$$

olur. $6,8,10$ dik üçgeninde $|AH|=\dfrac{6\cdot 8}{10}=\dfrac{24}{5}$ tir. İç açıortay teoreminden $\dfrac{|BN|}{6}=\dfrac{|CN|}{8}=\dfrac{10}{6+8}$ olup $|BN|=\dfrac{30}{7}$ dir. Ayrıca $|HL|=|OD|=5$ olduğundan $|AL|=\dfrac{24}{5}+5=\dfrac{49}{5}$ tir. Bu değerleri benzerlik oranı eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{|ED|}{30/7}=\frac{49/5}{24/5}$$

olup $|ED|=\dfrac{35}{4}$ bulunur.



18 p bir asal sayı, $n < p$ bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$p^2 \mid n^5 + n^4 + 7n^3 + n^2 + n + 7$$

şartını sağlayan kaç (n, p) ikilisi vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

$n^5+n^4+7n^3+n^2+n+7 = (n^2+n+7)(n^3+1) = (n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+7)$ yazarsak $n \geq 1$ olduğundan $n^2 - n + 1 < p^2$ ve $n + 1 < p + 1 \leq p^2$'dir.

Eğer $p^2 \mid n^2 + n + 7$ ise $p = 2$ için çözüm yoktur. $p = 3$ için sadece $n = 1$ olabilir. $p \geq 5$ için

$$p^2 \leq n^2 + n + 7 < p^2 + p + 7 \leq 2p^2 \implies p^2 = n^2 + n + 7$$

olacaktır. Buradan

$$4n^2 + 4n + 28 = (2n + 1)^2 + 27 = 4p^2 \implies (2p - 2n - 1)(2p + 2n + 1) = 27$$

olur. Buradan $(p, n) = (7, 6)$ elde edilir.

Geriye kalan durumlarda p asalı $n + 1$, $n^2 - n + 1$ ve $n^2 + n + 7$'den iki tanesini bölmelidir.

Eğer $p \mid n + 1$ ve $p \mid n^2 - n + 1$ ise $p \mid (n^2 - n + 1) - (n + 1)(n - 2) = 3$ ve $p = 3$ elde edilir. $(p, n) = (3, 2)$ olabilir.

Eğer $p \mid n+1$ ve $p \mid n^2+n+7$ ise $p \mid (n^2+n+7) - n(n+1) = 7$ ve $p = 7$ elde edilir. $(p, n) = (7, 6)$ durumunu daha önceden bulmuştuk.

Eğer $p \mid n^2 + n + 7$ ve $p \mid n^2 - n + 1$ ise $p \mid (n^2 + n + 7) - (n^2 - n + 1) = 2n + 6$ elde edilir. $p = 2$ için çözüm gelmediğinden $p \mid n + 3$ olacaktır. Buradan

$$p \mid (n^2 + n + 7) - (n + 3)(n - 2) = 13 \implies p = 13$$

elde edilir. $p \mid n + 3$ olduğundan $n = 10$ olmalıdır. $(p, n) = (13, 10)$ elde edilir.

Tüm ikililer $(p, n) = (3, 1), (3, 2), (7, 6), (13, 10)$'dur.

19 $k \neq -1$ ve ℓ verilmiş gerçel sayılar olsun.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = 1$$

eşitliğinde $x = k$ iken $yz = \ell$ olmak zorunda ise, $k + \ell$ kaçtır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 6

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

Birinci Yol: $x = k$ koyarsak,

$$\frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = \frac{1}{k+1}$$

olacaktır. yz'nin sabit çıkmasını istiyoruz.

$$\frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = \frac{1}{k+1} \implies \frac{2yz+3y+2z}{yz+3y+2z+6} = \frac{1}{k+1} \implies (2k+1)yz + 3ky + 2kz - 6 = 0$$

$k = -\frac{1}{2}$ ise $3y + 2z = -12$ olacaktır. Buradan $(y,z) = (0,-6),(2,-9)$ gibi çözümler buluruz. yz sabit olmadığından aradığımız k bu değildir.

$k \neq -\frac{1}{2}$ için

$$(2k+1)^2yz + 3k(2k+1)y + 2k(2k+1)z - 6(2k+1) = 0 \implies [(2k+1)y+2k]\,[(2k+1)z+3k] = 18k+6$$

olacaktır. $18k+6 = ab$ için $y = \frac{a-2k}{2k+1}$ ve $z = \frac{b-3k}{2k+1}$ çözümü elde ederiz. Öncelikle $y \neq -2$ ve $z \neq -3$ olması gerektiğinden $a \neq -2k-2$ ve $b \neq -3k-3$ olmalıdır.

$$(2k+1)^2yz = (a-2k)(b-3k) = ab - 3ak - 2bk + 6k^2 = 6k^2 + 18k + 6 - k(3a+2b)$$

olduğundan yz'nin sabit olabilmesi için $k = 0$ veya $3a + 2b$ sabit olmalıdır.

$k = 0$ ise $y = a$ ve $z = b$ olacağından $yz = ab = 18k + 6 = 6$ olmalıdır ve buradan $(k,l) = (0,6)$ elde edilir. $k + l = 6$'dır.

$k \neq 0$ ise $3a+2b$ sabit olmalıdır. $a \neq -2k-2$ ve $a \neq -\frac{6k+2}{k+1}$ (çünkü $b \neq -3k-3$) olmasının yeterli olduğunu göz önünde bulundurarak herhangi bir k için a'yı verilen iki değer dışında seçip $3a + 2b = 3a + \frac{36k+12}{a}$'yi sonsuz farklı değer bulabileceğimiz aşikardır, çünkü a bir reel sayıdır. Dolayısıyla $3a + 2b$ sabit değildir.

Dolayısıyla sadece $(k,l) = (0,6)$ olabilir. Buradan da $k + l = 6$ bulunur.

İkinci Yol: $x = k$ koyarsak

$$\frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = \frac{1}{k+1}$$

olur. Eğer $l \neq 0$ ise $y = 0$ koyduğumuzda herhangi bir z çözümü elde edememeliyiz. Yani

$$\frac{z}{z+3} = \frac{1}{k+1} \implies z = \frac{3}{k}$$

tanımsız olmalıdır. Buradan $k = 0$ bulunur. Ana denklemde yerine koyarsak,

$$\frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = 1 \implies \frac{2yz+3y+2z}{yz+3y+2z+6} = 1 \implies yz = 6$$

bulunur. Yani $k = 0$ ve $l = 6$ istenileni sağlar.

Eğer $l = 0$ ise tüm çözümler için ya sadece $y = 0$ ya da $z = 0$ gelmelidir. Yani tüm çözümler $(y,z) = \left(\frac{2}{k},0\right), \left(0,\frac{3}{k}\right)$ olmalıdır. Bu durumda $k \neq 0$ olacağı barizdir. Eğer $y = \frac{1}{k}$ seçersek çözüm gelmemelidir. Yerine yazdığımızda

$$\frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = \frac{1}{2k+1} + \frac{z}{z+3} = \frac{1}{k+1} \implies \frac{z}{z+3} = \frac{k}{2k^2+3k+1} \implies z = \frac{3k}{2k^2+2k+1}$$

tanımsız olmalıdır ancak $2k^2+2k+1$'in kökü olmadığından bu kesir her zaman tanımlıdır. Dolayısıyla ilk baştaki 2 çözümden farklı bir çözüm bulduk ve bu bir çelişkidir.

Tek durum $(k,l) = (0,6)$ olmasıdır. Buradan $k + l = 6$ bulunur.

20 $0 * 1 * 2 * 3 * \cdots * 30 * 31$ ifadesindeki 31 tane $*$ işaretinin her birinin yerine $+$ ya da $-$ işareti yazarak kaç farklı pozitif tam sayı elde edilebilir?

a) 224 **b)** 248 **c)** 312 **d)** 368 **e)** 496

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

Başta tüm işaretlerin $+$ olduğunu ve bizim bazılarını $-$ yaptığımızı varsayalım. İlk başta sayımız 496'dır. Her $+a$'yı $-a$ yaptığımızda $496 - 2a$ olur, yani sadece çift sayıları elde edebiliriz. İddiamız tüm çift sayıların yazılabileceğidir. Bu da aslında $\sum a = 0, 1, 2, \dots, 247$ olacak şekilde $A = \{1, 2, \dots, 31\}$ kümesinden elemanlar seçebildiğimize denktir (Hiçbir eleman seçmezsek 0 toplamı elde etmiş oluruz). Bunun için de aslında basitçe "en büyük elemanı seçme" algoritmasını uygulayabiliriz. Algoritma şu şekildedir,

1) $S = \sum a$ olsun. Her adımda S veya kümede kalan sayıların en büyüğü arasından en küçük olanı seçeceğiz. Örneğin ilk adımda $\min\{S, \max A\} = \min\{\sum a, 31\}$'i seçeceğiz.

2) Her seçimden sonra S'yi toplamdan önceki eleman çıkartılmış olarak değiştireceğiz ($S \to S - \min\{S, \max A\}$) ve kümeden seçilen elemanı çıkartarak ($A \to A - \{\min\{S, \max A\}\}$) seçimlere devam edeceğiz.

3) $S = 0$ kaldığında o ana kadar seçilen sayılar bizim aradığımız sayılardır.

Bu algoritma ile 496'ya kadar olan sayılarda çalışacaktır. İspatı da aslında basittir. Çünkü "minimum eleman" seçimimizi yapamamamız için ya kümede eleman kalmamalı, ya S'yi seçmemiz gerekirken kümede S olmamalı, ya da toplam (S) bir anda $+$'dan $-$'ye düşmelidir. İlk durum imkansızdır çünkü $1 + 2 + \cdots + 31 = 496 > 248$'dir. İkinci durumda olabilecek en büyük elemanı seçmemizle çelişir çünkü S'yi seçmemiz gerekiyorsa S'nin karşısındaki sayı S'den daha büyüktür, o zaman da S hala elenmemiş olmalıdır. Son ihtimalde ise seçimlerde S'yi seçebileceğimizden $-$'ye düşmesi imkansızdır.

Örneğin $\sum a = 115$ için sırasıyla $31, 30, 29, 25$ sayılarını bulacağız. Bu da bu sayıların işaretini $-$, kalanları $+$ yaparsak $496 - 2 \cdot 115 = 226$ sayısını elde edeceğimiz anlamına geliyor.

Dolayısıyla $2, 4, 6, 8, \dots, 496$ çift sayılarını elde edebiliriz. Bunlar da tam olarak 248 tanedir.

21 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde köşelerden farklı bir D noktası alınıyor. $|AB| = |AD|$, $\dfrac{|CD|}{|BD|} = 3 + 2\sqrt{3}$, $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ ise $m(\widehat{ABC})$ kaçtır?

a) 75° **b)** 60° **c)** 45° **d)** 30° **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

Açı sorulduğundan ve verilen bilgiler oran olduğundan genelliği bozmadan $|BD| = 2$ ve $|CD| = 6 + 4\sqrt{3}$ kabul edebiliriz. A'dan inilen dikmenin ayağı H olsun. $|AB| = |AD|$ olduğundan $|BH| = |HD| = 1$ olacaktır. $|AH| = h$ diyelim. AHC üçgeni $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan $\frac{|AH|}{|HC|} = \frac{h}{7+4\sqrt{3}} = \tan 15^\circ$ olacaktır. $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgeninin kenarları oranıyla ilgili birçok ispat yöntemi var aslında ama trigonometri üzerinden gideceğim.

$$\tan 30^\circ = \frac{2\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olduğundan $\tan 15^\circ = x$ dersek çıkacak ikinci dereceden denklemin pozitif kökünden $x = 2 - \sqrt{3}$ bulunacaktır. Buradan da $h = (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$ elde edilir.

$15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgeninde dik köşeden inilen dikme hipotenüsün 4'te biridir. $4h = |BC|$ sağlanıldığından ve bir açı 15° olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 75^\circ$ bulunur.

Az önceki lemmayı bilmeseydik de ABH üçgeninin dik kenarlarını bildiğimizden açıları deneyerek de bulabilirdik.

22 p ve q asal sayılar olmak üzere,

$$\frac{7pq}{1+p+q}$$

ifadesi $\{1, 2, 3, ..., 31\}$ değerlerinden kaç tanesine eşit olabilir?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{D}$

Genelliği bozmadan $p \geq q$ olsun. 7, p ve q asal olduğundan $\frac{7pq}{1+p+q} = 1, 7, p, q, 7p, 7q, pq, 7pq$ olabilir. $1+p+q \geq 1+2+p = p+3$ olduğundan

$$\frac{7pq}{1+p+q} \leq \frac{7pq}{p+3} < 7q \leq 7p < 7pq$$

olmalıdır. Buradan $\frac{7pq}{1+p+q} = 1, 7, p, q, pq$ olmalıdır.

Eğer 1 ise $7pq = 1+p+q$ olur. Bu eşitliği düzenlersek $49pq - 7p - 7q + 1 = (7p-1)(7q-1) = 8$ elde edilir ancak $(7p-1)(7q-1) \geq 13^2$ olur. Dolayısıyla 1 olamaz.

Eğer 7 ise $pq = p+q+1$ olur. Buradan da $(p-1)(q-1) = 2$ olduğundan $(p, q) = (3, 2)$ seçebiliriz. 7 olabilir.

Eğer p ise $7q = 1+p+q \implies 1+p = 6q$ olur. $(p, q) = (11, 2), (17, 3), (29, 5)$ olabilir. Yani $11, 17, 29$ olabilir.

Eğer q ise $7p = 1+p+q \implies 1+q = 7p$ olur ama $p \geq q$ olduğundan bu imkansızdır.

Eğer pq ise $p+q = 6$ elde edilir. $(p, q) = (3, 3)$'den 9 olabilir.

Yani 5 tane değere eşit olabilir.

23 $x^2 = 4y+1$, $y^2 = x^3+1$ denklem sisteminin gerçel sayılarda kaç farklı (x, y) çözüm ikilisi bulunur?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$y = \dfrac{x^2-1}{4}$ değerini diğer denklemde yazarsak $\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{16} = (x+1)(x^2-x+1)$ olup her iki tarafta da $x+1$ çarpanı olduğundan $x = -1$ değerinin bir kök olduğu bulunur. $(x, y) = (-1, 0)$ çözüm ikilisi elde edilir. Şimdi $x \neq -1$ olsun ve $x+1$ çarpanlarını her iki taraftan sadeleştirelim. Böylece, $(x-1)^2(x+1) = 16(x^2-x+1)$ olup düzenlenirse

$$x^3 - 17x^2 + 15x - 15 = 0$$

kübik denklemi elde edilir. Bu denklemlerin en az bir gerçel kökü olduğunu biliyoruz. Ayrıca $x \leq 0$ iken denklemin sol tarafı negatif olduğundan çözüm yoktur. O halde ya üç kök pozitiftir, ya da bir kök pozitif olup diğer iki kök kompleks eşleniktir. Yalnız bir kökün gerçel sayı olduğunu kanıtlayacağız.

$x^3 - 17x^2 + 15x - 15 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 olsun. Belirlilik açısından $x_3 > 0$ pozitif köktür diyelim. Vieta teoreminden

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 15$$

$$x_1x_2x_3 = 15$$

yazılır. Eğer $x_1, x_2 > 0$ ise aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}$$

olmalıdır. Buradan, $\frac{15}{3} \geq \sqrt[3]{15^2} \implies 5^3 \geq 15^2$ çelişkisi elde edilir. O halde bir kök pozitif olup diğer iki kök kompleks eşleniktir. $x = x_3$ için $y = \frac{x^2-1}{4}$ denklemi kullanılarak yalnız bir $y = y_3$ değeri elde edilir. $(x, y) = (x_3, y_3)$ çözüm ikilisi bulunur.

Toplamda, denklem sistemini sağlayan 2 tane (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır.

24 Başlangıçta $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarının yazılı olduğu bir tahtada Aslı bir oyun oynuyor. Aslı her hamlesinde tahtadan önce bir a sayısı sonra da bir b sayısı seçiyor. $x^2 - ax + b$ polinomunun iki kökü de pozitif tam sayıysa, Aslı a ve b sayılarını silip yerine bu polinomun iki kökünü yazmaktadır. Aslı, sonlu sayıda hamle sonucunda tahtadaki sayıların çarpımını $14, 16, 20, 24, 32$ sayılarından kaç tanesini yapabilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Öncelikle $(a, b) \to (x_1, x_2)$ şeklinde bir dönüşüm yapıldığında x_1, x_2 pozitif tamsayı olduğundan, $x_1, x_2 < x_1 + x_2 = a$ ve $x_1, x_2 \leq x_1x_2 = b$ olacaktır ve bu yüzden, 6'dan büyük bir sayı elde edilemez. Dolayısıyla 7 veya 7'nin herhangi bir katı elde edilemeyecektir. Dolayısıyla da sayıların çarpımı 14 olamaz.

Ayrıca 6'yı yok etmemiz gerekiyorsa bunun da yolları sadece $(5, 6) \to (2, 3)$ veya $(6, 5) \to (1, 5)$ dönüşümü yapmaktır. Benzer şekilde 3'ü yok etmenin tek yolu da $(3, 2) \to (1, 2)$'dir. 3'e bölünmeyen bir çarpım elde etmek için 6 ve 3'ü yok etmeliyiz. Bunun için $(6, 5) \to (1, 5)$ ve $(3, 2) \to (1, 2)$ kullanırsak $1, 1, 1, 2, 4, 5$ sayılarını elde ederiz. Eğer $(5, 6) \to (2, 3)$ ve iki defa $(3, 2) \to (1, 2)$ kullanırsak $1, 1, 1, 2, 2, 4$ elde ederiz. Aslında ikinci yolla 16'yı elde etmiş olduk. Sayıları daha da büyültemeyeceğimizden, ikinci yolla en fazla 16'yı elde ederiz. Diğer 3'ün katı olmayan sayılar için ilk yoldan devam etmeliyiz.

$1, 1, 1, 2, 4, 5$ için 20 ve 32'yi elde etmeye çalışalım. $(2, 1) \to (1, 1)$ dönüşümünden $1, 1, 1, 1, 4, 5$ elde ederiz ve çarpımları 20 olur.

32'yi elde etmek için 5'i 4 ile değiştirmek gerekmektedir. Yani $(a, 5) \to (a, 4)$ veya $(5, a) \to (a, 4)$ şeklinde bir dönüşüm olmalıdır. Ancak ikisinde de uygun a bulunmaz. Dolayısıyla 32'yi elde edemeyiz.

24'ü elde etmek için 6 veya 3'den bir tanesini yok etmeliyiz. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ olduğundan 5 ve 6'yı yok etmeye odaklanabiliriz ancak yok ederken 1 elde etmeliyiz. Buradan $(6, 5) \to (1, 5)$ ve $(5, 4) \to (1, 4)$ dönüşümlerini uygularsak $1, 1, 1, 2, 3, 4$ sayılarını elde etmiş oluruz ve çarpımları 24 olur.

Dolayısıyla sadece $16, 20, 24$ sayıları elde edilebilir.

25 $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninde A noktasından BC kenarına inen dikmenin ayağı D ve $[AD]$ nin orta noktası E olsun. $m(\widehat{BEC}) = 120°$ ise $\frac{|BC|}{|AD|}$ kaçtır?

a) 2 **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **c)** 3 **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** 4

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$$\tan\angle BED = \frac{BD}{DE} = \frac{2 \cdot BD}{AD}$$

$$\tan\angle CED = \frac{CD}{DE} = \frac{2 \cdot CD}{AD}$$

$$\begin{aligned}
\tan 120^\circ &= \tan(\angle BED + \tan\angle CED) \\
&= \frac{\tan\angle BED + \tan\angle CED}{1 - \tan\angle BED \cdot \tan\angle CED} \\
&= \frac{\dfrac{2(BD+CD)}{AD}}{1 - \dfrac{4\cdot BD\cdot CD}{AD^2}} \\
&= \frac{\dfrac{2\cdot BC}{AD}}{-3} \\
&= -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

26 $f : \{1,2,...,30\} \to \{1,2,...,30\}$ birebir bir fonksiyon olmak üzere, en fazla kaç tane $1 \le a \le 30$ tam sayısı için $f(1)f(2)...f(a)+1$ sayısı 31 ile tam bölünür?

a) 14 **b)** 15 **c)** 16 **d)** 29 **e)** 30

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Fonksiyonun tanım ve değer kümesinin eleman sayıları eşit olduğundan ve birebir olduğundan, birebir ve örten olmalıdır. 31 modunda bir ilkel kök alalım, g olsun (31 asal sayı olduğundan ilkel kökü vardır hatta tek ilkel kök 3'tür). $0 \le r_i \le 30$ için $f(i) \equiv g^{r_i} \pmod{31}$ olsun ($(k,p)=1$ olan her k tamsayısı sabit bir ilkel kökün kuvveti olarak yazılabilir). Ayrıca $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ olduğundan $g^{15} \equiv -1 \pmod{31}$'dir. Yani

$$\begin{aligned}
f(1)f(2)\cdots f(a)+1 \equiv g^{r_1+r_2+\cdots+r_a} - g^{15} \pmod{31} &\iff g^{r_1+r_2+\cdots+r_a} \equiv g^{15} \pmod{31} \\
&\iff r_1+r_2+\cdots+r_a \equiv 15 \pmod{30}
\end{aligned}$$

olacaktır. Olabildiğince çok a değeri için bunun sağlanmasını istiyoruz. Dolayısıyla bu şartı sağlayan iki a değeri için bunlara $a_1 < a_2$ dersek, $r_{a_1+1} + r_{a_1+2} + \cdots + r_{a_2} \equiv 0 \pmod{30}$ olmalıdır. Bu a değerlerinin sıklığını arttırmak için ara kısımda kalanı 0 veya $(k, 30-k)$ olarak seçebiliriz. Örneğin

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_{30}) = (15, 0, 1, 29, 2, 28, 3, 27, \ldots, 14, 16)$$

olarak seçersek $a=1$ ve her çift $1 \le a \le 30$ tamsayısı için $r_1+r_2+\cdots+r_a \equiv 15 \pmod{30}$ olur, böylece 16 tane a değeri için $31 \mid f(1)f(2)\cdots f(a)+1$ olan bir fonksiyon bulmuş oluruz.

Eğer 16'dan fazla a olabilseydi en az iki tane r_i'lerde 0 kullanmamız gerekecekti, bu da birebirlikle çelişir. Cevap 16'dır.

Ek olarak fonksiyonun kendisini de verelim, $f(1) \equiv 3^{15} \pmod{31}$, $f(2)=1$, $n \ge 3$ için n tekse $f(n) \equiv 3^{\frac{n-1}{2}} \pmod{31}$ ve n çiftse $f(n) \equiv 3^{31-\frac{n}{2}} \pmod{31}$ olarak seçilebilir.

Çözüm 2:

Cevap: 16.

Genel olarak bir p tek asal sayısı için cevabın $\dfrac{p+1}{2}$ olduğunu gösterelim. $g(a) = f(1)f(2)\ldots f(a)+1$ diyelim. Bir a sayısı için $p \mid g(a)$ ve $p \mid g(a+1)$ olursa $p \mid g(a+1)-g(a)$ ve dolayısıyla $f(a+1) \equiv 1 \pmod{p}$ olmalı. Yani ardışık tüm ikililere bakarsak, en fazla bir tane ikili için iki sayı birden p 'ye bölünebilir, dolayısıyla en fazla $\dfrac{p+1}{2}$ sayı bu şartı sağlayabilir. Örnek için de $f(1) = p-1, f(2) = 1$ ile başlayıp kalan sayıları $f(2k-1) \equiv \dfrac{1}{f(2k)} \pmod{p}$ şeklinde gruplayabiliriz. Dolayısıyla $a = 1, 2, 4 \ldots, p-1$ için $p \mid g(a)$ olur.

Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

$\boxed{27}$ x, y, z pozitif gerçel sayıları

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ \sqrt{36-x^2}+\sqrt{49-y^2}+\sqrt{169-z^2} &= 24 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa $\dfrac{xz}{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{30}{7}$ **b)** 5 **c)** 6 **d)** $\dfrac{65}{8}$ **e)** $\dfrac{49}{3}$

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{A}$

Köklerin tanımlı olabilmesi için $6 \geq x > 0$, $7 \geq y > 0$ ve $13 \geq z > 0$ olmalıdır. Koordinat düzlemini ele alalım. $A(\sqrt{36-x^2}, x)$, $B(\sqrt{36-x^2}+\sqrt{49-y^2}, x+y)$ ve $C(\sqrt{36-x^2}+\sqrt{49-y^2}+\sqrt{169-z^2}, x+y+z) = C(24, 10)$ olsun. Bu durumda O orijin olmak üzere,

$$|OA| = 6, \qquad |AB| = 7, \qquad |BC| = 13$$

olacaktır. Ayrıca $|OC| = \sqrt{24^2+10^2} = 26$'dır.

$$|OA| + |AB| + |BC| = 26 = |OC|$$

olduğundan üçgen eşitsizliğinden O, A, B, C doğrusal olmalıdır. Buradan $x : y : z = 6 : 7 : 13$ olmalıdır. $x = 6k$, $y = 7k$ ve $z = 13k$ için $x+y+z = 26k = 10$ olduğundan $k = \frac{5}{13}$ olacaktır. Buradan da

$$\frac{xz}{y} = \frac{78k^2}{7k} = \frac{78k}{7} = \frac{78\cdot 5}{13\cdot 7} = \frac{30}{7}$$

elde edilir.

Çözüm 2:

Diğer bir yol: $x+y+z = 10$ kullanarak,

$$S_1 = (6-x)+(7-y)+(13-z) = 16 \quad \text{ve} \quad S_2 = (6+x)+(7+y)+(13+z) = 36$$

elde edilir. Şimdi, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$36 \times 16 = S_1 S_2 \geq (\sqrt{36-x^2}+\sqrt{49-y^2}+\sqrt{169-z^2})^2 = 576,$$

bulunur, dolayısıyla $\frac{6-x}{6+x} = \frac{7-y}{7+y} = \frac{13-z}{13+z} = \frac{4}{9}$ sağlanmalıdır. Buradan $xz/y = 30/7$ elde edilir.

Çözüm 3:

6 ve 7 ifadelerinin toplamının 13 e eşit olması tesadüf değildir. Burada tamamen kök ve tamkareden tamkare çıkarımı bize aslında geometrik bir konjektür oluşturabileceğimiz hakkında fikir veriyor.

$$\angle ABC = \angle ADE = \angle EFC = 90^\circ$$

olmak üzere hipotenüsü 13 olan bir üçgen (ΔABC) çizip BC tabanına z diyelim. Diğer iki köklü ifade için de üçgenler (ΔADE, ΔEFC) oluşturduğumuzda, bunların hipotenüsünü 13 hipotenüsüne sıra fark etmeksizin yerleştirelim. Bunların z'ye paralel kısımlarına x ve y verirsek aslında soruda verilen

$$\sqrt{36-x^2}+\sqrt{49-y^2}+\sqrt{169-z^2}=|AB|+|DE|+|FC|=2|AB|=24$$

$$2|AB|=12 \Rightarrow z=5$$

Ayrıca şekilden $x+y=5$ elde edilir. Buradan x,y yi bulabiliriz fakat daha direkt bir çözüm olması amacıyla benzerlikten $\dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{7}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\frac{xz}{y}=5\cdot\frac{6}{7}=\boxed{\frac{30}{7}}$$

28 Bir masa üzerinde k,m ve n bilye içeren üç öbek bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu masa üzerindeki öbeklerden istediği ikisini seçiyor ve bu iki öbeğin daha az bilye içereninden daha fazla bilye içerenine istediği bir pozitif tam sayı adedince bilyeyi aktarıyor (seçilen öbeklerde bilye sayıları eşitse bilyeler öbeklerin herhangi birinden aktarılıyor). Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(k,m,n)=(9,9,21),(11,11,11),(9,10,31),(8,16,24)$ ve $(9,22,22)$ için birer kez oynanırsa oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{C}$

Oyuna başlayan kişi A olsun, diğer oyuncu B olsun. B'nin yapabileceği en iyi hamlelerle bile kaybetmesini istiyoruz. A'nın kazanması, yani B'nin hamle yapamaması için iki öbekte hiç bilye kalmaması gerekir çünkü aksi takdirde boş olmayan iki öbeği seçerek hamlesini yapabilir. Bu yüzden A'nın kazanmayı garantileyebilmesi için B'nin bir hamlesi sonunda bir öbekte hiç bilye kalmamalıdır. Böylece A da diğer iki öbeği seçerek dolu öbeklerden de birini boşaltır ve oyunu kazanır. Yani B'nin bir noktada bir öbeği boşaltması gerekecektir. Buna zorunda kalması için iki öbekte birer bilye kalmalıdır. Aksi takdirde birden fazla bilye olan öbekleri seçer ve öbeği sıfırlamak zorunda kalmaz. Yani bir noktada B'nin hamle yapması gerektiği öbekler $x>1$ için $(x,1,1)$ formatında olmalıdır.

Yani A'nın önünde tek bilyeli bir öbek kalırsa, diğer ikisini seçerek birini 1'e düşürür (tabi halihazırda 1 bilye olmaması lazım). Bu yüzden B'nin önünde 2 tane 2 kalmalıdır ki birini 1'lemek zorunda olsun. Yani $x>2$ için $(x,2,2)$ formatında olmalıdır.

Bu şekilde geriye doğru ilerlersek B'nin önünde $x>y$ için (x,y,y) formatında öbekler kaldığında A kazanır. Aksi takdirde ise aynı taktiği B kullanacağından B kazanacaktır.

Dolayısıyla $(9,9,21)$ için B kazanmayı garantiler.

$(11,11,11)$ için A, öbekleri $(11-x,11+x,11)$ yapar. B ise bunları $(11-x,11-x,11+2x)$ yaparak oyunu kazanır.

$(9,10,31)$ için A, öbekleri $(9,9,32)$ yapar ve kazanır.

$(8,16,24)$ için A, öbekleri $(8,8,32)$ yapar ve kazanır.

$(9,22,22)$ için A öbekleri $(9,9,35)$ yapar ve kazanır.

Dolayısıyla sadece 3 tane durumda A kazanmayı garantileyebilir.

Çözüm 2:

Cevap: 3.

$a \leq b$ olmak üzere, kendi hamlesi sonucunda durumu (a, a, b) haline getiren oyuncu her zaman kendi hamlesi sonucunda durumu yine benzer hale getirerek oyunu kazanmayı garantileyebilir. Sonuç olarak birinci oyuncu oyunu $(9, 10, 31), (8, 16, 24)$ ve $(9, 22, 22)$ durumlarında kazanmayı garantileyebilir.

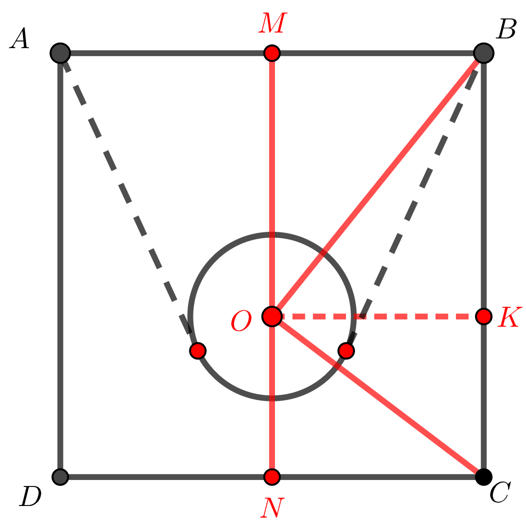
Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

29 Bir kenar uzunluğu 50 olan $ABCD$ karesinin iç bölgesinde bir Γ çemberi çiziliyor. A ve B den Γ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları 40, C den Γ çemberine çizilen teğetin uzunluğu 30 ise Γ çemberinin yarıçapı kaçtır?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$



AB nin orta noktası M, CD nin orta noktası N, çemberin merkezi O, çemberin yarıçapı r olsun.

A dan ve B den çizilen teğetler eşit olduğu için, $40^2 = AO^2 - r^2 = BO^2 - r^2 \Rightarrow AO = BO$, çemberin merkezi MN üzerindedir.

O dan BC ye inilen dikmenin ayağı K olsun.

$BO^2 = 40^2 + r^2$, $CO^2 = 30^2 + r^2$ olduğu için $BK^2 - CK^2 = BO^2 - CO^2 = 40^2 - 30^2 = 700$.

$BK + CK = 50$ olduğu için $BK - CK = 14$ ve $BK = 32$ elde edilir.

$OK = 25$ olduğu için $BO^2 = 40^2 + r^2 = 32^2 + 25^2 = 1649$ ve $r = 7$ elde edilir.

30 $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + (31!)^{(31!)}$ sayısının 31 ile bölümünden kalan nedir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 15 **d)** 16 **e)** 30

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{E}$

$S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \ldots + (\ 31!^{31!})$ sayısının 31 ile bölümünde kalanı bulabilmek için bu sayıyı oluşturan terimleri aralıklara bölelim.

Aralıklarımızı, $1-31$ aralığında ilk 31 terim , $32-62$ aralığındaki 31 terim, $63-93$ aralığındaki 31 terim şeklinde oluşturalım. Toplamda $\frac{31!}{31} = 30!$ kadar aralığımız var. $\pmod{31}$'e göre kalanlarımız $0, 1, 2, 3, \ldots, 29, 30$'dur. $31k + r$ formundaki sayılar $\pmod{31}$'de r'ye denktir.

Örnek olarak $r = 2$ alalım.

$$2^2 + (31+2)^{31+2} + (2\cdot 31+2)^{2\cdot 31+2} + \cdots + (31k+2)^{31k+2} + \equiv 2^2 + 2^{31+2} + 2^{2\cdot 31+2} + \cdots + 2^{31k+2} \pmod{31}$$

Küçük fermat teoreminden eğer p asal ve $(a,p) = 1$ ise $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$'dir. Buradan

$$2^2 + 2^{31+2} + 2^{2\cdot 31+2} + \cdots + 2^{31k+2} \equiv 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k+2} \pmod{31}$$

Toplam $30!$ aralık var. Her aralıkta bir tane 2 kalanının kuvveti var. $30! = k+2-2+1 = k+1$ ve $k = 30!-1$'dir.

$$2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots 2^{k+2} = 2^2\left(1 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^k\right) \equiv 2^2 \cdot \frac{\left(2^{k+1}-1\right)}{2-1} \equiv 2^{k+3} - 4 \pmod{31}$$

olur. Bunu genelleştirirsek, $2 \le t \le 30$ için $(31k+t)^{31k+t}$ formatındaki terimler için de

$$t^t + t^{t+1} + t^{t+2} + \cdots + t^{k+t} \equiv t^t \cdot \frac{\left(t^{k+1}-1\right)}{t-1} \pmod{31}$$

kalanı elde edilecektir. Yukarıda bulunan ifadeyi $\pmod{31}$'de incelersek

$$t^t \cdot \frac{\left(t^{k+1}-1\right)}{t-1} \equiv a \pmod{31}$$

olsun.

$$\Longrightarrow\ t^t\left(t^{k+1}-1\right) \equiv a\,(t-1) \pmod{31}$$
$$\Longrightarrow\ t^t\left(t^{30!}-1\right) \equiv a\,(t-1) \equiv 0 \pmod{31}$$

çünkü küçük fermat teoreminden $\left(t^{30!}-1\right) \equiv (1-1) \equiv 0 \pmod{31}$'dir. Öyleyse 31'e bölümünden kalanı $2 \le t \le 30$ aralığındaki olan tüm terimler için 0 kalanını elde ederiz. Ayrıca 1 kalanından da $30!$ kadar vardı. Bu kalanda Wilson teoreminden $30! \equiv -1 \pmod{31}$ olduğu için tüm toplam -1, yani 30 kalanı vermektedir.

Çözüm 2:

Cevap: 30.

Bir p asalı için çözelim, her ardışık p^2-p terimde alt tarafın $\pmod{p}$ değeri ve üst tarafın $(\bmod p-1)$ değeri olası tüm ikilileri tarayacaktır. $1 + a + \ldots + a^{p-2}$ toplamı da $a = 1$ için -1, kalan tüm değerlerde 0 olacağı için her ardışık p^2-p terimin toplamı $(\bmod p)$ 'de -1 olacaktır. $p! = \left(p^2-p\right)(p-2)!$ olduğu için de tüm toplamın $(\bmod p)$'deki değeri $-(p-2)! \equiv -1$ olacaktır.

Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

31

$$(xy+2)^2 + 10(x+y) + 21 = 2(x^3+y^3) + 5(x^2+y^2)$$

eşitliğini sağlayan x ve y gerçel sayıları için x^2+y^2 en az kaçtır?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

Verilen denklemde her şeyi sol tarafa atalım.

$$x^2y^2 + 4xy - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 2y^3 - 5y^2 + 10y + 25 = 0$$

olacaktır. Denklem x ve y'ye göre simetriktir. Dolayısıyla $f(x,y)\cdot f(y,x)$ şeklinde çarpanlarına ayrılması olasıdır. Ayrıca denklemdeki sabit $+25$ terimi de bunu desteklemektedir. Çarpım sonucunda x^2y^2, xy, x^3 ve sabit terim olmasından dolayı

$$f(x,y) = Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E$$

şeklinde olduğunu varsayabiliriz. Deneyelim,

$$f(x,y)f(y,x) = (Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E)(Ay^2 + By + Cx^2 + Dx + E)$$

olacaktır. Basit katsayılara bakalım. Öncelikle sabit terim $E^2 = 25$ olduğundan genelliği bozmadan $E = 5$ olsun. x ve y'nin katsayıları sırasıyla $DE + EB = 5(D+B) = 10$ olduğundan $D + B = 2$ olacaktır. xy'nin katsayısından ise $B^2 + D^2 = 4$ bulunur. Yani $(B,D) = (2,0),(0,2)$ olacaktır. Yine genelliği bozmadan $(B,D) = (2,0)$ kabul edebiliriz. Önceki E kabulü bunu etkilemeyecektir. x^2y ve xy^2'nin katsayıları 0 olmalıdır. Buradan $A = 0$ elde edilir. x^3 ve y^3'ün katsayılarından ise $C = -1$ bulunur. Sonuç olarak

$$f(x,y)f(y,x) = (2x - y^2 + 5)(2y - x^2 + 5)$$

buluruz ve açtığımızda gerçekten de denklemdeki ifadeye eşit olduğunu görürüz.

Dolayısıyla $x^2 = 2y + 5$ veya $y^2 = 2x + 5$ elde ederiz. Genelliği bozmadan $y^2 = 2x + 5$ olsun.

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$$

olduğundan $\min(x^2+y^2) = 4$ olur. Minimum değer ise $x = -1$ ve $y = \sqrt{3}$ alındığında sağlanacaktır. Tek eşitlik durumu bu değildir ama bir tane ikili için sağlaması yeterlidir.

32 32×31 bir tahtanın tüm birim karelerine farklı birer gerçel sayı yazılmıştır. Bir birim karedeki sayı, bu birim kareyle en az bir ortak köşe paylaşan birim karelerdeki sayıların en fazla birinden küçükse bu birim kareye ***özel*** birim kare diyelim. Özel birim kare sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 480 **b)** 488 **c)** 496 **d)** 505 **e)** 512

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Cevap: 512.

Birim karelerden oluşan her 2×2 karede en fazla iki özel birim kare olabilir. 32×30 tahtayı, herhangi ikisinin ortak birim karesi bulunmayan $16\cdot 15 = 240$ tane 2×2 kareye ayıralım. Buna göre, en sağ sütun hariç tahtanın üzerinde en fazla $2\cdot 16\cdot 15 = 480$ tane ve bütün tahtanın üzerinde en fazla $480 + 32 = 512$ özel birim kare olabilir. Şimdi de 512 özel birim kare için bir örnek verelim. Tahtanın sütunlarını soldan sağa doğru numaralandıralım ve tek numaralı sütunların birim karelerine aşağıdan yukarıya doğru artan sırayla pozitif sayılar, kalan birim karelerin hepsine negatif sayılar yazalım. Bu durumda üzerinde pozitif sayı yazan $32\cdot 16 = 512$ birim karenin her biri özel olur.

Kaynak: Tübitak 31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınav Soru ve Çözümleri 2023

32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2024

1 $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda, E noktası D ile F arasında olacak şekilde $[CD]$ üzerinde alınan E ve F noktaları için, $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BAF}) = 45°$, $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{ABE}) = 60°$, $|DE| = 3$, $|CF| = 4$ ise $|AB|$ kaçtır?

a) $2 + 4\sqrt{3}$ **b)** $3 + 3\sqrt{3}$ **c)** $5 + \sqrt{3}$ **d)** $4 + 2\sqrt{3}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{C}$

Yamuğun bir dik yamuk olduğu açıktır. Ayrıca BEC üçgeni eşkenardır. $|EF| = x$ olsun. ADF üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AD| = x + 3$ elde edilir. B'den geçip DC ye dik olan doğrunun DC ile kesişimi Q olmak üzere $|QB| = x+3$ olduğundan ve eşkenarlıktan $|QC| = \frac{x+3}{\sqrt{3}} = \frac{x+4}{2}$ olur. Buradan $x = 2\sqrt{3}$ ve $|AB| = x + 7 - \frac{x+4}{2} = \frac{x+10}{2} = 5 + \sqrt{3}$ elde edilir.

2 $3^{p^3} + 5^{p^5} + 7^{p^7} + 11^{p^{11}}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{B}$

Bir a pozitif tamsayısı ve p asalı için fermat teoreminden $a^p \equiv a \pmod{p}$ olduğundan $a^{p^2} \equiv a^p \equiv a$ elde edilir. Aynı işlemi yeniden uygularsak $a^{p^3} \equiv a^{p^2} \equiv a \pmod{p}$ elde edilir. Bu şekilde herhangi bir n pozitif tamsayısı için $a^{p^n} \equiv a \pmod{p}$ elde edilir. Bu yüzden sorunun bize verdiği ifade $3^{p^3} + 5^{p^5} + 7^{p^7} + 11^{p^{11}} \equiv 3+5+7+11 \equiv 26 \pmod{p}$ gelir. Buradan p'nin 2 veya 13 olabileceği anlaşılır. Yani p nin alabileceği 2 değer vardır.

3 Her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için n'den büyük olmayan en büyük asal sayı $f(n)$, n'den büyük olan en küçük asal sayı $g(n)$ olsun.

$$\frac{1}{f(2)g(2)} + \frac{1}{f(3)g(3)} + \cdots + \frac{1}{f(112)g(112)}$$

toplamı kaçtır?

a) $\frac{109}{222}$ **b)** $\frac{111}{226}$ **c)** $\frac{110}{113}$ **d)** $\frac{113}{1224}$ **e)** $\frac{55}{111}$

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{B}$

$p < q$ ve p ve q ardışık asal sayılar olmak üzere. Herhangi bir $p \leq x < q$ x tamsayısı için $f(x) = p$ ve $g(x) = q$ olduğundan $\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{pq}$ olur. p ve q arasında p dahil $q - p$ adet tamsayı olduğundan $\frac{1}{f(p)g(p)} + \frac{1}{f(p+1)g(p+1)} + ... + \frac{1}{f(q-1)g(q-1)} = \frac{q-p}{pq} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ olur. Buradan sorudaki ifade $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... - \frac{1}{113}$ olur. Buda birbirini götüren ifadelerden ötürü $\frac{1}{2} - \frac{1}{113} = \frac{111}{226}$ olur.

4 100 öğrencinin katıldığı bir yaz okulunda en fazla 4 arkadaşı olan öğrencilere *utangaç* diyelim. Her öğrencinin en az 4 tane utangaç arkadaşı varsa, utangaç öğrenci sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 5 **e)** 8

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

Her öğrencinin en az 4 utangaç arkadaşı varsa her öğrencinin en az 4 arkadaşı vardır. O zaman herhangi bir utangaç öğrencinin en az 4 arkadaşı vardır.

Bir utangaç öğrencinin en fazla 4 arkadaşı olacağı için herhangi bir utangaç öğrencinin tam olarak 4 arkadaşı vardır. Her öğrencinin en az 4 utangaç arkadaşı olduğu için bir utangaç öğrencinin bütün arkadaşları utangaçtır.

O halde utangaç olmayan bir öğrenci utangaç bir öğrenci ile arkadaş olamaz. Her öğrencinin en az 4 utangaç arkadaşı olması gerektiği için bu topluluktaki bütün öğrenciler utangaçtır.

Soru bizden istemese de örnek bir konfigürasyon oluşturabiliriz:

1	55	56	57	58
2	56	57	58	59
3	57	58	59	60
4	58	59	60	61
$\vdots$				
46	100	51	52	53
47	51	52	53	54
48	52	53	54	55
49	53	54	55	56
50	54	55	56	57

Not:

Her köşesinden tam olarak 4 kenar çıkan çizgeye (graf), 4−düzenli çizge denir.

Wikipedia

Çözüm 2:

Bir başka basit örnek konfigürasyon şu olabilir:

Önce K_5 tam grafı (çizgesi) çizelim. Bunu, bir düzgün beşgenin tüm kenarları ve köşegenleri çizilmiş olarak düşünebilirsiniz. 20 tane K_5 grafı çizersek, tüm koşullar sağlanır.

5 İç teğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninde, IBC üçgeninin çevrel çemberine I noktasında teğet olan doğrunun $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarıyla kesişimlerine sırasıyla M ve N diyelim. $|BC| = 225$, $|BM| = 64$ ve $|CN| = 81$ ise $|IB| + |IC|$ kaçtır?

a) 250 **b)** 260 **c)** 270 **d)** 280 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{E}$

$\angle ACI = \angle ICB = \alpha$ ve $\angle ABI = \angle IBC = \theta$ olsun. Teğetlikten $\angle MIB = \alpha$ ve $\angle NIC = \theta$ elde edilir. $\triangle IBC \sim \triangle NIC$ olduğundan $|IC|^2 = 225 \cdot 81$ ve $|IC| = 9 \cdot 15 = 135$ elde edilir. $\triangle BMI \sim \triangle BIC$ olduğundan da $|IB|^2 = 225 \cdot 64$ ve $|IB| = 120$ elde edilir. Bizden istenen cevap $135 + 120 = 255$ olur.

6 n bir pozitif tam sayı ve a, b, c, d pozitif tek tam sayılar olmak üzere, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 11 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c, d, n) beşlisi vardır?

a) 4 **b)** 6 **c)** 12 **d)** 16 **e)** 20

Çözüm:

Cevap: $\boxed{C}$

x, tek bir tamsayı ise $x = 2\ell + 1$ olarak yazılabilir ve

$$x^2 \equiv 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4\ell(\ell+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$$

elde edilir. a, b, c, d tek olduğundan

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 11 \cdot 4^n \equiv 4 \pmod 8$$

bulunur, yani $n = 1$ olmalıdır.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 44$$

olduğundan ve 44'ten küçük tüm tek tamkareler $1, 9, 25$ olduğundan $a, b, c, d \in \{1, 3, 5\}$ olmalıdır, ancak 2 veya daha fazla 5 olamaz çünkü toplam en az 50 olur. En az bir 5 olmalıdır aksi takdirde toplam en fazla 36 olur.

Genelliği bozmadan $d = 5$ olsun. Bu durumda $a^2 + b^2 + c^2 = 19$ olacaktır. Sadece $1^2 + 3^2 + 3^2$ bunu sağlar. Yani $n = 1$ ve $(a, b, c, d) = (1, 3, 3, 5)$ veya permütasyonları bu denklemi sağlar. Tekrarlı permütasyondan $\frac{4!}{2!} = 12$ tane çözüm bulunur.

$\boxed{7}$ x ve y pozitif gerçel sayıları $x^2 + xy = 1$ şartını sağlıyorsa, $61x + 25y$ en az kaç olabilir?

a) 40 **b)** 50 **c)** 60 **d)** 70 **e)** 80

Çözüm 1:

$x^2 + xy = 1$ ifadesini x parantezine alıp her iki tarafı x'e bölersek $x + y = \frac{1}{x}$ olur. $61x + 25y$ ifadesini $25(x + y) + 36x$ olarak yazarsak $\frac{25}{x} + 36x \Rightarrow AGO$'dan $36x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{36} \cdot 25 = 60$ olup istenen ifadenin en küçük değeri 60 olur. (Eşitlik durumu: $x = \frac{5}{6}$ ve $y = \frac{11}{30}$ için sağlanır.)

Çözüm 2:

Bu soru için biraz gereksiz ileri seviye çözüm olacak ama ilgilenenler için eklemek istedim.

Bizden $f(x, y) = 61x + 25y$'nin en küçük değeri, $g(x, y) = x^2 + xy - 1 = 0$ sınırlayıcı şartı altında isteniyor. Lagrange çarpanı metodundan, aradığımız x, y değerlerini bulalım.

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases} \implies \begin{cases} 61 = \lambda(2x + y) \\ 25 = \lambda x \end{cases}.$$

İkinci eşitliğin iki katını ilkinden çıkartırsak, $11 = \lambda y$ bulunur. Yani $x = \frac{25}{\lambda}$ ve $y = \frac{11}{\lambda}$ elde edilir.

$$x(x + y) = 1 \implies \frac{25 \cdot 36}{\lambda^2} = 1 \implies \lambda = 30.$$

Dolayısıyla,

$$\min(61x + 25y) = \frac{61 \cdot 25}{30} + \frac{25 \cdot 11}{30} = 60$$

bulunur.

Not: Bu yöntem biraz test mantığına kaçan bir yöntemdir çünkü bazı ara adımlar atlanmıştır. Örneğin bulduğumuz eşitlik durumunun en büyük değil de en küçük olduğunu nerden biliyoruz gibi detayları incelemedik. Ayrıca bu yöntem, her soru için çok temiz ifadeler çıkarmayabilir. Yine de türev incelemesi vs. gibi analiz yöntemlerine aşina öğrenciler test sınavlarında kullanabilirler.

Çözüm 3:

(Resmi çözüm) $(61x+25y)^2 = (11x-25y)^2+3600x(x+y) = (11x-25y)^2+60^2$ olarak yazılabilir , buradan $61x+25y \geq 60$ olur. $x = 5/6$ ve $y = 11/30$ için eşitlik sağlanır.

$\boxed{8}$ Bir tahtaya $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ sayıları yazılmıştır. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, her işlemde tahtadaki sayılardan k tanesi seçiliyor ve seçilmiş sayı 1 azaltılıyor. Birkaç işlem sonucunda tahtadaki tüm sayıları 0 yapmak mümkünse k'ye *uygun* sayı diyelim. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sayılarından kaç tanesi uygun sayıdır?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{D}$

Cevap: 4. Yapılan işlem sayısı en az 40 olmalıdır. Buna göre, $40k \leq 5+10+\cdots+40 = 180$ ve buradan da $k \leq 4$ bulunur. Şimdi de $k = 1, 2, 3, 4$ değerlerinde tahtadaki sayıların 0 yapılabileceğini gösterelim. $k = 1$ durumu açıktır. $k = 2$ durumunda sayıları toplamları 90 olan iki gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{20, 30, 40\}$ ve $\{5, 10, 15, 25, 35\}$ olarak seçilebilir. $k = 3$ durumunda sayıları toplamları 60 olan üç gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{25, 35\}, \{20, 40\}$, ve $\{5, 10, 15, 30\}$ olarak seçilebilir. $k = 4$ durumunda sayıları toplamları 45 olan dört gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{5, 40\}, \{10, 35\}, \{15, 30\}$ ve $\{20, 25\}$ olarak seçilebilir.

Kaynak: Tübitak 32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Çözüm Kitapçığı

$\boxed{9}$ $|AB| < |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\hat{A}$ açısının iç açıortayının $[BC]$ kenarı ve ABC üçgeninin çevrel çemberiyle ikinci kesişim noktasına sırasıyla D ve E diyelim. E noktasından BC doğrusuna inen dikmenin BC ve AB doğruları ile kesişimi sırasıyla F ve G olsun. D noktasından AC ve GC doğrularına inen dikme ayakları sırasıyla K ve L olmak üzere, $|DK| = 3$ ve $|DL| = 11$ ise $\dfrac{|DF|}{|FC|}$ oranı kaçtır?

a) $\dfrac{3}{11}$ **b)** $\dfrac{4}{7}$ **c)** $\dfrac{3}{7}$ **d)** $\dfrac{4}{11}$ **e)** $\dfrac{3}{8}$

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{B}$

$|BF| = |FC|$ olduğu açıktır. Buradan $|GB| = |GC|$ elde edilir. GBC üçgeni ikizkenardır. D noktasından AB ye inilen dikme ayağı R olmak üzere $|DK| = |DR| = 3$ olur. $\angle GBC = \angle GCB$ olduğundan $\triangle LDC \sim \triangle RDB$ olur ve $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{11}$ elde edilir. F orta nokta olduğundan $\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{4}{7}$ elde edilir.

$\boxed{10}$ k bir pozitif tam sayı olmak üzere, k'nin pozitif tam bölenlerinin sayısını $d(k)$ ile gösterelim. $d(n^3) = 2 \cdot d(n^2)$ ve $1 \leq n \leq 2024$ koşullarını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 9 **e)** 11

Çözüm:

Cevap: $\boxed{E}$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 2024$ olduğundan n sayısının en fazla 4 asal böleni olabilir. Dolayısıyla $i = 1, 2, 3, 4$ için p_i'ler farklı asal ve $a_i \geq 0$ tamsayılar olmak üzere $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4}$ olarak yazabiliriz. Bazı a_i'lerin 0 olması bize 3 veya daha az sayıda asal bölen olma durumlarını verir. Ayrıca, $a_i = 0$ durumu d fonksiyonunun formülüne de etki etmez.

$$\frac{d(n^3)}{d(n^2)} = 2 \implies \prod_{i=1}^{4} \frac{3a_i+1}{2a_i+1} = \prod_{i=1}^{4} \left(1 + \frac{a_i}{2a_i+1}\right) = 2$$

Eğer 3 veya 4 asal bölen olsaydı, bu asal bölenlere karşılık gelen $a_i \geq 1$ olacaktır ve

$$1+\frac{a}{2a+1} \geq 1+\frac{a}{3a}=\frac{4}{3} \implies \prod_{i=1}^{4}\left(1+\frac{a_i}{2a_i+1}\right) \geq \frac{64}{27}>2$$

elde edilirdi ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla n'nin 1 veya 2 asal böleni vardır.

$n=p^a$ formatındaysa $3a+1=2(2a+1)$ olması gerekir fakat buradan çözüm gelmez. Sonuç olarak n'nin iki tane asal böleni vardır.

$n=p^a q^b$ için

$$(3a+1)(3b+1)=2(2a+1)(2b+1) \implies ab-a-b=1 \implies (a-1)(b-1)=2$$

elde edilir. $(a,b)=(3,2)$ veya permütasyonu bu eşitliğin pozitif tamsayılardaki tek çözümüdür. Dolayısıyla $n=p^3q^2$ formatındadır.

$p=2$ ise $8q^2 \leq 2024$'den $q \leq 13$ bulunur. Yani $q=3,5,7,11,13$ olabilir ve buradan 5 tane n sayısı elde edilir.

$p=3$ ise $27q^2 \leq 2024$'den $q \leq 7$ bulunur. Buradan $q=2,5,7$ elde edilir, 3 tane n sayısı bulunur.

$p=5$ ise $125q^2 \leq 2024$'den $q \leq 3$ bulunur. $q=2,3$ olabilir. 2 tane n sayısı bulunur.

$p=7$ ise $343q^2 \leq 2024$'den $q=2$ bulunur. 1 tane çözüm vardır.

$p=11$ ise $1331q^2 \leq 2024$ bulunur fakat çözüm gelmez. Benzer şekilde $p \geq 13$ için de çözüm gelmez. Toplamda $5+3+2+1=11$ tane n sayısı vardır.

11 $\{3x\}+\{4x\}+\{5x\}=\{x\}+2$ denkleminin kaç tane $0<x<1$ çözümü vardır? (x gerçel sayısı için x'ten, x'i aşmayan en büyük tam sayının çıkarılmasıyla elde edilen sayı $\{x\}$ ile gösterilir. Örneğin, $\{20,24\}=0,24$ ve $\{32\}=0$.)

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** Sonsuz çoklukta **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

$x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ olduğundan sorudaki eşitlik $11x-[-\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 3x\rfloor+\lfloor 5x\rfloor]=2$ olarak yazılabilir. Parantez içindeki kısım tamdeğerlerin toplamı olduğundan $11x$ tamsayı olmalıdır. Buradan $x \in \{\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11}.....\frac{10}{11}\}$ elde edilir. Denenirse yalnızca 2. Sağlar. Cevap 1'dir.

12 5×5 bir satranç tahtasının 5 birim karesine birer bilye yerleştirilecektir. Bu yerleştirme, herhangi bir satır ile herhangi bir sütunun birleşiminde en az bir bilye bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde yapılabilir?

a) 5760 **b)** 5870 **c)** 5940 **d)** 6050 **e)** 6130

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{E}$

Aynı anda hem boş bir satır, hem de boş bir sütun bulunmamalıdır. Peki boş satır yok ama boş sütun olsa olur mu? Ya da boş sütun yokken, boş satır var olabilir mi? Evet. Bilye koyduğumuz kareleri x ile işaretleyelim. Bunları aşağıdaki şekillerden inceleyebiliriz:

x				
x				
	x			
	x			
				x

x	x			
			x	
		x		
				x

Yani, her satırda bir bilye bulunan durumlar (A diyelim) veya her sütunda bir bilye bulunan durumlar (B diyelim) istenen durumları oluşturmaktadır. $s(A) = s(B) = 5^5 = 3125$ tir. Ayrıca, bunların kesişimini incelersek, her bir satırda ve her bir sütunda yalnız bir bilye bulunur. Bunların sayısı da $s(A \cap B) = 5! = 120$ dir. O halde içerme dışarma prensibi ile,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 2 \cdot 3125 - 120 = 6130$$

elde edilir.

13 $|AB| = 50$, $|AC| = 78$, $|BC| = 112$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının üzerinde $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{5}{9}$ şartını sağlayan bir D noktası alınıyor. ABD üçgeninin çevrel merkezi ile ACD üçgeninin ağırlık merkezi arasındaki uzaklık nedir?

a) $\sqrt{1961}$ **b)** $\sqrt{1993}$ **c)** $\sqrt{2001}$ **d)** $\sqrt{2024}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{A}$

$|BD| = 40$ ve $|DC| = 72$ olduğu barizdir. Stewart teoremi veya sezgisel anlayışla $|AD| = 30$ ve $\angle ADB = 90°$ olduğu anlaşılır. ADB ve BDC üçgenleri dik üçgen olduklarından çevrel merkez $[AB]$'nın orta noktası olur. Bu nokta T olsun. Ağırlık merkezi $[BC]$'nın ortası K olmak üzere $[DK]$ üzerinde $|DP| = 26$ olmasını sağlayan P noktasıdır. $2/3$'lük orandan ötürü P'den DC ye inen dikme uzunluğu 10 ve T'den BC' ye inen dikme uzunluğu 15 dir. Yine $2/3$ oranından P'den AD'ye inen dikme uzunluğu 24 ve T'den BC'ye inen dikmenin uzunluğu 20 olduğundan T'den BD'ye inen dikmenin P'ye uzaklığı 44 olur. Ayrıca demin bulduğumuz uzunluklardan T ve P'nin AD'ye göre uzaklıklar farkı 5 olur. Pisagordan $|TP|^2 = 44^2 + 5^2 = 1961$ ve $|TP| = \sqrt{1961}$ olur.

Çözüm 2:

Koordinat sisteminde $B(0,0)$, $C(112,0)$ olacak şekilde B ve C noktaları alırsak $A(40,30)$ noktası sorudaki koşulu sağlar. $D(40,0)$ olacağı için $\triangle ABD$ bir dik üçgen, dolayısıyla $\triangle ABD$ nin çevrel çemberinin merkezi $[AB]$ nin orta noktası $O(20,15)$ olacaktır. $\triangle ACD$ nin ağırlık merkezi de (koordinatların toplamının üçte biri) $G(64,10)$ olur. $|OG| = \sqrt{(64-20)^2 + (10-15)^2} = \sqrt{44^2 + 25} = \sqrt{1961}$ elde edilir.

14 N pozitif tam sayısının 1 dışındaki en küçük tek pozitif böleni d, en büyük tek pozitif böleni ise D olsun. $N = 15D + 11d$ olmasını sağlayan N pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 4576 **b)** 4928 **c)** 5280 **d)** 5632 **e)** 5984

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{A}$

$p_1, p_2, \ldots.., p_r$ artan sırada dizilmiş bir dizi tek asal sayı, x doğal sayı ve $a_1, a_2, \ldots.., a_r$ doğal sayılar olmak üzere (bunların hepsi 0 olsaydı sayı $2^x = 26$ yi sağlamalıydı. Bu yüzden a_1 kesinlikle pozitif tamsayıdır.) sayımızı $2^x \cdot {p_1}^{a_1} \cdot {p_2}^{a_2} \ldots.. {p_r}^{a_r}$ olarak yazalım. $d = p_1$ ve $D = {p_1}^{a_1} \cdot {p_2}^{a_2} \ldots.. {p_r}^{a_r}$ dir. Buradan $(2^x - 15) \cdot {p_1}^{a_1} \cdot {p_2}^{a_2} \ldots.. {p_r}^{a_r} = 11p_1$ elde edilir. a_1 pozitif tamsayı olduğundan barizdir ki $x = 4$'tür ve sayı $2^x \cdot p_1 \cdot 11$ ($p \leq 11$ olmalıdır çünkü bu sayının en küçük asal böleni p_1 dir.) formatındadır. p_1 tek asal sayı olduğundan $3, 5, 7, 11$ değerlerini alabilir. Buradan cevap

$11 \cdot 16 \cdot (3 + 5 + 7 + 11) = 4576$ elde edilir.

15 x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 129 = 12xy + 18(x + y)$ ise xy kaçtır?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{E}$

[left][/left]İfadeyi açıp tek tarafa aktararak, $x^2y^2 - 12xy - 18x - 18y + 130 = 0$ olarak yazalım. Düzenlenirse $(xy - 7)^2 + (9 - x - y)^2 = 0$ elde edilir. Bu yüzden $xy = 7$ olmalıdır. $x + y = 9$ ve $xy = 7$ denkleminin reel çözümleri vardır. Reellik ihlal edilmez.

16 Bir dik koordinat düzleminde, $0 \leq x \leq 9$ ve $0 \leq y \leq 9$ koşullarını sağlayan tam sayı koordinatlı (x, y) noktalarının N tanesi boyanmıştır. Üç köşesi de boyalı olan bir dik üçgen bulunmuyorsa N en fazla kaç olabilir?

a) 16 **b)** 18 **c)** 20 **d)** 22 **e)** 26

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{B}$

Genel olarak $n \times n$ tane noktadan oluşan karesel bir sistemde, en fazla $N = 2n - 2$ tane boyalı nokta işaretlenirse, dik üçgen bulunmayan bir konfigürasyon elde etmek mümkündür. Bunun örneğini verelim:

En üst satırdaki ilk soldan $n - 1$ noktayı boyayalım. Sağ üst köşedeki noktayı boyamayalım. Bu boyasız noktanın altında kalan, (yani en sağdaki sütundaki) $n - 1$ noktayı da boyayalım. Toplam $2n - 2$ nokta vardır. Bu noktaların herhangi üçü seçilirse daima geniş açılı üçgen oluşturur. Dik üçgen oluşmaz. Bizim problemimizde $n = 10$ olup 10×10 noktadan oluşan bir karesel sistem vardır. Dolayısıyla $N_{\max} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$ dir.

$N > 2n - 2$ olursa, neden mutlaka bir dik üçgen oluşmak zorundadır? Bu problemi ve ispatını da 2022 Kasım-Aralık tarihlerinde, sitemizdeki Satranç Tahtası - Boyama başlığında sunmuştuk.

Not: İspat, (muhtemelen bir dahi olan) öğrencim Andrew Carratu'ya aittir. Bazı anekdotlar için bağlantıyı okuyabilirsizin.

Çözüm 2:

Bir satırdaki boyalı noktaların sayısı 0 ya da 1 ise o satıra **hafif**, aksi halde **ağır** diyelim.

Benzer şekilde sütunları da hafif ve ağır diye tanımlayalım.

Bir ağır satır ile bir ağır sütun boyalı bir noktada kesişmişse bir dik üçgen oluşmuş demektir. Böyle bir durum istemiyoruz.

Tüm satırlar hafifse, en fazla 10 boyalı nokta var demektir.

Tüm sütunlar hafifse, yine en fazla 10 boyalı nokta vardır.

Boyalı nokta sayısını daha da artırmak istiyoruz.

Bir ağır satırın tüm noktaları boyalı ise tüm satırlar hafif olmalı. Bu durumu az önce ele almıştık. Benzer durum, sütunlar için de geçerlidir.

En az bir ağır satır ve en az bir ağır sütunun olduğu duruma bakalım:

Ağır satırlardaki boyalı noktaların her biri, bir hafif sütunda yer almalı. Bu hafif sütunlar farklıdır; çünkü bu durumda hafif sütunda en az iki boyalı nokta olur. O halde ağır satırlardaki boyalı nokta sayısı en fazla hafif sütun sayısı kadardır. En az bir ağır satır ve en az bir ağır sütun olduğu durumu incelediğimiz için, en fazla 9 hafif sütun olacaktır.

Benzer şekilde; ağır sütundaki boyalı noktaların her biri, bir hafif satırda yer almalı. Bu hafif satırlar farklı olacağı için, sütunlardaki boyalı noktaların sayısı en fazla hafif satır sayısı kadar, yani 9 olacaktır.

Yani, en az bir satır ve en az bir sütunun ağır olduğu durumda, en fazla 18 nokta boyalı olabilir. Diğer durumlarda en fazla 10 nokta boyalı olabilir.

18 boyalı nokta için örnek durum; $(1,0),(2,0),\ldots,(9,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,9)$ şeklinde verilebilir.

Kaynak:

Bu çözüm,

Mathematical Olympiads 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World, Titu Andreescu, Zuming Feng, George Lee. Syf. 153-154. kitabındaki USAMO 2000/4 sorusuna yapılmış çözümün uyarlanmış halidir.

USAMO 2000'deki soru; $0 \le x \le 999$ ve $0 \le y \le 999$ şartıyla, dik kenarları eksenlere paralel olan dik üçgen şeklinde sorulmuş. Bizim sorumuzda eksenlere paralel şartı olmadığı için örnek 18 nokta seçerken dış satır ve sütunları seçmemiz gerekir.

Diğer çözümler için bkz. AoPS.

17 $m(\widehat{BAC}) = 100°$ olan bir ABC üçgeninde çevrel merkez O noktası olup, A noktasının BC doğrusuna göre yansıması D olsun. $BD \cap OC = \{S\}$ ve $CD \cap OB = \{R\}$ ise $m(\widehat{RAS})$ kaçtır?

a) 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 75° **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{C}$

$\angle BAC = \alpha$ olsun. $\angle BCA = 80° - \alpha$ olur. $\angle OBC = 10°$ olduğundan $\angle SBO = \alpha - 10°$ elde edilir. $\angle SOB = 20°$ olduğundan $\angle DSO = \alpha + 10°$ elde edilir. $\angle OAB = \alpha + 10°$ olduğundan $\angle BSO + \angle BAO = 180°$ olur. $BSOA$ kirişler dörtgenidir. $\angle SAO = \angle BSO = \alpha - 10°$ olur. Benzer şekilde $\angle OAR = 70° - \alpha$ olur. Cevap $\alpha - 10° + 70° - \alpha = 60°$ olur.

18 $n^2 + 1$'in 269 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısının rakamları toplamı kaçtır?

a) 10 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 16 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Cevap: $\boxed{A}$

269 asal bir sayıdır ve $4k+1$ formatında olduğundan $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{269}$ denkliğinin 269 modunda iki çözümü vardır. Öncelikle $269 = 10^2 + 13^2$ olduğunu görelim.

$$13^2 + 10^2 \equiv 0 \pmod{269} \implies (13 \cdot 10^{-1})^2 + 1 \equiv 0 \pmod{269}$$

elde edilir., burada 10^{-1} sayısı, 10'un 269 moduna göre tersidir. Yani n sayısı ya $13 \cdot 10^{-1}$'a ya da $-13 \cdot 10^{-1}$'a denktir.

$$27 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{269} \implies 10^{-1} \equiv 27 \pmod{269}$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$n \equiv \pm 13 \cdot 27 \equiv 82, 187 \pmod{269}$$

bulunur. Yani en küçük n pozitif tamsayısı 82'dir ve rakamları toplamı $8 + 2 = 10$'dur.

Not: $4k+1$ formatındaki asalların iki tamkarenin toplamı olarak yazılabildiği bilinen bir gerçektir. Bu yüzden $p \mid n^2 + 1$ olan n sayılarını bulmak için önce $p = a^2 + b^2$ olarak yazmak işlemleri çok azaltacaktır, çünkü yukarıda da görüldüğü gibi tüm çözümler $n \equiv \pm ab^{-1} \pmod{p}$'dir.

19 r bir gerçel sayı olmak üzere, $5x^4 - 8x^3 + rx^2 - 11x + 10 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı 1 ise gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) $\frac{6}{5}$ **b)** 1 **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Bu soru iptal edilmiştir.

Nedeni:

Polinomun 2 reel 2 kompleks kökü olduğunu varsayalım. Denklem soruda verilen koşuldan $5(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$ formatındadır. İki reel kök ilk çarpanda olmalıdır. Buradan $2a+b=\frac{-11}{5}$ ve $a+b=\frac{-8}{5}$ olur. $a=\frac{-3}{5}$ olur. $\Delta < 0$ olduğundan ilk carpanın kökleri reel olmaz. (Soruda muhtemelen bu unutulup cevap $\frac{3}{5}$ olarak verildi) 4 reel kök olamayacağı açıktır. (Kökler çarpımı 2 olmak zorunda olur.) 3 farklı reel kök olsa denklem $5(x-a)^2(x^2+bx+\frac{2}{a^2})$ formatında olmalıdır. Reel kökler çarpımı $a \cdot \frac{2}{a^2} = 1$ olduğundan $a = 2$ olur fakat katsayılar istediğimiz gibi dağılmaz. ($4b - 2 = \frac{-11}{5}$ ve $b - 4 = \frac{-8}{5}$ olur ortak çözüm gelmez.) Sadece 2 farklı reel kökün olduğu durumda reel kökler x_1, x_2, olmak üzere reel kökler çarpımı $x_1x_2 = 1$ ve $x_1^2x_2^2 = 2$ olmak zorunda olur. Mümkün değildir. Sadece 2 farklı reel kökün olduğu diğer durumda kökler x_1, x_1, x_1, x_3 olabilir. Buradan da $x_1 \cdot x_3 = 1$ ve $x_1^3 \cdot x_2 = 2$ olur. $x_1^2 = 2$ olur. Denklem $(x-x_1)^3(x-x_2)$ olur. x^3 lü terimin katsayısı tamsayı olmaz. Çözüm gelmez. Çözüm yoktur.

Not:

Ayrıca çözümde “reel kökler çarpımı” ifadesinin farklı köklerin çarpılacağını belirttiği ihtimalde de çözüm gelmeyeceğini ispatladık. Eğer katlı köklerde birden fazla çarpılıyorsa ilk ele aldığımız durum yeterlidir.

20 Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir satranç tahtasının birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, her bir satırdaki sayıların toplamı çift ve her bir sütundaki sayıların toplamı tek olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

a) 216 **b)** 240 **c)** 252 **d)** 288 **e)** Hiçbiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{B}$

Bir sütunda 1 tane ya da 3 tane 1 olabilir.

Toplamda 8 tane 1 olacağı için sırası önemsenmeden tek konfigürasyon $3+3+1+1=8$ şeklinde olacaktır.

3 tane 1 içeren sütunlar ya aynı satırda 0 içerecek ya da ikincisi ilkinde 1 içeren satırlardan birinde 0 içerecek.

İki duruma örnek kabaca aşağıdaki gibi verilebilir:

a)

1	1	1	1
1	1		
1	1		

b)

1	1		
1	1		
1		1	
	1		1

Şimdi bu durumları ayrıntılı olarak açalım.

a)

3 tane 1 içerecek sütunlar $\binom{4}{2}$ şekilde seçilebilir.

3 tane 1 içeren sütunda hangi 3 kareye 1 konulacağı $\binom{4}{3}$ şekilde seçilebilir.

1 tane 1 içeren sütunda 1 konulacak kare $\binom{4}{1}$ şekilde seçilir.

1 tane 1 içeren sütunlar aynı satırda 1 içermeli; aksi durumda bu satırlarda tek sayıda 1 olur.

O halde bu durum için $\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 24 \cdot 4$ dağılım olur.

b)

3 tane 1 içerecek sütunlar $\binom{4}{2}$ şekilde seçilebilir.

3 tane 1 içeren ilk sütunda hangi 3 kareye 1 konulacağı $\binom{4}{3}$ şekilde seçilebilir. İkinci sütunda hangi kareye 1 konulmayacağı $\binom{3}{1}$ şekilde seçilebilir.

1 tane 1 içeren ilk sütunda 1 için $\binom{2}{1}$ ihtimal söz konusu. İkinci sütundaki 1 otomatik olarak ilk sütuna göre şekillenecek.

O halde bu durum için $\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \cdot 6$ dağılım olur.

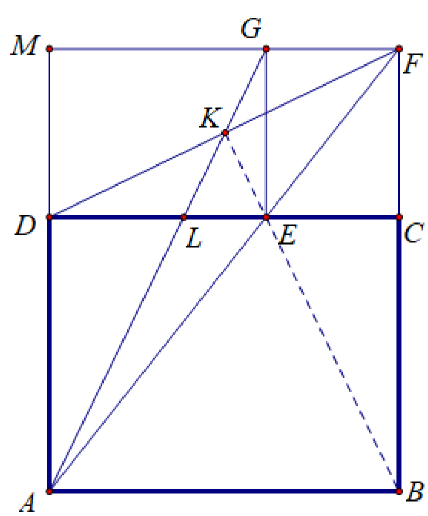
Tüm durumları toplarsak $24 \cdot 4 + 24 \cdot 6 = 24 \cdot 10 = 240$ elde ederiz.

21 Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası $|AE| = |CD|$ eşitliğini sağlamaktadır. $AE \cap BC = \{F\}$ olmak üzere, $ECFG$ bir dikdörtgen olacak şekilde bir G noktası alınıyor. $DF \cap AG = \{K\}$ olmak üzere, $m(\widehat{AKE}) = 45°$ ve $m(\widehat{KAE}) = 25°$ ise $m(\widehat{EAB})$ kaçtır?

a) 20° **b)** 30° **c)** 40° **d)** 45° **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{C}$



$AG \cap CD = \{L\}$ ve $FG \cap AD = \{M\}$ olsun.

$$\frac{DL}{DE} = \frac{DL}{MG} = \frac{AD}{AM} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AF} = \frac{EC}{EF} \Longrightarrow DL = \frac{DE \cdot EC}{EF} \tag{1}$$

$\dfrac{DK}{KF} = \dfrac{DL}{GF} = \dfrac{DL}{EC} = \dfrac{\frac{DE \cdot EC}{EF}}{EC} = \dfrac{DE}{EF}$ elde ederiz. Bu da EK nin $\angle DEF$ nin açıortayı olduğu anlamına gelir.

$\angle EAB = \alpha$ dersek $\angle AED = \alpha$, $\angle DEK = \angle FEK = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ ve $\angle FEK = \angle KAE + \angle AKE = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} \implies \alpha = 40^\circ$ olur.

Çözüm 2:

Problemin Geçerliliği Hakkında Bir Bilgi Notu ve Değerlendirme: Gerçekte, problemde verilen açı ölçülerine uygun olarak çizim yapılamamaktadır. Çizim ile ilgili sorunlu durum, resmi itiraz süresi içinde yapılmadığı için herhangi bir soru iptali oluşmamıştır. Ayrıca, bu sorunlu durumu yakalamak da çok kolay değildir. Çizim programları aracılığı ile bunu ortaya koyabiliyoruz. Soruyu öngörülen biçimde çözmüş öğrencilerin mağduriyet yaşamaması için sorunun iptal edilmemesi de doğru karar olmuştur kanaatindeyim. Çünkü yanıta ulaşan öğrenciler, kendilerinden beklenilen geometrik becerileri göstermeyi başarmışlardır. Şimdi, problemdeki teoriyi açıklamamız öğretici olacaktır.

Yanıt: $\boxed{C}$

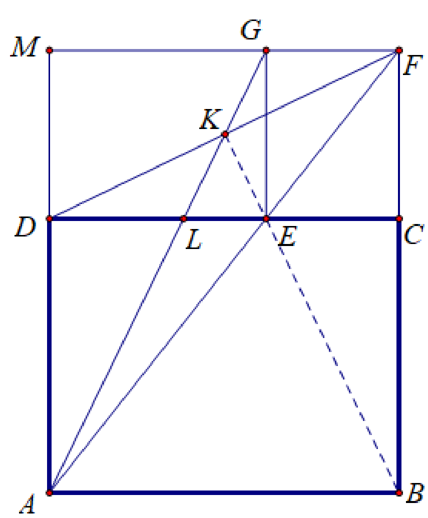
$AG \cap CD = \{L\}$ olsun. Menelaüs teoreminden $\dfrac{AE}{AF} \cdot \dfrac{FK}{KD} \cdot \dfrac{DL}{LE} = 1$ ve $\dfrac{BC}{BF} \cdot \dfrac{FK}{KD} \cdot \dfrac{DE}{EC} = 1$ olur. Ayrıca $ABF \sim ECF$ benzerliğinden dolayı $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BC}{BF}$ olur. Böylece, $\dfrac{DL}{LE} = \dfrac{DE}{EC}$ elde edilir. Bu eşitliği, Menelaüs teoremi kullanarak yazdığımız eşitlikte kullanırsak,

$$\frac{AE}{AF} \cdot \frac{FK}{KD} \cdot \frac{DE}{EC} = 1 \tag{1}$$

olur. $AE = CD = AB$ olduğundan ve $ABF \sim ECF$ benzerliğinden, $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{EC}{EF}$ olur. Bunu (1) de yazarsak,

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EF}{DE} \tag{2}$$

elde ederiz. Bu ise, $[EK]$ nin, DEF üçgeninde bir iç açıortay olduğunu gösterir. $\angle DEK = \angle FEK$ dir. AEB ikizkenar üçgen ve $\angle CEB = \angle ABE = \angle AEB$ dir. Bu açı eşitlikleri bize K, E, B nin doğrusal olduğunu gösterir. Açı takibi ile $\angle KAE + \angle AKE = \angle AEB = \angle ABE$ yazılır. $\angle KAE + \angle AKE = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$ olduğundan $\angle EAB = 40^\circ$ olur.



Son Değerlendirme: Çizim ile ilgili bahsettiğim kusur şudur: $\angle KAE$ ve $\angle AKE$ birbirinden bağımsız değildir. Bunlardan biri verilince, çizim programına göre diğeri sabitlenmektedir. Eğer soruda $\angle KAE + \angle AKE = 70°$ verilirse, herhangi bir çizim sorunu yaşanmayacaktır. Bunonla ilgili daha fazla açıklamayı video çözümde, dk 10-15 aralığında bulabilirsiniz.

22 $2^{22!} - 1$ sayısını bölmeyen en küçük tek pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?

a) 7 **b)** 9 **c)** 11 **d)** 13 **e)** 15

Çözüm:

Yanıt : $\boxed{C}$

22 den küçük herhangi bir x tamsayısı için $\phi(x) < 22$ olacağından ve $2^{22!} \equiv 1 \pmod{x}$ olduğundan sayı x'e bölünür. (Euler teoreminden a, x ile bölünmemek üzere $a^{\phi(x)} \equiv 1 \pmod{x}$ olduğundan). Bu yüzden bu sayı 22'den büyüktür. 23 asal olduğundan $\phi(23) = 22$ olur. 22 sayısı için $2^{22} \equiv 1$ ve 22, 22!'i böldüğünden sayı durumu sağlamaz. 25 için euler değeri 20 olur. Sağlamaz. $27, 29, \cdots, 43, 45$ içinde durumun farklı olmadığı görülür. 47 için $\phi(47) = 46$ olduğundan $2^{46} \equiv 1 \pmod{47}$ olur. Wilson teoreminden $22! \equiv -1 \pmod{23}$ ve 22! çift olduğundan $22! \equiv 22 \pmod{46}$ elde edilir. Fermat teoreminden $2^{46} \equiv 1 \pmod{47}$ olduğundan $2^{22!} \equiv 2^{22} \pmod{46}$ olur. $2^{22!} \equiv 1 \pmod{47}$ olsaydı $2^{22} \equiv 1 \pmod{47}$ ve kare alıp 4 ile çarpmayla $2^{46} \equiv 4$ olurdu. Halbuki $2^{46} \equiv 1 \pmod{47}$ olduğu açıktır. Çelişki elde edilir. 47 sayısı $2^{22!} - 1$ sayısını bölmez. Cevap $4 + 7 = 11$ olur.

23 x, y, z, a pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xyz = a$ şartını sağlayan tüm (x, y, z) üçlüleri için $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6xyz$ sayısının alabileceği en küçük değere $f(a)$ diyelim. $f(a)$ sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\dfrac{11}{12}$ **d)** $\dfrac{8}{9}$ **e)** $\sqrt[3]{3}$

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{D}$

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6xyz \geq 3\sqrt[3]{8x^2y^2z^2} - 6xyz = 6a^{2/3} - 6a$$

olacaktır. Eşitlik durumu ise $(x, y, z) = (a^{1/3}\sqrt{2}, a^{1/3}, a^{1/3}/\sqrt{2})$'dir. Sonuç olarak $f(a) = 6a^{2/3} - 6a$'dır. İşlem kolaylığı için $a = k^3$ diyelim. Bu durumda $f(a) = g(k) = 6k^2 - 6k^3$ olacaktır. $g'(k) = 12k - 18k^2$ olduğundan maksimum değer ya sınırlarda 0 veya ∞, ya da $g'(k) = 0$ yapan $k = \frac{2}{3}$'de alır. Maksimum değerini sınırlarda alması zaten soruyu hatalı hale getirecektir ama yine de incelenirse maksimum değeri oralarda almadığı görülebilir. Sonuç olarak

$$\max_{a>0} f(a) = \max_{k>0} g(k) = g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

bulunur. Eşitlik durumu $a = \frac{2}{3^{2/3}}$ olacaktır.

Çözüm 2:

Aritmetik-Geometrik ortalama uygulanıp $a = k^3$ verildikten sonra elde ettiğimiz ifadenin maksimum değerini bulmada alternatif bir yol ise

$$6k^2(1-k) = 3.k.k.(2-2k) \overbrace{\leq}^{AGO} 3\left(\frac{k+k+2-2k}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$$

olarak yine AGO ile elde edilebilirdi.

Çözüm 3:

(Resmi çözüm) $a = b^3$ diyelim. AGO'dan dolayı $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \geq 6\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 6b^2$ olur. Dolayısıyla sorudaki ifadenin en küçük değeri b cinsinden $6b^2 - 6b^3$ olur ve bu da $x = b\sqrt{2}, y = b, z = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ iken sağlanır. Şimdi bunun alabileceği en büyük değeri bulalım. $b > 1$ iken ifade negatiftir. $0 < b \leq 1$ iken AGO'dan dolayı

$$1 = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + 1 - b \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2(1-b)}{4}}$$

olur ve $b^2(1-b) \leq \dfrac{4}{27}$ bulunur. dolayısıyla $f(a) = f(b^3)$ en fazla $\dfrac{24}{27} = \dfrac{8}{9}$ olabilir.

24 Başlangıçta bir doğru üzerinde farklı ağırlıklı n top soldan sağa hafiften ağıra doğru sıralanmıştır. Her işlemde aralarında 2 veya 5 top olan iki top birbirleriyle yer değiştiriliyor. $n = 2022, 2023, 2024, 2025$ değerlerinin kaçı için birkaç işlem sonucunda toplar soldan sağa ağırdan hafife doğru dizilebilir?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{A}$

i. sıradaki bir top, bir hamle sonrası $(i-6)$., $(i-3)$., $(i+3)$. veya $(i+6)$. sıraya gelebilir. Yani bu topun yeni sırası mod3 te değişmez.

$n = 2022$ için $1 \not\equiv 2022 \pmod 3$

$n = 2023$ için $2 \not\equiv 2022 \pmod 3$

$n = 2024$ için $1 \not\equiv 2024 \pmod 3$

$n = 2025$ için $1 \not\equiv 2025 \pmod 3$

olduğu için hiçbir n değeri için topların sırası ilkinin tersi olamaz.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

Problem invaryant (değişmez) kavramı ile ilgili olup, önceki çözümle çok benzer bir çözüm verelim.

Hamleler sonucunda i-inci sıradaki top $i \mp 3$ veya $i \pm 6$-ncı sıralara gelebildiği için bir topun başlangıç sırası modülo 3 de değişmezdir. Sonlu sayıda hamle sonucunda,

- 1-inci sıradaki top n-inci sıraya gelecektir. $n \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır.
- 2-nci sıradaki top $n-1$-inci sıraya gelecektir. $n \equiv 0 \pmod 3$ olmalıdır.

Bu iki denklik birbiriyle çeliştiğinden, hiçbir n pozitif tam sayısı için istenen düzenleme yapılamaz.

25 Çeşitkenar bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, AC doğrusuna C noktasında dik olan doğrunun MA doğrusu ile kesişimi N olsun. BMN üçgeninin çevrel çemberi AB doğrusuna B noktasında teğet ise $\dfrac{|AB|}{|MA|}$ kaçtır?

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2 **e)** $\sqrt{5}$

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

Teğet kiriş açıdan $\angle BNA = \angle ABC = \alpha$ dır.

A nın M ye göre simetriği A' olsun. (A' noktasının $[NM]$ doğru parçası üzerinde olup olmamasına göre iki farklı durum oluşur. Aşağıdaki çözüm iki durum için de geçerlidir. Aslında sadece $AM < MN$ durumu doğru çözüme götürüyor.)

$ABA'C$ bir paralelkenardır. Bu durumda $BA' \parallel AC$ olduğu için $BA' \perp CN$ dir. BA' ile CN doğruları H de kesişsin.

C nin H ye göre simetriği C' olsun.

$\angle BC'A' = \angle A'CB = \angle CBA = \angle BNA = \alpha$ dır. Bu durumda B, C', N, A' çemberseldir.

$C' \neq N$ olduğunda $\angle ACB = \angle CBH = \angle HBC' = \angle A'NH = \beta$ olacaktır. Bu durumda $\angle AMC = 90^\circ$ ve $AB = AC$ olur ki bu da sorudaki çeşitkenarlığa aykırıdır.

$C' = N$ olduğu durumda $NH = HC$, dolayısıyla $BN = BC = 2 \cdot BM$.

(AA) benzerliğinden $\triangle ABM \sim \triangle ANB$ olduğu için $\dfrac{BA}{MA} = \dfrac{BN}{MB} = 2$ olur.

Not:

Söz konusu üçgenler şöyle çizilebilir.

$BN = BC \neq CN$ şeklinde bir $\triangle BCN$ alalım. $\triangle BNC$ nin ağırlık merkezi (kenarortayların kesişim noktası) G olsun. NG ile BC kenarı M de kesişsin. G nin M ye göre simetriği A olsun. $BGCA$ bir paralelkenar, dolayısıyla $AC \parallel BG$ ve $BG \perp CN$ olduğu için $AC \perp CN$ dir.

Çözüm 2:

$\angle BNA = \angle ABC = \alpha$

$\angle NBC = \beta$ ve $\angle ACB = \theta$ olsun.

$\angle BCN = 90^\circ - \theta$, $\angle ANC = 90^\circ - (\alpha + \beta - \theta)$, $\angle NAC = \alpha + \beta - \theta$ $\angle BAN = 180^\circ - (2\alpha + \beta)$ olacaktır.

Sinus teoreminden $\dfrac{BM}{MN} = \dfrac{MC}{MN}$ ve $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{MC}{AM}$ oranlarını yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} &= \frac{\sin(90^\circ - (\alpha+\beta-\theta))}{\sin(90^\circ-\theta)} \\ \frac{\sin(180^\circ - (2\alpha+\beta))}{\sin\alpha} &= \frac{\sin(\alpha+\beta-\theta)}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Taraf tarafa çarparsak

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(90^\circ - (\alpha+\beta-\theta))\sin(\alpha+\beta-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta} = \frac{\sin(2\alpha+2\beta-2\theta)}{\sin 2\theta}$$

elde ederiz. Çapraz çarpımla birlikte ters dönüşüm formülleri kullanırsak

$$\cos(2\alpha+\beta+2\theta) - \cos(2\alpha+\beta-2\theta) = \cos(2\alpha+3\beta-2\theta) - \cos(2\alpha+\beta-2\theta)$$

Buradan da $\cos(2\alpha+\beta+2\theta) = \cos(2\alpha+3\beta-2\theta)$ elde ederiz.

(i) $2\alpha+\beta+2\theta = 2\alpha+3\beta-2\theta+360^\circ k$
$2\theta = \beta + 180^\circ k$ olur. $0 < \theta < 90^\circ$ ve $0 < 2\theta < 180^\circ$ olduğu için tek çözüm $2\theta = \beta$ dır.

(ii) $2\alpha+\beta+2\theta = -(2\alpha+3\beta-2\theta)+360^\circ k$
$\alpha+\beta = 90^\circ k$ olur. $0 < \alpha+\beta < 180^\circ$ olduğu için tek çözüm $\alpha+\beta = 90^\circ$ dir.

$\alpha+\beta=90^\circ$ olduğunda $\angle BMA=90^\circ$ olacağı için $AB=AC$ olacak, yani üçgen çeşitkenar olmayacak.

$\beta=2\theta$ olduğunda $\triangle BNC$ de $BN=BC$ olacaktır.

(AA) benzerliğinden $\triangle ABM\sim\triangle ANB$ olduğu için $\dfrac{BA}{MA}=\dfrac{BN}{MB}=2$ olur.

Çözüm 3:

$MB=MC=1$, $BN=x$ ve $AM=y$ olsun.

$\triangle ANB\sim\triangle ABM$ olduğu için bize benzerlik oranı, yani $\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{BN}{MB}=\dfrac{x}{1}=x$ soruluyor.

$AM=y$ olduğu için benzerlikten $AB=xy$ ve $AN=x^2y$ olacaktır.

$\triangle ABC$ de kenarortay teoreminden $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)\Longrightarrow AC^2=2y^2+2-x^2y^2$.

$\triangle NBC$ de kenarortay teoreminden $BN^2+CN^2=2(MN^2+BM^2)\Longrightarrow CN^2=2(x^2y-y)^2+2-x^2$.

$\triangle ACN$ de Pisagor'dan $AN^2=AC^2+CN^2$.

Hepsini birleştirirsek

$$\begin{aligned}x^4y^2 &= 2(x^2y-y)^2+2-x^2+2y^2+2-x^2y^2\\ &= 2x^4y^2+2y^2-4x^2y^2+2-x^2+2y^2+2-x^2y^2\\ &= 2x^4y^2+4y^2-5x^2y^2+4-x^2\end{aligned}$$

ve biraz düzenlemeyle

$$\begin{aligned}y^2(x^4-5x^2+4)-(x^2-4) &= 0\\ y^2(x^2-4)(x^2-1)-(x^2-4) &= 0\\ (x^2-4)(y^2(x^2-1)-1) &= 0\end{aligned}$$

Buradan $x=2$ ya da $y^2(x^2-1)-1=0\Longrightarrow y^2x^2=y^2+1$ elde edilir.

İkincisi $\triangle ABM$ yi dik üçgen yapar. Dolayısıyla $AB=AC$ olur. Bu sorudaki çeşitkenarlığa aykırıdır.

İlki, yani $x=2$ aradığımız yanıttır.

26 $n\le 2024$ bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\{kn \ : \ k\in\mathbb{Z},\ 1\le k\le 2024\}$ kümesinde tam olarak 9 tane tam kare bulunmasını sağlayan n sayılarının toplamı kaçtır?

a) 18240 **b)** 18810 **c)** 19380 **d)** 19950 **e)** 20520

Çözüm:

Cevap: $\boxed{B}$

n sayısını bölen en büyük tamkare a^2 olsun. O halde b karebölensiz olacak şekilde $n=a^2b$ olarak yazılabilir. Eğer k'yı da benzer şekilde $k=u^2v$ olarak yazarsak, nk'nın tamkare olması için bv'nin tamkare olması gerekir. Ancak ikisi de karebölensiz olduğundan bunun tek yolu $b=v$ olmasıdır. Dolayısıyla, $1\le k\le 2024$ sayılarından tam olarak 9 tanesinin karebölensiz bölümünün b olmasını istiyoruz. Başka bir deyişle,

$$1\le k=u^2b\le 2024 \implies \frac{1}{b}\le u^2\le\frac{2024}{b}$$

$$1\le u^2\le\frac{2024}{b}$$

olacak şekilde tam olarak 9 tane u olmasını istiyoruz. Dolayısıyla,

$$9^2\le\frac{2024}{b}<10^2 \implies 21\le b\le 24$$

elde edilir. $b=21,22,23$ olabilir. Her biri için $n=a^2b\le 2024$ olmasını sağlayan a değerleri $1,2,3,\dots,9$'dur. Dolayısıyla bu 27 sayının toplamı

$$21(1^2+2^2+\cdots+9^2)+22(1^2+2^2+\cdots+9^2)+23(1^2+2^2+\cdots+9^2)$$

$$= (21 + 22 + 23)(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2)$$
$$= 66 \cdot 285 = 18810$$

bulunur.

27 Birbirinden farklı x, y, z gerçel sayıları,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9x + 7y + 6z \\ y^2 + z^2 &= 7x + 7y + 8z \\ z^2 + x^2 &= 6x + 8y + 8z \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlıyorsa $\dfrac{15x^2 + 4y^2}{z^2}$ kaçtır?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{D}$

İlk iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak $x^2 - z^2 = 2(x - z)$ elde edilir. Sayılar birbirinden farklı olduğundan $x + z = 2$ elde edilir. Son iki ifade taraf tarafa çıkarılırsada $x + y = -1$ elde edilir. İlk denklemde $z = 2 - x$ ve $y = -1 - x$ yerine yazılırsa $x^2 + 3x - 2 = 0$ elde edilir. Sorunun bizden istediği ifadedede z ve y yi x cinsinden yerine yazarsak bizden istenen ifade $\frac{19x^2+8x+4}{x^2-4x+4}$ olur. $x^2 + 3x - 2 = 0$ olduğundan $19x^2 + 57x - 38 = 0$ ve $19x^2 + 8x + 4 = -49x + 42$ elde edilir. Yine $x^2 + 3x - 2 = 0$ olduğundan $x^2 - 4x + 4 = -7x + 6$ olur. Sorunun bizden istediği ifade $\frac{-49x+42}{-7x+6} = 7$ olur. Ayrıca buldugumuz x'e bağlı ikinci dereceden denklemin kökleri reel olduğundan soruda verilmiş reellik konusunda bir ihlal mevcut değildir. $x = \frac{-\sqrt{17}-3}{2}$, $z = 2 - x$ ve $y = -1 - x$ hesap makinesinde denendiğinde de tüm koşulları sağlar ve ifadenin değerini 7 verir.

Not:

Resmi kitapçıkta sorunun yanıtı ilk olarak $\boxed{E}$ verilmiş. Daha sonra $\boxed{D}$ olarak güncellenmiştir.

Çözüm 2:

Taraf tarafa toplarsak $x^2+y^2+z^2 = 11x+11y+11z$ elde ederiz. Buradan $x^2 = 4x+4y+3z$, $y^2 = 5x+3y+3z$, $z^2 = 2x + 4y + 5z$ elde edilir.

Bize sorulan oran $\dfrac{15x^2 + 4y^2}{z^2} = \dfrac{80x + 72y + 57z}{2x + 4y + 5z}$.

$x^2 - y^2 = y - x \Longrightarrow x + y = -1.$

$x^2 - z^2 = 2x - 2z \Longrightarrow x + z = 2.$

İlkini 2 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak $3x + 2y + z = 0$ elde ederiz.

$$\frac{80x + 72y + 57z}{2x + 4y + 5z} = \frac{22(3x + 2y + z) + 7(2x + 4y + 5z)}{2x + 4y + 5z} = 7$$

Çözüm 3:

(Resmi Çözüm) Birinci ve ikinci denkleme bakarsak $x^2 - z^2 = 2(x - z)$, ikinci ve üçüncü denkleme bakarsak $y^2 - x^2 = x - y$ olup, x, y, z birbirinden farklı olduğundan $z = 2 - x$ ve $y = -1 - x$ elde ederiz. İkinci denklemde yerine koyarsak $(-1 - x)^2 + (2 - x)^2 = 7x + 7(-1 - x) + 8(2 - x)$ ve buradan $x^2 + 3x - 2 = 0$ buluruz. Dolayısıyla , $x^2 = 2 - 3x, y^2 = x^2 + 2x + 1 = 3 - x$ ve $z^2 = x^2 - 4x + 4 = 6 - 7x$ olup

$$\frac{15x^2 + 4y^2}{z^2} = \frac{15(2 - 3x) + 4(3 - x)}{6 - 7x} = \frac{42 - 49x}{6 - 7x} = 7$$

elde ederiz.

28 $(x_1, ..., x_{32})$ 32-lisi $(1, 2, ..., 32)$'nin bir permütasyonu olmak üzere, her $i = 1, ..., 32$ için $y_i = \max\{x_1, x_2, ..., x_i\}$ olsun. Tam olarak 2 tane i indisi için $y_i = x_i$ olmasını sağlayan $(x_1, x_2, ..., x_{32})$ permütasyonlarının sayısının 29 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 0 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 18 **e)** 27

Çözüm 1:

Yanıt: $\boxed{E}$

Bir permütasyonda soldan sağa ilerlediğimizde en büyük eleman k kez değişmişse bu permütasyona k-maksimal diyelim.

n farklı sayının permütasyonları arasından k-maximal permütasyonların sayısını $P(n, k)$ ile gösterelim.

Soruda bizden $P(32, 2)$ yi bulmamız bekleniyor.

$2, \dots, n$ ye ait permütasyonlara 1 sayısını ekleyerek $2-$maksimal permütasyonlar üretmeye çalışalım.

- $2, \dots, n$ ye ait $k-$maksimal bir permütasyonu ele alalım. Bu permütasyonun başına 1 eklediğimizde permütasyon $(k+1)-$maksimal olur.
- 1., 2., ..., $(n-1)$. terim sonrasına 1 eklediğimizde yeni permütasyon yine $k-$maksimaldır.

O halde $2-$maksimal permütasyonların sayısı için $P(n, 2) = (n-1)P(n-1, 2) + P(n-1, 1)$ yazılabilir.

$P(n, 1) = (n-1)!$ olduğu kolayca görülebilir. (n başta olmalı, diğer elemanların sırası önemsiz.)

Özyineli (recursive) denklemimizi birkaç kez çalıştıralım.

$P(32, 2) = 31P(31, 2) + 30! \equiv 2P(31, 2) \pmod{29}$

$P(31, 2) = 30P(30, 2) + 29! \equiv P(30, 2) \pmod{29}$

$P(30, 2) = 29P(29, 2) + 28! \equiv 28! \pmod{29}$ olduğu için

$P(32, 2) \equiv 2P(31, 2) \equiv 2P(30, 2) \equiv 2 \cdot 28! \pmod{29}$ elde ederiz.

Wilson Teoremine göre $28! \equiv -1 \pmod{29}$ olduğu için $P(32, 2) \equiv 2 \cdot 28! \equiv -2 \equiv 27 \pmod{29}$ elde ederiz.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{E}$

Çözüm [Lokman Gökçe]:

$y_1 = \max\{x_1\} = x_1$ dir. O halde bir başka $i > 1$ için daha $y_i = x_i$ olmasını sağlamalıyız. Çözümün daha kolay anlaşılabilmesi için, genelleme yapmamıza izin verecek birkaç özel durumu inceleyeceğiz:

• $y_4 = x_4$ olsun. Bu durumda $y_2 = \max\{x_1, x_2\} \neq x_2$, $y_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\} \neq x_3$ olmalıdır. Bu eşitsizliklerden $x_2 < x_1 < x_4$ olur. Ayrıca $x_3 < x_1$ veya $x_3 < x_2$ olmalıdır. Bu bize, x_2 ile x_3 ün kendi arasında yer değiştirebilecek değerlere sahip olduğunu gösteriyor. Yine $m \geq 5$ için $y_m \neq x_m$ olmalıdır. Bu ise $x_m < x_4$ olması anlamına gelir. Yani $x_4 = 32$ olup en büyük elemandır. $x_5, x_6, \dots, x_{32}$ sayılarının da kendi arasında yer değiştirebileceğini anlıyoruz. $y_4 = 32$ olan permütasyonların sayısı $\binom{31}{3} \cdot 2! \cdot 28!$ dir. Çünkü 31 sayı arasından 3 sayı seçiyoruz, bunların en büyüğü x_1 oluyor. Kalan 2 tanesi x_2 ve x_3 olup $2!$ yolla belirleniyor.

• Son durum olan $y_{32} = x_{32} = 32$ durumuna bakalım. Bu durumda, $y_1 = x_1 = 31$ olup diğer 30 sayı $30!$ yolla seçilebilir.

Genel olarak, $n \geq 1$ ve $y_{n+1} = x_{n+1} = 32$ olduğunda $1 \leq i \leq n$ için x_i sayılarının seçimini $\binom{31}{n}$ yolla yaparız. Bunların en büyüğü x_1 olmalıdır. Diğer $n-1$ sayının sıralanışı $(n-1)!$ yolla olur. $i > n+1$ için geriye kalan $31 - n$ tane x_i sayılarının sıralanışı da $(31-n)!$ yolla olur. $1 \leq n \leq 31$ için bunların toplamına S dersek

$$S = \sum_{n=1}^{31} \binom{31}{n} \cdot (n-1)! \cdot (31-n)!$$

olur. $\binom{31}{n} = \dfrac{31!}{n! \cdot (31-n)!}$ dir. Düzenlersek,

$$S = \sum_{n=1}^{31} \frac{31!}{n}$$

elde ederiz. $n \neq 29$ için $\dfrac{31!}{n} \equiv 0 \pmod{29}$ dur. O halde $S \equiv \dfrac{31!}{29} \pmod{29}$ elde ederiz. Wilson teoreminden, $28! \equiv -1 \pmod{29}$ olduğu kullanılırsa,

$$S \equiv 31 \cdot 30 \cdot 28! \pmod{29} \equiv 2 \cdot 1 \cdot (-1) \pmod{29} \equiv 27 \pmod{29}$$

sonucuna ulaşılır.

Not: Bu çözüm bize, herhangi bir $m \geq 2$ pozitif tam sayısı için, istenen özellikteki m uzunluğundaki permütasyonların sayısının açık denklem olarak,

$$S = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{n}$$

olduğunu da göstermektedir.

29 $|AB| > |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\hat{A}$ açısına ait dış açıortayın BC ile kesişimi D olsun. $|BC| = 24\sqrt{2}$, $|AB| = 35$ ve $m(\widehat{ADC}) = 45^\circ$ ise ABC üçgeninin alanı kaçtır?

a) 60 **b)** 70 **c)** 72 **d)** 84 **e)** 98

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{D}$

K noktası AB doğrusu üzerinde A'ya göre B ile farklı tarafta bir nokta olmak üzere $\angle KAD = \angle DAC = \alpha$ olsun. ABC üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+45)} = \frac{24\sqrt{2}}{35}$ olur. $\sin(\alpha + 45) = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}}$ ve $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ olduğundan $\frac{12}{35} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ elde edilir. Buradan $12^2 \cdot (1 + 2\sin\alpha\cos\alpha) = 35^2 \cdot (\sin\alpha\cos\alpha)^2$ elde edilir. $\sin\alpha\cos\alpha = x$ olmak üzere $35^2x^2 - 288x - 144 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Buradan $x = \frac{288+\sqrt{144\cdot(24^2+70^2)}}{35^2\cdot 2} = \frac{288+74\cdot 12}{35^2\cdot 2} = \frac{12\cdot 98}{35^2\cdot 2} = \frac{24}{50}$ olur (Negatif kök, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$ olduğundan alınamaz.) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ olduğundan $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ ve $\tan 2\alpha = \frac{-24}{7}$ olur.($2\alpha > 90$ olduğundan tanjant negatif olmalıdır). Tanjant yarım açı formülü kullanılırsa $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ olur. (Diğer değer için $\alpha > 90^\circ$ olur. Çelişki.) Buradan $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ve $\sin(\alpha - 45) = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ elde edilir. Sinüslü alan formülunden alan $A = \frac{35\cdot 24\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha-45)}{2} = 84$ olur.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

$\triangle ABC$ de $\angle A$ ya ait iç açıortay AN olsun. $\angle NAD = 90^\circ$ ve $\angle AND = 45^\circ$ olacaktır.

$\triangle NAD$ de AH yükseklik olsun. $\angle NAH = 45^\circ$ dir.

$\angle BAN = \angle NAC = \alpha$ dersek $\angle ABH = 45^\circ - \alpha$ ve $\angle CAH = 45^\circ - \alpha$ olacaktır. O halde $CH \cdot BH = AH^2$ dir.

$CH = x$ dersek $AH^2 = x(24\sqrt{2}+x)$ ve Pisagordan $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Longrightarrow 35^2 = x(24\sqrt{2}+x) + (x+24\sqrt{2})^2 = 2x^2 + 72x\sqrt{2} + 2\cdot 24^2 \Longrightarrow 2x^2 + 72x\sqrt{2} - 73 = 0$ denklemini elde ederiz.

$y = x\sqrt{2}$ şeklinde değişken değiştirirsek $y^2 + 72y - 73 = 0 \Longrightarrow y = 1$ ve $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

$AH^2 = x(24\sqrt{2}+x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{49}{2} \Longrightarrow AH = \frac{7}{\sqrt{2}}$ ve $\text{Alan}(ABC) = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{24\sqrt{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{2}}}{2} = 12 \cdot 7 = 84$.

Çözüm 3:

(Resmi Çözüm) C den AB ye çizilen paralelin AD ile kesişimi E, C den AD ye inilen dikme ayağı H olsun. $|AC| = x, |CH| = y, |AH| = t$ diyelim. Açıkça $|HE| = t, |ED| = y-t, |CD| = y\sqrt{2}, |CE| = x$ olur. Paralellikten $y/24 = (y-t)/2t$ ve $x/35 = (y-t)/(y+t)$ bulunur. Düzenlersek $t = 12y/(y+12)$ ve $x = 35y/(y+24)$ olur. Pisagor teoreminden

$$(\frac{35y}{y+24})^2 = y^2 + (\frac{12y}{y+12})^2$$

olup $y = 4$ bulunur. Yerine koyarsak $t = 3$ olup $|AD| = y + t = 7$ olur. Dolayısıyla A noktasından BC ye inilen yükseklik uzunluğu $\frac{7}{\sqrt{2}}$ olup $\text{Alan}(\triangle ABC) = \frac{24\sqrt{2}.7}{2\sqrt{2}} = 84$ birim kare bulunur.

30 Pozitif tam bölenlerinin ortancası (medyanı) 63 olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır? (Bir veri grubunun ortancası, veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralandığında veri sayısı tekse en ortadaki sayıya, çiftse en ortadaki iki sayının aritmetik ortalamasına eşittir.)

a) 8 **b)** 14 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 22

Çözüm 1:

Yanıt : $\boxed{D}$

Sorunun bizden istediği şeyi "birbirine en yakın iki pozitif tam çarpanının toplamı 126 olan en küçük pozitif tamsayının rakamları toplamı" olarak ifade edebiliriz. Bu iki çarpan $63 - x$ ve $63 + x$ olsun. Bu ikisinin çarpımı $63^2 - x^2$ olduğundan x'i maksimize etmeliyiz. x'in 63 olduğu durumda tek bir çarpan oluştuğundan sayı tamkare olur ve medyanı bu sayının kökü olur. 63'den geriye doğru sayalım. 63 için ifade 63^2 olur ki bu sayının medyanı 63 değildir çünkü sayı $63 \cdot 63$ olarak yazılabildiği gibi, birbirine daha yakın iki sayı olan $49 \cdot 81$ olarakta yazılabilir. 62 için ifade $125 \cdot 1$ olur. Bu sayının çarpanlarının medyanı 63 değildir. ($25 \cdot 5$ olarak yazılabildiğinden). 61 için $124 \cdot 2 = 62 \cdot 4$ olur. Bu şekilde hızlıca birkaç adet denersek ilk uygun örneğin 50 olduğu bulunur. Sorunun bizden istediği sayı $113 \cdot 13 = 1469$ olur. Buradan cevap $1 + 4 + 6 + 9 = 20$ elde edilir.

Aradaki sayılar için örnekler

$123 \cdot 3 = 41 \cdot 9, 122 \cdot 4 = 61 \cdot 8, 121 \cdot 5 = 55 \cdot 11, 120 \cdot 6 = 12 \cdot 10, 119 \cdot 7 = 49 \cdot 17$, $118 \cdot 8 = 59 \cdot 16, 117 \cdot 9 = 39 \cdot 27, 116 \cdot 10 = 40 \cdot 29, 115 \cdot 11 = 55 \cdot 23, 114 \cdot 12 = 48 \cdot 26$

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{D}$

Sayımız n olsun. Eğer $n = m^2$, $m \in \mathbb{Z}^+$ biçiminde bir tam kare ise pozitif tam bölenlerinin sayısı tek sayı olup ortancası m dir. $m = 63$ için $n = 63^2$ dir. n sayısını bu değerden daha küçük yapabiliriz.

n tam kare olmasın. Bu durumda n nin çift sayıda pozitif böleni vardır. Bunları küçükten büyüğe doğru sıraladığımızda $1, p, \dots, a, b, \dots, \frac{n}{p}, n$ olsun. Burada a ve b ortadaki iki bölen olup $a \neq b$'dir. Ortadan eşit uzaklıktaki terimlerin çarpımının n olduğuna dikkat edelim. Yani $1 \cdot n = p \cdot \frac{n}{p} = \cdots = ab = n$ dir. Ortanca 63 verildiğinden $\frac{a+b}{2} = 63$ tür. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ olur. $a \neq b$ olduğundan aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasında eşitlik olamaz. Böylece $63 > \sqrt{n}$ ve $n < 63^2$

olur. Yani n'nin tam kare olmaması durumunda n daha küçük değerler alacaktır. $a + b = 126$ dır. Şimdi a ve b ye değerler verelim. n'yi minimize etmek için a'ya $1, 2, 3, \ldots$ değerlerini vererek ilerlemeliyiz. Ayrıca a ile b arasında başka tam bölen olmaması da gerekir.

$a = 1$, $b = 125$ ise $n = 125$ olur. Fakat $5 \mid n$ ve $a < 5 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez.

$a = 2$, $b = 124$ ise $n = 2 \cdot 124$ olur. Fakat $4 \mid n$ ve $a < 4 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez. Bu fikirle, küçük ve çift a değerlerinde b de çift olacağından $2a \mid n$ olacaktır. $a < 2a < b$ iken uygun çözüm gelmez. Dolayısıyla a'nın küçük çift sayı değerlerinden ($a < 42$ iken) çözüm gelmez. $a \notin \{2, 4, 6, \ldots, 40\}$.

$a = 3$, $b = 123$ ise $n = 3 \cdot 123$ olur. Fakat $9 \mid n$ ve $a < 9 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez. Bu fikirle, küçük ve 3'ün katı olan a değerlerinde b de 3'ün katı olacağından $3a \mid n$ olacaktır. $a < 3a < b$ iken uygun çözüm gelmez. Dolayısıyla a'nın küçük 3'ün katı değerlerinden ($a < 31$ iken) çözüm gelmez. $a \notin \{3, 6, 9, \ldots, 30\}$.

$a = 5$, $b = 121$ ise $n = 5 \cdot 121$ olur. Fakat $11 \mid n$ ve $a < 11 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez.

$a = 7$, $b = 119$ ise $n = 7 \cdot 119$ olur. Fakat $17 \mid n$ ve $a < 17 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez.

$a = 11$, $b = 115$ ise $n = 11 \cdot 115$ olur. Fakat $55 \mid n$ ve $a < 55 < b$ dir. Buradan uygun çözüm gelmez.

$a = 13$, $b = 113$ ise $n = 11 \cdot 113 = 1469$ olur. 13 ve 113 asal sayılardır. n'nin pozitif tam bölenleri $1, 13, 113, 1469$ olup tüm koşullar sağlanır. $n_{\min} = 1469$ sayısının rakamlarının toplamı $1 + 4 + 6 + 9 = 20$ bulunur.

$\boxed{31}$ Bir $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dizisi, $a_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\left(a_{n+1} - \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}\right)\left(a_{n+1} - \frac{5a_n + 1}{a_n + 5}\right) = 0$$

şartını sağlamaktadır. Buna göre, a_{2024} sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 2024 **b)** 2024^2 **c)** 2^{2023} **d)** 2^{2024} **e)** Hiçbiri

Çözüm 1:

Cevap: $\boxed{A}$

$f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ ve $g(x) = \frac{5x+1}{x+5}$ olsun. $h_1, h_2, \ldots, h_{2023} \in \{f, g\}$ olmak üzere

$$a_{2024} = h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_{2023}(a_1) = h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_{2023}(2)$$

formatındadır. Öncelikle f ve g'nin bileşkesinin değişme özelliğine sahip olduğunu yani $f \circ g = g \circ f$ olduğunu görelim. Gerçekten de

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}\text{'dir.}$$

Dolayısıyla h_i'lerin sırası önemli değildir ve k defa f, $2023 - k$ defa g kullanıldıysa,

$$a_{2024} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ tane } f} \circ \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{2023-k \text{ tane } g}(2) = (f^k \circ g^{2023-k})(2)$$

olacaktır. Burada, eşitlikten de anlaşılacağı gibi f^n ve g^n notasyonları fonksiyonların n. iterasyonudur. Şimdi de her k için a_{2024}'ün farklı sonuç alacağını gösterelim. $0 \leq m, n \leq 2024$ için $(f^m \circ g^{2023-m})(2) = (f^n \circ g^{2023-n})(2)$ olsun. Genelliği bozmadan $m \geq n$ olsun. f ve g fonksiyonları $f : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ ve $g : \mathbb{R} - \{-5\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ için birebir örtendir. Bu yüzden verilen eşitliğe fonksiyonların tersini uygulayarak,

$$2 = g^{n-2023} \circ f^{-n} \circ f^m \circ g^{2023-m}(2) = f^{m-n} \circ g^{n-m}(2) = (f \circ g^{-1})^{m-n}(2)$$

olacaktır çünkü benzer şekilde f ve g^{-1} de değişme özelliğine sahiptir, hatta

$$f \circ g^{-1}(x) = f\left(\frac{1 - 5x}{x - 5}\right) = \frac{7x + 1}{x + 7}$$

olacaktır. $x > 1$ için
$$\frac{7x+1}{x+7} < x \iff 7x+1 < x^2+7x \iff 1 < x^2$$
olduğundan bunu $m-n$ defa uygularsak, $(f \circ g^{-1})^{m-n}(2)$, eğer $m-n > 0$ olursa 2'den kesin küçük olacaktır. Dolayısıyla $m = n$ olmalıdır. Yani her k değeri için farklı bir a_{2024} değeri elde ederiz. Toplam 2024 tane k değeri için 2024 farklı a_{2024} elde ederiz.

Çözüm 2:

Yanıt: $\boxed{A}$

Sorudaki şarttan dolayı ya $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ ya da $a_{n+1} = \dfrac{5a_n+1}{a_n+5}$ olacaktır. Eğer $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ olursa, iki tarafa 1 eklediğimizde $a_{n+1}+1 = \dfrac{4(a_n+1)}{a_n+3}$ ve iki taraftan 1 çıkardığımızda $a_{n+1}-1 = \dfrac{2(a_n-1)}{a_n+3}$ bulunur. $b_n = \dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ olarak tanımlayıp bu iki kesri birbirine oranladığımızda $b_{n+1} = 2b_n$ bulunur. Ayrıca, bu şartı sağlayan a_n sayılarının $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ şartını sağladığı da kolayca görülebilir. Benzer şekilde $a_{n+1} = \dfrac{5a_n+1}{a_n+5}$ olursa $b_{n+1} = \dfrac{3b_n}{2}$ bulunur. Dolayısıyla

$b_{2024} = 2^x \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2023-x} b_1$ formunda gelir ve 2024 farklı değer alabilir. $b_n > 1$ belliyken a_n de tek türlü belli olacağı için cevap 2024 olur.

Kaynak: Tübitak 32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Çözüm Kitapçığı

32 İlk hamleyi Aslı yapmak üzere, Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Hamleler yapılmadan önce Zehra $1, 2, ..., 200$ sayılarıyla numaralanmış bilyeleri istediği bir sırayla bir doğru üzerine diziyor. Sırası gelen oyuncu bu bilye dizisinin en solunda ve en sağında bulunan iki bilyeden birini alıyor. Zehra, yüzüncü bilyesini aldığında elindeki en büyük ve en küçük numaralı bilyelerin numaraları farkının en fazla N olmasını garantileyebiliyorsa N sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 99 **b)** 112 **c)** 125 **d)** 149 **e)** Hibçiri

Çözüm:

Yanıt: $\boxed{A}$

Cevap: 99. Zehra bilyeleri soldan sağa doğru numaraları 1, 101, 2, 102, 3, 103, . . ., 98, 198, 99, 199, 100, 200 olacak şekilde diziyor ve Aslı'nın her hamlesinden sonra onun en son bilye aldığı uçtan bilye alıyor. O zaman Zehra sol taraftan $101, 102, \ldots$ numaralı k ve sağ taraftan $100, 99, \ldots$ numaralı $100-k$ bilye alacaktır. Buna göre, Zehra aldığı 100 bilyenin tamamının ardışık numaralı bilye olmasını garantileyecektir.

Kaynak: Tübitak 32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Çözüm Kitapçığı

Cevap Anahtarları

(*) ile belirtilen yıllara ait resmi cevap anahtarı bulunmamaktadır.

1993 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**C**
3	**E**
4	**B**
5	**C**
6	**D**
7	**A**
8	**C**
9	**B**
10	**E**
11	**D**
12	**A**
13	**D**
14	**C**
15	**E**
16	**C**
17	**B**
18	**D**
19	**E**
20	**B**
21	**D**
22	**A**
23	**E**
24	**C**
25	**B**
26	**D**
27	**A**
28	**E**
29	**A**
30	**E**
31	**B**
32	**D**
33	**A**
34	**E**
35	**A**
36	**B**

1994 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**B**
3	**E**
4	**D**
5	**D**
6	**C**
7	**D**
8	**E**
9	**A**
10	**D**
11	**C**
12	**C**
13	**B**
14	**D**
15	**A**
16	**A**
17	**D**
18	**B**
19	**D**
20	**B**
21	**C**
22	**A**
23	**E**
24	**C**
25	**C**
26	**A**
27	**D**
28	**A**
29	**C**
30	**E**
31	**B**
32	**D**
33	**D**
34	**D**
35	**E**
36	**B**
37	**(Hatalı)**
38	**B**
39	**A**
40	**B**

1995 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**D**
3	**D**
4	**E**
5	**E**
6	**B**
7	**A**
8	**E**
9	**D**
10	**A**
11	**(Hatalı)**
12	**A**
13	**D**
14	**C**
15	**C**
16	**A**
17	**(Hatalı)**
18	**C**
19	**D**
20	**E**
21	**D**
22	**E**
23	**D**
24	**C**
25	**B**
26	**C**
27	**B**
28	**D**
29	**E**
30	**B**
31	**A**
32	**B**
33	**B**
34	**(Hatalı)**
35	**B**
36	**(Hatalı)**

1996 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**E**
2	**C**
3	**A**
4	**C**
5	**B**
6	**A**
7	**D**
8	**B**
9	**D**
10	**B**
11	**B**
12	**B**
13	**B**
14	**A**
15	**D**
16	**B**
17	**E**
18	**C**
19	**B**
20	**D**
21	**D**
22	**A**
23	**D**
24	**E**
25	**A**
26	**C**
27	**A**
28	**C**
29	**D**
30	**D**
31	**A**
32	**C**
33	**A**
34	**E**
35	**A**
36	**E**

1997 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**E**
3	**D**
4	**E**
5	**B**
6	**C**
7	**A**
8	**D**
9	**A**
10	**A**
11	**A**
12	**A**
13	**C**
14	**D**
15	**A**
16	**C**
17	**C**
18	**E**
19	**(Hatalı)**
20	**C**
21	**E**
22	**B**
23	**A**
24	**E**
25	**A**
26	**B**
27	**B**
28	**B**
29	**E**
30	**B**
31	**C**
32	**B**
33	**D**
34	**D**
35	**A**
36	**D**

1998

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**B**
3	**A**
4	**B**
5	**D**
6	**D**
7	**B**
8	**A**
9	**E**
10	**C**
11	**A**
12	**C**
13	**E**
14	**B**
15	**D**
16	**C**
17	**A**
18	**C**
19	**D**
20	**E**
21	**B**
22	**E**
23	**D**
24	**D**
25	**C**
26	**A**
27	**D (Hatalı)**
28	**A**
29	**C**
30	**D**
31	**D**
32	**A**
33	**A**
34	**C**
35	**C**
36	**E**

1999 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**D**
3	**A**
4	**C**
5	**E**
6	**D**
7	**B**
8	**B**
9	**D**
10	**C**
11	**D**
12	**C**
13	**A**
14	**B**
15	**A**
16	**E**
17	**E**
18	**B**
19	**B**
20	**C**
21	**B**
22	**E**
23	**C**
24	**D**
25	**B**
26	**B**
27	**B**
28	**B**
29	**D**
30	**E**
31	**B**
32	**E**
33	**C**
34	**C**
35	**D**
36	**C**

2000

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**A**
3	**C**
4	**E**
5	**E**
6	**B**
7	**C**
8	**C**
9	**E**
10	**B**
11	**B**
12	**C**
13	**D**
14	**D**
15	**A**
16	**A**
17	**C**
18	**D**
19	**B**
20	**D**
21	**D**
22	**B**
23	**C**
24	**C**
25	**E**
26	**C**
27	**C**
28	**B**
29	**C**
30	**B**
31	**D**
32	**A**
33	**A**
34	**E**
35	**C**
36	**B**

2001

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**D**
3	**B**
4	**A**
5	**D**
6	**C**
7	**A**
8	**A**
9	**C**
10	**D**
11	**D**
12	**B**
13	**A**
14	**C**
15	**E**
16	**D**
17	**B**
18	**B**
19	**B**
20	**D**
21	**D**
22	**B**
23	**E**
24	**D**
25	**B**
26	**B**
27	**A**
28	**C**
29	**E**
30	**A**
31	**C**
32	**A**
33	**C**
34	**A**
35	**C**
36	**D**

2002

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**E**
3	**C**
4	**C**
5	**A**
6	**B**
7	**B**
8	**E**
9	**E**
10	**E**
11	**B**
12	**B**
13	**İPTAL**
14	**D**
15	**A**
16	**A**
17	**C**
18	**C**
19	**B**
20	**B**
21	**A**
22	**B**
23	**A**
24	**A**
25	**C**
26	**C**
27	**B**
28	**B**
29	**İPTAL**
30	**B**
31	**D**
32	**B**
33	**B**
34	**A**
35	**D**
36	**C**

2003

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**C**
3	**C**
4	**B**
5	**E**
6	**B**
7	**E**
8	**C**
9	**B**
10	**C**
11	**B**
12	**A**
13	**D**
14	**B**
15	**C**
16	**D**
17	**D**
18	**A**
19	**C**
20	**E**
21	**E**
22	**A**
23	**A**
24	**C**
25	**B**
26	**A**
27	**C**
28	**E**
29	**D**
30	**D**
31	**B**
32	**D**
33	**E**
34	**D**
35	**E**
36	**B**

2004

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**D**
2	**C**
3	**C**
4	**A**
5	**A**
6	**D**
7	**B**
8	**D**
9	**D**
10	**İPTAL**
11	**A**
12	**D**
13	**C**
14	**C**
15	**C**
16	**C**
17	**E**
18	**B**
19	**E**
20	**C**
21	**B**
22	**C**
23	**A**
24	**D**
25	**C**
26	**A**
27	**E**
28	**B**
29	**B**
30	**B**
31	**A**
32	**E**
33	**D**
34	**D**
35	**C**
36	**B**

2005

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**E**
2	**A**
3	**D**
4	**C**
5	**B**
6	**C**
7	**B**
8	**B**
9	**E**
10	**C**
11	**A**
12	**A**
13	**E**
14	**A**
15	**C**
16	**B**
17	**D**
18	**C**
19	**D**
20	**D**
21	**E**
22	**B**
23	**C**
24	**D**
25	**D**
26	**B**
27	**A**
28	**E**
29	**B**
30	**E**
31	**C**
32	**A**
33	**A**
34	**C**
35	**D**
36	**B**

2006

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**E**
2	**C**
3	**E**
4	**D**
5	**B**
6	**E**
7	**D**
8	**E**
9	**A**
10	**C**
11	**A**
12	**E**
13	**E**
14	**C**
15	**A**
16	**A**
17	**C**
18	**D**
19	**B**
20	**D**
21	**A**
22	**B**
23	**D**
24	**E**
25	**B**
26	**B**
27	**E**
28	**D**
29	**B**
30	**B**
31	**C**
32	**D**
33	**B**
34	**B**
35	**B**
36	**A**

2007

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**E**
3	**C**
4	**B**
5	**E**
6	**A**
7	**E**
8	**D**
9	**A**
10	**D**
11	**C**
12	**A**
13	**A**
14	**A**
15	**D**
16	**C**
17	**C**
18	**B**
19	**D**
20	**B**
21	**B**
22	**D**
23	**C**
24	**C**
25	**E**
26	**B**
27	**D**
28	**B**
29	**D**
30	**E**
31	**A**
32	**B**
33	**A**
34	**B**
35	**E**
36	**İPTAL**

2008

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**C**
3	**E**
4	**C**
5	**B**
6	**A**
7	**D**
8	**E**
9	**C**
10	**A**
11	**C**
12	**C**
13	**D**
14	**C**
15	**B**
16	**B**
17	**D**
18	**E**
19	**C**
20	**E**
21	**C**
22	**B**
23	**D**
24	**D**
25	**A**
26	**E**
27	**E**
28	**E**
29	**D**
30	**D**
31	**D**
32	**A**
33	**B**
34	**D**
35	**E**
36	**C**

2009

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**E**
3	**B**
4	**B**
5	**D**
6	**D**
7	**D**
8	**C**
9	**A**
10	**D**
11	**B**
12	**A**
13	**B**
14	**A**
15	**E**
16	**A**
17	**D**
18	**A**
19	**A**
20	**A**
21	**C**
22	**B**
23	**C**
24	**E**
25	**D**
26	**B**
27	**B**
28	**C**
29	**D**
30	**D**
31	**A**
32	**C**
33	**E**
34	**C**
35	**D**
36	**C**

2010

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**C**
3	**A**
4	**C**
5	**C**
6	**D**
7	**A**
8	**B**
9	**D**
10	**B**
11	**D**
12	**B**
13	**E**
14	**A**
15	**A**
16	**A**
17	**A**
18	**C**
19	**B**
20	**D**
21	**E**
22	**C**
23	**B**
24	**C**
25	**A**
26	**D**
27	**C**
28	**B**
29	**E**
30	**E**
31	**E**
32	**E**
33	**D**
34	**C**
35	**A**
36	**D**

2011

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	C
3	D
4	A
5	C
6	B
7	D
8	C
9	C
10	D
11	A
12	C
13	B
14	A
15	E
16	E
17	B
18	B
19	E
20	C
21	E
22	C
23	A
24	E
25	D
26	A
27	B
28	D
29	E
30	D
31	E
32	A
33	E
34	B
35	D
36	C

2012

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	D
2	D
3	C
4	D
5	A
6	A
7	B
8	A
9	C
10	E
11	E
12	D
13	E
14	D
15	E
16	A
17	B
18	B
19	E
20	C
21	C
22	A
23	D
24	A
25	C
26	C
27	D
28	E
29	A
30	B
31	B
32	B
33	C
34	B
35	C
36	D

2013

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	A
3	A
4	C
5	A
6	C
7	B
8	E
9	D
10	E
11	C
12	E
13	C
14	C
15	B
16	D
17	A
18	A
19	D
20	D
21	D
22	A
23	E
24	E
25	A
26	C
27	C
28	E
29	C
30	E
31	C
32	D
33	B
34	D
35	D
36	B

2014

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**C**
3	**B**
4	**D**
5	**E**
6	**C**
7	**A**
8	**D**
9	**E**
10	**A**
11	**E**
12	**C**
13	**E**
14	**B**
15	**D**
16	**C**
17	**B**
18	**D**
19	**E**
20	**A**
21	**C**
22	**B**
23	**A**
24	**B**
25	**D**
26	**C**
27	**C**
28	**A**
29	**D**
30	**E**
31	**D**
32	**B**

2015

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**C**
3	**B**
4	**D**
5	**A**
6	**C**
7	**E**
8	**E**
9	**D**
10	**C**
11	**B**
12	**A**
13	**D**
14	**E**
15	**C**
16	**B**
17	**D**
18	**B**
19	**C**
20	**E**
21	**B**
22	**E**
23	**C**
24	**B**
25	**D**
26	**B**
27	**E**
28	**C**
29	**C**
30	**C**
31	**C**
32	**D**

2016

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**D**
3	**A**
4	**B**
5	**D**
6	**C**
7	**B**
8	**B**
9	**C**
10	**D**
11	**B**
12	**B**
13	**B**
14	**D**
15	**E**
16	**C**
17	**E**
18	**B**
19	**E**
20	**E**
21	**A**
22	**B**
23	**A**
24	**D**
25	**E**
26	**B**
27	**C**
28	**D**
29	**B**
30	**D**
31	**D**
32	**D**

2017

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**İPTAL**
3	**E**
4	**C**
5	**A**
6	**E**
7	**B**
8	**C**
9	**E**
10	**A**
11	**A**
12	**B**
13	**E**
14	**D**
15	**A**
16	**D**
17	**B**
18	**E**
19	**C**
20	**D**
21	**D**
22	**A**
23	**C**
24	**A**
25	**B**
26	**C**
27	**E**
28	**C**
29	**D**
30	**B**
31	**C**
32	**B**

2018

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**D**
2	**C**
3	**B**
4	**C**
5	**E**
6	**D**
7	**B**
8	**C**
9	**E**
10	**B**
11	**D**
12	**E**
13	**A**
14	**B**
15	**B**
16	**D**
17	**D**
18	**E**
19	**B**
20	**C**
21	**B**
22	**A**
23	**D**
24	**E**
25	**D**
26	**D**
27	**B**
28	**C**
29	**B**
30	**B**
31	**B**
32	**D**

2019

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**E**
2	**A**
3	**C**
4	**D**
5	**C**
6	**E**
7	**B**
8	**B**
9	**E**
10	**D**
11	**E**
12	**B**
13	**A**
14	**D**
15	**C**
16	**E**
17	**D**
18	**A**
19	**D**
20	**C**
21	**D**
22	**C**
23	**A**
24	**B**
25	**E**
26	**D**
27	**B**
28	**E**
29	**A**
30	**A**
31	**B**
32	**C**

2020

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**C**
3	**E**
4	**D**
5	**A**
6	**C**
7	**A**
8	**E**
9	**B**
10	**D**
11	**B**
12	**A**
13	**A**
14	**D**
15	**B**
16	**B**
17	**D**
18	**A**
19	**C**
20	**C**
21	**D**
22	**D**
23	**E**
24	**C**
25	**C**
26	**E**
27	**A**
28	**E**
29	**B**
30	**B**
31	**C**
32	**E**

2021

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**E**
2	**B**
3	**B**
4	**A**
5	**D**
6	**A**
7	**C**
8	**D**
9	**B**
10	**C**
11	**C**
12	**A**
13	**A**
14	**E**
15	**A**
16	**E**
17	**B**
18	**C**
19	**E**
20	**E**
21	**A**
22	**B**
23	**B**
24	**D**
25	**E**
26	**A**
27	**D**
28	**C**
29	**C**
30	**D**
31	**C**
32	**B**

2022

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**B**
2	**D**
3	**C**
4	**D**
5	**B**
6	**E**
7	**E**
8	**E**
9	**E**
10	**A**
11	**E**
12	**A**
13	**D**
14	**D**
15	**B**
16	**E**
17	**D**
18	**A**
19	**C**
20	**A**
21	**D**
22	**C**
23	**D**
24	**B**
25	**A**
26	**E**
27	**C**
28	**D**
29	**C**
30	**C**
31	**B**
32	**B**

2023

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**A**
2	**B**
3	**B**
4	**C**
5	**E**
6	**A**
7	**D**
8	**E**
9	**B**
10	**D**
11	**A**
12	**D**
13	**A**
14	**B**
15	**B**
16	**C**
17	**E**
18	**D**
19	**E**
20	**B**
21	**A**
22	**D**
23	**C**
24	**C**
25	**B**
26	**C**
27	**A**
28	**C**
29	**D**
30	**E**
31	**C**
32	**E**

2024

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	**C**
2	**B**
3	**B**
4	**A**
5	**E**
6	**C**
7	**C**
8	**D**
9	**B**
10	**E**
11	**B**
12	**E**
13	**A**
14	**A**
15	**E**
16	**B**
17	**C**
18	**A**
19	**İPTAL**
20	**B**
21	**C**
22	**C**
23	**D**
24	**A**
25	**D**
26	**B**
27	**D**
28	**E**
29	**D**
30	**D**
31	**A**
32	**A**