

TÜBİTAK
Ulusal Matematik Olimpiyatı
1. Aşama Sınavı

Soruları

geomania.org

İçindekiler

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1993	1
2. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1994	10
3. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1995	20
4. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1996	30
5. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1997	39
6. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1998	48
7. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1999	57
8. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2000	66
9. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2001	75
10. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2002	84
11. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2003	93
12. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2004	102
13. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2005	111
14. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2006	120
15. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2007	129
16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2008	138
17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2009	147
18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2010	156
19. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2011	165
20. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2012	174
21. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2013	183
22. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2014	192
23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2015	200
24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2016	208
25. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2017	216
26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2018	224
27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2019	232
28. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2020	240
29. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2021	248
30. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2022	256

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2023	264
32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2024	272
Cevap Anahtarları	280

1. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1993

- 1 Köşegenleri dik kesişen bir dörtgende köşegenlerin uzunlukları toplamı 12 ise bu dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?
a) 18 b) 32 c) 16 d) 24 e) 36
- 2 Bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarı üstünde alınan (A ve B den farklı) n değişik nokta ile C yi, $[BC]$ kenarı üstünde alınan (B ve C den farklı) k değişik nokta ile A yı birleştiren doğru parçaları ABC üçgenini toplam kaç bölgeye ayırır?
a) nk b) $n + 1 + kn$ c) $(n + 1)(k + 1)$ d) $(n + 1)k$ e) $(k + 1)n$
- 3 n tamsayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $2^{10} + 2^{13} + 2^n$ bir tam kareye eşit olur?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
- 4 $13! + 1 < p \leq 13! + 13$ koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı vardır?
a) 5 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

- 5 Eğer nüfus $t = 0$ dan $t = 1$ e kadar % i , $t = 1$ den $t = 2$ ye kadar % j oranında artmışsa $t = 0$ dan $t = 2$ ye kadarki nüfus artış oranı kaçtır?

a) $i + j$ b) ij c) $i + j + \frac{ij}{100}$ d) $i + ij$ e) $i + j + \frac{i + j}{100}$

- 6 Aşağıdaki ispatta hangi adım hatalıdır?

TEOREM: $\frac{1}{2}$ sayısının karekökü yoktur.

İSPAT: $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 1 && i \\ \Rightarrow 2x^2 + 1 &= 4 - 4x^2 && ii \\ \Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 &= x^4 + 4 - 4x^2 && iii \\ \Rightarrow (x^2 + 1)^2 &= (x^2 - 2)^2 && iv \\ \Rightarrow x^2 + 1 &= x^2 - 2 && v \\ \Rightarrow 1 &= -2 \text{ (çelişki)} && vi \end{aligned}$$

a) $i \Rightarrow ii$ b) $ii \Rightarrow iii$ c) $iii \Rightarrow iv$ d) $iv \Rightarrow v$ e) $v \Rightarrow vi$

- 7 1, 2, 3, 4 rakamlarının permütasyonu ile elde edilen 4 rakamlı sayıların tümünün toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 66660 b) 66000 c) 66600 d) 60000 e) 66666

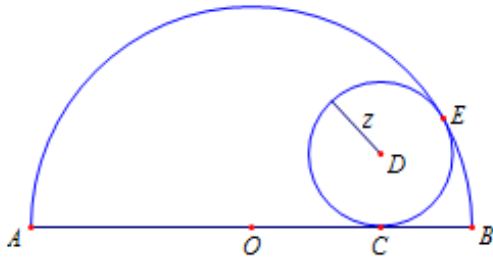
- 8

$$\begin{aligned} xz - yt &= 1 \\ xt + 4yz &= 3 \end{aligned}$$

denkleminin x, y, z, t negatif olmayan tam sayılar olmak üzere kaç tane (x, y, z, t) çözüm takımı vardır?

a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 e) 3

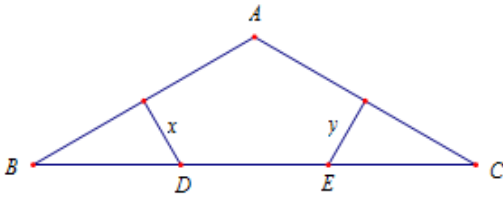
9



Şekilde D merkezli, z yarıçaplı çember AB doğrusuna ve O merkezli $[AB]$ çaplı çembere teğettir. $|AC| = x$, $|CB| = y$ ise, x , y , z arasında hangi bağıntı vardır?

- a) $2z^2 = xy$ b) $zx + zy = xy$ c) $2z^2 = x^2 + y^2$ d) $zx + xy = zy$ e) $x^2 = y^2 + z^2$

10



Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $m(\hat{A}) = 120^\circ$ dir. x, y doğruları sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ nin orta dikmeleri, $x \cap [BC] = \{D\}$, $y \cap [BC] = \{E\}$ ve $|BC| = 24$ olduğuna göre, $|DE|$ kaçtır?

- a) 14 b) 6 c) 10 d) 12 e) 8

11 $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$ denkleminin x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

- a) Sonsuz b) 12 c) 2 d) 0 e) 3

12 7 yolcu 3 vagondan oluşan boş bir trene rastgele birer vagon seçerek binerler. Birinci vagona tam olarak iki yolcu bulunması olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{224}{729}$ b) $\frac{448}{729}$ c) $\frac{560}{2187}$ d) $\frac{452}{2187}$ e) $\frac{512}{2187}$

- 13** $k > 1$ bir tamsayı ve $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise, $2k-1$ ve $9k+4$ tamsayılarının en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?
 a) 7 b) 17 c) $2k-1$ d) 1 e) Hiçbiri

- 14**
$$\begin{aligned} xy + x + y &= 5 \\ x^2y + xy^2 &= 6 \end{aligned}$$
 denklemleri veriliyor. $y > 1$ ise $x^2 + 2y^2$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) 3 b) 6 c) 9 d) 8 e) 5

- 15** Bir ABC üçgeninde A ve B köşelerinden çizilen kenarortaylar dik olarak kesişmektedir. $|BC| = 7$, $|AC| = 9$ olduğuna göre, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) $\sqrt{28}$ b) $\sqrt{24}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{25}$ e) $\sqrt{26}$

- 16** Verilen altı değişik rengi kullanarak bir kübün her yüzünü farklı bir renge boyuyoruz. Kübün istenildiği kadar ve istenilen istikametlerde döndürülmesiyle biri diğerinden elde edilen iki boyamayı aynı kabul edersek, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?
 a) 6 b) 12 c) 30 d) 90 e) 180

- 17** $T_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ ve $P_n = \frac{4T_2}{2(T_2 - T_1)} \cdot \frac{4T_3}{3(T_3 - T_2)} \dots \frac{4T_n}{n(T_n - T_{n-1})}$ olmak üzere, P_{25} aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) 317 b) 169 c) 1993 d) 3991 e) 7

- 18** İçlerinde a , b ve c nin bulunduğu 10 değişik harfin permütasyonlarının kaç tanesinde a , b ve c harflerinden ikisi yan yana gelmez?
 a) $89 \cdot 8!$ b) $4 \cdot 9!$ c) $8 \cdot 9!$ d) $42 \cdot 8!$ e) $84 \cdot 8!$

- 19** $\frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1} \geq 1$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesi ayrık aralıkların birleşimi olarak yazıldığında, bu aralıkların uzunlukları toplamı ne olur?
 a) Sonsuz b) $\frac{\sqrt{17}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ d) $\frac{9}{2}$ e) 2

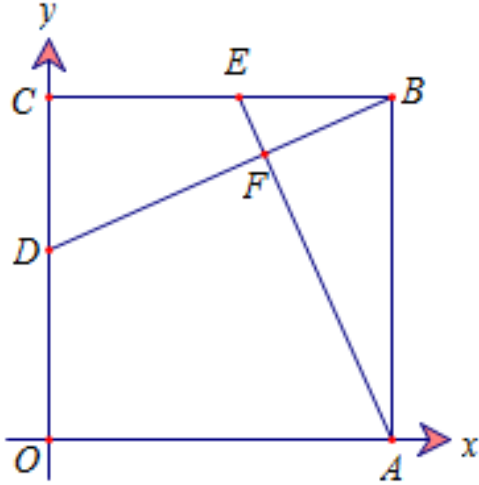
20
$$\begin{aligned} x + y &= t \\ x^2 + y^2 &= 2t \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm reel değerli (x, y, t) çözümleri içinde t nin alabileceği en büyük değer ne olur?

- a) 2 b) 4 c) $1 + \sqrt{2}$ d) $4 + \sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 21 m ve n tamsayı olmak üzere $m^2 + n^2 < 10001$ ise, $3m + 4n$ nin alabileceği en büyük değer ne olur?
 a) 403 b) 480 c) 490 d) 500 e) Hiçbiri

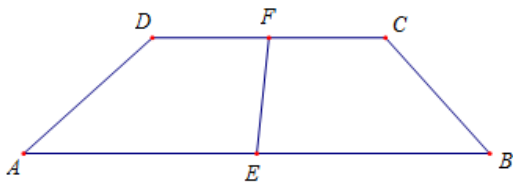
22



Şekilde, $OABC$ kenar uzunluğu $2a$ olan bir kare, $D \in [OC]$, $E \in [BC]$, $|OD| = |EC|$, $[AE] \cap [BD] = \{F\}$ dir. Buna göre F noktasının x, y koordinatları arasında hangi bağıntı vardır?

- a) $(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ b) $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2$ c) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$
 d) $x^2 + y^2 = 2a^2$ e) $x^2 + (y - a)^2 = 4a^2$

23



Şekilde $ABCD$ ($AB \parallel CD$) bir yamuk, $m(\widehat{B}) = 48^\circ$, $m(\widehat{D}) = 138^\circ$. $|AB| = 2|DC| = 4a$, $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC|$ olduğuna göre $|EF|$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $2a$ b) $\frac{3a}{2}$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $\frac{a}{2}$ e) a

- 24 101, 10101, 1010101, ..., $\underbrace{10101 \dots 01}_{100 \text{ tane } 1}$ dizisinde kaç tane asal sayı vardır?

- a) 0 b) 49 c) 1 d) 12 e) 33

25 Çarpanların sırasımı da hesaba katarsak 1000000 sayısı üç pozitif tamsayımın çarpımı olarak kaç değişik biçimde gösterilebilir?

- a) 1024 b) 784 c) 756 d) 354 e) 134

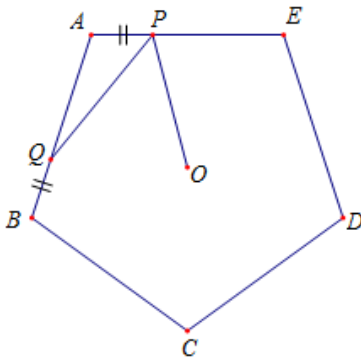
26

$$\begin{aligned}x + 3y &= tx \\x - y &= ty \\x^2 + y^2 &= t^2\end{aligned}$$

denklem sisteminin kaç tane reel değerli (x, y, t) çözüm takımı vardır?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9

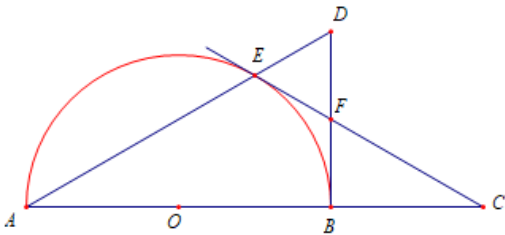
27



Şekilde $ABCDE$ düzgün beşgen, O noktası bu beşgenin merkezi ve $|PA| = |QB| = \frac{1}{3}|AE|$ dir. Buna göre \widehat{OPQ} açısı kaç derecedir?

- a) 54 b) 36 c) 72 d) 50 e) 60

28



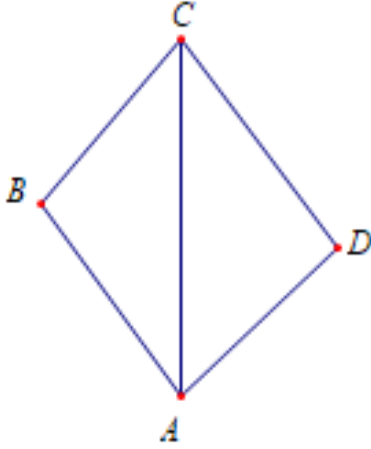
Şekilde, BD ve CE doğruları, O merkezli $[AB]$ çaplı çemberin teğetleri, $C \in AB$ ve $|AO| = |BC|$ dir. $|AB| = 12$ olduğuna göre EDF üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 12 b) 8 c) $4\sqrt{3}$ d) 6 e) $3\sqrt{3}$

29) p, q pozitif tamsayılar ve $p = q + 2$ ise, $p^2 + q^2 \equiv x \pmod{72}$ denkleğini sağlayan en küçük pozitif x tamsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 2 b) 34 c) 70 d) 1 e) 4

30)



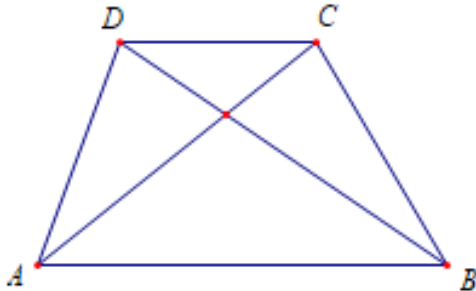
Şekilde çizgilerin üzerinden gitmek koşuluyla, A dan başlayıp beş noktadan geçtikten sonra C ye varan (örneğin $ABCBAD C$ gibi) kaç farklı yol vardır?

- a) 24 b) 32 c) 33 d) 81 e) 90

31) ABC ($m(\hat{B}) = 90^\circ$) üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D dir. ABD ve BDC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin yarıçapları sırasıyla x, y ve ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ise $\frac{x}{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ c) $\frac{c}{b}$ d) $\frac{\sqrt{b}}{a}$ e) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{c}$

32)



Şekilde, $ABCD$ ($AB \parallel CD$) bir yamuk, köşegenlerin kesiştiği nokta E dir. $Alan(ABCD) = 25$, $Alan(AEB) - Alan(DEC) = 5$ olduğuna göre $Alan(BEC)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) 7 b) 5 c) 8 d) 6 e) 4

- 33** $x^2 + ax + 2a = 0$ denkleminin bütün kökleri tamsayı olacak şekilde seçilebilecek a reel sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
 a) 4 b) 6 c) 0 d) 3 e) Sonsuz

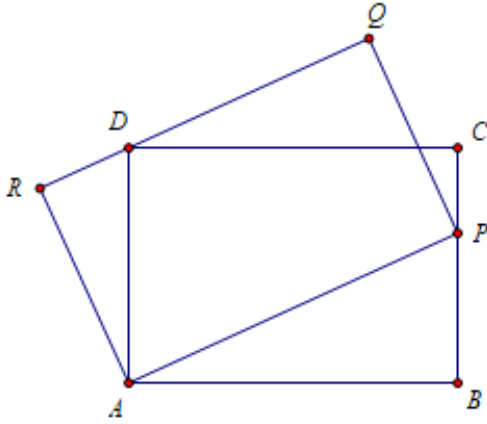
- 34** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin her a elemanı için $(f \circ f)(a) = a$ koşulunu sağlayan kaç tane $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu vardır?
 a) 24 b) 1 c) 9 d) 6 e) 10

- 35** Verilen bir (a_n) dizisinden her n için $b_n = a_{n+1} - a_n$ şeklinde bir (b_n) dizisi tanımlanıyor. $a_8 = a_{40} = 0$ ve her n için $b_{n+1} - b_n = 2$ ise a_1 aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) 273 b) 301 c) 186 d) 403 e) 281

- 36** Negatif olmayan x, y tamsayıları için tanımlanan $F(x, y)$ fonksiyonunda
 i) Her x, y için $F(x+1, y) + F(x, y+1) = F(x, y) + F(x+1, y+1)$
 ii) Her x için $F(x, 0) = x$
 iii) Her $y > 0$ için $F(0, y) = 1$
 ise $F(1000, 993)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) 1993 b) 1001 c) 999 d) 994 e) 7

2. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1994

1



Şekilde $ABCD$ ve $APQR$ dikdörtgenlerinin alanları sırasıyla a ve b dir. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) $a < b$ b) $4a = 3b$ c) $a = b$ d) $3a = 2b$ e) $a > b$

- 2 Bir torbada her birinin üzerinde 1 den 20 ye kadar olan tam sayılardan biri yazılı 20 top bulunmaktadır. Üstünde aynı sayı yazılı olan herhangi iki top yoktur. Bu torbadan bir top çekilir ve üstündeki sayı kaydedildikten sonra top torbaya geri konur. Bu işlem 10 defa tekrar edilirse, çıkan 10 sayının hepsinin birbirinden farklı olma olasılığı kaçtır?

- a) $\frac{\binom{20}{10}}{20^{10}}$ b) $\frac{\binom{20}{10} 10!}{20^{10}}$ c) $\frac{10^{20}}{20^{10}}$ d) $\frac{10^{10}}{20^{10}}$ e) $\frac{\binom{29}{10}}{20^{10}}$

- 3 Aşağıdakilerden hangisi $1994 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 2000$ sayısından daha büyüktür?

- a) $1993^2 \cdot 2001^2$ b) $1993 \cdot 1997^2 \cdot 1999$ c) $1993 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 2001$ d) $1993 \cdot 1997^2 \cdot 2001$ e) $1995^2 \cdot 1999^2$

- 4 $x + y + z = 1$ olmak üzere x, y, z pozitif reel sayıları için

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

çarpımının alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{64}{27}$ b) 8 c) 27 d) 64 e) 84

- 5) 13 kişilik bir topluluk, her birinde en az bir kişi bulunan iki alt topluluğa farklı biçimde ayrılabilir?
a) 63 b) 168 c) 169 d) 4095 e) 8191
- 6) $ABCD$ dışbükey (konveks) dörtgeninde $|AB| = 12$, $|BC| = 4$, $|CD| = 3$, $|DA| = 13$ ve $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olduğuna göre, bu dörtgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?
a) 24 b) 32 c) 36 d) 48 e) 84
- 7) $[x^2 + 8x] \leq A$ denkleminin, tam sayılar kümesi içinde tam olarak 13 tane çözümü olması için A nın alabileceği en küçük değer nedir?
a) 8 b) 9 c) 19 d) 20 e) 30
- 8) Her x reel sayısı için $\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8$ eşitsizliği sağlanıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) $a^2 > 8$ b) $0 \leq a \leq 75$ c) $|a| < 10$ d) $a = 0$ e) $a < 74$

9 Her $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için $a_n = 2^n$ olsun.

(b_n) ile $(a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n, a_n, \dots)$ dizisinin genel terimini gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$k \leq \frac{b_n}{C^n} \leq K$$

olacak şekilde, n ye bağlı olmayan pozitif k, K, C sayıları varsa, C ne olmalıdır?

- a) $2^{\frac{1}{3}}$ b) $3^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{1}{2}}$ e) $2^{\frac{n}{3n-1}}$

10 n pozitif bir tamsayı olmak üzere, S_n ile $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesini gösterelim. S_n kümesinin içerdikleri elemanların toplamları birbirine eşit olan iki ayrık alt kümeye ayrılabilirdiğini kabul edelim. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) n , $4k + 1$ biçiminde olmak zorundadır.
 b) n , $4k + 2$ biçiminde olabilir.
 c) n , $4k$ biçiminde olmak zorundadır.
 d) n , ya $4k$ ya da $4k + 3$ biçiminde olmak zorundadır.
 e) İstenen koşulları sağlayan bir n sayısı yoktur.

11 Rasyonel sayılardan rasyonel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu tüm a, b rasyonel sayıları için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ denklemini sağlasın ve $f(2) = 3$ olsun. $f\left(\frac{5}{2}\right)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{5}{2}$ b) 3 c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{15}{2}$

12 Pozitif tam sayı çiftlerinin kümesinden pozitif tam sayılar kümesine giden bir f fonksiyonu, tüm x, y pozitif tam sayıları için $f(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$, $f(x, y) = f(x, x + y)$ koşullarını sağlıyorsa $f(91, 143)$ nedir?

- a) 1 b) 2 c) 13 d) 14 e) 15

- 13** Belli bir birime göre tüm kenar uzunlukları tamsayılar ve bir kenarının uzunluğu da 6 olan kaç tane dik üçgen vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 6 e) Sonsuz sayıda

- 14** $20^{15} - 1$ sayısı aşağıdakilerden hangisi ile bölünmez?
 a) 11 b) 19 c) 31 d) 41 e) 61

- 15** Bir torbada 10 kırmızı, 4 beyaz top vardır. Toplar, çekilen top torbaya geri konmaksızın, birer birer torbadan çekilmektedir. Sekizinci top da çekildikten sonra, beyaz topların tümünün çekilmiş olma olasılığı kaçtır?
 a) $\frac{10}{143}$ b) $\frac{8}{51}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{15}{64}$ e) $\frac{2}{5}$

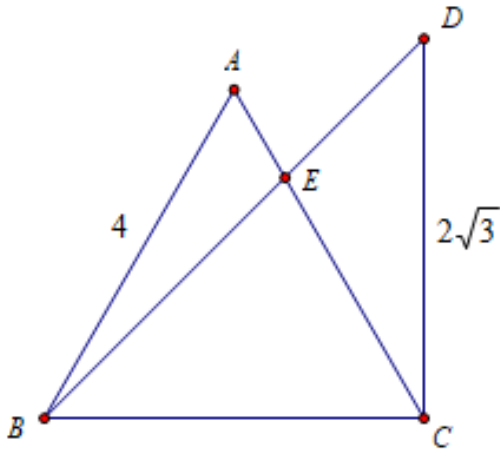
- 16** Çakışık olmayan OA ve OB doğruları veriliyor. OA üzerinden seçilen bir noktadan OB ye bir dik iniliyor ve dikmenin OB üzerindeki ayağından OA ya ikinci bir dik iniliyor. Son dikmenin OA üzerindeki ayağından tekrar, OB ye bir dikme iniliyor ve bu işlem sonsuz devam ediyor. İlk iki dikmenin uzunlukları sırası ile a ve b olsun. $a > b$ ise, çizilen sonsuz sayıdaki dikmenin uzunlukları toplamı nedir?
 a) $\frac{a^2}{(a-b)}$ b) $\frac{(a-b)}{a^2}$ c) $\frac{a^2-b^2}{a}$ d) $\frac{(a^2-b^2)}{b}$ e) $\frac{a}{(a^2-b^2)}$

- 17 Doğal sayılardan tam karelerin atılmasıyla elde edilen $2, 3, 6, 7, 8, 20, 11, \dots$ dizisinin 1994 üncü terimi nedir?
 a) 2036 b) 2037 c) 2038 d) 2039 e) 2040

- 18 Rastgele seçilen altı basamaklı bir doğal sayının tam olarak iki basamağında 1 bulunması olasılığı nedir?
 a) $\frac{63}{755}$ b) $\frac{81}{800}$ c) $\frac{7}{45}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{51}{101}$

- 19 Rakamlarının sayı değerleri çarpımı 90 olan kaç tane beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?
 a) 105 b) 135 c) 155 d) 180 e) 215

20



ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$, $|AB| = 4$ ve $|CD| = 2\sqrt{3}$ ise $|AE|$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 3 d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

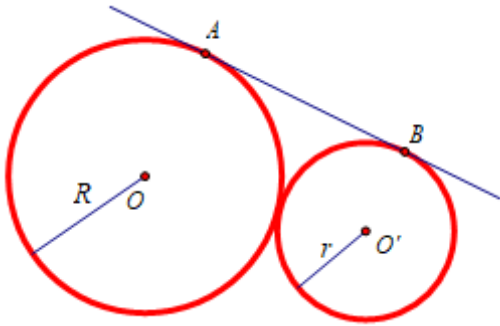
21 Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir. Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 adet artarak bir tam kareden bir fazla hale gelir. Mayıs ayında, tavşan sayısı, yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare olur. Tavşanların Mart ayındaki sayısı ne olur?

- a) 47^2 b) 48^2 c) 49^2 d) 50^2 e) 51^2

22 Bir tür loto oyunu, biletin üstündeki $1, 2, \dots, 49$ sayıları arasından 6 tanesini seçip işaretlemek suretiyle oynanır. Yapılan çekilişte, bu 49 sayıdan 6 tanesi belirlenir. Lotoyu oynayan kişi, oynadığı biletin üstünde işaretlediği 6 sayı ile çekilişte çıkan 6 sayı aynıysa, büyük ikramiyeyi kazanır. Çekilişte 6 sayıdan hiçbirini tutturamayanlara teselli mükafatı verilirse, teselli mükafatı kazanmayı garantilemek için, en az kaç bilet oynamak gerekir?

- a) 7 b) 12 c) 43 d) $\binom{49}{6} - \binom{43}{6}$ e) $\binom{49}{6} - 6\binom{48}{5} + 15\binom{47}{4} - 20\binom{46}{3} + 15\binom{45}{2} - 6\binom{44}{1} + 1$

23



Şekildeki O ve O' merkezli birbirine teğet çemberlerin yarıçapları sırası ile R ve r dir. Ortak teğet uzunluğu $|AB| = 2\sqrt{3}$ ve dairesel bölgelerin alanları toplamı 10π ise $R + r$ kaçtır?

- a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) $2 + \sqrt{6}$ e) 4

24 Taban yarıçapları 2 ve 6 olan dik kesik koninin içine yerleştirilen küre, yanal yüzeye ve tabanlara teğet olduğuna göre, bu kesik koninin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{148\sqrt{3}}{3}\pi$ b) $\frac{164\sqrt{3}}{3}\pi$ c) $\frac{208\sqrt{3}}{3}\pi$ d) $\frac{248\sqrt{3}}{3}\pi$ e) $\frac{324\sqrt{3}}{3}\pi$

25 $2|x - 1| - |x + 2| = 6$ denkleminin çözümü olan reel sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 0 b) 2 c) 8 d) 10 e) 12

26 Boy ortalaması 1,68 m olan bir toplulukta kadınların boy ortalaması 1,66 m, erkeklerin boy ortalaması 1,74 m'dir. Bu toplulukta erkek sayısının kadın sayısına oranı nedir?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) 3 e) 4

27 İç teğet çemberinin merkezi I , ağırlık merkezi G olan ABC üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla 15, 21 ve 9 olduğuna göre $|GI|$ kaçtır?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

28 ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, $D \in [BC]$, $m(\widehat{CDA}) = 2\alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \alpha$, $|CD| = x$, $|DB| = 2$, $|CA| = y$ ise x ile y arasında hangi bağıntı vardır?

- a) $y^2 - 2x = 4$ b) $y - x = 2$ c) $x^2 = 2y + 2$ d) $x^2 + y^2 = 4$ e) $y^2 - 4x^2 = 1$

- 29** Bir dolapta bulunan 10 değişik çift ayakkabı arasından karanlıkta 8 tane tek ayakkabı rastgele alınır. Bu sekiz ayakkabı içinde on çiftten hiçbirinin hem sağ, hem sol tekinin bulunmama olasılığı kaçtır?

a) $\frac{\binom{10}{8} 2! 2^8}{\binom{20}{8}}$ b) $\frac{2^8}{\binom{20}{8}}$ c) $\frac{\binom{10}{8} 2^8}{\binom{20}{8}}$ d) $\frac{\binom{10}{1} \binom{9}{6} 2^6}{\binom{20}{8}}$ e) $\frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}}$

- 30** $2, a, b, c, n$ pozitif tam sayılarından oluşan artan bir sonlu dizidir. a, b, c sayı üçlüsünün tam 33 farklı seçimi, bu dizinin ilk üç terimini geometrik, son üç teriminin de aritmetik bir dizi oluşturmasını sağlamaktadır. n sayısının alacağı en küçük değer kaçtır?

a) 3 b) 1024 c) 1089 d) 2180 e) 2314

- 31** b , bir pozitif tam sayı ve $()_b$ sayıların b tabanına göre gösterimi olmak üzere $(12)_b \cdot (15)_b \cdot (16)_b = (3146)_b$ ise, $(12)_b + (15)_b + (16)_b$ sayısının 10 tabanındaki karşılığı nedir?

a) 37 b) 40 c) 43 d) 48 e) 54

- 32** Aşağıdaki sayılardan hangisi, $4n^2 + 1$ sayısını n nin sonsuz sayıda tam sayı değeri için böler?

a) 3 b) 7 c) 11 d) 13 e) Hiçbiri

- 33** m, n pozitif tam sayılar ve $p > 2$ bir asal sayı olsun. $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ olmak üzere $m^n + n^m \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğini sağlayan (m, n) sıralı ikililerinin oluşturduğu kümede kaç eleman vardır?
 a) 0 b) 1 c) p d) Sonsuz sayıda e) Hiçbiri

- 34** Bir küpün bir köşesinde bulunan bir örümcek sadece küpün kenarları boyunca hareket edebilmektedir. Her noktadan en fazla bir defa geçmek koşuluyla, bu örümcek bulunduğu köşeden en uzaktaki köşeye kaç farklı yoldan gidebilir?
 a) 6 b) 9 c) 12 d) 18 e) 671

35

$$\sum_{n=1}^{100} \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$$

toplamı kaçtır?

- a) 300 b) 3267 c) 3300 d) 3330 e) 3333

- 36** $\lfloor x^2 + 4x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 4\lfloor x \rfloor$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesinde $x = 0$ sayısını içine alan en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $-1 \leq x \leq 1$ b) $0 \leq x < \sqrt{5} - 2$ c) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{5} - 2$ d) $x = 0$ e) $0 \leq x \leq \sqrt{5} - 2$

- 37** P_1, P_2, \dots, P_{12} farklı asal sayılar ve $P_1 + P_2 + \dots + P_{12} \equiv x \pmod{12}$ olsun. Bu durumda x aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) 0 b) 3 c) 7 d) 8 e) 11

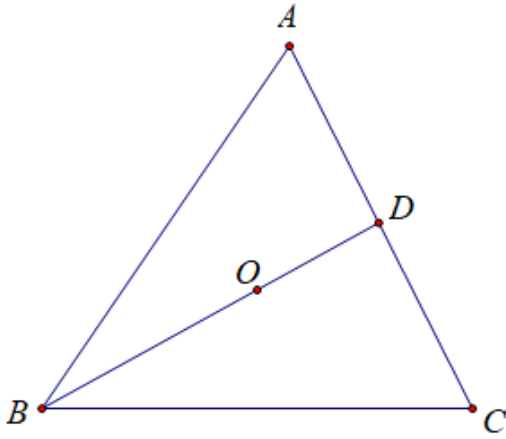
- 38** ABC üçgeninde $[AH_1], [BH_2]$ yükseklikleri H noktasında kesişiyor. H_1, H, H_2 noktalarından geçen çemberin H_1 deki teğeti $[AB]$ yi D de kesiyor. $|AC| = 17, |CH_1| = 15, |H_1B| = 4$ olduğuna göre $|DH_1|$ kaçtır?
 a) $4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $3\sqrt{2}$ e) 3

- 39** Dışbükey (konveks) $ABCD$ dörtgeninde $|DA| = |AB| = 2, m(\hat{A}) = 108^\circ, m(\hat{C}) = 126^\circ$ ise $|AC|$ kaçtır?
 a) 2 b) 3 c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

- 40** A, B, C, D ve E düzlem üstünde beş değişik nokta olsun. Bu noktaları birleştiren doğrulardan hiçbiri bir başkasına dik ya da paralel olmasın. Bu beş noktanın her birinden geri kalan dört noktayı birleştiren doğrulara dikler çizelim. Bu dikler birbirleriyle A, B, C, D, E noktaları dışında toplam olarak en fazla kaç değişik noktada kesişebilirler?
 a) 300 b) 310 c) 320 d) 330 e) 360

3. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1995

1



Şekilde $m(\hat{A}) = 58^\circ$ ve O noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. $m(\widehat{DBC})$ kaç derecedir?

- a) 32° b) 30° c) 29° d) 28° e) 25°

- 2 Bir bakkalda 16, 18, 19, 20 ve 31 litrelik 5 tenekeden dördünde çiçek yağı, birinde zeytinyağı vardır. Bakkal, bir müşteriye litrenin belli bir tam katı kadar çiçek yağı satar. Başka bir müşteriye de ilkinen sattığının iki katı kadar çiçek yağı sattıktan sonra, elinde hiç çiçek yağı kalmadığını görür. Zeytinyağı kaç litrelik tenekededir?
a) 16 b) 18 c) 19 d) 20 e) 31

- 3 $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ ise, $x + y$ nedir?
a) $-2\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 2

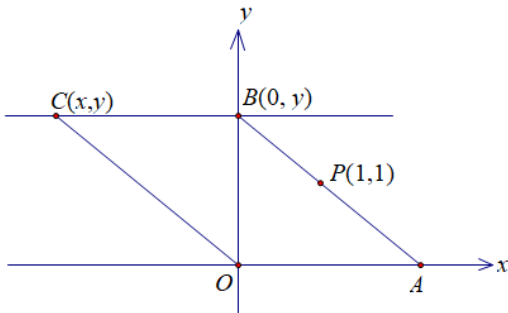
- 4 Bir salona giren üç kişi eldivenlerini vestiyere bırakıyor. Eldivenleri geri alırken, her birine rastgele iki eldiven veriliyor. Her birinin kendisine ait olan eldiven çiftini almış olma olasılığı nedir?
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{90}$

- 5 7 sayısı 2, 22, 222, 2222, ... dizisinin kaç terimini böler?
 a) 0 b) 1 c) 6 d) 7 e) Sonsuz sayıda

- 6 Bir dik üçgenin dik kenarları x ve y birim uzunluktadır. Bu dik üçgenin hipotenüsü üzerine dışa doğru bir kare çiziliyor. Üçgenin dik köşesi ile karenin merkezi arasındaki uzaklık nedir?

- a) $\frac{x+y}{2}$ b) $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{x+y}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{x \cdot y}}{2}$ e) $\frac{x \cdot y}{\sqrt{2}}$

7



Şekilde AB , $P(1,1)$ noktasından geçen bir doğru ve $OABC$ bir paralelkenardır. $C(x,y)$ noktasının x ve y koordinatları arasında hangi bağıntı vardır?

- a) $y + yx = x$ b) $2y + yx = x$ c) $y + 2yx = x$ d) $y = \frac{x+y}{x-y}$ e) $y = \frac{x-y}{x+y}$

- 8 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir?

- a) $1 + \frac{99}{100!}$ b) $\frac{101}{100}$ c) $1 - \frac{99}{100}$ d) 1 e) $1 - \frac{1}{100!}$

- 9** Bir sayı dizisinin birinci terimi 20 dir. Bundan sonraki her terim kendisinden önceki terimin karesinin rakamları toplamına 1 eklenerek elde ediliyor. Bu dizinin yüzüncü terimi nedir?
 a) 5 b) 7 c) 8 d) 11 e) 14

- 10** Aşağıdaki kümelerin hangisi

$$\{a \in \mathbb{Z} \mid a^7 \equiv a \pmod{63}\}$$

kümesinin alt kümesi değildir?

- a) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{21}\}$ b) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{9}\}$ c) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 2 \pmod{3}\}$
 d) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \pmod{3}\}$ e) Hiçbiri

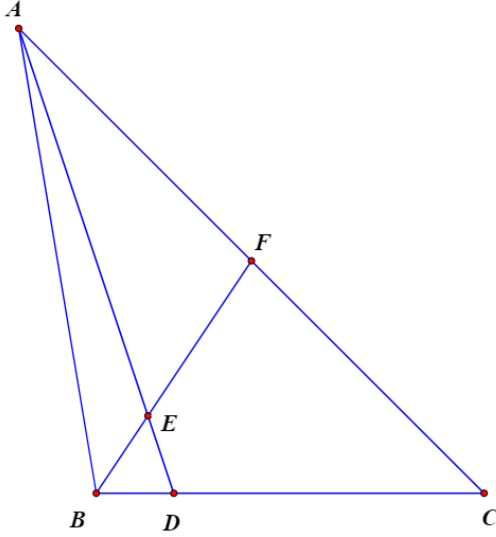
- 11** a, b, c gerçel sayıları $(0, 1)$ aralığında ise, $\frac{\log_a b}{a-b+1} + \frac{\log_b c}{b-c+2} + \frac{\log_c a}{c-a+3}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri kaçtır?

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) 9

- 12** Ondalık yazılımında 4 ve 7 rakamları bulunup, 0 ve 8 rakamları bulunmayan kaç tane 10 basamaklı sayı vardır?

- a) $8^{10} - 2 \cdot 7^{10} + 6^{10}$ b) $8! - 2 \cdot 7! + 6!$ c) $10^8 - 2 \cdot 10^7 + 6^6$ d) $2 \binom{10}{2} 8^8$ e) $2 \binom{10}{2} 8^8 - 6 \binom{10}{2} 8^7$

13



Şekilde F , $[AC]$ nin orta noktası, $D \in [BC]$ ve $\{E\} = [BF] \cap [AD]$ dir.

$|DC| = 4|BD|$, $Alan(DCFE) = 42$ ise, $Alan(ABE)$ ne olur?

- a) 21 b) 20 c) 18 d) 15 e) 12

14 $n^n + 1 = (n + 1)(2n + 1)$ eşitliğinin tam sayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz sayıda

15 Herhangi bir $r > 0$ sayısı için; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve

$$\begin{aligned} |x - 2| < r^2 &\implies |f(x) - 3| < r \\ |x - 2| < \frac{r}{10} &\implies |g(x) - 4| < r \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan (f, g) fonksiyon çiftleri düşünülüyor.

Aşağıdaki x değerlerinden hangileri $|f(x) + g(x) - 7| < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini bu tür (f, g) çiftlerinin tümü için sağlar?

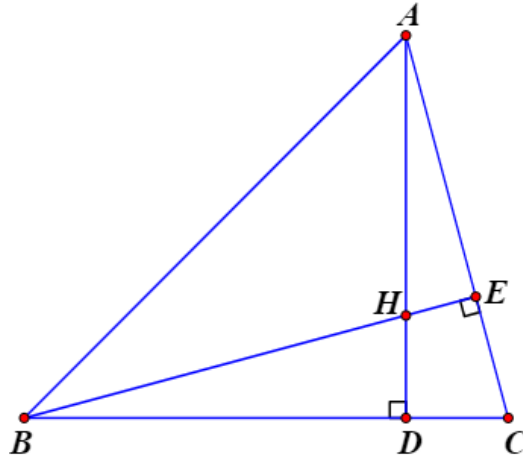
- (I) $x = 1,99$ (II) $x = 2,024$ (III) $x = 1,95$ (IV) $x = 1,9$

- a) Hiçbiri için
b) Sadece (I) için
c) Sadece (I) ve (II) için
d) Sadece (I), (II), (III) için
e) Hepsi için

16 Şekildeki ABC üçgeninde,

$m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 75^\circ$ ve $|BC| = 6$ dir.

Yüksekliklerin kesim noktası H ise $|AH|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?



- a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{6}$

- 17** 2 mavi, 2 kırmızı ve 2 beyaz top bir çember etrafına rastgele dizildiğinde aynı renkli topların hep yan yana gelme olasılığı nedir?
- a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

- 18** Aşağıdaki sayılardan hangisi $b > 1$ doğal sayısı ne olursa olsun asal değildir?
- a) $(11)_b$ b) $(111)_b$ c) $(1111)_b$ d) $(11111)_b$ e) Hiçbiri

- 19** a, b, c gerçel sayıları için,

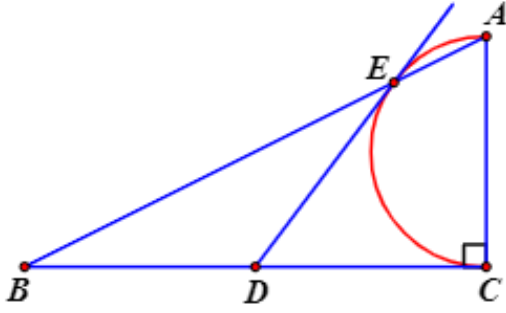
$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2 \end{aligned}$$

ise, c 'nin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) $\frac{2}{3}$ b) 1 c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\sqrt{2}$

- 20** Bir sırada 9 koltuk bulunmaktadır. 6 kişi bu sırada rastgele oturduktan sonra yan yana iki boş koltuk kalması olasılığı nedir?
- a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{2}{12}$ c) $\frac{4}{12}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{12}$

21



Şekilde $|BC| = 2$, $|AC| = 1$ ve $m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$ dir. $[AC]$ çaplı çemberin $[AB]$ kenarını kestiği E noktasından çembere çizilen teğet BC 'yi D 'de kestiğine göre, $\tan(\widehat{EDC})$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) -2 b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 2

22 Aşağıdaki sayılardan hangisi $(a^3 - 1) \cdot a^3 \cdot (a^3 + 1)$ sayısını a 'nın en az bir tam sayı değeri için bölmez?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

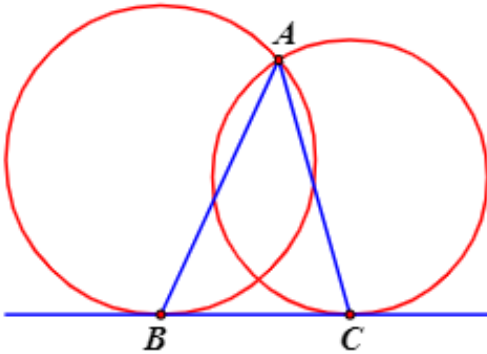
23 n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\{a \in \mathbb{N} : |\sqrt{a} - n| < \frac{1}{2}\}$$

kümesinde kaç eleman vardır?

- a) $n - 1$ b) $n + 1$ c) $2n - 1$ d) $2n$ e) $n(n + 1)$

24



Şekilde A noktasından geçen iki çemberden d doğrusuna B 'de teğet olanın yarıçapı 9, C 'de teğet olanın yarıçapı 4'tür. ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) $\frac{5}{2}$ b) 5 c) 6 d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{13}$

- 25** Bir çember etrafına, her sayı bitişiğindeki iki sayının çarpımına eşit olacak şekilde en fazla kaç farklı sayı yazılabilir?
 a) 3 b) 6 c) 15 d) 243 e) Sonsuz sayıda

- 26** $(ABC)_7 = (CBA)_9$ ise C aşağıdakilerden hangisidir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

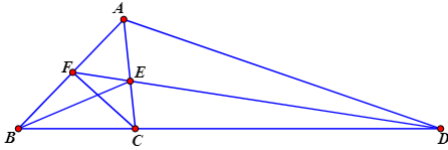
- 27** a bir tam sayı olmak üzere, $x^3 + x + a = 0$ denkleminin kökleri ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) Yalnızca sonlu sayıda a için sadece bir kökü tam sayı olur.
 b) Yalnızca bir kökü tam sayı olacak şekilde sonsuz sayıda a vardır.
 c) Yalnızca sonlu sayıda a için bütün kökleri tam sayı olur.
 d) Sonsuz tane a için bütün kökleri tam sayı olur.
 e) Hiçbir a için tam sayı kökü olamaz.

- 28** $ABCD$ karesinin $[AD]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde sırasıyla K ve L noktaları $m(\widehat{DAL}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{DCK}) = 15^\circ$ olacak şekilde seçiliyor.
 $[CK] \cap [AL] = \{P\}$ olmak üzere $m(\widehat{APB})$ kaç derecedir?
 a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 75

29 $x > 0$ için $f(x+1) = x \cdot f(x)$ ve $f(1) = 1$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) $f(x)$ 'in en küçük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.
- b) $f(x)$ 'in en küçük değerini aldığı nokta $(0, 1)$ aralığındadır.
- c) $f(x)$ en büyük değerini $x = 1$ noktasında alır.
- d) $f(x)$ 'in en büyük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.
- e) $f(x)$ 'in en büyük değerini aldığı nokta $(2, \infty)$ aralığındadır.

30



Şekilde $[BE]$, ABC üçgeninin bir iç açıortayı, $[AD]$ ise bir dış açıortayıdır. DE doğrusu AB doğrusunu F noktasında kesmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 46^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 84^\circ$ ise $m(\widehat{BFC})$ kaç derecedir?

- a) 94 b) 92 c) 90 d) 88 e) 84

31 Bir n doğal sayısı 48 e bölündüğünde kalan 47 oluyor. Aynı sayı 49 a bölündüğünde kalan yine 47 dir. Bu n sayısı 42 ye bölününce kalan ne olur?

- a) 5 b) 7 c) 13 d) 24 e) 41

32 $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinin, elemanları arasında iki ardışık sayı bulunmayan 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

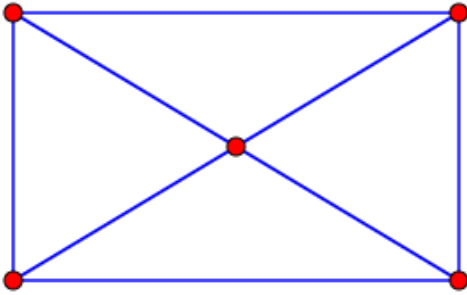
- a) 26 b) 29 c) 42 d) 78 e) 126

- 33** a, b pozitif gerçel sayılar olmak üzere,
 $a^{\ln b} \cdot b^{\ln a} + a^{\ln b} + b^{\ln a} = 8$ ise, $(\ln a) \cdot (\ln b)$ çarpımı kaçtır?
 a) $\frac{1}{2} \ln 2$ b) $\ln 2$ c) $\frac{3}{2} \ln 2$ d) $3 \ln 2$ e) $(\ln 2)^2$

- 34** 1 den 56 ya kadar doğal sayılar, bir çember etrafına, herhangi ardışık dizili 5 sayının toplamı en az K olacak şekilde dağıtılmıştır. K en çok kaç olabilir?
 a) 15 b) 56 c) 142 d) 143 e) 270

- 35** $n \leq 15$ olmak üzere, t_1, t_2, \dots, t_n tek sayıları,
 $t_1^4 + t_2^4 + \dots + t_n^4 = 1963$ eşitliğini sağlamaktadır.
 n kaç olmalıdır?
 a) 9 b) 11 c) 12 d) 13 e) 15

36

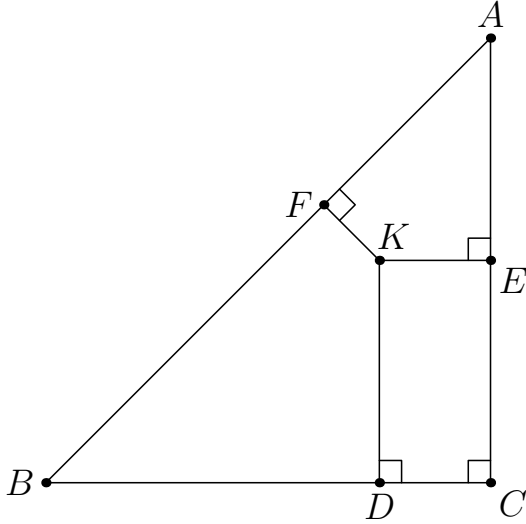


Şekilde yer alan 8 doğru parçasından her biri tek bir renkle ve ortak bir noktası bulunan doğru parçaları farklı renklerde olmak koşulu ile mevcut 5 farklı renk kullanılarak boyanacaktır. Bu 5 rengin tümünü kullanmak gerekmiyorsa, söz konusu boyama işlemi kaç farklı şekilde yapılabilir?

- a) 480 b) 720 c) 1200 d) 1680 e) 2160

4. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1996

1



Şekildeki ABC dik üçgeninin kenarlarına K noktasından indirilen dikmelerin ayakları D, E, F dir.

$$|BC| = a, \quad |CA| = b, \quad |AB| = c,$$

$$|CD| = x, \quad |AE| = y, \quad |BF| = z$$

ise $ax + by + cz$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) $2ab$ b) ab c) a^2 d) b^2 e) c^2

2 x ve y tam sayı olmak üzere, $x^2 - y^2 = 1996$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) sıralı ikilisi vardır?

- a) 12 b) 6 c) 4 d) 0 e) Sonsuz sayıda

3 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin iki kökü $u \neq 0$ olmak üzere, $x = u$ ve $x = -u$ ise, katsayılar arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi her zaman doğrudur?

- a) $c^2 - abc + a^2d = 0$ b) $a + b + c + d = 0$ c) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ d) $ab > cd$ e) $ad = bc$

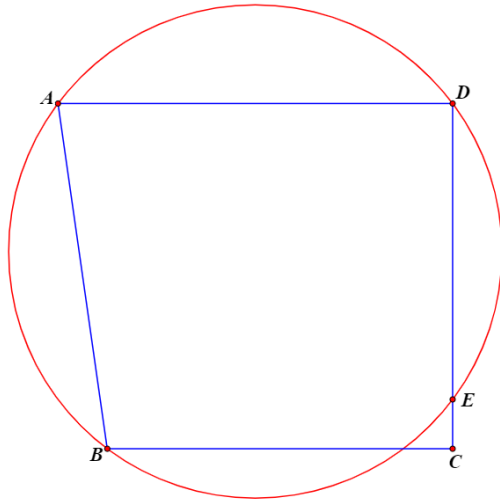
4 $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ kümesinden herhangi ikisinin farkı 7 olmayacak şekilde en çok kaç eleman seçilebilir?

- a) 53 b) 52 c) 51 d) 50 e) 49

- 5 n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $\sum_{i=1}^4 i^n$ sayısı 5 ile bölünmez?
 a) 241 b) 240 c) 239 d) 238 e) 237

- 6 Bir $ABCD$ paralelkenarının $[AB]$ kenarı üzerinde $3|AE| = |EB|$ ve $[AD]$ kenarı üzerinde, $2|AF| = |FD|$ olacak biçimde E ve F noktaları alınıyor.
 $[EF] \cap [AC] = \{K\}$ ise $\frac{|AC|}{|AK|}$ kaçtır?
 a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

7



Şekildeki $ABCD$ yamuğunda $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ dir. D, A, B noktalarından geçen ve yarıçapı 5 olan çemberin $[DC]$ kenarını D dışında kestiği ikinci nokta E olmak üzere,

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BE})$ ve $|CE| = 3\sqrt{2}$ ise $|AD|$ kaçtır?

- a) $5\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$
- 8 $x^2 - 10x - 14 = 2\sqrt{x^2 - 10x + 1}$ eşitliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 a) 20 b) 10 c) -9 d) -20 e) Hiçbiri

- 9 3 kırmızı, 3 mavi, 3 yeşil top rasgele sıralandığında, en az iki kırmızı topun yan yana gelme olasılığı nedir?
- a) $\frac{8}{12}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{6}{12}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{4}{12}$

- 10 p ve q farklı asal sayılar, a ve b farklı pozitif tam sayılar ve $n = p^a \cdot q^b$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 81 ise n^3 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı kaçtır?
- a) 169 b) 160 c) 117 d) 84 e) Hiçbiri

- 11 $\sum_{n=1}^9 \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- a) $\frac{293}{52}$ b) $\frac{189}{110}$ c) $\frac{179}{120}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{12}$

- 12 $\sin x = \frac{x}{22}$ denkleminin gerçel çözümlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- a) 17 b) 15 c) 14 d) 9 e) 7

13 $1 \leq a \leq 100$ olmak üzere, $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$

bağıntısını sağlayan kaç tane a tam sayısı vardır?

- a) 79 b) 78 c) 77 d) 76 e) 75

14 $m(\widehat{A}) < 90^\circ$ olan bir $ABCD$ paralelkenarının $[BC]$ kenarına C noktasından çıkılan dikmenin AB doğrusunu kestiği nokta E olmak üzere,

$|AB| = |CE| = 2|BC| = 2\sqrt{2}$ ise $|AC|^2 + |DE|^2$ kaçtır?

- a) $8\sqrt{5} + 26$ b) $4\sqrt{10} + 26$ c) $4\sqrt{5} + 16$ d) $2\sqrt{10} + 16$ e) $2\sqrt{2} + 26$

15 Ahmet yalnızca 2, 3, 4 rakamlarından oluşan 13 basamaklı bir sayı tutuyor. Betül n sayıdan oluşan bir liste hazırlıyor. Bu sayılardan birinin en az 5 basamağı Ahmet'in tuttuğu sayının karşılık gelen basamakları ile çakışıyorsa Betül oyunu kazanıyor. Ahmet'in tuttuğu sayı ne olursa olsun Betül'ün oyunu kazanması için n en az kaç olmalıdır?

- a) 13 b) 5 c) 4 d) 3 e) Hiçbiri

16 $1^{11} + 2^{21} + \dots + 13^{131}$ sayısı 13 ile bölündüğünde kalan aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

17 Aşağıdaki p asal sayılarından hangisi için,

$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin en az bir tam sayı çözüümü vardır?

- a) 653 b) 647 c) 641 d) 617 e) Hiçbiri

18 Üçer kişilik üç aileden oluşan dokuz kişi, üç odaya, her birine üç kişi olmak üzere, rasgele girerler. Tam olarak bir ailenin bireylerinin aynı odaya girmiş olması ve diğer iki odadan hiçbirinde tam bir ailenin bulunmaması olasılığı nedir?

- a) $\frac{27}{140}$ b) $\frac{3}{28}$ c) $\frac{27}{280}$ d) $\frac{9}{140}$ e) $\frac{3}{7}$

19 Bir $[AX]$ ışını üzerinde $|AO| = |OB| = |BC|$ olacak biçimde sırayla O, B, C noktaları alınarak O merkezli, $[AB]$ çaplı çember ve çember üzerinde $m(\widehat{BAD}) = 78^\circ$ koşulunu sağlayan D noktasından bu çembere bir teğet çiziliyor. C noktasından bu teğete indirilen dikmenin ayağı E ise EBC açısı kaç derecedir?

- a) 146 b) 144 c) 142 d) 140 e) 138

20 x, y gerçel sayıları için

$x^2 + y^2 = 6$ ve $x^3 + y^3 = 14$ ise

$x^4 + y^4$ toplamının alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\{17\}$ b) $\{3, 4\}$ c) $\{17, 10\sqrt{15} - 22\}$ d) $\{34, 20\sqrt{15} - 44\}$ e) Hiçbiri

21 a_n ile \sqrt{n} ye en yakın olan tam sayıyı gösterelim.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2070}}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) 93 b) 92 c) 91 d) 90 e) 89

22 1, 4, 7, ..., 100 aritmetik dizisine ait terimlerden 19 tanesini, bunlardan herhangi farklı ikisinin toplamı n 'ye eşit olmayacak biçimde seçmemizi aşağıdaki n sayılarından hangisi mümkün kılar?

- a) 110 b) 107 c) 104 d) 101 e) 98

23 $[AB]$ ve $[DC]$ kenarları paralel olan bir $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin uzunlukları $|AC| = 3$, $|BD| = 5$ tir. $[AB]$ ve $[DC]$ kenarlarının orta noktaları arasındaki uzaklık 2 ise bu yamuğun alanı kaçtır?

- a) 8 b) $\frac{15}{2}$ c) 7 d) 6 e) $\frac{11}{2}$

24 Elimizde 50'si beyaz, 50'si siyah olmak üzere toplam 100 top var. Bunların tamamını her torbada en az bir top bulunacak şekilde iki torbaya dağıtıyoruz. Bu torbalardan birini rasgele seçerek, içinden yine rasgele bir top çekiyoruz. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x , siyah top sayısını da y ile gösterelim. Tüm dağılımlar arasında, çekilen topun beyaz olması olasılığını en büyük yapan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) (50, 0) b) (49, 48) c) (25, 25) d) (1, 2) e) Hiçbiri

- 25** Bir XOY açısının OX kenarı üzerinden $|OA| = 3$, $|OD| = 5$ olacak biçimde alınan A ve D noktaları, OY kenarı üzerinde de $|OC| = 4$ ve $|OB| > 4$ olacak biçimde alınan C ve B noktaları için $[AB] \cap [DC] = \{E\}$ ve $|AE| \cdot |OB| = 3|EB|$ ise $|OB|$ kaçtır?
- a) $\frac{60}{7}$ b) $\frac{55}{6}$ c) $\frac{19}{4}$ d) 8 e) 6

- 26** m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,
 $n + (n + 1) + \dots + (n + m) = 1000$
eşitliğini sağlayan kaç (m, n) sıralı ikilisi vardır?
- a) 10 b) 5 c) 3 d) 2 e) 1

- 27** $|AB| = 12$ olmak üzere, $[AB]$ çaplı çemberin $|AC| = 8$ koşulunu sağlayan $[AC]$ kirişi çiziliyor. Bu çemberin C noktasından geçen teğetine, B noktasından indirilen dikmenin ayağı D ise BDC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- a) $\frac{80\sqrt{5}}{9}$ b) $\frac{48\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{60\sqrt{3}}{7}$ d) $\frac{56\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{75\sqrt{2}}{4}$

- 28** a ve b den oluşan 9 harfli dizilerden kaç tanesi *baba* kelimesini içerir?
- a) 192 b) 186 c) 158 d) 156 e) 154

- 29** Farklı boylarda 17 kişi yan yana dizilmiş olsun. Bunlardan n tanesi artan ya da azalan bir boy sırasında kalacak şekilde geri kalanlar sıradan uzaklaştırılıyor. Bu diziliş ne olursa olsun, böyle bir işlemi olanaklı kılan en büyük n sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

- 30** $x \in \mathbb{R}$ için $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geq 1$ için $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ bağıntılarıyla f_1, f_2, f_3, \dots fonksiyonları tanımlanıyor.
- f_{1996} fonksiyonunun $[0, 2]$ kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 0 ve 3 b) 0 ve 2 c) -1 ve 24 d) -1 ve 3 e) -1 ve 0

- 31** Aşağıdaki a sayılarından hangisi için;
- $n^a \equiv n \pmod{a}$ bağıntısını sağlamayan en az bir n tam sayısı vardır?
- a) 667 b) 561 c) 547 d) 503 e) 491

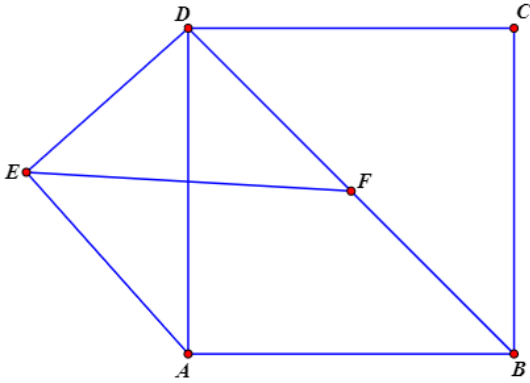
- 32** $x^2 - x + 1$ polinomunun $x^n - x + 1$ polinomunu tam olarak bölmesini mümkün kılan n pozitif tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- a) $\{2\}$
- b) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod{3}\}$
- c) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod{6}\}$
- d) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod{12}\}$
- e) Hiçbiri

- 33** $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,
- 1) $f(x+1, y+1) + f(x, y) = f(x, y+1) + f(x+1, y)$
 - 2) $f(x, 0) = x^2$
 - 3) $f(0, y) = -y^2$
- koşullarını sağlıyor. $f(1000, 996)$ aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 7984 b) 1996 c) 16 d) 4 e) Hiçbiri

- 34** Bir üçgen, oluşacak üçgenlerin tüm köşelerinde aynı sayıda kenar kesişecek şekilde n üçgene ayrılabilir mi? n en çok kaç olabilir?
- a) 19 b) 15 c) 7 d) 3 e) Hiçbiri

- 35** Elemanlarından herhangi ikisi aralarında asal olan ve herhangi ikisinin farkı üçüncüsü ile bölünen, üç elemanlı tüm $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$ kümelerini dikkate aldığımızda, aşağıdakilerden hangisi doğru değildir?
- a) a, b, c sayılarından en az biri negatif olmalıdır.
 - b) Sıfırdan farklı hangi c tam sayısı verilirse verilsin, $\{a, b, c\}$ istenen koşulu sağlayacak biçimde a ve b tam sayıları bulunur.
 - c) a, b, c sayılarından en az birinin mutlak değeri 1 ya da 2 dir.
 - d) a, b, c ardışık tam sayılar olamaz
 - e) Hiçbiri

36



Şekilde $ABCD$ kare,

$m(\widehat{AED}) = 90^\circ$ ve $[BD]$ nin orta noktası F dir.

$|EA| = a$, $|EF| = b$, $|ED| = c$ ise

ABD üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $a^2 + b^2 + ab$ b) $b^2 + 4ac$ c) $\frac{b^2 + ac}{3}$ d) $b^2 - \frac{ac}{2}$ e) $b^2 - ac$

5. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1997

1 Kenar uzunluğu 24 olan bir ABCD karesinin $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ kenarları üzerinde sırasıyla, E , F , G ve H noktaları alınıyor. $|DG| = |DH| = 9$ ve $EFGH$ dörtgeni, tabanlarından biri $[HG]$ olan bir yamuk ise, bu yamuğun alanı en çok kaç olur?

- a) 441 b) 306 c) 288 d) 270 e) 225

2 Kenar uzunlukları $|AB| = 5$, $|BC| = 4$ ve $|AC| = 7$ olan ABC üçgeninin köşeleri merkez alınarak, ikişer ikişer birbirine dıştan teğet üç çember çiziliyor. B ve C merkezli çemberlerin değme noktası E ise, $|AE|$ nedir?

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{7}$

3 N sayısının ondalık yazılımında birler basamağındaki rakam 2'dir. Bu rakamı bulunduğu yerden kaldırıp en başa yazdığımızda elde ettiğimiz sayı N 'nin iki katı ise, N 'nin basamak sayısı en az kaçtır?

- a) 12 b) 36 c) 4 d) 18 e) 6

4 A, B, C, D den her birinin ya her söylediği yalan, ya da her söylediği doğrudur. Aralarında şu konuşma geçer: A, B ye "Sen yalancısın" der. C, A ya "Asıl sen yalancısın" der. D, C ye bunların (A ve B nin) ikisi de yalancı der ve "Ayrıca sen de yalancısın" diye ekler. Bu dört kişi içindeki yalancıların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\{B, C, D\}$ b) $\{B, D\}$ c) $\{A, B, C\}$ d) $\{A, C\}$ e) $\{A, D\}$

5) $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ harfleri, a, b 'den ve c de d 'den daha önce gelmek koşulu ile kaç değişik şekilde sıralanabilir?

- a) $\frac{10!}{4!5!}$ b) $\frac{10!}{4}$ c) $8!$ d) $4 \cdot 6!$ e) Hiçbiri

6) $\{(x, y) \in R^2 : y = x - 3\}$, $\{(x, y) \in R^2 : y = (x - 3)^2\}$, $\{(x, y) \in R^2 : y = (x - 3)^3\}$ kümelerinden en az ikisine ait olan noktaların sayısı kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

7) m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $2n^2 - 36 = m^2 - mn$ denklemini sağlayan kaç (m, n) sıralı ikilisi vardır?

- a) 2 b) 0 c) 4 d) 3 e) Sonsuz çoklukta

8) $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin orta noktaları, sırasıyla M ve N ($M \neq N$) olan bir $ABCD$ dörtgeninde MN doğrusu $[AD]$ kenarını P , $[BC]$ kenarını da Q noktasında kesiyor.

Alan(MAP) = x ve Alan($PDCM$) = y ise, $\frac{|QB|}{|QC|}$ nedir?

- a) $\frac{y-x}{x}$ b) $\frac{y-2x}{2x}$ c) $\frac{x+2y}{2y}$ d) $\frac{y-x}{2x}$ e) $\frac{2x+y}{y}$

- 9** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi, $a_1 \equiv 1 \pmod{13}$, $a_2 \equiv 4 \pmod{13}$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \pmod{13}$ koşulunu sağlıyorsa, $a_{100} \pmod{13}$ aşağıdakilerden hangisidir?
 a) 7 b) 6 c) 12 d) 9 e) Hiçbiri

- 10** $T = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1996\sqrt{1997} + 1997\sqrt{1996}}$ toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) $\frac{43}{44} < T < \frac{44}{45}$
 b) $\frac{43}{176} < T < \frac{43}{88}$
 c) $T = \frac{1995}{1996 \cdot 1997}$
 d) $T = \frac{1996}{1997 \cdot 1998}$
 e) Hiçbiri

- 11** $|AC| = 4\sqrt{3}$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D , E ve F dir. D , B ve E noktalarından geçen çember, bu üçgenin ağırlık merkezinden de geçiyorsa, $|BF|$ kaçtır?
 a) 6 b) $4\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 4 e) 3

- 12** Aşağıdaki $P(x)$ polinomlarından hangisi için, $P(x) = Q(x)(x^2 + 1) + R(x)(x - 1)$ olacak şekilde tamsayı katsayılı $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları vardır?
 a) $P(x) = x^9 + 2x^6 + 3x^5 + 2x$
 b) $P(x) = x^9 + x^7 + 2x + 1$
 c) $P(x) = x^9 + 2x^6 + x^4 + 3x$
 d) $P(x) = x^9 + 4x^7 + x^3 + 3x + 2$
 e) Hiçbiri

- 13** $[a]$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim. Her x gerçel sayısı için,

$$f(x) = x - \left[\frac{x}{2} \right] - \left[\frac{x}{3} \right] - \left[\frac{x}{6} \right]$$

olarak tanımlanan fonksiyonun değer kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $[0, 1)$ b) $[0, 2)$ c) $[0, 3)$ d) $[0, 4)$ e) Hiçbiri

- 14** Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası O , AOB üçgeni ve COD üçgeninin alanları sırasıyla 4 ve 9 ise bu dörtgenin alanı en az kaç olur?

- a) 20 b) 22 c) 24 d) 25 e) 27

- 15** Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = 2$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$, E ve F noktaları sırasıyla ABD ve ACD üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezi olmak üzere, $|EF| = \sqrt{2}$ ise $|BC|$ nedir?

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $2\sqrt{5}$

- 16** $2x^2 + ky^2 \equiv z^2 \pmod{32}$ denkleğinin; x, y, z tek tam sayılar olmak üzere, en az bir çözümünün bulunmasını sağlayan k tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\{k : k \equiv 7 \pmod{16}\}$ b) $\{k : k \equiv 7 \pmod{32}\}$ c) $\{k : k \equiv 7 \pmod{8}\}$
d) $\{k : k \equiv 7 \pmod{4}\}$ e) Hiçbiri

- 17** S kümesinin her elemanı T kümesinin her elemanından küçük olmak üzere, 1 den 100 e kadar olan tam sayılardan 10 ar elemanlık S ve T kümeleri kaç değişik şekilde seçilebilir?

a) $\frac{1}{2} \binom{100}{10} \binom{90}{10}$ b) $\binom{100}{10} \binom{90}{10}$ c) $\binom{100}{20}$ d) $\binom{100}{10}^2$ e) Hiçbiri

- 18** x, y, z gerçekte sayılar olmak üzere, $x^3 - y = 24$, $y^3 - z = 24$, $z^3 - x = 24$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

a) 0 b) 3 c) 4 d) 6 e) Hiçbiri

- 19** a, b, c adındaki üç adam, adları (aynı sırayla olması gerekmeksizin) x, y, z olan eşleri ile kitap almaya çıkarlar. Kitapların fiyatları tam sayılar olup bir kişinin aldığı tüm kitapların fiyatı aynıdır. Bu altı kişiden her biri bu alışverişte bir kitaba ödediği para kadar kitap alır. Adamlardan her biri kendi eşinden 63 lira; a, y den 23 lira; b de x ten 11 lira daha fazla harcar. d nin w ile evli olma durumunu (d, w) ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $(a, z), (b, x), (c, y)$ b) $(a, y), (b, z), (c, x)$ c) $(a, x), (b, y), (c, z)$
d) $(a, z), (b, y), (c, x)$ e) $(a, y), (b, x), (c, z)$

- 20** $1 < n < 200$ koşulunu sağlayan ve 1'den büyük hiçbir tam sayının karesi ile bölünmeyen kaç n tam sayısı vardır?

a) 116 b) 112 c) 121 d) 111 e) Hiçbiri

- 21** Bir çembere, dışındaki bir A noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları B ve C dir. $[AB]$ ve $[BC]$ nin orta noktaları sırasıyla D ve E , CD doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta F olmak üzere, $m(\widehat{BAC}) = 36^\circ$ ise $m(\widehat{EFC})$ kaç derecedir?
 a) 36 b) 45 c) 54 d) 60 e) 72

- 22** $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin, varsa, pozitif köklerinin (çarpma işlemine göre) terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) $\frac{13}{2} < S < 7$ b) $7 < S < \frac{15}{2}$ c) $S = 7$ d) Denklemin pozitif kökü yoktur. e) Hiçbiri

- 23** $0 < n < 945$ ve $\sum_{k=1}^n k^2 \equiv 0 \pmod{105}$ koşullarını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?
 a) 80 b) 89 c) 82 d) 90 e) Hiçbiri

- 24** Tahtaya 1 den 12 ye kadar olan tam sayıları yazalım. Her adımda bu 12 sayıdan ikisini silerek, ya toplam-
 larının ya da farklarının mutlak değerini iki kere yazıyoruz. Sonlu sayıda adım sonucunda tahtaya yazılı
 sayıların hepsi aynı n tam sayısına eşit hale geliyor. n aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) 9 b) 24 c) 10 d) 16 e) Hiçbiri

- 25** $[AB]$ çaplı bir çemberin $[AC]$ ve $[BD]$ kirişlerinin kesişim noktası P olmak üzere, $|AP| = 2\sqrt{2}$, $|PC| = 3\sqrt{2}$ ve $|AB| = 5\sqrt{3}$ ise $|BP| \cdot |BD|$ nedir?
 a) 55 b) 48 c) $30\sqrt{2}$ d) $25\sqrt{3}$ e) 36

- 26** O merkezli R yarıçaplı bir çemberin $[OA]$ ve $[OB]$ yarıçapları üzerinde sırasıyla L ve M noktaları alınıyor. AB yayının orta noktası K olmak üzere, KLM üçgeni eşkenar üçgen ve $Alan(KLM) = \frac{(2\sqrt{3}-3)R^2}{8}$ ise $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?
 a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 75

- 27** n elemanlı her $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ negatif olmayan gerçel sayı kümesinde, $0 < \frac{|x_i - x_j|}{(3 + x_i)(3 + x_j)} < \frac{1}{33}$ olacak şekilde en az iki x_i, x_j elemanın var olmasını gerektiren en küçük n tam sayısı kaçtır?
 a) 34 b) 12 c) 3 d) 100 e) Hiçbiri

- 28** Ondalık yazılımlarında hiçbir rakamın yan yana tekrarlanmadığı ve $1 \leq n \leq 10^{1997}$ koşulunu sağlayan kaç n tam sayısı vardır?
 a) 9^{1997} b) $\frac{9^{1998} - 9}{8}$ c) $\frac{9^{1997} - 1}{8}$ d) $10 \cdot 9^{1996}$ e) Hiçbiri

- 29** a, b sıfırdan farklı ve c pozitif olmak üzere, a, b, c tam sayıları, $\frac{5}{663} = \frac{a}{17} + \frac{b}{c}$ denklemini sağlıyorsa b 'nin alabileceği en küçük pozitif değer nedir?
 a) 5 b) 44 c) 1 d) 76 e) Hiçbiri

- 30** İçlerinde siyah ve beyaz toplar olan iki torbada toplam 25 top var. Her torbadan rasgele birer top alındığında her ikisinin de beyaz olma olasılığı 0,54 ise her ikisinin de siyah olma olasılığı nedir?
 a) 0,46 b) 0,04 c) 0,16 d) Verilenler bu olasılığı belirlemek için yeterli değil. e) Hiçbiri

- 31** x_1, x_2, \dots, x_{100} negatif olmayan gerçel sayılar ve $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 100$ ise $x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_4 + \dots + x_{98}.x_{99} + x_{99}.x_{100}$ toplamının alabileceği en büyük değer nedir?
 a) 99 b) 199 c) 2500 d) 5000 e) Hiçbiri

- 32** $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ sayısının tam kare olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?
 a) 4 b) 2 c) 1 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

33 $[a]$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1994$$

$$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1995$$

$$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1996$$

$$[x] + [3x] + [5x] + [7x] + [11x] + [13x] = 1997$$

denklemlerinden kaç tanesinin çözüm kümesi boş değildir?

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

34 Her a, b, c, d için, $(a \mid b, b \mid c \text{ ve } c \mid d) \implies \{a, b, c, d\} \not\subset T$ koşulunu sağlayan ve pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her T kümesi, hiçbirini bölmeyen en az 6 tam sayı içeriyorsa n tam sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 18 b) 15 c) 17 d) 16 e) Hiçbiri

35 Katsayıları tam sayılar olan ve 5 farklı tam sayıda 8 değerini alan bir polinomun en çok kaç tam sayı kökü olabilir?

- a) 0
b) 8
c) 5
d) Bu koşulları sağlayan polinom yoktur.
e) Bu koşulları sağlayan polinomların tam sayı köklerinin sayıları üstten sınırlı değildir.

36 $a, b, c, r, s, t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomlarından kaç tanesi, $f(x) \equiv (x+r)(x^2+sx+t) \pmod{5}$ şeklinde bir denkleği sağlamaz?

- a) 30 b) 10 c) 20 d) 40 e) Hiçbiri

6. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1998

1 Kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ olan bir ABC üçgeninde $3m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$ ve $3a = 2c$ ise, b nin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{5a}{4}$ c) $a\sqrt{2}$ d) $a\sqrt{3}$ e) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

2 2^{1998} sayısının ondalık yazılımı ile 5^{1998} sayısının ondalık yazılımını art arda yazarsak, oluşan yeni sayı kaç basamaklı olur?

- a) 1998 b) 1999 c) 2000 d) 3996 e) 3998

3 6 elemanlı bir küme hiçbir boş olmayan üç ayrık alt kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

- a) 90 b) 105 c) 120 d) 180 e) 243

4 x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6zx + 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 0 b) 3 c) -3 d) 1 e) Hiçbiri

- 5 Köşegenlerinin kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{BCD}) = 150^\circ$, $|BE| = x$, $|ED| = y$ ve $|AC| = z$ ise, y nin x ve z cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{z-x}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{z-2x}{3}$ c) $z+x\sqrt{3}$ d) $\frac{z-2x}{2}$ e) $\frac{2z-3x}{2}$

- 6 $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin kaç p asal sayısı için $0 \leq x \leq p$ olmak üzere üç farklı tam sayı kökü yoktur?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 7 Alınan herhangi n küme arasında birbirini içermeyen en az 3 tane veya herhangi ikisinden biri diğeri içeren en az 3 tane küme bulunmasını garanti eden en küçük n tam sayısı nedir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

- 8 (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+4a_n^2}}$ şeklinde tanımlanıyor. $a_k < 10^{-2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük k değeri nedir?

a) 2501 b) 251 c) 2499 d) 249 e) Hiçbiri

- 9] Birbirine dıştan teğet olan $[AB]$ ve $[BC]$ çaplı iki çemberin merkezleri, sırasıyla D ve E ile; A noktasından E merkezli çembere ve C noktasından D merkezli çembere (AC doğrusuna göre aynı tarafta kalacak şekilde) çizilen teğetlerin kesişim noktası F ile gösterilmek üzere, $|DB| = |BE| = \sqrt{2}$ ise, AFC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{2}$

- 10] p ve q tek sayıları asal sayılar dizisinin ardışık iki terimi olsun. $p + q$ sayısının farklı pozitif bölenlerinin sayısı en az kaç olabilir?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 11] Bir kübün yüzlerine 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarını işaretleyerek bir zar yapmak istiyoruz. Ortak bir ayrıta sahip iki yüze komşu yüzler dersek, ardışık sayıların komşu yüzler üstünde yer alması koşuluyla, bu zarı kaç değişik biçimde yapabiliriz?

a) 10 b) 14 c) 18 d) 56 e) Hiçbiri

- 12] Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun çevreye oranının alabileceği tüm değerler gerçel sayılar ekseninde bir aralık oluşturur. Bu aralığın orta noktası nedir?

a) $\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

- 13** Yüksekliklerinin kesişim noktası H olmak üzere, bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ ve A, H, C noktalarından geçen çemberin merkezi O ise, HOC açısının α cinsinden ölçüsü nedir?
- a) $90^\circ - \alpha$ b) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ c) $180^\circ - \alpha$ d) $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ e) $180^\circ - 2\alpha$

- 14** $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{30}$ denkleğinin $0 \leq x < 30$ olacak şekilde kaç farklı tam sayı çözümü vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 15** 12 evli çift yuvarlak bir masanın etrafında, erkeklerin hepsi masanın bir tarafında yan yana, her kadın da eşinin tam karşısında olacak şekilde oturmaktadır. Masada oturanlar, her seferinde yan yana oturan bir kadınla bir erkeğın yer değıştirmesi suretiyle, tüm eşler yan yana gelinceye kadar yer değıştirir. Bunun için en az kaç yer değıştirme işlemi yapılmıştır?
- a) 36 b) 55 c) 60 d) 66 e) Hiçbiri

- 16** x, y, z sayıları

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z &= 15 \\x + y + z^2 &= 27 \\xy + yz + zx &= 7\end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) $3 \leq |x + y + z| \leq 4$
b) $5 \leq |x + y + z| \leq 6$
c) $7 \leq |x + y + z| \leq 8$
d) $9 \leq |x + y + z| \leq 10$
e) Hiçbiri

- 17** Bir ABC üçgeninde A açısının iç açıortayı ile $[BC]$ nin kesişim noktası D ; $[CB]$ ışını üzerinde $|DE| = |DB| + |BE|$ özelliğinde bir nokta E ; A, D, E noktalarından geçen çemberin AB doğrusunu ikinci kez kestiği nokta F ile gösterilmek üzere, $|BE| = |AC| = 7$, $|AD| = 2\sqrt{7}$ ve $|AB| = 5$ ise, $|BF|$ nedir?

- a) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ b) $\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{10}$

- 18** $p_1 < p_2 < \dots < p_{24}$, $[3, 100]$ aralığındaki asal sayıları göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^{24} p_i^{99!} \equiv a \pmod{100}$$

denklemini gerçekleyen en küçük $a \geq 0$ sayısı nedir?

- a) 24 b) 25 c) 48 d) 50 e) 99

- 19** Bir torbada 3 ü mavi 22 si siyah toplam 25 top vardır. Ahmet, 1 ve 25 arasında bir n tam sayısı seçer. Betül, torbadan birer birer ve geriye koymaksızın rastgele n tane top çeker. Çekilen n toptan tam olarak ikisi maviyse ve bunlardan ikincisi n inci sırada çekilmişse Ahmet, aksi halde ise, Betül oyunu kazanır. Oyunu kazanma olasılığım mümkün olduğu kadar yükseltebilmek için, Ahmet hangi n sayısını seçmelidir?

- a) 2 b) 11 c) 12 d) 13 e) 23

- 20** $x^3 3^{1/x^3} + \frac{1}{x^3} 3^{x^3} = 6$ denkleminin kaç farklı gerçel çözümü vardır?

- a) 0 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 21** ABC dar açılı bir üçgen, D ve E sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ üzerinde $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$ koşulunu sağlayan noktalar; AED üçgeninin çevresi 9 ve çevrel çemberinin yarıçapı $\frac{9}{5}$ olmak üzere, ABC üçgeninin çevresi 15 ise, $|BC|$ aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 5 b) $\frac{24}{5}$ c) 6 d) 8 e) $\frac{48}{5}$

- 22** $(x_1x_2 \dots x_{1998})$, ondalık sistemde 1998 basamaklı bir sayının gösterimi olmak üzere, $(x_1x_2 \dots x_{1998}) = 7 \cdot 10^{1996}(x_1 + x_2 + \dots + x_{1998})$ denklemini sağlayan kaç $(x_1x_2 \dots x_{1998})$ sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 23** $n \times n$ ($n \geq 7$) satranç tahtasında oynanan iki kişilik bir oyunda Ahmet'in bir, Betül'ün ise iki taşı vardır. İlk olarak Ahmet taşı n^2 kareden birine yerleştirir. Sonra Betül, tahtanın kenarındaki karelerden boş olan ikisine taşlarını yerleştirir. Taşlar yerleştirildikten sonra Ahmet ile başlayarak sıra ile hamle yaparlar. Ortak bir kenara sahip iki kenara komşu kareler diyelim. Ahmet, hamle sırası kendine geldiğinde taşı bulunduğu kareden ya boş olan bir komşu kareye sürer ya da tahtanın kenarındaki karelerden birinde bulunuyorsa tahtanın dışına çıkarır. Betül ise, her iki taşı da buldukları karelerden komşu karelere sürer. Betül'ün taşlarını sürdüğü karelerden birinde Ahmet'in taşı varsa Betül Ahmet'in taşı yer ve oyunu kazanır. Taşını, yenmeden tahtanın dışına çıkartabildiği takdirde ise, oyunu Ahmet kazanır. Ahmet'in oyunu kazanmasını garanti etmek için taşı ilk başta yerleştirebileceği karelerin sayısı nedir?
- a) 0 b) n^2 c) $(n-2)^2$ d) $4(n-1)$ e) $2n-1$

- 24** $x^6 - 2x^4 + x^2 = A$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısını $n(A)$ ile gösterelim. A tüm gerçel değerleri aldığımda $n(A)$ nın alacağı değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $\{0, 2, 4, 6\}$ c) $\{0, 3, 4, 6\}$ d) $\{0, 2, 3, 4, 6\}$ e) $\{0, 2, 3, 4\}$

- 25** ABC bir üçgen; $|BC| > |BA|$ ve D bu üçgenin iç bölgesinde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ koşulunu sağlayan bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{BDC}) = 150^\circ$ ve $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$ ise $m(\widehat{BAD})$ kaç derecedir?
 a) 45 b) 50 c) 60 d) 75 e) 80

- 26** $\sqrt{x+1998} + \sqrt{x+1998} + \sqrt{x+1997} + \sqrt{x+1997} + \dots + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x} + \sqrt{x} = y$ denklemini sağlayan kaç (x, y) sıralı tam sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 1 c) 1998 d) 3996 e) Sonsuz çoklukta

- 27** \square birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ ve en çok bir tane \square kullanarak aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $n \times n$ lik bir satranç tahtası kaplanamaz?
 a) 96 b) 97 c) 98 d) 99 e) 100

- 28** $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısı nedir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 29** $ABCD$ bir dışbükey dörtgen, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$, CD doğrusuna C noktasında teğet olan ve A, B noktalarından geçen çember ile $[AD]$ nın kesişim noktası E olmak üzere, $|BC| = 20$ ve $|AD| = 16$ ise, $|CE|$ nedir?
 a) 9 b) $6\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{2}$ e) 10

- 30** $m = (abab)$ ve $n = (cdcd)$ ondalık sistemde dört basamaklı sistemde dört basamaklı iki tam sayının gösterimi olsun. $m + n$ sayısının tam kare olmasını sağlayan (m, n) çiftleri için, $a \cdot b \cdot c \cdot d$ çarpımı en çok kaç olabilir?
 a) 392 b) 420 c) 588 d) 600 e) 750

- 31** m sütun ve n satırı olan bir satranç tahtasında iki kişilik bir oyun oynanıyor. Her iki oyuncunun da birer taşı olup, başlangıçta birinci oyuncunun taşı tahtanın sol üst köşesindeki, ikinci oyuncununki ise, tahtanın sağ alt köşesindeki karedir. Ortak bir kenara sahip iki kare komşu sayılmak üzere, hamle sırası gelen oyuncu, taşını bulunduğu karenin komşularından birine sürer. Sürdüğü karede diğer oyuncunun taşı varsa, onu yiyerek oyun dışı bırakır. Oyunu, diğer oyuncunun taşını yiyen veya taşını, diğer oyuncunun taşının başlangıçta bulunduğu sıraya önce ulaştıran oyuncu kazanır. İlk hamleyi birinci oyuncu yaparsa, aşağıdaki (m, n) sıralı ikililerinden hangisi için ikinci oyuncunun oyunu kazanmasını garanti eden bir strateji vardır?
 a) (1998, 1997) b) (1998, 1998) c) (997, 1998) d) (998, 1998) e) Hiçbiri

- 32** $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + 1 - \frac{1}{xy}$ koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise, $f(3)$ değeri nedir?
 a) $2/3$
 b) $4/3$
 c) 1
 d) Verilenlerden tek bir $f(3)$ değeri belirlenemez.
 e) Verilen koşulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

33 $[BC]$ çaplı bir çemberin bu çapına dik olan bir kirişi $[AD]$, AC ve CD yaylarının orta noktaları sırasıyla E ve F , $AD \cap BE = \{G\}$, $AF \cap BC = \{H\}$ olmak üzere, $m(\angle AC) = \alpha$ ise, $\angle BHG$ açısının α cinsinden ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ b) $60^\circ - \frac{\alpha}{3}$ c) $\alpha - 30^\circ$ d) $15^\circ + \frac{\alpha}{2}$ e) $\frac{180^\circ - 2\alpha}{3}$

34 a, b, c, d rasyonel sayılar ve $a > 0$ olmak üzere, $an^3 + bn^2 + cn + d$ sayısı her $n \geq 0$ tam sayısı için bir tam sayı oluyorsa, a nın alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) Böyle bir en küçük değer yoktur. e) Hiçbiri

35 10 elemanlı bir kümenin, hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayacak şekilde en çok kaç altkümesi bulunur?

- a) 126 b) 210 c) 252 d) 420 e) 1024

36 Kenar uzunluğu 4 olan bir $ABCD$ karesinde E , $[AB]$ kenarının orta noktasıdır. M noktası $[AC]$ üzerinde olmak üzere, $|EM| + |MB|$ toplamını tam sayı yapan kaç farklı M noktası vardır?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

7. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 1999

- 1 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 14$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ ve D , $[AC]$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|AD| = 4$ tür. E , $[BC]$ üstünde bir nokta ve $Alan(ABC) = 2 \cdot Alan(CDE)$ ise, $Alan(ABE)$ kaçtır?
 a) $4\sqrt{6}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{6}$ d) $4\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{5}$

- 2 $xy = 4(y^2 + x)$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 3 c) 7 d) 14 e) Hiçbiri

- 3 En fazla 3, 5, 7 ve 8 top alabilen dört kutuya birbirinin aynı olan 19 top kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
 a) 34 b) 35 c) 36 d) 40 e) Hiçbiri

- 4 $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \geq k$ eşitsizliğini her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için sağlayan en büyük k değeri kaçtır?
 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) Hiçbiri

- 5] ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 10$ ve $|BC| = 12$ dir. $[BC]$ üstünde $|BP| = |RC| = 3$ olacak şekilde P ve R noktaları alınıyor. S ve T sırasıyla AB ve AC nin orta noktaları olmak üzere, PT ye S ve R den inilen dikme ayakları, M ve N ise, $|MN|$ kaçtır?

a) $\frac{9\sqrt{13}}{26}$ b) $\frac{12 - 2\sqrt{13}}{13}$ c) $\frac{5\sqrt{13} + 20}{13}$ d) $15\sqrt{3}$ e) $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

- 6] a, b, c tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{14} \\ x &\equiv b \pmod{15} \\ x &\equiv c \pmod{16} \end{aligned}$$

denklik sistemini ve $0 \leq x < 2000$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 7] Üstlerinde 1, 1, 3, 4, 4 ve 5 yazılı altı kart bir torbaya konur. Torbadan rastgele, sırayla ve çekilenler geri konmaksızın üç kart çekilip, üstlerindeki rakamlardan çekiliş sırasına göre oluşturulan üç basamaklı sayının 3 e bölünme olasılığı kaçtır?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Hiçbiri

- 8] $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $2P(x) = P(x + 3) + P(x - 3)$ koşulunu sağlıyorsa, P nin derecesi en çok kaç olabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 9 Köşeleri bir çember üzerinde bulunan dışbükey bir sekizgenin dört kenarının uzunluğu 2, diğer dört kenarının uzunluğu da $6\sqrt{2}$ ise, bu sekizgenin alanı kaçtır?
 a) 120 b) $24 + 68\sqrt{2}$ c) $88\sqrt{2}$ d) 124 e) $72\sqrt{3}$

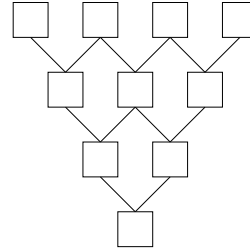
- 10 En büyük ortak bölenleri n olan tüm a, b, c tam sayıları için

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= a \\2x + y - 2z &= b \\3x + y + 5z &= c\end{aligned}$$

denklem sisteminin x, y, z tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir?

- a) 7 b) 14 c) 28 d) 56 e) Hiçbiri

- 11 1 den 10 a kadar olan tam sayılar, yandaki şekilde on kutuya yerleştiriliyor. En üst sıradakiler dışında her kutudaki sayı, hemen üstündeki iki kutuda bulunan sayıların farkına eşitse, en alttaki kutuya yerleştirilen sayı en çok kaç olabilir?



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 12

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 21 \\x + y + z + xyz &= -3 \\x^2yz + y^2xz + z^2xy &= -40\end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 3 c) 6 d) 12 e) Hiçbiri

- 13** Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $|AB| = \sqrt{12}$ ve $|AC| = 2$ olmak üzere, bu üçgenin dışına doğru $BEDC$ karesi kurulduğunda, karenin merkezi F , $[AF] \cap [BC] = G$ ise, $|BG|$ kaçtır?
 a) $6 - 2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3} - 1$ c) $2 + \sqrt{3}$ d) $4 - \sqrt{3}$ e) $5 - 2\sqrt{2}$

- 14** 72 tane pozitif böleni olan en küçük pozitif tam sayının on tabanına göre yazılındaki rakamların karelerinin toplamı kaçtır?
 a) 41 b) 65 c) 110 d) 123 e) Hiçbiri

- 15** 3×3 lük bir tahtadaki dokuz kareden dördü, ikisi kırmızı, ikisi maviye olmak üzere ve aynı renkte iki kare ne aynı satır ne de aynı sütunda yer alacak biçimde boyanıyor. Bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?
 a) 198 b) 288 c) 396 d) 576 e) 792

- 16** $y = \sqrt{x^2 + \frac{1}{1999}}$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) rasyonel sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz sayıda

- 17 Tabanı ABC eşkenar üçgeni ve tepe noktası T olan bir düzgün piramidin $[AB]$, $[BC]$, $[CT]$, $[TA]$ ayrıtlarının orta noktaları sırasıyla P, Q, R, S ile gösterilmek üzere, bu piramidin cisim yüksekliği $2\sqrt{15}$ ve $|AB| = 6$ ise, $Alan(PQRS)$ kaçtır?
 a) $4\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{5}$ e) $9\sqrt{2}$

- 18 $t_k(n)$ ile n pozitif tam sayısının on tabanına göre yazılındaki rakamların k inci kuvvetlerinin toplamını gösterelim. Aşağıdaki k değerlerinden hangisi için, 3 ün $t_k(n)$ yi bölmesi 3 ün n yi bölmesini gerektirmez?
 a) 3 b) 6 c) 9 d) 15 e) Hiçbiri

- 19 2×5 lik bir satranç tahtasının üst sırasında sol köşeden itibaren ardışık k kareye siyah pullar konmuştur. Boş olan karelere istediğimiz sırayla beyaz pullar koyuyoruz. En az bir ortak köşeye sahip iki kare komşu sayılmak üzere, her beyaz pul konduğunda, komşu karelere daha önceden konmuş olan pulların rengi, beyazsa siyaha, siyahsa beyaza dönüşüyor. k nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için tüm kareler dolduğunda pulların hepsi beyaz olabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 20 $x^4 - 2^{-y^2}x^2 - \lfloor x^2 \rfloor + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Sonsuz sayıda

- 21** ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 10^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 150^\circ$ dir. $[AC]$ üstünde $|AX| = |BC|$ olacak şekilde X noktası alınıyor. $m(\widehat{BXC})$ kaç derecedir?
 a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

- 22** Aşağıdaki sayılardan hangisi, m ve n tam sayılar olmak üzere, $m^2 + 3mn - 4n^2$ şeklinde ifade edilemez?
 a) 69 b) 76 c) 91 d) 94 e) Hiçbiri

- 23** Saat kısmı 1 den 12 ye kadar olan sayıları gösteren dijital bir saatin, dakika kısmı doğru çalışmakta, ancak saat kısmı bir bozukluk sonucu, saat başlarında $n : 59$ dan sonra, $(n + 1$ ve $2n, \text{ mod } 12$ düşünölmek üzere), $(n + 1) : 00$ olacağına, $2n : 00$ a atlamaktadır. (Örneğin, saat, $7 : 00$ a ayarlanırsa, bir saat sonra $8 : 00$ yerine $2 : 00$ olmaktadır.) Saati gelişü güzel bir zamana ayarlar ve aradan bir gün geçtikten sonra saate bakarsak, saat kısmının 4 ü gösteriyor olma olasılığı kaçtır?
 a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Hiçbiri

- 24** $f(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $(x - 1)f(x + 1) - (x + 2)f(x) = 0$ koşulunu sağlıyor. $f(2) = 6$ ise, $f(\frac{3}{2})$ kaçtır?
 a) -6 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{15}{8}$ e) Hiçbiri

- 25** ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 80^\circ$ ve $|AB| = |AC|$ dir. $[AB]$ üstünde K ve $[AB]$ üstünde L noktaları, $|AB|^2 = |AK| \cdot |AL|$ ve $|BL| = |BC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{KCB})$ kaç derecedir?
 a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 40

- 26** x, y, z tam sayıları

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= 7 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlıyorsa z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) 3^{111} b) 4^{111} c) 5^{111} d) 6^{111} e) Hiçbiri

- 27** Kenar uzunluğu c olan bir karenin noktaları kırmızı ya da maviye boyanıyor. Bu boyama nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkte iki nokta bulunuyorsa, c nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 28** Pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı, $f(1) = 1$ koşulu ile tüm x, y gerçel sayıları için $f(x^2y^2) = f(x^4 + y^4)$ koşulunu sağlayan kaç f fonksiyonu vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Sonsuz sayıda

- 29** Yüksekliği 3 olan ABC eşkenar üçgeninin $[BC]$ kenarına orta noktasında teğet olan ve diğer kenarları da kesen 2 yarıçaplı çember çiziliyor. AB ve AC nin çemberi üçgenin dışında kestiği noktalar D ve E olmak üzere, $Alan(ABC)$ nin $Alan(ADE)$ ye oranı kaçtır?
 a) $2(5 + \sqrt{3})$ b) $7\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $2(3 + \sqrt{5})$ e) $2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

- 30** Her $0 \leq i \leq 9$ için $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, $6 \sum_{i=0}^9 a_i 5^i \equiv 1 \pmod{5^{10}}$ ise, a_9 aşağıdakilerden hangisidir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 31** Birbirinin aynı olan 30 top, A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere, A, B, C, D kutularına kaç değişik biçimde dağıtılabilir?
 a) 2472 b) 2600 c) 2728 d) 2856 e) Hiçbiri

- 32** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisi, her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$ koşulunu sağlıyorsa, $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 33** $|AC| = 8\sqrt{2}$; $[AC]$ nin orta noktası B ; $[AB]$ ni kiriş kabul eden bir çemberin AB yayının orta noktası E ; C noktasından bu çembere çizilen teğetin değme noktası da, (D ile E , AB doğrusunun ters taraflarında olmak üzere) D dir. $[DE] \cap [AB] = \{F\}$ ise, $|CF|$ kaçtır?
 a) $5\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) 8 d) 6 e) $4\sqrt{3}$

- 34** Kaç p asal sayısı için, $x^3 - x + 2 \equiv (x - r)^2(x - s) \pmod{p}$ denkleğinin tüm x tam sayıları tarafından gerçekenmesini sağlayan r, s tam sayıları bulunabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 35** 13 kent arasında, karşılıklı olması gerekmeyen uçak seferleri yapıyor. $k \geq 2$ olmak üzere, A_1 den A_2 ye, A_2 den A_3 e, \dots , A_{k-1} den A_k ye ve A_k den A_1 e uçak seferi varsa, A_1, A_2, \dots, A_k dizisine bir çevrim diyelim. Seferler hangi kentler arasında olursa olsun, bir çevrimin oluşmasını gerektiren en küçük toplam sefer sayısı kaçtır?
 a) 14 b) 53 c) 66 d) 79 e) 156

- 36** x_1, \dots, x_9 gerçel sayıları, $i = 1, 2, \dots, 9$ için $|x_i| \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^9 x_i^3 = 0$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^9 x_i$ toplamının alabileceğı en büyük değeri kaçtır?
 a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{9}{2}$ e) Hiçbiri

8. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2000

1 Alanı a olan bir dik üçgenin iç teğet çemberi ile, alanı b olan bir dik üçgenin çevrel çemberi aynı çember ise, $\frac{a}{b}$ en az nedir?

- a) $3 + 2\sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2 + \sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

2 Aşağıdakilerden hangisi tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz?

- a) 23 b) 24 c) 25 d) 28 e) 33

3 $0, 1, 2, \dots, 9$ sayılarını, tek sayılar kendi içlerinde, çift sayılar da yine kendi içlerinde artan olmak koşuluyla, kaç değişik biçimde sıralayabiliriz?

- a) 126 b) 189 c) 252 d) 315 e) Hiçbiri

4 $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$ denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı nedir?

- a) $\frac{18}{7}$ b) $\frac{71}{4}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{24}{19}$ e) $\frac{13}{4}$

- 5 Bir ABC üçgeninde $[BD]$ kenarortay, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$, $|AB| = 2$ ve $|AC| = 6$ ise, $|BC|$ nedir?
 a) 3 b) $3\sqrt{2}$ c) 5 d) $4\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{6}$

- 6 $\sqrt{17p + 625}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir?
 a) 3 b) 67 c) 101 d) 151 e) 211

- 7 A, B, C, D ve E den bazıları doğru, bazıları da yalancıdır. Doğrucuların her söylediği doğru; yalancıların ise, her söylediği yalıdır. A nın doğru olduğunu ve diğerlerinin de aşağıdaki önermeleri söylediğini biliyoruz:
 B : Ben doğrucuyum.
 C : D , doğrucudur.
 D : B ve E ikisi birden doğru değildir.
 E : A ve B doğrucudur.
 Bu toplulukta toplam doğru sayısı nedir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Veriler yetersizdir

- 8
- $$\begin{aligned} (x + y)^5 &= z \\ (y + z)^5 &= x \\ (z + x)^5 &= y \end{aligned}$$
- sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 9) $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$, $m(\widehat{C}) = 120^\circ$, $|AB| = 2$, $|BC| = |CD| = \sqrt{3}$ ve $|ED| = 1$ olduğuna göre, $|AE|$ nedir?
- a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\sqrt{3}$

- 10) On tabanına göre yazılımı 50 basamaklı olan bir N tam sayısının soldan 26. basamağı dışındaki bütün basamaklarında 1 rakamı bulunuyor ve N , 13 ile bölünüyorsa, N nin yazılımında soldan 26. rakam nedir?
- a) 1 b) 3 c) 6 d) 8 e) Veriler yetersizdir

- 11) 7 kırmızı, 7 beyaz topu, her kutuda tam olarak 2 top olması koşuluyla, 7 kutuya kaç değişik biçimde dağıtabiliriz?
- a) 163 b) 393 c) 858 d) 1716 e) Hiçbiri

- 12) (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için $|a_n| = |a_{n-1} + 2|$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?
- a) -4000 b) -3000 c) -2000 d) -1000 e) Hiçbiri

- 13** Birbirine dıştan teğet olan k_1 ve k_2 çemberlerinin ortak dış teğet doğrularından biri d olsun. d nin k_1 çemberine değdiği nokta A , k_1 çemberinin A dan geçen çapı $[AB]$, B noktasından k_2 çemberine çizilen teğetin değme noktası C ile gösterilmek üzere, $|AB| = 8$ ve k_2 çemberinin çapı 7 ise, $|BC|$ nedir?
 a) 7 b) $6\sqrt{2}$ c) 10 d) 8 e) $5\sqrt{3}$

- 14** $98^{7 \cdot \dots \cdot 2}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir?
 a) 81 b) 61 c) 41 d) 21 e) 01

- 15** A , B ve C , aralarında tavla oynarlar. Önce A ile B karşılaşır, kazanan C ile oynar. Bundan sonra, parti devam ettiği sürece, oynanan son oyunu kazanan, o karşılaşmada oynamayan üçüncü kişi ile karşılaşır. Oyunculardan biri art arda iki kez kazanınca, parti sona erer ve ardışık iki oyunu kazanan partinin galibi olur. Her oyunda iki tarafın da kazanma olasılığı eşit ise, C nin partiyi kazanma olasılığı nedir?
 a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{14}$ d) $\frac{1}{7}$ e) Hiçbiri

- 16** $(2 + (2 + (2 + x)^2)^2)^2 = 2000$ denkleminin gerçel kökleri toplamı nedir?
 a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 4

17 Kenar uzunlukları 1, 4, 7, 8 olan bir dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?

- a) $7\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$ c) 18 d) $12\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{5}$

18 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tam sayısı nedir?

- a) 101 b) 105 c) 111 d) 119 e) Hiçbiri

19 Kenar uzunlukları 3, 7 ve 8 olan bir üçgenin içinde gelişigüzel alınan bir noktadan, köşelerden en az birine olan uzaklığı 1 den küçük olması olasılığı nedir?

- a) $\frac{\pi}{36}\sqrt{2}$ b) $\frac{\pi}{36}\sqrt{3}$ c) $\frac{\pi}{36}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

20 $p(x)$ tüm kökleri gerçel olan ve her x gerçel sayısı için $p(x^2 - 1) = p(x)p(-x)$ eşitliğini sağlayan bir polinom ise, $p(x)$ in derecesi en fazla kaç olabilir?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) $p(x)$ in derecesi için üst sınır yoktur. e) Hiçbiri

- 21** Bir $ABCD$ dışbükey kirişler dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$, $|AB| = 26$ ve $|BC| = 10$ ise, DAC üçgeninin alanı nedir?
 a) 120 b) 108 c) 90 d) 84 e) 80

22

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 &= 0 \\ 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 23** 20 kişilik bir komite, A, B, C adayları arasından bir seçim yapmak için değişik türden bir oylamaya başvurur. Her komite üyesi, adaylara ilişkin tercih sıralamasını, herhangi iki aday arasında çekimser kalmaksızın, oy pusulasına yazar. (Örneğin, pusulaya BAC yazan üye, B yi A ya ve C ye; A yı da C ye tercih ediyor demektir.) Oy pusulaları açılınca, üç adayın altı değişik sıralanışından her birinin en az bir pusulada geçtiği ve tam olarak 11 üyenin A yı B ye; 12 üyenin C yi A ya; 14 üyenin de B yi C ye tercih ettiği görülür. Kaç komite üyesinin birinci tercihi B dir?
 a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) Veriler yetersizdir

- 24** a, b, c, d, e negatif olmayan gerçel sayılar ve $a + b + c + d + e > 0$ olmak üzere, $a + c = tb$, $b + d = tc$, $c + e = td$ koşullarını sağlayan en küçük gerçel t sayısı nedir?
 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 2

25 Alanı 18 olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, $|AB| + |BD| + |DC| = 12$ ise, $|AC|$ nedir?

- a) 9 b) $6\sqrt{3}$ c) 8 d) 6 e) $6\sqrt{2}$

26 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 10$ ise,

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$$

gerektirmesinin tüm a, b tam sayıları için doğru olmasını p nin aşağıdaki değerlerinden hangisi sağlar?

- a) 5 b) 7 c) 11 d) 13 e) 17

27 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin, her $1 \leq k \leq 4$ için $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\{1, \dots, k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde kaç değişik $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$ permütasyonu vardır?

- a) 13 b) 65 c) 71 d) 461 e) Hiçbiri

28 $f_1(x) = x^2 + x$ $f_2(x) = 2x^2 - x$ $f_3(x) = x^2 + x$
 $g_1(x) = x - 2$ $g_2(x) = 2x$ $g_3(x) = x + 2$

olmak üzere, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere f_i ve g_i fonksiyonlarından $h(x) = x$ fonksiyonu elde edilebiliyorsa, $F_i = 1$; aksi halde $F_i = 0$ olarak tanımlanıyor. (F_1, F_2, F_3) nedir?

- a) (0, 0, 0) b) (0, 0, 1) c) (0, 1, 0) d) (0, 1, 1) e) Hiçbiri

29 O_1 ve O_2 merkezli birbirine dıştan teğet iki çemberin ortak dış teğet doğrularından biri çemberlere sırasıyla B ve C noktalarında değiyor. Çemberlerin ortak noktası A olmak üzere BA doğrusu O_2 merkezli çemberi A ve D noktalarında kesiyor. $|BA| = 5$ ve $|AD| = 4$ ise $|CD|$ nedir?

- a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{27}$ c) 6 d) $\frac{15}{2}$ e) $4\sqrt{5}$

30 $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere, $(x^2 - 18)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$ denkleğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

- a) 59 b) 60 c) 61 d) 62 e) Hiçbiri

31 Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111 ile bölünen on basamaklı kaç tam sayı vardır?

- a) 0 b) 1264 c) 2842 d) 3456 e) 11111

32 Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir?

- a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ e) Hiçbiri

- 33** Bir $ABCD$ karesinin $[AB]$ kenarı üstünde bir K noktası, $[BC]$ kenarı üstünde de bir L noktası alınıyor. $|AK| = 3$, $|KB| = 2$ ve K nin DL doğrusuna uzaklığı 3 ise, $|BL| : |LC|$ nedir?
- a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{8}{7}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 34** Aşağıdaki önermelerden hangisi, en az bir p asal sayısı için doğru değildir?

- a) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözüümü varsa,
 $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözüümü vardır.
- b) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözüümü yoksa,
 $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözüümü yoktur.
- c) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözüümü varsa,
 $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözüümü vardır.
- d) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözüümü yoksa,
 $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözüümü yoktur.
- e) Hiçbiri

- 35** $S = \{1, 2, \dots, 32\}$ olmak üzere; S nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde, a, b yi; b de c yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir?
- a) 17 b) 24 c) 25 d) 29 e) Hiçbiri

- 36** $x_1 = -1$ ve her n pozitif tam sayısı için $x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)x_n + \frac{4}{n}$ ise, x_{2000} nedir?
- a) 1999998 b) 2000998 c) 2009998 d) 2000008 e) 1999999

9. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2001

- 1 Bir \widehat{XOY} açısının $[OX$ kenarı üzerinde $|OA| = |AB| = |BC|$ olacak şekilde A, B, C noktaları; $[OY$ kenarı üzerinde de $|OD| = |DE| = |EF|$ olacak şekilde D, E, F noktaları alınıyor. $|OA| > |OD|$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- a) Her \widehat{XOY} açısı için, $\text{Alan}(AEC) > \text{Alan}(DBF)$
b) Her \widehat{XOY} açısı için, $\text{Alan}(AEC) = \text{Alan}(DBF)$
c) Her \widehat{XOY} açısı için, $\text{Alan}(AEC) < \text{Alan}(DBF)$
d) $m(\widehat{XOY}) < 45^\circ$ ise, $\text{Alan}(AEC) < \text{Alan}(DBF)$ ve $45^\circ < m(\widehat{XOY}) < 90^\circ$ ise, $\text{Alan}(AEC) > \text{Alan}(DBF)$
e) Hiçbiri
- 2 İstanbulspor, Yeşildirek, Vefa, Karagümrük ve Adalet takımlarından her biri, geri kalan dördüyle tam olarak birer maç yapıyor. İstanbulspor, Yeşildirek hariç tüm takımları yeniyor; Yeşildirek, İstanbulspor'u yenip, diğer bütün takımlara yeniliyor. Vefa, İstanbulspor dışındaki bütün takımları yenerken, Karagümrük-Adalet maçını Karagümrük kazanıyor. Bu beş takımı, sonuncusu hariç her takım, kendinden bir sonra gelen takımı yenmiş olacak biçimde kaç değişik şekilde sıralayabiliriz?
- a) 5 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri
- 3 $2p^4 - 7p^2 + 1$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 4 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri
- 4 $\frac{x^{2000}}{2001} + 2\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{5}x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin kaç gerçel çözümü vardır?
- a) 0 b) 1 c) 11 d) 12 e) Hiçbiri

- 5 Bir $ABCD$ yamuğunda $AB \parallel CD$, $|AB| < |CD|$ ve $\text{Alan}(ABC) = 30$ dur. B den geçen ve AD ye paralel olan doğru, $[AC]$ yi E noktasında kesiyor. $|AE| : |EC| = 3 : 2$ ise, $ABCD$ yamuğunun alanı nedir?
a) 45 b) 60 c) 72 d) 80 e) 90

- 6 Ondalık yazılımda tüm basamakları tek sayı olan 5 basamaklı tam sayılardan kaç tanesinin en az iki ardışık basamağının toplamı 10 dur?
a) 3125 b) 2500 c) 1845 d) 1190 e) Hiçbiri

- 7 $(2a + b)(2b + a) = 2^c$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 8 $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 21x - 14 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?
a) -2 b) 7 c) -14 d) 21 e) Hiçbiri

- 9) En büyük kenar uzunluğu 13 ve çevre uzunluğu 28 olan bir ikizkenar yamuğun alanı en çok kaç olabilir?
 a) 13 b) 24 c) 27 d) 28 e) 30

- 10) Her adımda tam olarak iki sayının yerleri değiştirilmek üzere, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dizilişinden iki adımda elde edilebilecek farklı dizilişlerin sayısı nedir?
 a) 88 b) 100 c) 120 d) 176 e) 441

- 11) Kaç n tam sayısı için,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 5x + ny &= n^2 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan en az bir (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

- a) 0 b) 3 c) 4 d) 8 e) Hiçbiri

- 12) P noktasının, yarıçapı 15 olan bir çemberin merkezinden uzaklığı 9 ise, bu çemberin P den geçen ve uzunluğu tam sayı olan kaç kirişi vardır?
 a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 29

- 13** Bir ABC üçgeninde $|BC| = 7$ ve $|AB| = 9$ dur. $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{BCA})$ ise, üçgenin alanı nedir?
 a) $14\sqrt{5}$ b) 30 c) $10\sqrt{6}$ d) $20\sqrt{2}$ e) $12\sqrt{3}$

- 14** Her terimi 2001 den küçük ya da eşit olan x_1, x_2, \dots, x_n pozitif tam sayıları dizisi, her $i \geq 3$ için, $x_i = |x_{i-1} - x_{i-2}|$ koşulunu sağlıyorsa, n en çok kaç olabilir?
 a) 1000 b) 2001 c) 3002 d) 4003 e) Hiçbiri

- 15** $x^3 + 3x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{25}$ denkleğinin, 25 moduna göre farklı kaç çözümü vardır?
 a) 0 b) 2 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 16** a bir gerçel sayı olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax + 1$ polinomunun $[-2, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında tam olarak birer gerçel kökü varsa, aşağıdakilerden hangisi $P(2)$ ye eşit olamaz?
 a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt[3]{30}$ c) $\sqrt{26} - 1$ d) $\sqrt{30}$ e) $\sqrt[3]{10}$

- 17 Yüksekliklerinin orta noktaları doğrudan olan bir üçgenin en büyük kenar uzunluğu 10 ise, alanı en çok kaç olabilir?
a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) 50
- 18 En az bir kenarının uzunluğu 1 olup, tüm köşegenlerinin uzunlukları tam sayılar olan bir dışbükey çokgenin en çok kaç kenarı olabilir?
a) 3 b) 5 c) 7 d) 10 e) Hiçbiri
- 19 m, n, k tam sayıları $221m + 247n + 323k = 2001$ eşitliğini sağlıyorsa, k nin alabileceği 100 den büyük en küçük değer kaçtır?
a) 124 b) 111 c) 107 d) 101 e) Hiçbiri
- 20 21 gerçel sayıdan herhangi 10 tanesinin toplamı, geri kalan 11 tanesinin toplamından daha küçük ise, bu 21 sayıdan en az kaç tanesi pozitiftir?
a) 18 b) 19 c) 20 d) 21 e) Hiçbiri

21 Kenar uzunluğu a olan düzgün dışbükey dokuzgenin en kısa ve en uzun köşegenlerinin uzunlukları sırasıyla b ve c ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) $b = \frac{a+c}{2}$ b) $b = \sqrt{ac}$ c) $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$
d) $c = a+b$ e) $c^2 = a^2+b^2$

22 10×10 bir satranç tahtasında, her $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ için, k inci satırda soldan $k - 1$ ardışık kareyi atarak elde edilen merdiven biçimindeki şekilde, birim karelerin bileşiminden oluşan kaç farklı dikdörtgen vardır?

- a) 625 b) 715 c) 1024 d) 1512 e) Hiçbiri

23 $9, 99, 999, \dots$ dizisi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- a) Bu dizinin hiç bir terimini bölmeyen asal sayılar sonlu sayıdadır.
b) Sonsuz çoklukta asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.
c) Her n pozitif tam sayısı için, bu dizinin n den çok sayıda farklı asal sayı ile bölünen bir terimi vardır.
d) Öyle bir n tam sayısı vardır ki, n den büyük her asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.
e) Hiçbiri

24 $[x]$ ile x i aşmayan en büyük tam sayı gösterilmek üzere,

$$x^2 - 18[x] + 77 = 0$$

denkleminin tam sayı olmayan gerçel köklerinin sayısı kaçtır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 25** Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı, merkezinin AB ye olan uzaklığının iki katıdır. $|AC| = 2$, $|BC| = 3$ ise, C den geçen yükseklik ne olur?
- a) $\sqrt{14}$ b) $\frac{3}{7}\sqrt{21}$ c) $\frac{4}{7}\sqrt{21}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ e) $\frac{2}{3}\sqrt{14}$

- 26** Berk, Ayça'nın tuttuğu iki basamaklı bir sayıyı tahmin etmeye çalışıyor. Berk'in her tahminine karşılık, Ayça, doğru bilinen basamakların sayısını söylüyor. Ayça'nın tuttuğu sayı ne olursa olsun, Berk bu sayıyı n tahminde bulmayı garanti ediyorsa, n en az kaçtır?
- a) 9 b) 10 c) 11 d) 15 e) 20

- 27** 2^n sayısının ondalık yazılımı 7 ile başlıyorsa, 5^n sayısının ondalık yazılımı hangi rakam ile başlar?
- a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

- 28** A, B, C, D, E kasabaları çember biçimindeki bir yol üstünde, saat yönünde A ile B , B ile C , C ile D , D ile E ve E ile A arasındaki yolların uzunlukları sırasıyla 5, 5, 2, 1 ve 4 km olacak şekilde yer alıyor. Bu yol üstünde kurulacak bir sağlık ocağının yeri, sağlık ocağından bu kasabalara giden en kısa yolların uzunluklarının maksimumunu en aza indirecek biçimde seçilmek isteniyor. Bu koşulu sağlayan kaç yer vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 29** $AB \parallel CD$ olan ikizkenar bir $ABCD$ yamuğunun tüm kenarları bir çembere teğettir. $[AD]$ nin bu çembere değme noktası N ; NC ve NB doğrularının çemberi N dışında kestiği noktalar sırasıyla K ve L ise, $\frac{|BN|}{|BL|} + \frac{|CN|}{|CK|}$ nedir?
 a) 4 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10

- 30** Başlangıçta, düzgün bir n -genin köşelerinde bulunan n havaalanından k tanesinde birer uçak vardır. Her gün, bu uçaklardan her biri, o gün bulunduğu havaalanının en yakınındaki iki havaalanından birine uçuyor. Başlangıç dağılımı ne olursa olsun, bütün uçakların günün birinde aynı havaalanında toplanması, aşağıdaki (n, k) sıralı ikililerinden hangisi için olanaksızdır?
 a) (10, 6) b) (10, 4) c) (11, 3) d) (11, 5) e) (13, 8)

- 31** $2^n + 65$ sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?
 a) 1024 b) 268 c) 10 d) 4 e) Hiçbiri

- 32** $(\sqrt{10} + 3)^{2001}$ sayısının ondalık açılımında virgülden sonraki 33 üncü rakam kaçtır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

- 33** Bir ABC üçgeninde $|AC| = 1$, $|AB| = \sqrt{2}$ dir. AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta, $|MA| = |AB|$ ve $m(\widehat{MAB}) = 90^\circ$ olacak şekilde M noktası ile AC doğrusuna göre B ile farklı tarafta, $|NA| = |AC|$ ve $m(\widehat{NAC}) = 90^\circ$ olacak şekilde bir N noktası alınıyor. MAN üçgeninin çevrel çember merkezi ile A dan geçen doğru, $[BC]$ yi F noktasında kesiyorsa, $\frac{|BF|}{|FC|}$ nedir?
- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 2 d) 3 e) $3\sqrt{2}$

- 34** Tam sayı sıralı ikilileri üstünde tanımlanan gerçel değerli bir f fonksiyonu, tüm x, y, m, n tam sayıları için,

$$f(x + 3m - 2n, y - 4m + 5n) = f(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyonun değer kümesi en çok kaç elemandan oluşur?

- a) 7 b) 8 c) 15 d) 49 e) Sonsuz çoklukta

- 35** p asal ve n pozitif tam sayı olmak üzere, $(1 + p)^n = 1 + pn + n^p$ eşitliğini sağlayan kaç (p, n) sıralı ikilisi vardır?
- a) 5 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 36** a ve b pozitif gerçel sayılar ve $ab(a - b) = 1$ ise, $a^2 + b^2$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?
- a) 1 b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{11}$ e) Hiçbiri

10. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2002

- 1 Bir ABC üçgeninde $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın orta noktaları sırasıyla C' , A' ve B' ; A dan BC ye inilen dikmenin ayağı H dir. $|A'C'| = 6$ olduğuna göre, $|B'H|$ nedir?
 a) 5 b) 6 c) $5\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{2}$ e) 7

- 2 11 modunda 3^{2002} aşağıdakilerden hangisine denktir?
 a) 1 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 3 Başlangıçta bütün birim kareleri beyaz olan $m \times n$ bir tahtayı, sonuçta, ortak kenara sahip herhangi iki kareden biri siyah biri beyaz olacak şekilde boyamak istiyoruz. Boyama işleminin her adımında tahta üstünde 2×2 bir kare seçilerek, beyaz birim kareleri siyaha, siyah birim kareleri beyaza boyanıyor. Aşağıdakilerden hangi (m, n) sıralı ikilisi için, tahta istenilen biçimde boyanabilir?
 a) (3, 3) b) (2, 6) c) (4, 8) d) (5, 5) e) Hiçbiri

- 4 $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2$ polinomunun kaç gerçel kökü vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 5 Bir üçgenin iki yüksekliği 8 ve 12 dir. Üçüncü yükseklik aşağıdakilerden hangisi olamaz?
a) 4 b) 7 c) 8 d) 12 e) 23
- 6 Ondalık yazılımı beş basamaklı bir sayının binler basamağı 3 olup, bu sayı 37 ve 173 ile bölünüyorsa, bu sayının yüzler basamağı kaçtır?
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8
- 7 Her seferinde tam olarak iki karpuzu birlikte tartmak koşuluyla, 13 karpuzun toplam ağırlığı en az kaç tartıda bulunabilir?
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11
- 8 $x^{60} - 1$ polinomu aşağıdaki polinomlardan hangisi ile bölünmez?
a) $x^2 + x + 1$ b) $x^4 - 1$ c) $x^5 - 1$ d) $x^{15} - 1$ e) Hiçbiri

- 9 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 5$, $|BC| = 9$ ve $|AC| = 8$ dir. \widehat{BCA} nın açıortayı BA yı X noktasında, \widehat{CAB} nin açıortayı BC yi Y noktasında kesiyor. XY ve AC doğrularının kesiştiği nokta Z olmak üzere, $|AZ|$ nedir?
 a) $\sqrt{104}$ b) $\sqrt{145}$ c) $\sqrt{89}$ d) 9 e) 10

- 10 $x^3 - 13y^3 = 1453$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı sıralı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine bölünmez?
 a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) Hiçbiri

- 11 $(1 + x + x^2)^9$ ifadesinin açılımında x^5 in katsayısı nedir?
 a) 1680 b) 882 c) 729 d) 450 e) 246

- 12 a, b, c gerçel sayıları $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ eşitliğini sağlıyorsa, $ab + bc + ac$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ e) 0

- 13** AB nin CD ye paralel olduğu bir $ABCD$ yamuğunda $|BC| + |AD| = 7$, $|AB| = 9$ ve $|BC| = 14$ tür. \widehat{BCD} ve \widehat{CDA} nin açıortayları ile CD nin oluşturduğu üçgenin alanının yamuğun alanına oranı nedir?
- a) $\frac{9}{14}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{49}{69}$ e) $\frac{1}{3}$

- 14** $39p + 1$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 15** Bir tiyatro salonunda onar koltukluk on sıra bulunmaktadır ve koltuklar numaralanmıştır. Birbirinden habersiz bilet alan iki arkadaşın koltuklarının yan yana düşmesi olasılığı nedir?
- a) $\frac{1}{55}$ b) $\frac{1}{50}$ c) $\frac{2}{55}$ d) $\frac{1}{25}$ e) Hiçbiri

- 16** x pozitif bir gerçel sayı olmak üzere $x^2 + \frac{1}{4x}$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?
- a) $\sqrt{3} - 1$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $\sqrt{5} - 1$ d) 1 e) Hiçbiri

- 17** $AD \parallel BC$ ve $|AB| = |CD|$ koşullarını sağlayan bir $ABCD$ yamuğu aynı zamanda bir teğetler dörtgenidir. İç teğet çemberinin $[CD]$ kenarına değme noktası N , $[AN]$ nin çemberi ikinci kez kestiği nokta K , $[BN]$ nin çemberi ikinci kez kestiği nokta L olmak üzere, $\frac{|AN|}{|AK|} + \frac{|BN|}{|BL|}$ nedir?
- a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 16

- 18** $|15x^2 - 32x - 28|$ sayısının asal olmasını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Hiçbiri

- 19** Bir A sayısının ondalık gösteriminin sağına üç rakam yazarak, $1 + 2 + \dots + A$ toplamına eşit bir sayı elde edilmesini olanaklı kılan kaç tane A pozitif tam sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 2002 e) Hiçbiri

- 20** x, y gerçel sayıları $x^2 + xy + y^2 = 1$ eşitliğini sağlıyorsa, $x^2 + y^2$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?
- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $3 - \sqrt{3}$ e) Hiçbiri

- 21** Düzgün $A_1A_2 \cdots A_{10}$ 10-geninin $[A_1A_4]$ köşegeninin uzunluğu b , çevrel çemberinin yarıçapı R dir. Bu 10-genin kenar uzunluğu nedir?
 a) $b - R$ b) $b^2 - R^2$ c) $R + \frac{b}{2}$ d) $b - 2R$ e) $2b - 3R$

- 22** $5^{256} - 1$ sayısı 2^n ile bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?
 a) 8 b) 10 c) 11 d) 12 e) Hiçbiri

- 23** $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere, r elemanlı altkümelerinin en küçük elemanlarının aritmetik ortalaması nedir?
 a) $\frac{n+1}{r+1}$ b) $\frac{r(n+1)}{r+1}$ c) $\frac{nr}{r+1}$ d) $\frac{r(n+1)}{(r+1)n}$ e) Hiçbiri

- 24** $\lfloor \sqrt[3]{7n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{7n+3} \rfloor$ eşitliğini sağlamayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?
 a) 0 b) 1 c) 7 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 25** Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin $[AD]$ kenarı üzerinde bir E noktası işaretleniyor. AB ve CE doğruları F de; BE ve DF doğruları G de kesişiyor. $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ ise, $m(\widehat{DGB})$ nedir?
 a) 45° b) 50° c) 60° d) 65° e) 75°

- 26** Üç bileşik tek sayının toplamı olarak yazılabilen tüm tam karelerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 a) $\{(2k + 1)^2 : k \geq 0\}$
 b) $\{(4k + 3)^2 : k \geq 1\}$
 c) $\{(2k + 1)^2 : k \geq 3\}$
 d) $\{(4k + 1)^2 : k \geq 2\}$
 e) Hiçbiri

- 27** Bir kasanın beş kilidine ait anahtarlar çoğaltılarak sekiz kişiye, bu sekiz kişiden herhangi beşinin birlikte kasayı açmalarını olanaklı kılacak biçimde dağıtılacaktır. Anahtarların toplam sayısı en az ne olmalıdır?
 a) 18 b) 20 c) 22 d) 24 e) 25

- 28** $a_{2001} = 2002$ ve $0 \leq k \leq 2000$ için $a_k = -k - 1$ ise, $x^{2002} + a_{2001}x^{2001} + a_{2000}x^{2000} + \dots + a_1x + a_0$ polinomunun kaç pozitif kökü vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 1001 e) 2002

- 29** Bir ABC üçgeninde \widehat{CAB} nin açıortayı BC yi L de, \widehat{ABC} nin açıortayı AC yi N de kesiyor. AL ile BN doğruları O da kesişiyor. $|NL| = \sqrt{3}$ ise, $|ON| + |OL|$ nedir?
 a) $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 2 d) 3 e) 5

- 30** $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod{125}$ ve $0 \leq x < 125$ koşullarını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 31** $N \geq 2$ olmak üzere, $1, 2, \dots, N$ sayıları bir çember etrafına diziliyor. Her sayı ondalık gösterimde her komşusuyla bir ortak rakama sahip ise, N en az kaç olmalıdır?
 a) 18 b) 19 c) 28 d) 29 e) Hiçbiri

- 32** $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2001^2} + \frac{1}{2002^2}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 a) $1 \leq S < \frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3} \leq S < 2$ c) $2 \leq S < \frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3} \leq S < \frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{2} \leq S < 3$

- 33** Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninde $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$, $[BC]$ nin orta noktası E ve A dan DE ye indirilen dikmenin ayağı F ise, $m(\widehat{DFC})$ nedir?
 a) 100° b) 110° c) 115° d) 120° e) 135°

- 34** $3n^2 + 3n + 7$ sayısının tam küp olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?
 a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) Sonsuz çoklukta

- 35** Her $i = 0, 1, 2, \dots$ tam sayısı için, ağırlığı 2^i olan sekiz top bulunmaktadır. n kutunun her birinin içine istenildiği kadar top konabiliyor. Her kutuya konulan topların ağırlıklarının toplamı aynıysa, n en çok kaç olabilir?
 a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 16

- 36** $a \neq -1$ olmak üzere, a gerçel sayısı, $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 3a^2 - 9a - 6 = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, $(a + 1)^3$ nedir?
 a) 1 b) $3\sqrt{3}$ c) 7 d) 8 e) 27

11. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2003

1 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 7$, $|BC| = 8$, $|AC| = 6$ ve $[BC]$ kenarının orta noktası D ; A , B ve D noktalarından geçen çemberin AC yi kestiği noktalar A ve E olmak üzere, $|AE|$ nedir?

- a) $\frac{2}{3}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) 3

2 $1 \cdot 2003 + 2 \cdot 2002 + 3 \cdot 2001 + \dots + 2001 \cdot 3 + 2002 \cdot 2 + 2003 \cdot 1$ sayısının kaç asal böleni vardır?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3 Hiçbiri bir diğerinin 3 katı olmayan en çok kaç 51 den küçük pozitif tam sayı vardır?

- a) 17 b) 36 c) 38 d) 39 e) Hiçbiri

4 $x^2 - ax - b$ polinomunun köklerinin 5 ten büyük olmamasını sağlayan kaç (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

- a) 40 b) 50 c) 65 d) 75 e) Hiçbiri

- 5 Bir ABC üçgeninde, C köşesinden AB ye inilen dikmenin ayağı D , yüksekliklerin kesişim noktası H dir. $|CH| = |HD|$ olduğuna göre, $\tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}$ nedir?
 a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $3/2$ d) $\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

- 6 2000! sayısının ondalık yazılımının sonunda tam olarak kaç 0 vardır?
 a) 222 b) 499 c) 625 d) 999 e) Hiçbiri

- 7 AAAIEE dizisi ile başlanıp, AIE yerine EA, AE yerine IE, E yerine AI koyma işlemleri istenildiği kadar tekrarlanarak aşağıdaki dizilerden hangisi elde edilemez?
 a) AIAIIAI b) AIAIAI c) AIAAAA d) AIAA e) Hiçbiri

- 8 P polinomu, her gerçel x için $(x - 4)P(2x) = 4(x - 1)P(x)$ eşitliğini ve $P(0) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, P nin derecesi nedir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 9 İçteğet çemberinin yarıçapı 1 ve her kenar uzunluğu bir tam sayı olan kaç üçgen vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz

- 10 $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \equiv 0 \pmod{25}$ ve $0 \leq x < 25$ koşullarını sağlayan tam sayıların toplamı 25 modunda aşağıdakilerden hangisine denktir?
 a) 3 b) 4 c) 17 d) 22 e) Hiçbiri

- 11 ABRAKADABRA kelimesinin harfleri, rastgele sıralandığında ilk A harfinin ilk B harfinden önce gelme olasılığı nedir?
 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{6}{7}$ e) Hiçbiri

- 12 $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \frac{4z^2}{1+4z^2} = x$ sistemini tam olarak kaç gerçel (x, y, z) üçlüsü sağlar?
 a) 2 b) 4 c) 6 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

13 Bir ABC üçgeninde, $|AB| = 8$ ve $|AC| = 2|BC|$ dir. $[AB]$ kenarına ait yükseklik en fazla kaç olabilir?

- a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 5 d) $\frac{16}{3}$ e) 6

14 $5p(2^{p+1} - 1)$ sayısını tam kare yapan kaç p asal sayısı vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

15 A ve B isimli Türk takımları Avrupa Kupası'nda son 16 takım arasında yer alıyor. Bu takımların kura ile eşleştirilmesiyle oynanan sekiz maçta yenilen takımlar eleniyor. Kalan takımlar ise yeniden kura ile eşleştirilerek, tek bir takım kalana kadar kupa bu şekilde sürüyor. Her maçta her takımın diğerini yenme olasılığı aynı ise, A ve B takımlarının karşılaşma olasılığı nedir?

- a) $\frac{1}{32}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$ e) Hiçbiri

16 t gerçel sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^4 - tx + \frac{1}{t} = 0$ denkleminin hiçbir kökü $[1, 2]$ aralığında yer almaz?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

17 Bir C_1 çemberi ile, C_1 in merkezinden geçen ve onu A ve B noktalarında kesen bir C_2 çemberi veriliyor. C_2 çemberine B noktasında teğet olan doğru, C_1 çemberini B ve D noktalarında kesiyor. C_1 in yarıçapı $\sqrt{3}$; C_2 in yarıçapı 2 olduğuna göre $\frac{|AB|}{|BD|}$ yi bulunuz.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

18 $5^n + n^5$ sayısının 11 ile bölünmesini sağlayan 2003 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?

- a) 2010 b) 2011 c) 2012 d) 2014 e) Hiçbiri

19 Düzlemde 2003 farklı noktayı birleştiren doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümenin en az kaç elemanı olabilir?

- a) 2006 b) 4001 c) 4003 d) 4006 e) Hiçbiri

20 $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 1$ denklemini sağlayan kaç x gerçel sayısı vardır?

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

21 C_1 ve C_2 çemberleri bir T noktasında dıştan teğettir. T den geçen bir doğru, C_1 çemberini A , C_2 çemberini de B noktasında kesiyor. C_1 çemberine A da teğet olan doğru, C_2 yi D ve E noktalarında kesiyor. $D \in [AE]$, $|TA| = a$, $|TB| = b$ olduğuna göre $|BE|$ nedir?

- a) $\sqrt{a(a+b)}$
- b) $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$
- c) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$
- d) $\sqrt{a^2 + b^2}$
- e) $\sqrt{(a+b)b}$

22 Aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ denkleğini sağlayan en az bir x tam sayısı vardır?

- a) 97 b) 98 c) 99 d) 100 e) Hiçbiri

23 Ayşe, masanın üstünde duran farklı renklerdeki dokuz topun ağırlıklarının $1, 2, \dots, 9$ gram olduğunu biliyor, ancak hangi topun hangi ağırlıkta olduğunu bilmiyor. Barış ise, her topun ağırlığını biliyor. Barış, hangi kefenin ağır olduğunu ve kefelerindeki ağırlıkların farkını gösteren bir teraziye en az kaç kez kullanarak bu bilgisini Ayşe'ye kanıtlayabilir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

24 $3a = 1 + \sqrt{2}$ ise, $9a^4 - 6a^3 + 8a^2 - 6a + 9$ u aşmayan en büyük tam sayı nedir?

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

- 25** Dar açılı bir ABC üçgeninde, $[AB]$ nin orta noktası D , çevrel çemberin merkezi O dur. ADO üçgeninin çevrel çemberi, $[AC]$ yi A ve E noktalarında kesiyor. $|AE| = 7$, $|DE| = 8$ ve $m(\widehat{AOD}) = 45^\circ$ olduğuna göre ABC üçgeninin alanı nedir?
 a) $56\sqrt{3}$ b) $56\sqrt{2}$ c) $50\sqrt{2}$ d) 84 e) Hiçbiri

- 26** $n, n+1, n+2, n+3$ sayılarından her birinin kendi ondalık yazılımındaki basamaklar toplamı ile bölünmesini sağlayan ve ondalık yazılımının birler basamağı 8 olan n tam sayılarının onlar basamağı kaç farklı değer alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 27** 1×1 boyutlarında bir karenin içine, çevre uzunlukları toplamı C olan sonlu sayıda çember yerleştirilmiştir. $C = \frac{43}{5}, 9, \frac{91}{10}, \frac{19}{2}, 10$ değerlerinden kaçını için, bu çemberlerden dördünü kesen bir doğrunun varlığını kesin olarak söyleyebiliriz?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 28** a, x, y, z gerçel sayıları, $ax - y + z = 3a - 1$ ve $x - ay + z = a^2 - 1$ eşitliklerini sağlıyorsa, $x^2 + y^2 + z^2$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\sqrt[3]{4}$ e) Hiçbiri

- 29** ABC dik üçgeninde $[AB]$ hipotenüsünün orta noktası D , çevrel çember yarıçapı $\frac{5}{2}$ ve $|BC| = 3$ olduğuna göre, ACD üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile BCD üçgeninin içteğet çemberinin merkezi arasındaki uzaklık nedir?
- a) $\frac{29}{2}$ b) 3 c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{34}}{12}$ e) $2\sqrt{2}$

- 30** n pozitif tam sayısının ondalık yazılımının basamakları toplamı 111, $7002n$ sayısındaki de 990 ise, $2003n$ sayısının ondalık yazılımının basamakları toplamı nedir?
- a) 309 b) 330 c) 550 d) 555 e) Hiçbiri

- 31** n sayısı n defa kullanılmak koşuluyla, sonsuz bir satranç tahtasının her birim karesine bir pozitif tam sayı yazılmıştır. Ortak kenarı olan herhangi iki karedeki sayıların farkının mutlak değeri k den büyük değilse, k nin alabileceği en küçük değer nedir?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 32** f fonksiyonu her gerçel x için $f(x) + 3f(1-x) = x^2$ eşitliğini sağlıyorsa, $S = \{x \mid f(x) = 0\}$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- a) S sonsuz bir kümedir.
b) $\{0, 1\} \subset S$
c) $S = \phi$
d) $S = \{(3 + \sqrt{3})/2, (3 - \sqrt{3})/2\}$
e) Hiçbiri

- 33** Bir ABC üçgeninde kenar ortayların kesişim noktası G , içteğet çemberin merkezi I ve $GI \perp BC$ dir. $|AB| = c$, $|AC| = b$ olduğuna göre, $|BC|$ nedir?
- a) $\frac{b+c}{2}$ b) $\frac{b+c}{3}$ c) $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{3\sqrt{2}}$ e) Hiçbiri

- 34** m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $m, m+1, \dots, m+n$ sayılarından yalnızca m ve $m+n$ nin ondalık yazılımlarındaki basamakların toplamları 8 ile bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?
- a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) Hiçbiri

- 35** $n+m-1$ tane birim kare, bir kenarı n , diğer kenarı m kareden oluşan bir L şeklinde dizilmiştir. Ayşe ve Betül, Ayşe'nin başladığı ve sırası gelen oyuncunun, bitişik olarak aynı kenar boyunca sıralanmış istediği pozitif sayıda kareyi aldığı bir oyun oynuyorlar. Son kareyi alan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(n, m) = (2003, 2003), (2002, 2003), (2003, 3), (2001, 2003)$ değerleri için dört kez oynanıyorsa, Ayşe kaç kez oyunu kazanmayı garantileyebilir?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 36** $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ tam sayıları, $|a_1| = 1$ ve $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ ($1 \leq i \leq 2002$) koşullarını sağlıyorsa, $|a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}|$ en az kaç olabilir?
- a) 4 b) 34 c) 56 d) 65 e) Hiçbiri

12. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2004

- 1 Köşeleri, yarıçapı 1 olan çemberin üstünde yer alan düzgün bir n -genin çevre uzunluğunun alanına oranı $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ise, n kaçtır?
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

- 2 $2x + 5y = xy - 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?
a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 12

- 3 Elemanlarının hepsi 102 den küçük olan ve herhangi iki elemanın toplamını içermeyen bir pozitif tam sayı kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?
a) 49 b) 50 c) 51 d) 54 e) 62

- 4 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$ toplamının alabileceği en büyük değerle en küçük değer arasındaki fark nedir?
a) 20 b) 15 c) 10 d) 5 e) 0

- 5 Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgende $a \leq 2 \leq b \leq 3$ ise, bu üçgenin alanı en çok kaç olabilir?
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri
- 6 n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan a, b tam sayıları bulunur?
a) 17 b) 19 c) 29 d) 31 e) 37
- 7 Farklı ağırlıktaki dört taş, iki kefeli bir teraziyi en az kaç kez kullanarak hafiften ağıra doğru sıralanabilir?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8
- 8 $x + y + z = 90$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü için $\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2}$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı vardır?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

- 9** Çevresinin uzunluğu π olan bir üçgenin dış bölgesinde kalan ve üçgene olan uzaklığı 1 i aşmayan noktaların oluşturduğu bölgenin alanı nedir?
- a) 4π b) 3π c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 2π e) $\frac{3\pi}{2}$

- 10** $a_1 = \sqrt{7}$ ve $i \geq 1$ için $b_i = \lfloor a_i \rfloor$, $a_{i+1} = \frac{1}{b_i - \lfloor b_i \rfloor}$ olsun. b_n nin 4 e bölünmesini sağlayan 2004 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?
- a) 2005 b) 2006 c) 2007 d) 2008 e) Hiçbiri

- 11** 40 satır ve 7 sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Bu yazım sonucu, farklı herhangi iki satırda oluşan diziler birbirinden farklıysa, en çok kaç tane 1 kullanılmış olabilir?
- a) 198 b) 128 c) 82 d) 40 e) Hiçbiri

- 12** x bir gerçel sayı olmak üzere $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ çarpımının alabileceği en küçük değer nedir?
- a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) -2

13 Bir üçgenin iç açılarının tanjantları tam sayılarsa, bu sayıların toplamı kaçtır?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 9 e) Hiçbiri

14 $i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, $top^2 = iyitop$ ise, $y - i$ kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) Hiçbiri

15 Dört 0, beş 1, ve bir 2 kullanarak on basamaklı kaç farklı tam sayı yazılabilir?

- a) 1260 b) 1134 c) 756 d) 630 e) Hiçbiri

16 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 17 Kenar uzunluğu 6 olan bir $ABCD$ karesinin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde, $|CR| + |RT| + |TC| = 12$ olacak biçimde sırasıyla R ve T noktaları alınıyor. $\tan(\widehat{RAT})$ nedir?
- a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

- 18 Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tam sayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tam sayı içerir?
- a) 3 b) 7 c) 8 d) 10 e) 15

- 19 1 ile başlayıp her adımda elimizdeki sayıya 1 ekleyerek veya çarpmaya göre tersinin negatifini alarak, sonlu sayıda adımda aşağıdakilerden hangisini elde edemeyiz?
- a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ d) 7 e) Hiçbiri

- 20 Tüm x gerçel sayıları için $x^2 \geq C[x](x - [x])$ eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan en büyük C gerçel sayısı nedir?
- a) 0 b) 1 c) 4 d) 9 e) 25

- 21** S_1 ve S_2 çemberleri A ve B noktalarında kesişiyor. B den geçen bir doğru S_1 i B dışında D noktasında ve S_2 yi ise yine B dışında C noktasında kesiyor. D den S_1 e çizilen teğet ile C den S_2 ye çizilen teğetin kesişim noktası E ve $|AD| = 15$, $|AC| = 16$, $|AB| = 10$ ise, $|AE|$ kaçtır?
 a) 20 b) 24 c) 25 d) 26 e) 31

- 22** Aşağıdaki ifadelerin hangisinin 25 e bölünmesini sağlayan bir x tam sayısı bulunur?
 a) $x^3 - 3x^2 + 8x - 1$
 b) $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
 c) $x^3 + 14x^2 + 3x - 8$
 d) $x^3 - 5x^2 + x + 1$
 e) Hiçbiri

- 23** Sonsuz bir satranç tahtasında 25 kare nasıl seçilirse seçilsin ortak köşesi olmayan n tanesi bulunabiliyorsa, n en çok kaç olabilir?
 a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

- 24** $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin küplerinin toplamı nedir?
 a) -6 b) 2 c) 8 d) 11 e) Hiçbiri

- 25** Bir ABC üçgeninde, A açısına ait iç açıortayın ayağı D olmak üzere, $[AC]$ kenarı üzerindeki E noktası, $|CE| = |CD|$ ve $|AE| = 6\sqrt{5}$; $[AB]$ ışıını üzerindeki F noktası da, $|DB| = |BF|$ ve $|AB| < |AF| = 8\sqrt{5}$ koşullarını sağlıyorsa, $|AD|$ nedir?
 a) $10\sqrt{5}$ b) 8 c) $4\sqrt{15}$ d) $7\sqrt{5}$ e) Hiçbiri

- 26** $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur?
 a) 21 b) 01 c) 11 d) 02 e) 22

- 27** İkisinde 1, sekizinde 2, on ikisinde 3, dördünde 4 ve beşinde 5 yazılı otuz bir taştan otuzu herhangi iki satırdaki sayıların toplamı eşit ve herhangi iki sütundaki sayıların toplamı eşit olacak biçimde 5×6 bir satranç tahtasına yerleştirilmişse, kullanılmayan taştaki sayı nedir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 28** x, y gerçel sayıları $4x^2 + 9y^2 = 8$ eşitliğini sağlıyorsa, $8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?
 a) 23 b) 26 c) 29 d) 31 e) 35

- 29** $ABCD$ kirişler dörtgeninin AC ve BD köşegenleri M noktasında kesişiyor. $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$ ise, dörtgenin çevrel çemberinin yarı çapının uzunluğu nedir?
- a) $5\sqrt{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ c) 6 d) 4 e) $\sqrt{34}$

- 30** $p^2 + 23$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 14 olacak şekilde kaç p asal sayısı bulunur?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 31** n tam sayısının kaç farklı değeri için, düzlemde her biri kendi dışındakilerin tam olarak 2004 ü ile kesişen farklı n doğru bulunabilir?
- a) 12 b) 11 c) 9 d) 6 e) 1

- 32** a, b, c, d farklı gerçel sayılar olmak üzere, a ve b , $x^2 - 2cx - 5d = 0$ denkleminin, c ve d ise, $x^2 - 2ax - 5b = 0$ denkleminin kökleri ise, $a + b + c + d$ nedir?
- a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

33 $|AB| = 9$, $|CD| = 5$ ve $BC \parallel AD$ koşullarını sağlayan $ABCD$ yamuğunun D açısına ait iç açıortay, A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla M ve N noktalarında; B açısının iç açıortayı ise, yine A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla L ve K noktalarında kesiyor. K noktası $[AD]$ üzerinde ve $\frac{|LM|}{|KN|} = \frac{3}{7}$ ise, $\frac{|MN|}{|KL|}$ nedir?

- a) $\frac{62}{63}$ b) $\frac{27}{35}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{24}{63}$

34 n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için $5n^{11} - 2n^5 - 3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tam sayı vardır?

- a) 2 b) 5 c) 6 d) 12 e) 18

35 Bir çember üzerine, her biri saat yönünde kendisinden sonra gelen iki sayının farkının mutlak değerine eşit ve hepsinin toplamı 94 olacak biçimde n tane tam sayı yerleştirilmesini olanaklı kılan en büyük n sayısı nedir?

- a) 188 b) 186 c) 141 d) 100 e) 47

36 f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için, $f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$ eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

- a) -1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{4}$ e) Hiçbiri

13. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2005

- 1** $|AB| = 2$ olmak üzere, A ve B noktalarından geçen 4 yarıçaplı çember, A ve C noktalarından geçen 3 yarıçaplı çembere dıştan teğet olsun. BC doğrusu ikinci çembere teğetse, $|BC|$ kaçtır?
- a) 7 b) $2 + \frac{43}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $4 + \sqrt{9}$ e) $\sqrt{7}$
- 2** $n < 2005$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sayısının, hiçbiri 5 ile bölünmeyen tüm a_1, a_2, \dots, a_n pozitif tam sayıları için, $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4$ sayısının 5 ile bölünmesini sağlayan en büyük değeri nedir?
- a) 2000 b) 2001 c) 2002 d) 2003 e) 2004
- 3** $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ denkleminin en büyük ve en küçük gerçel köklerinin arasındaki fark F ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- a) $0 \leq F < 2$ b) $2 \leq F < 4$ c) $4 \leq F < 6$ d) $6 \leq F < 8$ e) $0 \leq F$
- 4** Tüm basamakları 0 dan farklı olan ve basamaklarındaki rakamlar nasıl sıralanırsa sıralansın oluşan sayıların hepsinin 7 ile bölüldüğü kaç tane altı basamaklı pozitif tam sayı vardır?
- a) 11 b) 77 c) 133 d) 166 e) 255

5) $ABCD$ konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası M olmak üzere, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$. O_1, O_2, O_3, O_4 noktaları sırasıyla, ABM, BCM, CDM, DAM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleriyse, $\text{Alan}(ABCD)/\text{Alan}(O_1O_2O_3O_4)$ nedir?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

6) Aşağıdaki sayılardan hangisi $3^{3n+1} + 5^{3n+2} + 7^{3n+3}$ sayısını her n pozitif tam sayısı için böler?

- a) 3 b) 5 c) 7 d) 11 e) 53

7) x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 2 e) 3

8) $xyz = 10^6$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) doğal sayı üçlüsü vardır?

- a) 568 b) 784 c) 812 d) 816 e) 824

- 9 Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan ABC üçgeninin, A ve C köşelerinden ve diklik merkezinden geçen çemberin merkezi, üçgenin çevrel çemberi üzerinde yer alıyorsa, $|AC|$ nedir?
- a) 2 b) 3 c) $\frac{3}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

- 10 Aşağıdaki sayılardan hangisi $n^{2225} - n^{2005}$ sayısını n nin bütün tam sayı değerleri için bölmez?
- a) 3 b) 5 c) 7 d) 11 e) 23

- 11 $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 6$ eşitliğini sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?
- a) 2 b) 9 c) 16 d) 23 e) 30

- 12 Ördek avına çıkan Ali ile Veli'den her ikisinin de, üstüne ateş ettiği ördeği vurma olasılığı $1/2$ dir. Av sırasında Ali toplam 12, Veli de toplam 13 ördeğe ateş ederse, Veli'nin Ali'den çok ördek vurma olasılığı nedir?
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{13}{25}$ c) $\frac{13}{24}$ d) $\frac{7}{13}$ e) $\frac{3}{4}$

- 13** $AD \parallel BC$ olmak üzere $ABCD$ ikizkenar yamuğunun köşegen uzunluğu $\sqrt{3}$ ve taban açısı 60° olsun. Bu yamukla aynı düzlemde bulunan bir P noktası, $|PA| = 1$ ve $|PD| = 3$ koşullarını sağlıyorsa, $|PC|$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?
- a) $\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{7}$

- 14** $10^3 < n < 10^6$ koşulunu sağlayan bir n tam sayısına, son üç basamağındaki rakamların toplamı, daha önceki basamaklarındaki rakamların toplamına eşitse, *dengeli sayı* diyoruz. Tüm dengeli sayıların toplamı 13 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?
- a) 0 b) 5 c) 7 d) 11 e) 12

- 15** a nın kaç pozitif gerçel değeri için, $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ denkleminin farklı iki tam sayı kökü vardır?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 16** Toplam ağırlığı 500 kg olan 100 taşın her birinin ağırlığı 1 kg, 10 kg veya 50 kg dır. Ağırlığı 10 kg olan taşların sayısının alabileceği kaç değer vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 17** Bir ABC üçgeninin $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üzerinde, dışa doğru, sırasıyla $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$ kareleri, $[NQ]$ ve $[KP]$ doğru parçaları üzerinde de $NQZT$ ve $KPYX$ kareleri çiziliyor. $\text{Alan}(ABMN) - \text{Alan}(BCKL) = 1$ ise, $\text{Alan}(NQZT) - \text{Alan}(KPYX)$ kaçtır?
- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 2 d) 3 e) 4

- 18** $x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{121}$ ve $0 \leq x < 121$ koşullarını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 5

- 19** $x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3} = 0$ denkleminin en büyük gerçel kökü nedir?
- a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$ e) Hiçbiri

- 20** 12345 sayısı ile başlayıp, her adımda iki değişik basamaktaki rakamların yerlerini değiştiriyoruz. Aşağıdaki sayılardan hangisi çift sayıda adımda elde edilemez?
- a) 13425 b) 21435 c) 35142 d) 43125 e) 53124

- 21** Kenar uzunluğu 1 olan $ABCD$ karesinin merkezinden, A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

- 22** k sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^2 - y^2 = k$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 2005 b) 2006 c) 2007 d) 2008 e) 2009

23

$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2} = \frac{y-2}{xy-4}$$

denklemin kaç çözümü vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 24** 20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir altkümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu altkümeye bir komite diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

a) 120 b) 380 c) 570 d) 1020 e) 1140

- 25** Bir $ABCD$ dikdörtgeninde, E, F, G noktaları, sırasıyla $[AB], [BC], [CD]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BF| = |FG|$, $m(\widehat{FGE}) = 90^\circ$, $|BC| = 4\sqrt{3}/5$ ve $|EF| = \sqrt{5}$ koşulları sağlanıyorsa, $|BF|$ kaçtır?
- a) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{3} - 1$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}$ e) 1

- 26** Her n pozitif tam sayısı için, $f(2n+1) = 2f(2n)$, $f(2n) = f(2n-1) + 1$ ve $f(1) = 0$ ise, $f(2005)$ sayısının 5 e bölümünde elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 27** a, b, c hepsi birden sıfır olmayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ bx^2 + cx + a &= 0 \\ cx^2 + ax + b &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin en büyük gerçel kökü ile en küçük gerçel kökü arasındaki fark en çok kaç olabilir?

- a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) Üst sınır yoktur
- 28** a, b, c ; 1 den büyük tam sayılar olmak üzere, $a! = b!c!$ denkleminin kaç çözümü vardır?
- a) 1 b) 2 c) 6 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

- 29** Bir üçgenin, uzunlukları 5 ve $2\sqrt{6}$ olan kenarlarına ait yüksekliklerin uzunlukları sırasıyla h_1 ve h_2 olmak üzere, $5 + h_1 \leq 2\sqrt{6} + h_2$ ise, bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu kaçtır?
 a) 5 b) 7 c) $2\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{6}$ e) $5\sqrt{3}$

- 30** Bir n tam sayısı için, $n^2 + 1$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

- 31** a, b, c, d gerçel sayılar ve $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 0 \\ f(x) - (g(x))^3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin birden çok gerçel kökü varsa, $f(x)g(x) = 0$ denkleminin en çok kaç farklı gerçel kökü olabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4
- 32** Ali, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan birini seçip, bu taşı Betül'ün göremeyeceği biçimde işaretliyor ve taşları karıştırıyor. Betül, her hamlede mevcut taşları hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyor. Ali, işaretlediği taşı içermeyen iki öbekten, varsa daha çok taştan oluşumunu, her ikisi de aynı sayıda taştan oluşuyorsa, herhangi birini oyundan çıkartıyor ve geri kalan taşları yeniden karıştırıyor. Sıra tekrar Betül'e geliyor ve oyun iki taş kalana kadar bu şekilde sürüyor. İki taş kalınca, Ali, Betül'e hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. Betül, işaretli taşı en az kaç hamlede bulmayı garantileyebilir?
 a) 11 b) 13 c) 17 d) 18 e) 19

- 33** K , $ABCD$ kirisler dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası olmak üzere, $|AB| = |BC|$, $|BK| = b$ ve $|DK| = d$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?
 a) $\sqrt{d^2 + bd}$ b) $\sqrt{b^2 + bd}$ c) $\sqrt{2bd}$ d) $\sqrt{2(b^2 + d^2 - bd)}$ e) \sqrt{bd}

- 34** $xyz = 510510$ ve $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?
 a) 0 b) 1 c) 3 d) 8 e) Hiçbiri

- 35** a, b ve c , $a < b$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, her x gerçel sayısı için, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ise, $\frac{a+b+c}{b-a}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) 2 c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) 3 e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

- 36** n güreşçinin katıldığı bir turnuvada, farklı herhangi iki güreşçi aralarında tam olarak bir kez güreşiyor. Her karşılaşma sonucunda kazanan 2, kaybeden 0 puan alıyor; beraberlik durumunda ise, her iki güreşçiye de 1er puan veriliyor. Turnuva sonucunda en çok toplam puana sahip olan güreşçi, turnuva boyunca en az galibiyet almış olan güreşçi ise, n en az kaç olabilir?
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

14. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2006

1 Bir ABC eşkenar üçgeninde $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E ; $[DE]$ ışımının çevrel çemberi kestiği nokta da F olmak üzere, $\frac{|DE|}{|DF|}$ nedir?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}-1)$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2 p ve $p^2 + 2$ asal sayılarsa, $p^3 + 3$ sayısının en çok kaç asal böleni olabilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3 $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ise, a_{2006} kaçtır?

- a) -2 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2

4 Kenar uzunlukları 1 olan 27 tane küpten her birinde, iki karşılıklı yüz birer nokta, başka iki karşılıklı yüz ikişer nokta, geri kalan iki karşılıklı yüz de üçer nokta ile işaretleniyor. Bu 27 küp ile $3 \times 3 \times 3$ boyutlarında bir küp oluşturursak, bu küpün yüzleri üstünde işaretlenmiş toplam nokta sayısı en az kaç olabilir?

- a) 54 b) 60 c) 72 d) 90 e) 96

- 5 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB| + |BD| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ olacak biçimde bir D noktası bulunuyorsa, $m(\widehat{ACB})$ nedir?
 a) 30° b) 40° c) 45° d) 48° e) 50°

- 6 $3 + 3^2 + 3^{2^2} + 3^{2^3} + \dots + 3^{2^{2006}}$ toplamı, 11 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 5 e) 10

- 7 $\left\lfloor \frac{m}{11} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{10} \right\rfloor$ eşitliğini sağlayan kaç pozitif tam sayı vardır?
 a) 44 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

- 8 d_1 ve d_2 bir düzlem üzerinde birbirine paralel iki farklı doğru olmak üzere, d_1 üstünde 11 siyah nokta, d_2 üstünde de 16 beyaz nokta işaretleniyor. Siyah ve beyaz noktaları birleştiren doğru parçalarının, d_1 ve d_2 doğruları arasındaki şeridin iç bölgesinde bulunan kesişim noktalarının sayısı en çok kaçtır?
 a) 5600 b) 5650 c) 6500 d) 6560 e) 6600

- 9 Kenar uzunlukları $|AB| = 6$, $|BC| = 7$ ve $|AC| = 8$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait iç açıortay BC yi D noktasında kesiyor. E noktası $[AC]$ üstünde olmak üzere $|CE| = 2$ ise, $|DE|$ kaçtır?
 a) 3 b) $\frac{17}{5}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

- 10 5^n nin $\frac{2006!}{(1003!)^2}$ sayısını bölmesini sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 500

- 11 $4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$ denkleminin farklı gerçel köklerinin toplamı kaçtır?
 a) -1 b) -2 c) -3 d) -4 e) Hiçbiri

- 12 $\{1, 2, \dots, 2006\}$ kümesi, boş olmayan ve hiçbirisi ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?
 a) $3^{2006} - 3 \cdot 2^{2006} + 1$ b) $2^{2005} - 2$ c) 3^{2004} d) $3^{2005} - 1$ e) Hiçbiri

- 13** $|AB| = |AC|$ olan ikizkenar bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üstünde alınan bir D noktasından BC ye çizilen paralel AC yi E noktasında kesiyor. $m(\widehat{A}) = 20^\circ$, $|DE| = 1$, $|BC| = a$ ve $|BE| = a + 1$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?
 a) $2a$ b) $a^2 - a$ c) $a^2 + 1$ d) $(a + 1)^2$ e) $a^2 + a$

- 14** $A, B \in \{1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, on tabanındaki yazılımlı $AABB$ şeklinde olan sayılardan kaç tanesi tam karedir?
 a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 15** $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ denkleminin kaç farklı gerçel kökü vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 16** $x_1 + x_2 + \dots + x_{13} \leq 2006$ eşitsizliğini sağlayan kaç $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$ pozitif tam sayı on üçlüsü vardır?
 a) $\frac{2006!}{13! \cdot 1993!}$ b) $\frac{2006!}{14! \cdot 1992!}$ c) $\frac{1993!}{12! \cdot 1981!}$ d) $\frac{1993!}{13! \cdot 1980!}$ e) Hiçbiri

- 17** Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 2$, $|DC| = 6$ olacak şekilde bir D noktası bulunmaktadır. $|AB| = 4$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{BAD})$ nedir?
 a) 10° b) 18° c) 20° d) 22° e) 25°

- 18** $S = \{n : n3^n + (2n + 1)5^n \equiv 0 \pmod{7}\}$ ise, her $n \in S$ için, $n + k \in S$ olmasını sağlayan en küçük pozitif k tam sayısı nedir?
 a) 6 b) 7 c) 14 d) 21 e) 42

- 19** $x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 4xyz$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?
 a) 0 b) 4 c) 6 d) 10 e) Sonsuz çoklukta

- 20** Bir kareyi k tane kareye ayırabiliyorsak, k tam sayısına *iyi sayı* diyelim. 2006 dan büyük olmayan kaç iyi sayı vardır?
 a) 1003 b) 1026 c) 2000 d) 2003 e) 2004

- 21** Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 70^\circ$ dir. İçteğet çemberinin merkezi I olmak üzere, $|BC| = |AC| + |AI|$ olduğuna göre, $m(\widehat{B})$ nedir?
 a) 35° b) 36° c) 42° d) 45° e) Hiçbiri

- 22** $0 \leq x < 165, 0 \leq y < 165$ ve $y^2 \equiv x^3 + x \pmod{165}$ koşullarını sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?
 a) 80 b) 99 c) 120 d) 315 e) Hiçbiri

- 23** $\left(1 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}\right)^{10}$ sayısını aşmayan en büyük tam sayı kaçtır?
 a) 2 b) 10 c) 21 d) 32 e) 36

- 24** n takımın katıldığı bir hentbol turnuvasında, her takım, kendi dışındaki her takımla tam olarak bir maç yapıyor. Her maçta kazanan 2, kaybeden 0 puan alırken, beraberlik durumunda iki takım da 1'er puan kazanıyor. Turnuvanın bitiminde tüm takımların puanları farklı olup, sonuncu olan takım ilk üç sırada yer alan takımların hepsini yenmiş ise, n en az kaç olabilir?
 a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

- 25** Kenar uzunlukları $|AB| = 7$, $|BC| = 6$ ve $|AC| = 5$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası E dir. A köşesinden çizilen iç açıortaya E den inilen dikmenin AB yi kestiği nokta D ise, $|AD|$ nedir?
- a) 5 b) 6 c) $\frac{9}{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 26** Kaç p asal sayısı için, $m^3 + 3m - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ ve $m^2 + 4m + 5 \equiv 0 \pmod{p}$ koşullarını sağlayan bir m tam sayısı bulunur?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

- 27** x, y, z pozitif gerçel sayıları $xy + yz + zx = 5$ koşulunu sağlıyorsa, $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?
- a) 3 b) 4 c) 5 d) $3\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

- 28** 10 şekeri olan Ali, her gün en az bir şeker yiyorsa, şekerlerinin tümünü günlere dağılımı itibariyle kaç değişik biçimde yiyebilir?
- a) 64 b) 126 c) 243 d) 512 e) 1025

- 29** Bir ABC üçgeninde içteğet çemberinin merkezi I ; $[BC]$ ye değen dış teğet çemberinin merkezi J olmak üzere, $m(\widehat{B}) = 45^\circ$, $m(\widehat{A}) = 120^\circ$ ve $|IJ| = \sqrt{3}$ ise, $|BC|$ kaçtır?
- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e) $\sqrt{3} - 1$

- 30** $0 \leq x < 13, 0 \leq y < 13, 0 \leq z < 13$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x - yz^2 &\equiv 1 \pmod{13} \\ xz + y &\equiv 4 \pmod{13} \end{aligned}$$

denklik sistemini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

- a) 10 b) 23 c) 36 d) 49 e) Hiçbiri

- 31** a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomu $P(1) \geq 2$ ve $P(3) \leq 31$ koşullarını sağlıyorsa, $P(4)$ ün alabileceği kaç tam sayı değer vardır?
- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

- 32** “ $\{1, 2, \dots, 9\}$ kümesinin 5 elemanlı hangi 6 altkümesini alırsak alalım, bunlardan en az bir ortak elemana sahip k tanesi bulunur” önermesinin doğru olmasını sağlayan en büyük k tam sayısı nedir?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 33** Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{ABD}) = 40^\circ$, $m(\widehat{DBC}) = 70^\circ$, $m(\widehat{BDA}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BDC}) = 50^\circ$ ise $m(\widehat{CAD})$ nedir?
 a) 25° b) 30° c) 35° d) 38° e) 40°

- 34** 1000 den küçük olan ve 2 veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tam sayı vardır?
 a) 6 b) 10 c) 26 d) 68 e) 72

- 35** a, b, c gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı 1, $P(P(P(x)))$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı da 3 ise, abc ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?
 a) -3 b) -2 c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

- 36** n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sorudan oluşan bir sınavda, her soru en az bir öğrenci tarafından doğru yanıtlanıyor. Ayrıca hem her öğrenci çift sayıda soruyu doğru yanıtıyor, hem de herhangi iki öğrenci için, her ikisinin de doğru yanıtladığı ortak soru sayısının çift olduğu gözleniyor. n nin alamayacağı değerlerin sayısı nedir?
 a) 3 b) 4 c) 5 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

15. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2007

1 Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $|AB| = 4$, $|AC| = 3$ ve A köşesinden $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı D olmak üzere, $[BD]$ üstünde bir P noktası için $5|AP| = 13|PD|$ ise, $|CP|$ nedir?

- a) $\frac{9 + 4\sqrt{3}}{5}$ b) $\frac{56}{15}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{37}{13}$ e) $\frac{3 + 5\sqrt{5}}{5}$

2 $10 \cdot 3^{195} \cdot 49^{49}$ sayısının dört tabanına göre yazımının son üç basamağı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 112 b) 130 c) 132 d) 212 e) 232

3 $a < b < c < d$ tam sayılar olmak üzere, $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 9 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 7$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

- a) 14 b) 21 c) 28 d) 42 e) 63

4 Bir matematik dersinde öğretmen tahtaya yazdığı soruyu, Ali, Betül, Cem, Çağla, Dursun, Emre ve Fatma'nın gruplar halinde çözmesini istiyor. Her grup iki veya üç kişiden oluşacaksa, bu yedi öğrenci kaç farklı biçimde gruplara ayrılabilir?

- a) 70 b) 105 c) 210 d) 280 e) 630

5) O merkezli AB çaplı yarım çember üstünde C ve D noktaları, $ABCD$ bir dışbükey dörtgen olacak biçimde alınıyor. $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesişim noktası Q , yarım çembere C ve D noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası P olmak üzere, $m(\widehat{AQB}) = 2m(\widehat{COD})$ ve $|AB| = 2$ ise, $|PO|$ nedir?

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6) $n!(2n + 1)$ ve 221 sayılarının aralarında asal olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) Hiçbiri

7) $\left\lfloor \frac{6x + 5}{8} \right\rfloor = \frac{15x - 7}{5}$ eşitliğini sağlayan gerçel sayıların toplamı kaçtır?

- a) 2 b) $\frac{81}{90}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{19}{15}$

8) 123456789 sayısı ile başlanarak, her adımda, her ikisi de sıfırdan farklı bitişik iki rakamın değerleri birer azaltılarak yerleri kendi aralarında değiştiriliyor. Sonlu sayıda adım sonucunda elde edilebilecek en küçük sayının rakamları toplamı nedir?

- a) 0 b) 1 c) 3 d) 5 e) 9

- 9 Bir ABC üçgeninde $|AB| = 3$ ve C ye ait yüksekliğin uzunluğu 2 ise, diğer iki yükseklik uzunluklarının çarpımı en fazla kaç olabilir?
- a) $\frac{144}{25}$ b) 5 c) $3\sqrt{2}$ d) 6 e) Hiçbiri

- 10 Bir tam sayının karesinin iki katına ve bir tam sayının küpünün üç katına eşit olup, 10^6 dan küçük olan kaç pozitif tam sayı vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 11 Farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir kümenin en büyük iki elemanının çarpımının $8/19$ u, geriye kalan elemanların toplamından büyük değilse, kümedeki sayılardan en büyüğünün alabileceği en küçük değer nedir?
- a) 8 b) 12 c) 13 d) 19 e) 20

- 12 10 farklı kitap üç rafı bir kitaplığa, hiçbir raf boş kalmayacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
- a) $36 \cdot 10!$ b) $50 \cdot 10!$ c) $55 \cdot 10!$ d) $81 \cdot 10!$ e) Hiçbiri

13 Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 120^\circ$, $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ ve $|BC| = 2$ ise, $|AD|$ nedir?

- a) $\sqrt{3} - 1$ b) $2 - \sqrt{3}$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ d) $2 - \sqrt{2}$ e) $3 - \sqrt{3}$

14 3^n nin, $(100^2 - 99^2)(99^2 - 98^2) \cdots (3^2 - 2^2)(2^2 - 1^2)$ çarpımını bölmesini sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?

- a) 49 b) 53 c) 97 d) 103 e) Hiçbiri

15 a, b, c, d, e, f, g, h farklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $ab + cd = ef + gh$ ise, $ab + cd$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 34 b) 33 c) 32 d) 31 e) 30

16 $x, y, z \leq 9$ pozitif tam sayılar olmak üzere, her (x, y, z) üçlüsü için, bu sayılardan en büyüğü ile en küçüğünün toplamına bu üçlünün gücü diyoruz. Bu tür tüm (x, y, z) üçlülerinin güçlerinin toplamı kaçtır?

- a) 9000 b) 8460 c) 7290 d) 6150 e) 6000

- 17** $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberine C noktasında teğet olan doğru ile AB doğrusunun kesişimi K noktasıdır.

$L, [BC]$ kenarı üstünde bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{ALB}) = m(\widehat{CAK})$, $5|LC| = 4|BL|$ ve $|KC| = 12$ ise, $|AK|$ nedir?

- a) $4\sqrt{2}$ b) 6 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

- 18** $n^3 + 8$ sayısının en çok üç pozitif böleninin bulunmasını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

- 19** $x_1 = 5, x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için

$$x_n = x_{n-2} - \frac{1}{x_{n-1}}$$

ise, m nin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 406 b) 2005 c) 2006 d) 2007 e) Hiçbiri

- 20** 9 ardışık bölümden oluşan bir şeridin her bölümü kırmızı veya beyaza boyanıyor. Herhangi bitişik iki bölüm birlikte beyaza boyanamıyorsa, bu boyama kaç değişik biçimde yapılabilir?

- a) 34 b) 89 c) 128 d) 144 e) 360

- 21** $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dörtgeninin $[DC]$ kenarının orta noktası M ile gösterilmek üzere, $AC \perp BM$, $|DC| = 12$ ve $|AB| = 9$ ise $|AD|$ nedir?
 a) 4 b) 6 c) 9 d) 12 e) Hiçbiri

- 22** n ve m tam sayılar olmak üzere, $n \leq 2007 \leq m$ ve $n^n \equiv -1 \equiv m^m \pmod{5}$ ise, $m - n$ nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

- 23** Birim kenarlı bir eşkenar üçgenle başlanarak her kenarın orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Sonra, elde edilen çokgenin her kenarının orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Böylece bu işlem sonsuz kez tekrarlandığında elde edilen şeklin alanı nedir?
 a) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ d) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ e) Hiçbiri

- 24** Aşağıdaki n sayılarından hangisi için, 1 den n ye kadar olan tam sayılar bir çemberin ertafına, her sayı, her iki yanındaki sayıların farkına bölünecek biçimde dizilebilir?
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 13

25 Birim çember üstünde $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 72^\circ$ olacak şekilde A, B, C noktaları almıyor. BCD bir eşkenar üçgen olacak şekilde çemberin iç bölgesinde alınan bir D noktası için, AD doğrusu çemberi ikinci kez E noktasında kesiyorsa, $|DE|$ nedir?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) Hiçbiri

26 c, a ve b nin pozitif ortak katlarının en küçüğünü ve d de, ortak bölenlerinin en büyüğünü göstermek üzere,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

27

$$(x+1) \left(x + \frac{1}{4}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{4}\right) = \frac{45}{32}$$

denkleminin gerçel çözümlerini toplamı kaçtır?

- a) 0 b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{5}{4}$ e) $-\frac{7}{12}$

28 Bir çember etrafında yazılı n tam sayıdan her biri, kendisini saat yönünde izleyen iki sayının farkının mutlak değerine eşit olup, tüm sayıların toplamı 278 ise, n kaç farklı değer alabilir?

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 139 e) Hiçbiri

- 29** Bir $ABCD$ karesinin sırasıyla $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üstünde alınan M ve N noktaları için $|BM| = 21$, $|DN| = 4$ ve $|NC| = 24$ ise, $m(\widehat{MAN})$ nedir?
 a) 15° b) 30° c) 37° d) 45° e) 60°
- 30** Her $n \geq 1$ için $a_{n+48} \equiv a_n \pmod{35}$ koşulunun sağlandığı bir $(a_n)_{n=1}^\infty$ tamsayı dizisinde i ve j sırasıyla, her $n \geq 1$ için, $a_{n+i} \equiv a_n \pmod{5}$ ve $a_{n+j} \equiv a_n \pmod{7}$ bağıntılarını sağlayan en küçük pozitif tamsayılar, (i, j) ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) $(16, 4)$ b) $(3, 16)$ c) $(8, 6)$ d) $(1, 48)$ e) $(16, 18)$
- 31** Kare şeklindeki bir arazi, sınırlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen şeklindeki n tarlaya bölünüyor. Tarlaların çevre uzunluklarının toplamı, arazinin çevre uzunluğunun 100 katıysa, n en çok kaç olabilir?
 a) 10000 b) 20000 c) 50000 d) 100000 e) 200000
- 32** 8×8 bir satranç tahtasının birim karelerinden her birinin merkezine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Her satır, her sütun ve iki köşegenden birine paralel olup birim karelerin merkezlerinden geçen her doğru üstündeki sayıların toplamı çift ise, tahtaya yazılı bütün sayıların toplamı en fazla kaç olabilir?
 a) 32 b) 48 c) 52 d) 56 e) 64

33 Bir A noktasından C çemberine çizilen teğetlerin değme noktaları M ve N dir. $[AN]$ üstünde alınan bir P noktası için MP ile C nin ikinci kesişim noktası Q , P den geçen ve MA ya paralel olan doğru ile MN nin kesişim noktası R olmak üzere, $|MA| = 2$, $|MN| = \sqrt{3}$ ve $QR \parallel AN$ ise, $|PN|$ nedir?

- a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

34 15 ten küçük kaç p asal sayısı için,

$$\begin{aligned} m + n + k &\equiv 0 \pmod{p} \\ mn + mk + nk &\equiv 1 \pmod{p} \\ mnk &\equiv 2 \pmod{p} \end{aligned}$$

sistemini sağlayan (m, n, k) tamsayı üçlüsü vardır?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

35 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ sayısının ondalık yazılımda virgülden sonra üçüncü basamaktaki rakam nedir?

- a) 8 b) 5 c) 3 d) 1 e) Hiçbiri

36 Herhangi üçü bir doğru üstünde bulunmayan beş noktadan bazılarını köşe kabul eden dışbükey çokgenlerin sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 15 e) 16

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2008

- 1 ABC üçgeninde AD kenarortay olmak üzere, $m(\widehat{ADB}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$ ise \widehat{ABC} açısı kaç derecedir?
 a) 75 b) 90 c) 105 d) 120 e) 135

- 2 $3m^2n = n^3 + A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır?
 a) 301 b) 403 c) 415 d) 427 e) 481

- 3 $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{18} - x^{19}$ polinomu verilsin. $Q(x) = P(x-1)$ şeklinde tanımlanan Q polinomunda x^2 nin katsayısı kaçtır?
 a) 840 b) 816 c) 969 d) 1020 e) 1140

- 4 YARIŞMA sözcüğünün harfleriyle, her harf bu sözcükte olduğu sayıda kullanılmak üzere, anlamlı veya anlamsız, iki kelimedenden oluşan kaç cümle yazılabilir?
 a) 2520 b) 5040 c) 15120 d) 20160 e) Hiçbiri

5 Bir üçgenin kenarları a, b, c olsun, eğer a^2, b^2, c^2 uzunluğundaki doğru parçaları bir üçgen oluşturuyorsa bu üçgene iyi üçgen diyoruz. Aşağıda açıları verilen üçgenlerden kaç tanesi iyi üçgendir?

(i) $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$

(ii) $10^\circ, 10^\circ, 160^\circ$

(iii) $110^\circ, 35^\circ, 35^\circ$

(iv) $50^\circ, 30^\circ, 100^\circ$

(v) $90^\circ, 40^\circ, 50^\circ$

(vi) $80^\circ, 20^\circ, 80^\circ$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

6 Eğer n pozitif tamsayıya bölünen her tamsayı, basamaklarının yerleri nasıl değiştirilirse değiştirilsin yine n ye bölünüyorsa, n ye “iyi” sayı diyelim. Kaç iyi sayı vardır?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 12 e) Sonsuz Sayıda

7 $a = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$ olduğuna göre, $\left(\frac{4-a}{a}\right)^6$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3 b) 6 c) 8 d) 9 e) 12

8 10×10 bir satranç tahtasının birinci satırının karelerine sırasıyla $0, 1, 2, \dots, 9$, ikinci satırının karelerine sırasıyla $10, 11, \dots, 19, \dots$, onuncu satırının karelerine sırasıyla $90, 91, \dots, 99$ sayıları yazılmıştır. Sayıların bazılarının önüne, her satır ve her sütunda tam olarak beş tane olacak şekilde eksi işaretleri ekleyerek tüm sayıların toplamı en az kaç yapılabilir?

a) -10 b) -2 c) 2 d) 10 e) Hiçbiri

- 9) $ABCD$ karesinin dışında bir E noktası verilmiştir. $m(\widehat{BEC}) = 90^\circ$, $F \in [CE]$, $[AF] \perp [CE]$, $|AB| = 25$, ve $|BE| = 7$ olduğuna göre, $|AF|$ kaç birimdir?
 a) 29 b) 30 c) 31 d) 32 e) 33

- 10) $\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane (x, y) çözüm ikilisi vardır?
 a) 8 b) 18 c) 72 d) 2130 e) Sonsuz sayıda

- 11) Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1, a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır?
 a) 895 b) 900 c) 905 d) 910 e) Hiçbiri

- 12) Yedi renk kullanılarak her yüzeyi farklı bir renge boyanmış kaç küp oluşturulabilir?
 a) 154 b) 203 c) 210 d) 240 e) Hiçbiri

- 13** C açısı geniş açı olan ABC üçgeninde $D \in [AB]$ ve $[DC] \perp [BC]$ dir. $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, $m(\widehat{BCA}) = 3\alpha$ ve $|AC| - |AD| = 10$ olduğuna göre $|BD|$ kaç birimdir?
 a) 10 b) 14 c) 18 d) 20 e) 22

- 14** $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606}$ sayısının son üç rakamı nedir?
 a) 001 b) 081 c) 561 d) 721 e) 961

- 15** $a_1 = \frac{1}{3}$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + 13a_n^2}}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin $a_k < \frac{1}{50}$ koşulunu sağlayan en büyük terimi a_k ise k kaçtır?
 a) 194 b) 193 c) 192 d) 191 e) Hiçbiri

- 16** 50 kişilik bir sınıfta yapılan 4 soruluk bir sınavda, herhangi 40 kişiden en az 1 kişi tam olarak 3 soruyu, en az 2 kişi tam olarak 2 soruyu, en az 3 kişi tam olarak 1 soruyu doğru, en az 4 kişi ise bütün soruları yanlış çözmüştür. Tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı en az kaçtır?
 a) 18 b) 24 c) 26 d) 28 e) Hiçbiri

17 B açısı dik olan ABC üçgeninin A ve C köşeleri, B merkezli 20 birim yarıçaplı çeyrek çemberin üzerindedirler. Bu çeyrek çemberin iç bölgesine $[AB]$ çaplı bir yarım çember çizilmiştir. C noktasından yarım çembere çizilen teğetin değme noktası B 'den farklı bir D noktası ve CD doğrusunun çeyrek çemberi kestiği nokta F dir. Buna göre $|FD|$ kaç birimdir?

- a) 1 b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) 4 e) 5

18 Kaç tane n pozitif tam sayısı için $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$ tam sayıdır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz e) Hiçbiri

19 $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in (0, \infty)$ için,

$$10 \cdot \frac{x+y}{xy} = f(x) \cdot f(y) - f(xy) - 90$$

denklemini sağlıyorsa, $f\left(\frac{1}{11}\right)$ kaçtır?

- a) 1 b) 11 c) 21 d) 31 e) Tek türlü bulunamaz

20 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2008}$ tam sayılarından her biri en az 1 en çok ise 5 tir. (a_n, a_{n+1}) ikilisine, $a_n < a_{n+1}$ ise artan ikili, $a_n > a_{n+1}$ ise azalan ikili diyelim. Dizideki artan ikili sayısı 103 tane ise azalan ikili sayısı en az kaçtır?

- a) 21 b) 24 c) 36 d) 102 e) Hiçbiri

- 21** ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ olsun. $P \in [AC], Q \in [BC], R \in [AB]$ olacak şekildeki $APQR$ karesinin alanı 9, $N, K \in [BC], M \in [AB]$ ve $L \in [AC]$ olacak şekildeki $KLMN$ karesinin alanı da 8 ise $|AB| + |AC|$ kaçtır?
 a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

- 22** Kaç $a \geq b$ şartını sağlayan (a, b) pozitif tam sayı ikilisi için $a^2 + b^2$ ifadesi $a^3 + b$ ve $a + b^3$ ifadelerini böler?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz sayıda

- 23** a, b, c, d gerçel sayıları $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0$ eşitliğini sağlıyorsa a kaçtır?
 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{5}$ e) Hiçbiri

- 24** a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ve a_6 sayıları $\{-1, 0, 1\}$ kümesinin elemanları olmak üzere,

$$a_1 \cdot 5^1 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 + a_5 \cdot 5^5 + a_6 \cdot 5^6$$

ifadelerine bakalım. Bu ifadelerin kaç tanesi negatif değer alır?

- a) 121 b) 224 c) 275 d) 364 e) 375

- 25** O merkezli çemberde $[AB]$ çaptır. C ve D noktaları çember üzerinde $[AB]$ çapına göre farklı yarım çemberler üzerindedir. B den $[CD]$ ye inen dikmenin ayağı H olsun. $|AO| = 13$, $|AC| = 24$ ve $|HD| = 12$ olduğuna göre, DCB açısı kaç derecedir?
 a) 30 b) 45 c) 60 d) 75 e) 80

26

$$A = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{3! \cdot 4!} + \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{4! \cdot 5!} + \frac{4^2 + 3 \cdot 4 + 1}{5! \cdot 6!} + \dots + \frac{10^2 + 3 \cdot 10 + 1}{11! \cdot 12!}$$

toplamı için $11! \cdot 12! \cdot A$ sayısını 11 e bölünce kalan nedir?

- a) 0 b) 1 c) 5 d) 8 e) 10

- 27** Bir üçgenin açıları olan α, β, γ bir aritmetik dizi oluşturuyorlar. $\sin 20\alpha$, $\sin 20\beta$ ve $\sin 20\gamma$ da aritmetik dizi oluşturuyorsa, α kaç farklı değer alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 28** 8×8 bir satranç tahtasının bir köşesinden bir birim kare kesilip atıldığında kalan şekli eşit alanlı üçgenlere bölmek için en az kaç üçgen gerekir?
 a) 17 b) 19 c) 20 d) 21 e) Hiçbiri

- 29** $ABCD$ konveks dörtgeninde $[AB]$ ile $[CD]$ paralel değildir. $[AD]$ nin orta noktası E , $[BC]$ nin orta noktası F dir. $|CD| = 12$, $|AB| = 22$ ve $|EF| = x$ olduğuna göre, x in alabileceği tam sayı değerlerin toplamı kaçtır?
 a) 110 b) 114 c) 118 d) 121 e) Hiçbiri

- 30** İlk terimi pozitif tam sayı olan bir dizide, her terime en büyük rakamı eklenerek bir sonraki terim elde ediliyor. Bu dizinin en çok kaç ardışık terimi tek sayı olabilir?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 31** $xy = 1$ koşulunu sağlayan her x, y gerçel sayıları için,

$$((x + y)^2 + 4) ((x + y)^2 - 2) \geq A.(x - y)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, A sayısının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

- 32** $n \geq 4$ kişilik bir partide, her 3 kişinin tam olarak 1 ortak arkadaşı varsa n kaç farklı değer alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 4 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 33** E noktası $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde olmak üzere, $|AE| = |EB|$, $m(\widehat{EAB}) = 12^\circ$ ve $m(\widehat{DAE}) = 72^\circ$ dir. Buna göre, $m(\widehat{CDE})$ kaç derecedir?
 a) 64 b) 66 c) 68 d) 70 e) 72

- 34** Ondalık yazılımda 0 dan farklı olan tüm rakamlarına bölünen pozitif bir tam sayıya “özel sayı” diyelim. En fazla kaç ardışık özel sayı vardır?
 a) 9 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

- 35** x bir gerçel sayı ise $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?
 a) $\sqrt{39}$ b) 6 c) $\frac{43}{6}$ d) $2\sqrt{2} + \sqrt{13}$ e) Hiçbiri

- 36** Üst üste dizilmiş 2008 madeni paranın bulunduğu bir beyaz masa ve iki boş siyah masadan başlayarak, her hamlede herhangi bir masadaki en üst pozisyondaki parayı alıp herhangi bir boş masaya veya herhangi bir masadaki en üst pozisyona yerleştirerek, en az kaç hamlede tüm paralar beyaz masaya ters sırada yerleştirilebilir?
 a) 6016 b) 6017 c) 6022 d) 6023 e) 6024

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2009

- 1) $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üstünde bir E noktası ve $[ED]$ üstünde bir F noktası için $|DF| = |BF|$ ve $|EF| = |BE|$ ise $m(\widehat{DFA})$ nedir?
 a) 45° b) 60° c) 75° d) 80° e) 85°

- 2) $a^2 + b^4 = 5^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, n) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

- 3) $x = \sqrt[3]{11 + \sqrt{337}} + \sqrt[3]{11 - \sqrt{337}}$ olduğuna göre $x^3 + 18x$ kaçtır?
 a) 24 b) 22 c) 20 d) 11 e) 10

- 4) Biri 5 diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük tam sayı kaçtır?
 a) 82 b) 47 c) 45 d) 42 e) Hiçbiri

- 5 Bir dik üçgenin hipotenüse ait dış teğet çemberinin yarıçapı 30 ise, bu üçgenin çevresinin uzunluğu kaçtır?
a) 40 b) 45 c) 50 d) 60 e) 75

- 6 $a^2b + ab^2 = 2009201020092010$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?
a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 7 $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 15$ ve $x^3 + 4x^2 - x - 10$ polinomlarının ortak olmayan gerçel köklerinin çarpımı kaçtır?
a) -4 b) 4 c) -6 d) 6 e) Hiçbiri

- 8 $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi iki alt kümeye nasıl ayrılırsa ayrılınsın, alt kümelerden en az birindeki iki farklı elemanın toplamı bir tam kare oluyorsa, n en az kaçtır?
a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

9] Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası E olmak üzere, AEB, BEC, CED ve DEA üçgenlerinin çevre uzunlukları

birbirlerine eşittir. AEB, BEC ve CED üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla, 3, 4 ve 6 ise, DEA üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı kaçtır?

- a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{13}{3}$ d) 5 e) Hiçbiri

10] n tam sayısının kaç farklı değeri için, $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$ sayısı asaldır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

11] Her n pozitif tam sayısı için $a_n \neq 0$ ve $a_n a_{n+3} = a_{n+2} a_{n+5}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinde $a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6 = 6$ ise, $a_1 a_2 + a_3 a_4 + \dots + a_{41} a_{42}$ toplamı kaçtır?

- a) 21 b) 42 c) 63 d) 882 e) Hiçbiri

12] Tam olarak yedi farklı rakamın kullanıldığı kaç tane sekiz basamaklı sayı vardır?

- a) $\binom{9}{3}^2 \cdot 6! \cdot 3$ b) $\binom{8}{3}^2 \cdot 7!$ c) $\binom{8}{3}^2 \cdot 7! \cdot 3$ d) $\binom{7}{3}^2 \cdot 7!$ e) $\binom{9}{4}^2 \cdot 6! \cdot 8$

- 13** $AB \parallel CD$ ve $m(\widehat{CAB}) < 90^\circ$ olan $ABCD$ yamuğunda, $|AB| = 5$, $|CD| = 3$ ve $|AC| = 15$ ise, $|BD|$ nin alabileceği farklı tam sayı değerlerin toplamı nedir?
 a) 101 b) 108 c) 111 d) 125 e) Hiçbiri

- 14** Kaç (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $2008 \cdot 2009 \cdot 2010$ sayısı mn ile bölünür?
 a) $2 \cdot 3^7 \cdot 5$ b) $2^5 \cdot 3 \cdot 5$ c) $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5$ d) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ e) Hiçbiri

- 15** $|x| + |y| = 13$ eşitliğin sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için, $x^2 + 7x - 3y + y^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?
 a) 208 b) $15\sqrt{2}$ c) $\frac{35}{2}$ d) 37 e) Hiçbiri

- 16** $x + 19y \equiv 0 \pmod{23}$ ve $x + y < 69$ koşullarını sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?
 a) 100 b) 102 c) 105 d) 109 e) Hiçbiri

- 17** ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası, $|AD| = 8$, $|BD| = 13$ ve $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$ koşullarını sağlıyorsa $|CD|$ kaçtır?
 a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

- 18** $1 \leq n \leq 455$ ve $n^3 \equiv 1 \pmod{455}$ koşullarını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?
 a) 9 b) 6 c) 3 d) 1 e) Hiçbiri

- 19** a bir gerçel sayı; x_1 ve x_2 , $x^2 + ax + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü; x_3 ve x_4 de, $(x-a)^2 + a(x-a) + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü olmak üzere, $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$ ise $x_4 - x_2$ nedir?
 a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a}{3}$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $\frac{3a}{2}$ e) Hiçbiri

- 20** İlk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı A ve ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı B ise, $A - B$ kaçtır?
 a) 5000 b) 4640 c) 3200 d) 0 e) Hiçbiri

- 21** ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$ dir. ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir E noktası, $|AE| = |EC|$ ve $m(\widehat{EAC}) = 10^\circ$ koşullarını sağlıyorsa, $m(\widehat{EBC})$ nedir?
 a) 10° b) 15° c) 20° d) 25° e) 30°

- 22** Her $n \geq 0$ için, $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=0}^\infty$ tam sayı dizisinin terimlerinin 11 e bölümünden kalanların oluşturduğu kümenin en çok kaç elemanı vardır?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 23** x bir gerçel sayı olmak üzere, $x(x+4)(x+8)(x+12)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) -240 b) -252 c) -256 d) -260 e) -280

- 24** xy - düzlemine, m mavi ve k kırmızı dikdörtgen, kenarları eksellere paralel olacak, eksellerden herhangi birine paralel olan hiçbir doğru aynı renkte birden fazla dikdörtgeni kesmeyecek ve farklı renkte hangi iki dikdörtgen alınır alınsın, yalnızca bunları kesen ve eksellerden birine paralel olan bir doğru bulunacak biçimde yerleştirilmişse, (m, k) tam sayı ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 a) $(1, 7)$ b) $(2, 6)$ c) $(3, 4)$ d) $(3, 3)$ e) Hiçbiri

- 25** ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC, AC ve AB kenarlarına sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1 noktalarında teğettir. AA_1 doğrusu, iç teğet çemberi ikinci kez Q noktasında kesiyor. A_1C_1 ve A_1B_1 doğruları, A noktasından geçen ve BC ye paralel olan doğruyu sırasıyla, P ve R noktalarında kesiyor. $m(\widehat{PQC_1}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{RQB_1}) = 65^\circ$ ise, $m(\widehat{PQR})$ nedir?
- a) 110 b) 115 c) 120 d) 125 e) 130

- 26** Her $0 \leq i \leq 17$ için a_i sayısı, $-1, 0$ ve 1 olmak üzere,

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

eşitliğini sağlayan kaç $(a_0, a_1, \dots, a_{17})$ on sekizlisi vardır?

- a) 9 b) 8 c) 7 d) 4 e) 1

- 27** $f(x) = \frac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1}$ ve $1 \leq i \leq 2009$ için $x_i = \frac{i}{2009}$ ise $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009})$ toplamı kaçtır?
- a) 1000 b) 1005 c) 1010 d) 2009 e) 2010

- 28** Tüm tam sayılar kümesi, farkları asal bir sayıya eşit olan herhangi iki tam sayı aynı alt kümeye düşmeyecek biçimde, n alt kümeye ayrılabilirse, n en az kaçtır?
- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) Hiçbiri

29 $ABCD$ kirişler dörtgeninin $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri, P noktasında kesişiyor. APB ve CPD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri $ABCD$ dörtgeninin çevrel çemberinin üstünde ve $|AC| + |BD| = 18$ ise, $ABCD$ dörtgeninin alanı nedir?

- a) 36 b) $\frac{81}{2}$ c) $\frac{36\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ e) Hiçbiri

30 $11^2 + 13^2 + 17^2, 24^2 + 25^2 + 26^2, 12^2 + 24^2 + 36^2, 11^2 + 12^2 + 132^2$ sayılarından kaç bir tam sayının karesine eşittir?

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

31 $|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| \geq 2x^2$ eşitsizliğini, $|x| \geq n$ koşulunu sağlayan her x gerçel sayısı için doğru kılan n tam sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

32 Her biri dört elemanlı n kümeden, hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümeden yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme, başlangıçtaki n kümeden birine eşitse, n en çok kaçtır?

- a) 3 b) 5 c) 7 d) 15 e) Hiçbiri

- 33** ABC üçgeninin $[AL]$ ve $[BM]$ kenarortayları K noktasında kesişiyor. C, K, L, M noktaları çembersel ve $|AB| = \sqrt{3}$ ise $[CN]$ kenarortayının uzunluğu nedir?
- a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) 3 e) Hiçbiri

- 34** x ve y farklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $(x + y^2)(x^2 - y)/(xy)$ ifadesinin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değer nedir?
- a) 3 b) 8 c) 14 d) 15 e) 17

- 35** Her $n \geq 2$ için, $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}/n$ ise, $a_2 a_3 \cdots a_k > 3$ eşitsizliğinin sağlanması için k pozitif tam sayısının en az kaç olması gerekir?
- a) 100 b) 102 c) 104 d) 106 e) Hiçbiri

- 36** Yüz kenti olan bir ülkedeki bazı kentler arasında yapılan tek yönlü uçak seferleri, başkentten başlayıp, ülkedeki her kentten en az bir kez geçerek, yeniden başkente dönmeyi mümkün kılan en az bir sefer dizisi bulunacak biçimde düzenlenmiştir. Böyle bir düzenlemede, bu şekildeki uçak seferi dizilerinden sefer sayısı en az olanın sefer sayısı, bütün bu tür düzenlemeler arasında en çok kaç olabilir?
- a) 1850 b) 2100 c) 2550 d) 3060 e) Hiçbiri

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2010

- 1 Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 5^\circ$ ve dış bölgesindeki bir E noktası içinde, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ACE}) = 5^\circ$ ise, $m(\widehat{EDC})$ kaçtır?
 a) 45° b) 40° c) 35° d) 30° e) 25°

- 2 $y^2 - x^2 = 2y + 7x + 4$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?
 a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

3

$$x^2 + 2y = 2xy$$

$$x^3 + x^2y = y^2$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 4 Rakamlarının faktöriyelerinin toplamı kendisine eşit olan 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri

- 5] Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde, $|AB| = 10$, $|CD| = 3\sqrt{6}$, $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$, $|BD| = 13 + 3\sqrt{3}$ ise $|AC|$ nedir?
 a) 20 b) 18 c) 16 d) 14 e) 12

- 6] $2011y^2 = 2010x + 3$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikisi vardır?
 a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

- 7] r metre yarı çaplı daire biçiminde bir adacığın merkezinde duran bir kurbağa $1/2$ metrelik bir atlayışla başlayıp, her seferinde 90° sağa veya sola dönerek bir öncekinin yarısı uzunluğunda bir atlayış yapıyor. Sonlu sayıda atlayışta kurbağın suya varamamasını sağlayan en küçük r değeri nedir?
 a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{19}}{6}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{3}{4}$

- 8] İlk 2010 pozitif tam sayının rakamlarının toplamı kaçtır?
 a) 30516 b) 28068 c) 25020 d) 20100 e) Hiçbiri

- 9 Bir $ABCD$ karesinin dışındaki bir E noktasının AC doğrusuna uzaklığı 6, BD doğrusuna uzaklığı 17 birimdir. E noktasının karenin en yakın köşesine uzaklığı 10 birim ise, karenin alanı nedir?
- a) 200 b) 196 c) 169 d) 162 e) 144

- 10 $0 \leq n < 840$ koşulunu sağlayan kaç tam sayı için, $n^8 - n^4 + n - 1$ sayısı 840 ile bölünür?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 8

- 11 xy -düzleminde $(\sqrt{20}, \sqrt{10})$ merkezli bir çemberin üstünde koordinatları tam sayı olan en çok kaç tane nokta bulunabilir?
- a) 8 b) 4 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

- 12 $0 \leq a, b, c, d < 7$ olmak üzere, 7 nin $ab - cd$ yi bölmelerini sağlayan kaç (a, b, c, d) dörtlüsü vardır?
- a) 412 b) 385 c) 294 d) 252 e) Hiçbiri

- 13** $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde sırasıyla, D ve E noktaları alınıyor. BC doğrusu üstünde de C noktası, B ile F arasında kalacak biçimde bir F noktası alınıyor. $|BE| = |CF|$, $|AD| = |AE|$ ve $m(\widehat{BEC}) = 60^\circ$ ise, $m(\widehat{DFB})$ kaçtır?
 a) 45° b) 40° c) 35° d) 30° e) 25°

- 14** Gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak, her adımda doğru boyunca istediği yönde 364 veya 715 birim sıçrayan bir çekirgenin konduğu noktaların 2010 noktasma uzaklığı en az ne kadar olabilir?
 a) 5 b) 8 c) 18 d) 34 e) 164

- 15** x, y, z gerçel sayıları $\frac{xyz}{x+y} = -1$, $\frac{xyz}{y+z} = 1$, $\frac{xyz}{x+z} = 2$ eşitliklerini sağlıyorsa, xyz aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?
 a) $-\frac{8}{\sqrt{15}}$ b) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ c) $-8\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $\frac{7}{\sqrt{15}}$ e) Hiçbiri

- 16** 11 farklı bir kitap üç rafı bir kitaplığa, en çok bir raf boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
 a) $75 \cdot 11!$ b) $62 \cdot 11!$ c) $68 \cdot 12!$ d) $12 \cdot 13!$ e) $6 \cdot 13!$

- 17** Uzayda yer alan A, B, C, D noktaları için, $|AB| = |AC| = 3, |DB| = |DC| = 5, |AD| = 6$ ve $|BC| = 2$ dir. BC doğrusunun D noktasına en yakın noktası P ve ABC üçgeninin bulunduğu düzlemin D noktasına en yakın noktası Q ise, $|PQ|$ kaçtır?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ c) $\frac{57}{2\sqrt{11}}$ d) $\frac{9}{2\sqrt{11}}$ e) $2\sqrt{2}$

- 18** 1000 elemanlı bir kümenin 500 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşağıdaki sayılardan hangisine bölünmez?
a) 3 b) 5 c) 11 d) 13 e) 17

- 19** $x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomunun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?
a) 0 b) 1 c) -2 d) 6 e) -17

- 20** 0 sayısı ile başlanıp, her adımda bir önceki sayının 1 fazlası veya 2 katı alınarak, aşağıdaki sayılardan hangisini en az sayıda adımda elde edilir?
a) 2011 b) 2010 c) 2009 d) 2008 e) 2007

21 Merkezleri aynı ve yarıçapları 10 ve 20 birim olan iki düzlemdeş daireyi sırasıyla taban kabul eden, her biri 10 birim yüksekliğinde bir dik silindir ve bir dik koni düzlemin aynı tarafında kalacak biçimde alınıyor. Koninin silindirin içinde kalan kısmının hacminin, silindirin dışında kalan kısmının hacmine oranı nedir?

- a) 3 b) 2 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 1

22 $\frac{x}{y+7} + \frac{y}{x+7} = 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

- a) 18 b) 17 c) 15 d) 14 e) 11

23 $1 \leq n \leq 2010$ koşulunu sağlayan kaç tane n tam sayısı için $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2$ sayısı 2010 ile bölünür?

- a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

24 On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 11 ile bölünen kaç tane yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır?

- a) 900 b) 854 c) 818 d) 726 e) Hiçbiri

- 25** $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, $|AB| = 1$ ve $|AC| = \sqrt{2}$ olan bir ABC üçgeniyle aynı düzlemde yer alan P ve Q noktaları $|PB| = 1 = |QB|$, $|PC| = 2 = |QC|$ ve $|PA| > |QA|$ koşullarını sağlıyorsa $|PA|/|QA|$ oranı nedir?
 a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $5 - \sqrt{6}$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ d) $\sqrt{6} + 1$ e) Hiçbiri

- 26** m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?
 a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

- 27** Katsayılarının her biri 1 veya -1 ve tüm kökleri gerçel sayılar olan bir polinomun derecesi en çok kaç olabilir?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri

- 28** 2010 kişinin yaşadığı bir köyde her ikisi de aynı arkadaş sayısına sahip olan bir tek ikili varsa, bu sayı kaç farklı değer alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

29 Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası I ve $[AC]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezi de O noktasıdır.

$|BI| = 12$, $|IO| = 18$ ve $|BC| = 15$ ise, $|AB|$ kaçtır?

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 24

30 $N = \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{5} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{2009}}{5} \right\rfloor$ ise 2^{2010} un N ile bölümünden kalan nedir?

a) 5034 b) 5032 c) 5031 d) 5028 e) 5024

31 Aşağıdaki (A, B) ikililerinden hangisi için

$$x^2 + xy + y = A$$

$$\frac{y}{y-x} = B$$

denklem sisteminin gerçel çözümü yoktur?

a) $(1/2, 2)$ b) $(-1, 1)$ c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ d) $(1, 1/2)$ e) $(2, 2/3)$

32 1001 kişilik bir okulda herhangi üç öğrenciden en az ikisi arkadaşdır. Bu okulda en çok arkadaşına sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, 334, 412, 450, 499 değerlerinden kaçını alabilir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

- 33** $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ ve $|AC| = 10$ olan bir ABC üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D olmak üzere, $[AD]$ ve $[BD]$ nin orta dikmeleri E noktasında, $[BD]$ ve $[CD]$ nin orta dikmeleri de F noktasında kesişiyor. $|EF| = 13$ ise, $|AB|$ aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

- a) $20\sqrt{\frac{2}{13}}$ b) $15\sqrt{\frac{2}{13}}$ c) $10\sqrt{\frac{2}{13}}$ d) $5\sqrt{\frac{2}{13}}$ e) Hiçbiri

- 34** Aşağıdaki sayılardan hangisi $2^{2^{2010}} + 2^{2^{2009}} + 1$ sayısını böler?

- a) 19 b) 17 c) 13 d) 11 e) Hiçbiri

- 35** Aşağıdaki ifadelerden hangisi $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ koşullarını sağlayan tüm x, y gerçel sayıları için $x^3 + y^5$ ten küçük değildir?

- a) x^2y b) x^2y^2 c) x^2y^3 d) x^3y e) xy^4

- 36** Başlangıçta $n \times n$ bir satranç tahtasının yalnızca sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırayla hamle yaparak, her hamlede taşı bulunduğu karenin hemen sağındaki, hemen üstündeki veya hemen sağ üst çaprazındaki kareye kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun, $6 \times 7, 6 \times 8, 7 \times 7, 7 \times 8$ ve 8×8 tahtalarda birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2011

1 Aşağıdakilerden hangisi, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri $[AC]$ köşegini üstünde bir noktada kesişen her $ABCD$ dışbükey dörtgeni için doğrudur?

- a) $|BA| + |AD| \leq |BC| + |CD|$ b) $|BD| \leq |AC|$ c) $|AC| \leq |BD|$
d) $|AD| + |DC| \leq |AB| + |BC|$ e) Hiçbiri

2 $(x + 1)^{65}$ polinomunun kaç katsayısı 65 e bölünmez?

- a) 20 b) 18 c) 16 d) 3 e) Hiçbiri

3 $1 + \sqrt{n^2 - 9n + 20} > \sqrt{n^2 - 7n + 12}$ eşitsizliğini sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

4 $\{1, 2, \dots, 20\}$ kümesinin 8 elemanlı alt kümelerinden kaç ardışık sayılar içermez?

- a) $\binom{13}{8}$ b) $\binom{13}{9}$ c) $\binom{14}{8}$ d) $\binom{14}{9}$ e) $\binom{20}{15}$

- 5 $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olmak üzere, ABC üçgeninin $[AB]$ kenarını çap alan çember $[AC]$ kenarını D noktasında, çembere D de teğet olan doğru da BC yi E noktasında kesiyor. $|EC| = 2$ ise, $|AC|^2 - |AE|^2$ nedir?
 a) 18 b) 16 c) 12 d) 10 e) Hiçbiri

- 6 Kaç p asal sayısı için, $|p^4 - 86|$ sayısı da asaldır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 7 x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + 5x - 7 = 0$ denkleminin farklı gerçel kökleri ise, $x_1^3 + 5x_1^2 - 4x_1 + x_1^2x_2 - 4x_2$ nedir?
 a) -15 b) $175 + 25\sqrt{53}$ c) -50 d) 20 e) Hiçbiri

- 8 Pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her kümenin toplamları 6 ile bölünen altı elemanı bulunabiliyorsa, n en az kaç olabilir?
 a) 13 b) 12 c) 11 d) 10 e) 9

- 9 $m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde D den geçen ve BC ye paralel olan doğru AB doğrusunu E noktasında kesiyor. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DAE})$, $|AB| = 3$ ve $|AC| = 4$ ise, $|AE|$ nedir?
- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{4}$

- 10 $0 \leq x, y, z < 2011$ olmak üzere, $xy + yz + zx \equiv 0 \pmod{2011}$ ve $x + y + z \equiv 0 \pmod{2011}$ koşullarını sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?
- a) 2010 b) 2011 c) 2012 d) 4021 e) 4023

- 11 $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2$ polinomunun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) -2 e) 7

- 12 Bir okuldaki 100 öğrenciden her biri aynı okuldaki istediği 50 öğrenciye mesaj yollamıştır. Karşılıklı olarak mesajlaşmış öğrenci çiftlerinin sayısı en az kaç olabilir?
- a) 100 b) 75 c) 50 d) 25 e) Hiçbiri

- 13** Dar açılı bir ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, D, E, F dir. $|DF| = 3, |FE| = 4, |DE| = 5$ ise DE ye teğet olan C merkezli çemberin yarıçapı nedir?
 a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

- 14** $2011^{(2011^{(2011^{(2011^{2011})})})}$ sayısının 19 ile bölümünden kalan nedir?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 15** Aşağıdaki (a, b) ikililerinden hangisi için, $x + 2y < a$ ve $xy > b$ eşitsizliklerini sağlayan hiçbir (x, y) pozitif gerçel sayı ikilisi yoktur?
 a) $\left(\frac{15}{7}, \frac{4}{7}\right)$ b) $\left(\frac{18}{11}, \frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{7}, \frac{1}{16}\right)$ d) $\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{11}\right)$ e) Hiçbiri

- 16** Ağırlıkları pozitif tam sayılar olan herhangi 2011 taş, biri diğerinin iki katı ağırlıkta iki taş içermeyen n öbeğe ayrılabilirse, n en az kaç olabilir?
 a) 102 b) 51 c) 12 d) 11 e) Hiçbiri

- 17** ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için, $|AD| = \sqrt{2}$, $|BD| = 3$ ve $|CD| = \sqrt{5}$ ise, $m(\widehat{ADB})$ nedir?
 a) 120° b) 105° c) 100° d) 95° e) 90°

- 18** Kaç pozitif tam sayı n $(n^2 - 1)(n^2 + 3)(n^2 + 5)$ ifadesini n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için böler?
 a) 16 b) 12 c) 8 d) 4 e) Hiçbiri

- 19** Aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin xy -düzleminde tanımladığı bölge ile kesişimi tam olarak iki noktadan oluşan bir doğru bulunur?
 a) $x^2 + y^2 \leq 1$ b) $|x + y| + |x - y| \leq 1$ c) $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$
 d) $|x| + |y| \leq 1$ e) $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} \leq 1$

- 20** 100 öğrencinin girdiği bir sınavda 5 soru sorulmuş ve her soruyu tam olarak 50 öğrenci çözmüştür. Çözdüğü soru sayısı ikiyi aşmayan öğrencilerin sayısı en az kaç olabilir ?
 a) 21 b) 18 c) 17 d) 16 e) Hiçbiri

- 21** Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde yer alan bir E noktası $|AE| = |EB|$, $m(\widehat{EAB}) = 11^\circ$ ve $m(\widehat{EBC}) = 71^\circ$ koşullarını sağlıyorsa, $m(\widehat{DCE})$ nedir?
 a) 72° b) 71° c) 70° d) 69° e) 68°

- 22** $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ve her $n \geq 1$ için, $f(3n-1) = f(n) - 1$, $f(3n) = f(n)$, $f(3n+1) = f(n) + 1$ ise, $f(2011)$ nedir?
 a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 0

- 23** xy -düzlemindeki tam sayı koordinatlı noktalardan koordinatları çarpımı 6 ile bölünenler kırmızıya, bölünmeyenler ise beyaza boyanıyor. Kenarları koordinat eksenlerine paralel çok büyük bir karenin içinde kalan tam sayı koordinatlı noktalardan beyaz olanların sayısının kırmızı olanların sayısına oranı aşağıdakilerden hangisine en yakındır?
 a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

- 24** r_1, r_2, \dots, r_n renklerinde sırasıyla a_1, a_2, \dots, a_n topun bulunduğu bir torbadan, her seferinde çekilen top torbaya geri konmak koşuluyla, birer birer rastgele n top çekildiğinde bu toplardan en az ikisinin aynı renkte olma olasılığını $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi en küçüktür?
 a) $p(2, 2, 2, 1)$ b) $p(1, 1, 1, 1)$ c) $p(2, 2, 3)$ d) $p(2, 2, 1)$ e) $p(1, 1, 1)$

- 25** $ABCDE$ düzgün dışbükey beşgeninin alanının, kenarları AC, CE, EB, BD, DA doğruları üstünde yer alan düzgün dışbükey beşgenin alanına oranı nedir?
- a) $\frac{41}{6}$ b) $\frac{3+5\sqrt{5}}{2}$ c) $4+\sqrt{5}$ d) $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ e) Hiçbiri

- 26** $0 \leq a < 2^{2008}$ ve $0 \leq b < 8$ tam sayıları $7(a + 2^{2008}b) \equiv 1 \pmod{2^{2011}}$ denkleğini sağlıyorsa, b nedir?
- a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

- 27** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 1, a_3 = 4$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 1$ koşulnu sağlıyorsa a_{2011} nedir?
- a) 2^{2010} b) 2021056 c) 1010528 d) 3016 e) 2011

- 28** $1, 2, \dots, 4022$ sayıları 2×2011 bir satranç tahtasının birim karelerine, iki sayı aynı birim karede olmak ve ardışık olan sayılar ortak bir kenarı olan birim karelerde yer almak koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?
- a) 16168444 b) 12168440 c) 10088242 d) 8084224 e) Hiçbiri

- 29** ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen bir çember $[AB]$ kenarını D , $[AC]$ kenarını E noktasında kesiyor. ACD üçgeninin çevrel çemberi ise, BE doğrusunu $[BE]$ dışındaki bir F noktasında kesiyor. $|AD| = 4$ ve $|BD| = 8$ ise, $|AF|$ nedir ?
 a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $\sqrt{6}$ e) Hiçbiri

- 30** m nin hangi değeri için, $3x^2 - 10xy - 8y^2 = m^{19}$ eşitliğini sağlayan hiçbir (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?
 a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

- 31** $i^2 + j^2 + k^2 = 2011$ koşulunu sağlayan i, j, k tam sayıları için, $i + j + k$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?
 a) 71 b) 73 c) 74 d) 76 e) 77

- 32** Başlangıçta bir öbekte n taş bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncu istediği bir $i \geq 0$ tam sayısı için öbekteki taşlardan 2^i tanesinin alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun $n = 1000, 2000, 2011, 3000, 4000$ değerlerinin her biri için birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını oyuna başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir ?
 a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

33 Bir birim küreye içten ve köşeleri bu küre üstünde yer alan düzgün dörtyüzlünün bir yüzüne de dıştan teğet olan kürenin hacmi en çok ne olabilir?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ d) $\frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right)$ e) Hiçbiri

34 n pozitif bir tam sayı olmak üzere, 2^n sayısının on tabanına göre sağdan en çok kaç basamakta aynı sayı yer alabilir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

35 Aşağıdaki fonksiyonlar arasında pozitif gerçel sayılar kümesinde aldığı en büyük değer en küçük olan hangisidir?

- a) $\frac{x^2}{1+x^{12}}$ b) $\frac{x^3}{1+x^{11}}$ c) $\frac{x^4}{1+x^{10}}$ d) $\frac{x^5}{1+x^9}$ e) $\frac{x^6}{1+x^8}$

36 Boyları birbirinden farklı 14 öğrenci başlangıçta nasıl sıralanmış olurlarsa olsunlar, her adımda yan yana duran iki öğrencinin yerini değiştirerek en az kaç adımda öğrencileri boy sırasına sokmak mümkün olur?

- a) 42 b) 43 c) 45 d) 52 e) Hiçbiri

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2012

1 Yüksekliklerinin uzunlukları 3, 4 ve 6 birim olan bir üçgenin çevre uzunluğu kaç birimdir?

- a) $12\sqrt{\frac{3}{5}}$ b) $16\sqrt{\frac{3}{5}}$ c) $20\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $24\sqrt{\frac{3}{5}}$ e) Hiçbiri

2 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $2012^n + m^2$ sayısının 11 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

- a) 55 b) 46 c) 43 d) 39 e) 37

3 Aşağıdaki x değerlerinden hangisi $\sqrt[3]{6 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{3}$ eşitliğini sağlar?

- a) 27 b) 32 c) 45 d) 52 e) 63

4 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin tüm a elemanları için $f(f(a)) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu vardır?

- a) 1 b) 106 c) 127 d) 232 e) Hiçbiri

- 5 $|AB| = 7$, $|BC| = 12$ ve $|CA| = 13$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde yer alan D noktası $|BD| = 5$ koşulunu sağlıyor. r_1 ve r_2 sırasıyla, ABD ve ACD üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise, r_1/r_2 nedir?
- a) 1 b) $\frac{13}{12}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{2}$ e) Hiçbiri

- 6 n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi $n^{29} \equiv 7 \pmod{65}$ denkleğini sağlar?
- a) 37 b) 39 c) 43 d) 46 e) 55

- 7 Tüm x, y, z gerçel sayıları için $f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz$ koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır?
- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 8 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?
- a) 2059 b) 2124 c) 2187 d) 2315 e) 2316

- 9 $[AB]$ çaplı çemberin $[CD]$ kirişi $[AB]$ ye diktir. M ve N sırasıyla, $[BC]$ ve $[AD]$ nin orta noktaları olmak üzere, $|BC| = 6$ ve $|AD| = 2\sqrt{3}$ ise $|MN|$ kaçtır?
 a) 4 b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{21}$ d) 5 e) Hiçbiri

- 10 n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 11 $x^3 + 2 = 3y, y^3 + 2 = 3z, z^3 + 2 = 3w, w^3 + 2 = 3x$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z, w) gerçel sayı dördlüsü vardır?
 a) 8 b) 5 c) 3 d) 1 e) Hiçbiri

- 12 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
 a) 596 b) 648 c) 679 d) 773 e) 812

- 13** Köşeleri, düzlemdeki herhangi üçü doğruduş olmayan 20 noktadan oluşan bir kümeye ait olan en çok kaç geniş açılı üçgen bulunabilir?
a) 6 b) 20 c) $2\binom{10}{3}$ d) $3\binom{10}{3}$ e) $\binom{20}{3}$

- 14** n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $(2n - 1)^{502} + (2n + 1)^{502} + (2n + 3)^{502}$ sayısının 2012 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?
a) 3 b) 1510 c) 1511 d) 1514 e) Hiçbiri

- 15** a gerçel sayısının, $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + a = 0$ denkleminin dört farklı gerçel kökü olmasını sağlayan tüm değerlerinin kümesi nedir?
a) $(-9, 2)$ b) $(-9, 0)$ c) $[-9, 0)$ d) $[-8, 1)$ e) $(-8, 1)$

- 16** 8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. En az dört satırın her birindeki sayıların toplamı pozitif ise, üzerlerindeki sayıların toplamı -3 ten küçük olan en çok kaç sütun olabilir?
a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

- 17** Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $m(\widehat{BAD}) = 20^\circ$, $m(\widehat{DAC}) = 80^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{DCB}) = 20^\circ$ ise $m(\widehat{ABD})$ nedir?
 a) 5° b) 10° c) 15° d) 20° e) 25°

- 18** Farklı asal sayıların kuvvetlerinin çarpımı olarak yazılımlında sıfırdan farklı tüm kuvvetlerin tek sayılar olduğu bir pozitif tam sayıya *tekil* sayı diyelim. En çok kaç ardışık tekil sayı vardır?
 a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

- 19** $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 20** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sayılarının her $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ permütasyonu için, $(a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots, a_8 + a_{10}, a_9 + a_{11})$ verildiğinde a_i lerden en az k tanesini belirleyebiliyorsak, k en çok kaç olabilir?
 a) 11 b) 6 c) 5 d) 2 e) Hiçbiri

- 21** $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|CA| = 7$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait açıortayı $[BC]$ kenarını D noktasında kesiyor. A dan geçen ve BC ye D de teğet olan çember ise, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla P ve Q noktalarında kesiyor. AD ve PQ doğruları T noktasında kesişiyorsa, $|AT| / |TD|$ nedir?
- a) $\frac{7}{5}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{7}{2}$ e) 4

- 22** $4mn(m+n-1) = (m^2+1)(n^2+1)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?
- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 23** a, b, c gerçel sayıları $x^3 - 3x + 1 = 0$ denkleminin farklı kökleri ise, $a^8 + b^8 + c^8$ nedir?
- a) 156 b) 171 c) 180 d) 186 e) 201

- 24** Bir yüzleri siyah ve diğer yüzleri beyaz olan 2012 tane tavla pulu bir doğru boyunca ve üste gelen yüzleri dönüşümlü olarak siyah ve beyaz olacak biçimde dizilmiştir. Her hamlede iki pul seçip bunları ve bu pulların arasında kalan tüm pulları ters çeviriyoruz. Bütün pulların üste gelen yüzlerinin aynı renkte olmasını en az kaç hamlede sağlayabiliriz?
- a) 1006 b) 1204 c) 1340 d) 2011 e) Hiçbiri

- 25** Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarının M orta noktası, B köşesine ait yüksekliğinin H ayağı ile C köşesi arasındadır. $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{MBC})$, $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ ve $|HM| = 2\sqrt{3}$ ise $|AC|$ nedir?
 a) 6 b) $5\sqrt{2}$ c) 8 d) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ e) 10

- 26** 100 den küçük kaç asal sayı ardışık pozitif tam sayıların karelerinin toplamı olarak yazılabilir?
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

- 27** Tüm x gerçel sayıları için, $\sin x \cos x \leq C (\sin^6 x + \cos^6 x)$ olmasını sağlayan en küçük C gerçel sayısı nedir?
 a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) Hiçbiri

- 28** Başlangıçta üç kutuda sırasıyla, m , n ve k tane taş bulunuyor. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu istediği bir kutudan en az bir tane olmak üzere, istediği sayıda taş alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m, n, k) = (1, 2012, 2014)$, $(2011, 2011, 2012)$, $(2011, 2012, 2013)$, $(2011, 2012, 2014)$, $(2011, 2013, 2013)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan en az kaçını kazanmayı garantileyebilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 29** Dar açılı bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan D ve E noktaları için, AD ve BE doğruları F noktasında kesişiyor. $|AF| = |CD| = 2|BF| = 2|CE|$ ve $\text{Alan}(ABF) = \text{Alan}(DEC)$ ise $\text{Alan}(AFC)/\text{Alan}(BFC)$ nedir?
 a) 4 b) $2\sqrt{2}$ c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) 1

- 30** $x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 31** $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ fonksiyonu tüm m, n tam sayıları için,

$$m + f(m + f(n + f(m))) = n + f(m)$$

ve $f(6) = 6$ koşullarını sağlıyorsa $f(2012)$ nedir?

- a) -2010 b) -2000 c) 2000 d) 2010 e) 2012

- 32** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sayılarının $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ permütasyonlarından kaçını için,
 $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_{10} - 10| = 4$ olur?
 a) 60 b) 52 c) 50 d) 44 e) 36

- 33** $|AB| = 2|BC|$ olan $ABCD A'B'C'D'$ dikdörtgenler prizmasında $[BB']$ ayrıtı üstündeki E noktası $|EB'| = 6|EB|$ koşulunu sağlıyor. AEC ve $A'EC'$ üçgenlerinde E ye ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, F ve F' olmak üzere, $m(\widehat{FEF'}) = 60^\circ$ ise, $\frac{|BC|}{|BE|}$ nedir?

- a) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ b) $\sqrt{\frac{15}{2}}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{\frac{5}{3}}$ e) Hiçbiri

- 34** $n \geq 2012$ olmak üzere, $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$ sayısının 10 ile bölünmesini sağlayan en küçük n tam sayısı nedir?

- a) 2012 b) 2013 c) 2014 d) 2015 e) 2016

- 35** $x^3 + y^4 = x^2y$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) pozitif gerçel sayı ikililerinde x in aldığı en büyük değer A ve y nin aldığı en büyük değer B ise, A/B nedir?

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{512}{729}$ c) $\frac{729}{1024}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{243}{256}$

- 36** Her kutuda en çok 20 taş olmak koşuluyla k tane taş 2012 kutuya nasıl dağıtılmış olursa olsun, bu kutulardan bazılarını seçip, seçtiğimiz kutulardan istediklerimizden istediğimiz sayıda taş atarak, seçtiğimiz kutularda toplam olarak en az 100 tane ve bu kutuların her birinde eşit sayıda taş kalmasını sağlayabiliyorsak, k en az kaç olabilir?

- a) 500 b) 450 c) 420 d) 349 e) 296

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2013

1 $|AC| > |AB|$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ve ağırlık merkezi G olmak üzere, IG ve BC doğruları birbirine paralel, $|BC| = 2$, ve $Alan(ABC) = \frac{3\sqrt{5}}{8}$ ise $|AB|$ nedir?

- a) $\frac{9}{8}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{15}{8}$ e) $\frac{17}{8}$

2 p, q asal sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\frac{1}{p} + \frac{2013}{q} = \frac{n}{5}$$

eşitliğini sağlayan kaç (p, q, n) üçlüsü vardır?

- a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

3 Katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesine ait olan bir polinomun $x - 6$ ile bölümünden kalan 2013 ise x in katsayısı en az kaç olabilir?

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

4 $1, 2, \dots, 49$ sayıları 7×7 bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

- a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

- 5] $[BC]$ kenarının uzunluğu 11 olan ABC üçgeninin bu kenarı üstünde bir D noktası $|BD| = 8$ olacak biçimde alınıyor. C ve D noktalarından geçen çember AB doğrusuna bir E noktasında teğettir. B 'den geçen ve DE doğrusuna dik olan doğru üzerinde bulunan bir P noktası için $|PE| = 7$ ise, $|DP|$ kaçtır?
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri

- 6] 5 tabanına göre yazılımlında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111. pozitif tam sayı nedir?
a) 760 b) 756 c) 755 d) 752 e) 750

- 7] $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?
a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

- 8] Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?
a) 105 b) 100 c) 95 d) 90 e) 85

- 9) ABC üçgeninde $|AB| = 18$, $|AC| = 24$ ve $m(\widehat{BAC}) = 150^\circ$ dir. D noktası $[AB]$, E noktası $[AC]$ ve F noktası $[BC]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BD| = 6$, $|CE| = 8$ ve $|CF| = 2|BF|$ dir. ABC üçgeninin diklik merkezi H noktasının D , E ve F noktalarına göre simetrikleri sırasıyla, H_1, H_2 ve H_3 noktaları ise, $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı nedir?
 a) 70 b) 72 c) 84 d) 96 e) 108

- 10) n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiçbiri

- 11) $x^4 + y^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ eşitliğinin sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?
 a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

- 12) 100 öğrenci, öğleden önce 50 tane ikili grup halinde ve öğleden sonra da, yine 50 tane ikili grup halinde ders çalışıyorlar. Öğleden önceki ve sonraki gruplar nasıl oluşturulursa oluşturulsun, herhangi ikisi gün boyunca hiç birlikte çalışmamış n öğrenci bulunabiliyorsa, n sayısı en çok kaç olabilir?
 a) 42 b) 38 c) 34 d) 25 e) Hiçbiri

13 Çevrel çemberinin merkezi O olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları D, B ile E arasında yer almak üzere, $|AD| = |DB| = 6$ ve $|AE| = |EC| = 8$ koşullarını sağlıyor. ADE üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I noktası ve $|AI| = 5$ ise, $|IO|$ nedir?

- a) $\frac{26}{5}$ b) 5 c) $\frac{23}{5}$ d) $\frac{21}{5}$ e) Hiçbiri

14 n tam sayısını bölen pozitif tam sayıların sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; 64800 sayısının tüm k pozitif tam sayı bölenleri için, $d(k)$ sayılarının toplamı nedir?

- a) 1440 b) 1650 c) 1890 d) 2010 e) Hiçbiri

15 $[1, 2013]$ aralığında yer alan n gerçel sayısı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

- a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 10

16 16 beyaz ve 4 kırmızı top her biri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

- a) $\frac{5}{64}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{4^4}{\binom{16}{4}}$ d) $\frac{5^4}{\binom{20}{4}}$ e) $\frac{3}{32}$

- 17 Kenar uzunluğu 10 olan bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası için $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 128$ ise, kenar uzunlukları $|PA|, |PB|, |PC|$ olan bir üçgenin alanı nedir?
 a) $6\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $9\sqrt{3}$ e) $10\sqrt{3}$

18

$$\binom{2013}{1} + 2013 \binom{2013}{3} + 2013^2 \binom{2013}{5} + \dots + 2013^{1006} \binom{2013}{2013}$$

toplamının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

- a) 20 b) 14 c) 7 d) 1 e) Hiçbiri

- 19 x bir gerçel sayı olmak üzere

$$\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 2 b) $3\sqrt{2}$ c) $1 + \sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 20 Ağırlıkları $1, 2, \dots, 2013$ gram olan 2013 taşın her birinin üstüne $1, 2, \dots, 2013$ sayılarından biri, her sayı tam olarak bir kez kullanılarak yazılıyor. Sayılar nasıl yazılırsa yazılsın, tüm taşların üstünde kendi ağırlıklarının yazılıp yazılmadığı, sol kefesindeki ağırlıktan sağ kefesindeki ağırlığın çıkarılmasının sonucunu gösteren iki kefeli bir tartı k kez kullanılarak kontrol edilebiliyorsa, k en az kaç olabilir?
 a) 15 b) 12 c) 10 d) 7 e) Hiçbiri

- 21** $m(\widehat{C}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninin $[AB]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları $|AD| = |AC|$ ve $|BE| = |BC|$ koşullarını sağlıyor. AEC ve BDC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği F noktası için $|CF| = 2$ ise, $|ED|$ nedir?
- a) $\sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 22** $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21$ sayısı, $0 \leq n < 2013$ koşulunu sağlayan kaç n tam sayısı için, 2013 ile bölünür?
- a) 6 b) 8 c) 12 d) 16 e) Hiçbiri

- 23** f ve g fonksiyonları tüm $x \neq 1$ gerçel sayıları için,

$$f(2x + 1) + g(3 - x) = x$$

$$f\left(\frac{3x + 5}{x + 1}\right) + 2g\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) = \frac{x}{x + 1}$$

koşullarını sağlıyorsa, $f(2013)$ nedir?

- a) 1007 b) $\frac{4021}{3}$ c) $\frac{6037}{7}$ d) $\frac{4029}{5}$ e) 3016

- 24** Ağırlıkları $1, 2, \dots, 77$ gram olan 77 taş ağırlıkları birbirinden farklı olan k gruba kendinden daha hafif gruptan daha az taş içerecek biçimde dağıtılabiliyorsa, k sayısı $\{9, 10, 11, 12\}$ değerlerinden kaçını alabilir?
- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

- 25** $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde D noktası $[AB]$ kenarı üstünde yer almak üzere, $[CD]$ iç açıortay ve $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ dir. $[AB]$ kenarının uzantısı üstünde ve B den sonra yer alan bir F noktası için, $|BC| = |AF|$ dir. $[CF]$ nin orta noktası E olmak üzere, ED ve AC doğrularının kesişim noktası G ise, $m(\widehat{FBG})$ nedir?
 a) 150° b) 135° c) 120° d) 105° e) Hiçbiri

- 26** n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $n^3 + 2$ ve $(n + 1)^3 + 2$ sayılarının her ikisini de bölen asal sayıların sayısı en çok kaç olabilir?
 a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 27** (a, b) ikilisinin $(1, 2), (3, 5), (5, 7), (7, 11)$ değerlerinden kaçını için $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$ polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?
 a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

- 28** Başlangıçta tahtaya bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi yazılmıştır. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu sayılardan birini seçip silerek, yerine bu sayının yarısından küçük olmayan bir tam sayı yazıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m, n) = (7, 79), (17, 71), (10, 101), (21, 251), (50, 405)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?
 a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

29 $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|AC| = 7$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O nun BC , AC ve AB doğrularına göre simetriği sırasıyla, A_1 , B_1 ve C_1 noktaları olsun. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin A noktasına uzaklığı nedir?

- a) 6 b) $\sqrt{29}$ c) $\frac{19}{2\sqrt{6}}$ d) $\frac{35}{4\sqrt{6}}$ e) $\sqrt{\frac{35}{3}}$

30 2013 den küçük kaç n pozitif tam sayısı için, n yi bölen en küçük asal sayı p olmak üzere, $p^2 + p + 1$ sayısı n yi böler?

- a) 212 b) 206 c) 191 d) 185 e) 173

31 Gerçel sayılardan oluşan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 3$ için,

$$a_n = (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \dots + 2a_{n-2} + a_{n-1}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $a_{2011} = 2011$ ve $a_{2012} = 2012$ ise, a_{2013} nedir?

- a) 6025 b) 5555 c) 4025 d) 3456 e) 2013

32 Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

- a) 768 b) 642 c) 564 d) 510 e) 456

- 33** Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 4$ ve $|DC| = 3$ olacak biçimde yer alan D noktası için, $|AD|$ iç açıortaydır. $[AB]$ kenarı üstünde yer alan ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC})$ koşulunu sağlayan A dan farklı bir E noktası için, $[AE]$ doğru parçasının orta dikmesi ile BC doğrusu M noktasında kesişiyorsa, $|CM|$ nedir?
 a) 12 b) 9 c) 7 d) 5 e) Hiçbiri

- 34** $a! + b^3 = 18 + c^3$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?
 a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

- 35** $f(x) = x + 1 + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ olmak üzere $\overbrace{f(f(\dots f(n)))}^{21 \text{ kere}} = 2013$ olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir? (Burada $\lfloor a \rfloor$ ile, a gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösterilmektedir.)
 a) 1214 b) 1202 c) 1186 d) 1178 e) Hiçbiri

- 36** En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü, $K > E$ olmak üzere, K kız ve E erkekten oluşuyor. Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe $1/2$ ve her yenilgiye 0 puan veriliyor. Turnuva bittiğinde, her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa, E sayısı kaç farklı değer alabilir?
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2014

- 1 Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBD}) = 120^\circ$, $|AB| = 2$, $|AD| = 4$ ve $|BC| = |BD|$ dir. C noktasından geçen ve AB ye paralel olan doğru AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?
 a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) Hiçbiri

- 2 $mn + n + 14 = (m - 1)^2$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?
 a) 16 b) 12 c) 8 d) 6 e) 2

- 3 Kaç n tam sayısı için, $|x^2 - 4x - 7| = n$ eşitliğini sağlayan dört farklı x gerçel sayısı vardır?
 a) 12 b) 10 c) 8 d) 7 e) 5

- 4 3 kırmızı, 2 beyaz ve 2 mavi top rastgele sıraya dizildiğinde iki beyaz topun veya iki mavi topun yan yana gelme olasılığı nedir?
 a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{16}{35}$ d) $\frac{10}{21}$ e) $\frac{5}{14}$

5) D , $|AB| = |AC|$ olan bir ABC ikizkenar üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 6$ ve $|DC| = 10$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere, ABD ve ADC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin $[AD]$ kenarına değme noktaları sırasıyla, E ve F ise, $|EF|$ nedir?

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) 1 d) $\frac{9}{8}$ e) 2

6) Ondalık yazılımda tüm rakamları çift olan pozitif tam sayılar artan sırayla

2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, ...

biçiminde yazıldığında 2014. sayı nedir?

- a) 66480 b) 64096 c) 62048 d) 60288 e) Hiçbiri

7) x ve y gerçel sayıları için $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 9 = 6(x + y)$ ise, $x^2 + y^2$ nedir?

- a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

8) 17 özdeş kırmızı ve 10 özdeş beyaz top 4 farklı kutuya, her kutudaki kırmızı topların sayısı beyaz topların sayısından daha fazla olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- a) 5462 b) 5586 c) 5664 d) 5720 e) 5848

- 9) D , bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB| = 3$, $|CD| = 1$ ve $|AC| = |BD| = \sqrt{5}$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere; B köşesine ait yükseklik AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?
- a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) 1 c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

- 10) $m^3 - n^3 = 9^k + 123$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 11) Sadece bir x gerçel sayısı için $x^2 + ax + 1$ ifadesinin negatif bir tam sayı değer almasını sağlayan a gerçel sayılarının çarpımı nedir?
- a) -1 b) -2 c) -4 d) -6 e) -8

- 12) 21 öğrenciden oluşan ve herhangi üç öğrencisinin en az ikisi arkadaş olan her sınıfta en az k arkadaşı olan bir öğrenci bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?
- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

- 13** $m(\widehat{ADB}) = 15^\circ$ ve $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olan dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenleri E noktasında dik olarak kesişiyor. P , $|AE|$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|EC| = 4$, $|EA| = 8$ ve $|EP| = 2$ ise, $m(\widehat{PBD})$ nedir?
 a) 15° b) 30° c) 45° d) 60° e) 75°

- 14** Kaç farklı p asal sayısı için, $p \mid n^3 + 3$ ve $p \mid n^5 + 5$ olacak biçimde bir n tam sayısı bulunur?
 a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

- 15** $(2x^2 + 5x + 9)^2 = 56(x^3 + 1)$ eşitliğini sağlayan farklı x gerçel sayılarının toplamı nedir?
 a) 3 b) $\frac{7}{4}$ c) 4 d) $\frac{9}{2}$ e) Hiçbiri

- 16** Aslı 100 şekeri kardeşi ve kardeşinin 18 arkadaşı arasında dağıtacaktır. Bunun için, kardeşinin arkadaşlarını bir kaç gruba ayırıyor ve 100 şekeri bu gruplara dağıtıyor. Sonra her gruptaki çocuklar, kendilerine verilen şekerleri aralarında her biri eşit ve olabildiğince çok sayıda şeker alacak biçimde paylaşıp, kalan şekerleri de Aslı'nın kardeşine veriyorlar. Aslı'nın kardeşi en çok kaç şeker alabilir?
 a) 12 b) 14 c) 16 d) 17 e) 18

- 17 Bir $ABCD$ karesinde $[AB]$ kenarının orta noktası E ve B köşesinden geçen A merkezli çemberin $[EC]$ doğru parçası ile kesişim noktası F ise, $|EF|/|FC|$ nedir?
- a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) $\sqrt{5} - 1$ d) 3 e) $\sqrt{3}$

- 18 Aşağıdaki sayılardan hangisi x ve y tam sayılar olmak üzere, $x^2 + y^5$ biçiminde yazılamaz?
- a) 59170 b) 59149 c) 59130 d) 59121 e) 59012

- 19 x pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, $\frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + x + 5}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?
- a) $\frac{14}{11}$ b) $\frac{9}{7}$ c) $\frac{13}{10}$ d) $\frac{4}{3}$ e) Hiçbiri

- 20 Her biri 2 nin veya 3 ün tam sayı kuvveti olan tam sayılardan oluşan ve tüm elemanlarının toplamı 2014 olan kaç farklı küme vardır?
- a) 64 b) 60 c) 54 d) 48 e) Hiçbiri

- 21** $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının $[BC]$ kenarına dik olduğu bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üstündeki bir E noktası için AED bir eşkenar üçgendir. $|AB| = 7$ ve $|CD| = 5$ ise, $ABCD$ yamuğunun alanı nedir?
 a) $27\sqrt{3}$ b) 42 c) $24\sqrt{3}$ d) 40 e) 36

- 22** 2014^{2015} sayısının 121 ile bölümünden kalan kaçtır?
 a) 45 b) 34 c) 23 d) 12 e) 1

- 23** x bir gerçel sayı olmak üzere,

$$(x^2 + 2x + 8 - 4\sqrt{3}) \cdot (x^2 - 6x + 16 - 4\sqrt{3})$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) $112 - 64\sqrt{3}$ b) $3 - \sqrt{3}$ c) $8 - 4\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 4$ e) Hiçbiri

- 24** $1, 2, \dots, n$ tam sayıları, ikisi de içerdiği herhangi farklı iki sayının aritmetik ortalamasını içermeyecek biçimde iki kümeye ayrılabilirse, n en çok kaç olabilir?
 a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) Hiçbiri

- 25** Birbirine A noktasında dıştan teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerinin yarıçapları sırası ile 6 ve 8 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerine dıştan teğet olan C_3 çemberinin yarıçapı ise 21 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerinin A noktasından geçen ortak teğet doğrusu C_3 çemberini B ve C noktalarında kesiyor ise, $|BC|$ kaçtır?
- a) 24 b) 25 c) $14\sqrt{3}$ d) $24\sqrt{3}$ e) $25\sqrt{3}$

- 26** $n^4 + 1$ sayısını bölen en küçük asal sayı $f(n)$ olmak üzere, $f(1) + f(2) + \dots + f(2014)$ toplamının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?
- a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) Hiçbiri

- 27** Pozitif tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, $f(1) = 4$ ve her n pozitif tam sayısı için $f(2n) = f(n)$ ve $f(2n + 1) = f(n) + 2$ koşullarını sağlamaktadır. 2014 ten küçük kaç k pozitif tam sayısı için $f(k) = 8$ dir?
- a) 45 b) 120 c) 165 d) 180 e) 215

- 28** Başlangıçta tahtaya $-1, 2, -3, 4, -5, 6$ sayıları yazılıdır. Her işlemde tahtaya yazılı olan herhangi a ve b sayılarını silip yerine $2a + b$ ve $2b + a$ sayılarını yazarsak $(0, 0, 0, 3, -9, 9)$, $(0, 1, 1, 3, 6, -6)$, $(0, 0, 0, 3, -6, 9)$, $(0, 1, 1, -3, 6, -9)$, $(0, 0, 2, 5, 5, 6)$ altılılarından kaç tanesini elde edebiliriz?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

29 $|AB| = 13$, $|BC| = 12$ ve $|CA| = 5$ olan bir ABC üçgeninin A ve B köşelerine ait iç açıortaylar I noktasında kesişiyor ve karşı kenarları da sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ nin orta noktasından ve I dan geçen doğru $[AB]$ yi F noktasında kesiyor ise, $|AF|$ nedir?

- a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) 3 e) $\frac{7}{2}$

30 Bir n pozitif tam sayısı için, $s(n)$ ile n sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını göstermek üzere; 2014^{2014} sayısını bölen tüm k pozitif tam sayıları için $(s(k))^3$ sayılarının toplamının en büyük asal böleni nedir?

- a) 5 b) 7 c) 11 d) 13 e) Hiçbiri

31 $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için,

$$(a_{n+1} - 2a_n) \cdot \left(a_{n+1} - \frac{1}{a_n + 2} \right) = 0$$

olmak üzere, $a_k = 1$ ise, k aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

32 Başlangıçta masada k tane taş bulunuyor. Alper, Betül ve Ceyhun sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu masadan bir veya iki taş alıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor ve oyun sona eriyor. Oyuna her seferinde Alper başlamak üzere, oyun $k = 5, 6, 7, 8, 9$ değerleri için birer kez oynanırsa, Alper bunlardan kaçını kaybetmemeyi garantileyebilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2015

1 Bir $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $EF \parallel AC$ olacak şekilde E ve F noktaları veriliyor. E ve F nin AB kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 3, BC kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 4, CD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 5 olduğuna göre, AD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı kaçtır?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

2 Birkaç pozitif tam sayının en küçük ortak katları 2015 ise bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

- a) 13 b) 22 c) 49 d) 65 e) 96

3 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sonsuz geometrik dizisinin bazı elemanları silinerek toplamı S ye eşit olan bir sonsuz geometrik dizi elde edilebiliyorsa, S sayısı $\frac{1}{2015}, \frac{1}{215}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$ değerlerinden kaçına eşit olabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

4 Düzlemdeki n doğrunun her biri diğer doğruların tam olarak 2015 tanesiyle kesişiyorsa, n kaç farklı değer alabilir?

- a) 1 b) 3 c) 6 d) 8 e) 10

- 5 Bir $ABCD$ karesinin $[AC]$ köşegeni üzerinde $|AE| = |EF| = |FC|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve AD kenarına teğet olan O_1 merkezli bir çember AC kenarına da E noktasında teğettir. Benzer şekilde ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve CD kenarına teğet olan O_2 merkezli bir çember AC kenarına da F noktasında teğettir. Buna göre BO_1O_2 üçgeninin alanının DO_1O_2 üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\frac{13 + 12\sqrt{2}}{17}$ b) $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{7 + 4\sqrt{2}}{13}$ d) $\frac{12 + 5\sqrt{2}}{9}$ e) $\frac{18 + 8\sqrt{2}}{21}$

- 6 2323^{2323} ün pozitif tam bölenlerinin bazılarında oluşan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesinde hiçbir eleman bir diğerini tam bölmüyorsa, n in alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2322 b) 2323 c) 2324 d) 2325 e) Hiçbiri

- 7 $xy(x - y) = 1$ ve $x^2 - xy + y^2 = y + 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

- 8 $a_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ koşulunu sağlar?

a) 682 b) 758 c) 864 d) 956 e) 1024

- 9 Bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen iç açıortay ile B köşesinden geçen kenarortay P noktasında kesişiyor. $|AP| = \sqrt{3}$, $|BP| = 1$, $|CP| = \sqrt{7}$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?
 a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

- 10 Her $i \in \{1, 2, \dots, 22\}$ için a_i, a_{i+1} i tam bölerek ve a_{23} de 2015 i tam bölerek biçimde kaç farklı $(a_1, a_2, \dots, a_{23})$ pozitif tam sayı 23-lüsü vardır?
 a) 23^3 b) 23^4 c) 24^3 d) 24^4 e) Hiçbiri

- 11 a ve b , $a + b = 1$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, $(a^2 - b)(b^2 - a)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) $-3\sqrt{3}$ b) -5 c) 0 d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 12 Köşeleri, verilmiş bir düzgün n -genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı $s(n)$ olmak üzere, $s(n) > s(n+1)$ koşulunu sağlayan kaç $n \leq 2015$ pozitif tam sayısı vardır?
 a) 336 b) 403 c) 504 d) 671 e) 1007

13 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C|$ olacak biçimde A_1 ve A_2 noktaları alınıyor. Benzer şekilde $[CA]$ kenarı üzerinde $|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A|$ olacak biçimde B_1 ve B_2 noktaları alınıyor. AA_1 doğrusu BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla X ve W noktalarında, AA_2 doğrusu da BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla Y ve Z noktalarında kesiyor. Buna göre $XYZW$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{35}$ c) $\frac{8}{63}$ d) $\frac{9}{70}$ e) $\frac{1}{7}$

14 2015 ten büyük olmayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ kümesinde herhangi iki elemanın farkı bu iki elemanın toplamını tam bölmüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

- a) 403 b) 462 c) 504 d) 613 e) 672

15 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ve $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonları her $x \neq 0$ için

$$f(2x+1) + g(x-1) = 3x+2$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + 4$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(2015) + g(2015)$ kaçtır?

- a) -2016 b) -2015 c) 2014 d) 2015 e) Hiçbiri

16 Bir çember etrafına yüz sayı dizilmiştir. Saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk iki sayıdan büyük olan sayılara A tipi, saat yönünde kendisinden önce gelen ilk iki sayıdan küçük olan sayılara ise B tipi sayı diyelim (bir sayı hem A hem de B tipi olabilir). A tipi sayıların sayısı 80 ise, B tipi sayıların sayısı en az kaç olabilir?

- a) 60 b) 61 c) 62 d) 63 e) Hiçbiri

- 17** Düzlemde bir çember ve bu çemberin dış bölgesinde A_1, A_2, \dots, A_n noktaları veriliyor. Bu çemberin üzerindeki her A noktası için, $[AA_1], [AA_2], \dots, [AA_n]$ doğru parçalarından en az üçü çemberi yalnızca A noktasında kesiyorsa, n en az kaç olabilir?
- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

- 18** $0 \leq n < 23^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı n tam sayısı için $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2$ sayısı 23^2 ile tam bölünür?
- a) 0 b) 1 c) 5 d) 23 e) Hiçbiri

- 19** $f(x) = ax^2 - 3ax + 2a + 23$ fonksiyonu her $1 \leq x \leq 2$ için $|f(x)| \leq 23$ koşulunu sağlıyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?
- a) 178 b) 181 c) 184 d) 187 e) 190

- 20** Başlangıçta 101 top içeren bir kırmızı kutu ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve kırmızı kutudan seçtiği sayıda topu beyaz kutuya aktarıyor. Burak da her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve beyaz kutudan seçtiği sayıda topu kırmızı kutuya aktarıyor. Bir sayı en fazla bir kez seçilebiliyor. Sırası gelen oyuncu hamle yapamazsa oyun bitiyor. İlk hamleyi yapan Aslı, beyaz kutuda en fazla kaç top kalmasını garantileyebilir?
- a) 1 b) 49 c) 50 d) 51 e) 101

- 21 $|AB| = 11$ ve $|AC| = 9$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BP| = 7$ ve $|CP| = 3$ koşullarını sağlayan bir P noktası alınıyor. Buna göre, $|AP|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 22 $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \leq a < 23$ tam sayısı vardır?
a) 5 b) 6 c) 10 d) 11 e) 12

- 23 Çevresi 23 birim ve alanı 23 birim kare olan kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 24 Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınıftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir?
a) 41 b) 43 c) 46 d) 48 e) 50

- 25** Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = |BC| = 7$, $|CD| = |AE| = 15$ ve $|DE| = 24$ olarak veriliyor. Bu beşgenin alanı kaçtır?
 a) 112 b) 168 c) 210 d) 276 e) 360

- 26** $n > 1$ tam sayısının en büyük ve en küçük asal bölenlerinin toplamı $f(n)$ olmak üzere, $f(n) = n - 23$ denklemini sağlayan kaç farklı $n > 1$ tam sayısı vardır?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 27** $x^{23} - 2015^{2015}x + 23 = c$ denkleminin en az üç farklı gerçel çözümünün bulunmasını sağlayan tüm c tam sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?
 a) -46 b) 0 c) 403 d) 2015 e) Hiçbiri

- 28** Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 7-genli olan bir piramidin her ayrıntının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıntılar takip edilerek ulaşılacak şekilde boyanmasına *iyi boyama* diyelim. Kaç iyi boyama vardır?
 a) 218 b) 234 c) 252 d) 298 e) 324

29 İç teğet çemberinin merkezi I olan ve $|AB| = 3, |BC| = 7, |CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeni verilmiştir. BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde BC doğrusuna göre I ile farklı tarafta kalacak biçimde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E dir. Buna göre, $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{9}{5}$ ise $m(\widehat{BAD})$ kaçtır?

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

30 $3(m^3n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

31 Elemanları 23 ten büyük olmayan a_1, a_2, \dots, a_n pozitif tam sayılar dizisinde ilk ve son eleman dışındaki her eleman iki komşusunun aritmetik ortalamasından büyüktür. Buna göre n nin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

32 23 kentin bulunduğu bir ülkede 250 kent ikilisi arasında karşılıklı uçak seferleri, ülkedeki herhangi bir kentten bir diğerine (doğrudan veya birkaç aktarmayla) en fazla 5 saatlik uçuş süresi sonucunda ulaşılabilecek biçimde nasıl düzenlenirse düzenlensin, k saatlik uçuş sonucunda bir kentten başlayıp her kente en az bir kez uğrayarak baştaki kente dönülebiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 95 b) 100 c) 105 d) 110 e) 115

24. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2016

1 $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

2 $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

3 $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Hiçbiri

4 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 5 Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ve $[AC]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{DBC}) = 90^\circ$ dir.
 $\frac{|CD|}{|AB|} = 2\sqrt{2}$ ise $m(\widehat{BDC})$ nedir?
 a) 52.5° b) 60° c) 67.5° d) 75° e) 90°

- 6 n bir pozitif tam sayı ve a_1, a_2, \dots, a_n birer tam sayı olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için $b_i = a_i^2$ olarak tanımlanıyor. Hiçbir (a_1, a_2, \dots, a_n) tam sayı n -lisi için $2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_n} - n^2$ ifadesi 7 ile tam bölünmüyorsa n kaç farklı değer alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

- 7 Bir $f : \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right\} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan her x için,

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{7x+2}\right) = x$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(1)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Hiçbiri

- 8 Başlangıçta masa üzerinde her biri 51 gram süt içeren birkaç bardak bulunuyor. Bir kedi her işlemde önce masadaki her bardaktan 3 gram süt içiyor, daha sonra bir bardak alıp bu bardaktaki sütü diğer bardaklara eşit olarak dağıtıyor ve boş bardağı masadan atıyor. Birkaç işlem sonucunda masada tek bir bardak kalıyor. Bu son bardakta yine 51 gram süt bulunuyorsa kedi toplamda kaç gram süt içmiştir?
 a) 1530 b) 1581 c) 1632 d) 1683 e) 1734

- 9 Bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. EF doğrusu $[CB]$ ışını P noktasında kesiyor. Buna göre $|BD| = 1$, $|CD| = 3$, $|PF| = \sqrt{5}$ ise $|CA|$ uzunluğu kaçtır?
 a) 4 b) $2\sqrt{5}$ c) 5 d) $4\sqrt{2}$ e) 6

- 10 $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ olmak üzere kaç farklı p asal sayısı için $a^2 + b + 1$ ve $b^2 + a + 1$ sayılarının her ikisi de p ile tam bölünecek biçimde a ve b tam sayıları bulunabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11

$$\begin{aligned}(x + 2y)(y + 2z)(z + 2x) &= 1 \\ (2x + y)(2y + z)(2z + x) &= 2 \\ (x + y)(y + z)(z + x) &= 3\end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için xyz ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) Hiçbiri

- 12 İki basamaklı sayılardan oluşan her $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesinin herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanı bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?
 a) 38 b) 41 c) 45 d) 51 e) Hiçbiri

- 13** Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?
- a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) 5 d) $\frac{11}{2}$ e) 6

- 14** 3, 5, 7, 11, 13 sayılarından kaç tanesi $(n + 3)(n + 7)(n + 11)(n + 15) + 257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 15** $1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10$, $a \neq c$ ve $b^2 \geq 4ac$ koşullarını sağlayan tüm a, b, c tam sayıları için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2 + bx + a = 0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a, b, c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?
- a) 20 b) 40 c) 50 d) 60 e) 80

- 16** $1, 2, \dots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a | b$ ve $b | c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?
- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

- 17** Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadadır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?
 a) $4\sqrt{5}$ b) 9 c) $\sqrt{85}$ d) $3\sqrt{10}$ e) $\sqrt{91}$

- 18** n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?
 a) 11 b) 17 c) 24 d) 30 e) Hiçbiri

- 19** Gerçek katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?
 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

- 20** Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \dots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal olacak şekilde sıraya dizilebilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 21** $|AB| = 13, |BC| = 4, |CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?
- a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) 3 e) $\frac{7}{2}$

- 22** Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 23** Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \frac{4}{a_n a_{n-1}} = 2 \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?
- a) 1 b) 2 c) 4 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

- 24** Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?
- a) 204 b) 216 c) 228 d) 239 e) 251

- 25** Dar açılı bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna A da teğet olan çemberi ikinci kez K de kesiyor. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna B de teğet olan çemberi ikinci kez L de kesiyor. $|CK| = 12$, $|KL| = 9$ ise $|CL|$ uzunluğunun alabileceği değerler toplamı kaçtır?
 a) 12 b) 15 c) 18 d) 21 e) 24

- 26** $\binom{3n}{n}$ ifadesinin 2016 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?
 a) 11 b) 23 c) 31 d) 43 e) Hiçbiri

- 27** $P(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı kaçtır?
 a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

- 28** Bir torbada başlangıçta 2016 adet eşit uzunluklu çubuk bulunuyor. Her işlemde bir çubuk seçilip iki eşit parçaya bölünüyor. İşlemler nasıl yapılırsa yapılsın torbada her zaman en az n tane eşit uzunluklu çubuk bulunuyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?
 a) 2 b) 505 c) 756 d) 1009 e) 1511

- 29** $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?
 a) 15° b) 22.5° c) 30° d) 37.5° e) 45°

- 30** 23, 29, 31, 37, 41 sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını böler?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 31** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c pozitif gerçelleri için, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ ifadesi 2016^{-2} , 2016^{-1} , 1, 2016 sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 32** Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2, 3, 22, 23\}$, $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$, $\{1, 7, 12, 13, 19, 24\}$, $\{5, 6, 11, 17, 18\}$ ve $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2017

- 1) 210^9 doğal sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi 4, 9, 25, 49 doğal sayılarından en az ikisi ile bölünür?
 a) 9984 b) 9744 c) 9728 d) 9648 e) 9216
- 2) $x, y \geq -2017$ olmak üzere, $\frac{x}{x-y+2017} - \frac{y}{x-y-2017} = 1$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) tam sayı ikilileri vardır?
 a) 4033 b) 4034 c) 6051 d) 6052 e) 8068
- 3) Tepe açısı $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$ olan ABC ikizkenar üçgeninde \widehat{ACB} açısının açıortayı $[AB]$ kenarını D 'de kesiyor. $|AD| = x$, $|DC| = y$ ise $|BC|$ 'nin x ve y cinsinden değeri hangisidir?
 a) $x + 2y \cos 40^\circ$ b) $y + 2x \cos 20^\circ$ c) $y + 2x$ d) $3x - y$ e) $x + y$
- 4) Beş basamaklı bir sayının birler ve onlar basamağı silindiğinde tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir, ayrıca bu sayının binler ve on binler basamağı silindiğinde de tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir. Bu özelliklere sahip kaç farklı beş basamaklı doğal sayı vardır?
 a) 52 b) 54 c) 57 d) 58 e) 60

- 5] 7 kişi, zemin katta bulunan bir asansöre binip, her katta en az bir kişi incek şekilde dört kat çıkıyor ve dördüncü katta asansör tamamen boşalıyor. Bu asansör kaç farklı şekilde kullanılır?
 a) 8400 b) 8449 c) 8456 d) 9114 e) 9149

- 6] a, b, c sayıları, $x^3 + x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olsun. Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$ olur?
 a) $x^3 - x - 1 = 0$ b) $x^3 - x^2 + 1 = 0$ c) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ d) $x^3 - x + 1 = 0$ e) $x^3 - x^2 - 1 = 0$

- 7] $|AB| = 2|BC|$ olan $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{ABE}) = 15^\circ$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = 2$ ise $|CE|$ kaçtır?
 a) $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$ c) $\sqrt{6 + \sqrt{3}}$ d) $2\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ e) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$

- 8] n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $(n + 2)^4$ sayısının $(n + 1)^4$ sayısına bölümünden kalan K_n olsun. K_n sayısının 4 ile bölümünden kalan R_n ise $R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{2016} + R_{2017}$ kaçtır?
 a) 2016 b) 2017 c) 4030 d) 4031 e) 6053

- 9 İçi dolu bir küre, merkezinden geçen 100 düzlem ile en fazla kaç parçaya bölünür?
 a) $2^{100} - 2$ b) 9898 c) $2^{198} + 2$ d) $3^{100} + 2$ e) 9902

- 10 $x - 2y + xy = 1 + \sqrt{10}$ ve $x^2 + 4y^2 = 13$ olduğuna göre $|x - 2y - 2|$ ifadesinin değeri kaçtır ?
 a) $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ b) $\sqrt{10} - 1$ c) $\sqrt{-2 + \sqrt{10}}$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ e) $-3 + \sqrt{10}$

- 11 $ABCD$ dışbükey dörtgeninde ABD , tepe açısı $m(\widehat{A}) = 60^\circ + 2x$ olan bir ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = x$ ise $m(\widehat{DCA})$ kaç derecedir?
 a) 30° b) $30^\circ + x$ c) $30^\circ - x$ d) $30^\circ - 2x$ e) 25°

- 12 n pozitif bir tam sayı olsun.

$$x + y = n$$

$$xy = n + 65$$

sisteminin (x, y) gerçel çözümlerinin olması için n 'in en küçük değeri kaçtır?

- a) 21 b) 19 c) 18 d) 17 e) 16

13

$$\sum_{k+l=0}^{97} \binom{100}{k} \binom{100-k}{l} \binom{100-k-l}{97-k-l}$$

toplamının değeri nedir?

- a) $3^{100} \cdot 53900$ b) $3^{97} \cdot 107800$ c) $3^{105} \cdot 10780$ d) $3^{100} \cdot 107800$ e) $3^{98} \cdot 53900$

14 x, y, z, w, v negatif olmayan tam sayılardır.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 40$$

denklemini gerçekleyen tüm (x, y, z, w, v) tam sayı beşlilerinin sayısı kaçtır?

- a) 56 b) 66 c) 112 d) 120 e) 122

15 Düzlemde $A(1, 0), B(5, 2)$ noktaları veriliyor. $y = x + 2$ doğrusu üzerinde alınan bir C noktası için, $|AC|^2 + |CB|^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 26 b) $\frac{425}{16}$ c) $\frac{53}{2}$ d) $\frac{105}{4}$ e) 25

16 p bir tek asal sayı olmak üzere, $\sqrt{x(x-p^2)}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan x pozitif tam sayılarından en büyüğü ile en küçüğü arasındaki fark aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{p^2+1}{4}$ b) $\frac{p^4+1}{4}$ c) $\left(\frac{p^2+1}{2}\right)^2$ d) $\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2$ e) $\frac{(p^2+1)(p^2-p+1)}{4}$

- 17** *KARPUZ* kelimesinin harfleri ile yazılabilecek olan tüm kelimelerin kaç tanesinde ya *K, A*'dan önce, ya da *R, A*'den sonra, ya da *R, P*'den öncedir? (Burada önce ya da sonra ifadeleri yan yana olmaları gerektiği anlamına gelmez)
- a) 696 b) 690 c) 660 d) 600 e) 580

- 18** $n = 1, 2, 3, \dots$ doğal sayıları için, $a_n = 2 - \frac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}$ olarak verilsin. Buna göre, $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \frac{3}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{19}{\sqrt{a_{19}}} + \frac{20}{\sqrt{a_{20}}}$ ifadesinin eşiti nedir?
- a) $\frac{\sqrt{761} + 1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{761} - 1}{4}$ c) 20 d) 19 e) 7

- 19** Bir kenarı 12 olan $ABCD$ karesinde $|AE| = 3$, $|AF| = 4$ olacak şekilde AB ve AD kenarları üzerinde sırasıyla E ve F noktaları alınıyor. Kare içinde bir tabanı EF ve diğer tabanın köşeleri BC ve DC kenarları üzerinde olan en büyük alana sahip yamuğun alanı kaçtır?
- a) 76 b) 74 c) $\frac{147}{2}$ d) 73 e) $\frac{145}{2}$

- 20** $\sum_{n=1}^{30} n^{61} \equiv x \pmod{31^2}$ ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?
- a) 404 b) 434 c) 465 d) 496 e) 527

- 21** 1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8 rakamlarını kullanarak aynı olan rakamlar yan yana olmayacak şekilde oluşturulabilen beş basamaklı kaç farklı şifre vardır ?
 a) 980 b) 840 c) 720 d) 660 e) 580

- 22** $f(0) = \frac{2}{3}$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için $f(n) \neq 0$ ve $(f(n+1) - 1)(f(n) + 3) + 3 = 0$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(2016)} + \frac{1}{f(2017)}$$

toplamının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

- a) $3^{2018} - 1010$ b) $3^{2017} - 1009$ c) $2 \cdot 3^{2018} - 1009$ d) $2(3^{2017} - 505)$ e) $2 \cdot 3^{2017} - 1009$

- 23** $|AB| = |AC|$ ve $\tan B = \frac{5}{12}$ olan ABC üçgeni veriliyor. Yarıçapı 1 olan bir çember AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında teğet olup BC kenarını P ve Q noktalarında kesmektedir. P , B ile Q arasında ve $|BK| = \frac{12}{5}$ ise BQK üçgeninin alanı kaçtır ?
 a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{108}{65}$ d) $\frac{25}{13}$ e) $\frac{144}{65}$

- 24** $n^2 - 1$, üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilen bir doğal sayıdır. Bu özelliği gerçekleyen en küçük birbirinden farklı ilk beş n sayısının toplamı kaçtır ?
 a) 104 b) 110 c) 116 d) 124 e) 144

- 25** Ali 7 arkadaşını bir hafta boyunca haftanın her günü 3'lü gruplar şeklinde akşam yemeğine davet etmektedir. Arkadaşlarından herhangi ikisi sadece bir akşam bir arada olmaları koşuluyla Ali, bu daveti kaç farklı şekilde gerçekler?
- a) 15.7! b) 30.7! c) 35.7! d) 42.7! e) 60.7!

- 26** $f(x) = x^3 - 12x^2 + Ax + B$, gerçel sayılarda tanımlı artan bir fonksiyon olsun. $f \circ f \circ f(3) = 3$ ve $f \circ f \circ f \circ f(4) = 4$ ise $f(7)$ kaçtır ?
- a) 7 b) 12 c) 31 d) 38 e) 42

- 27** $s(\hat{A}) = 60$ olan ABC üçgeninin çevrel çemberi çiziliyor. B köşesinden çizilen teğet doğru ile CA kenarının uzantısı D noktasında kesişiyor. Burada A noktası, C ile D arasındadır. $|DC| = 4$, $|AB| + |AD| = |AC|$ ise $\frac{|BC|}{|AB|}$ oranı kaçtır ?
- a) 2 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

- 28** $A = 64 \cdot 10^{2014}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017})$ koşulunu sağlayan en büyük 2017 basamaklı $A = a_1a_2a_3\dots a_{2017}$ doğal sayısının rakamlar toplamı kaçtır ?
- a) 11 b) 13 c) 15 d) 19 e) 2017

- 29** $\binom{2017}{1} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{9} + \dots + \binom{2017}{2017}$ toplamının değeri kaçtır?
 a) $2^{2016} + 2^{1006}$ b) $2^{2017} - 2^{1007}$ c) $2^{2015} + 2^{1005}$ d) $2^{2015} + 2^{1007}$ e) $2^{2017} - 2^{1008}$

- 30** 1001^{20} sayısının son 12 rakamının toplamı kaçtır?
 a) 15 b) 18 c) 21 d) 24 e) 32

- 31** $|AB| = |AC|$ olan ABC ikizkenar üçgeninin AC kenarına A noktasında teğet ve B noktasından geçen, merkezi üçgenin dışında olan bir çember çiziliyor. Bu çember BC kenarını E noktasında kesmektedir. $2|BE| = 3|EC|$ ve ABC üçgeninin alanı 27 ise çemberin yarıçapı kaçtır?
 a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) 5 d) $\frac{23}{4}$ e) 6

- 32** $3^{2^{2017}} - 1$ sayısının 2^{2020} sayısına bölümünden kalan kaçtır?
 a) 2^{2017} b) 2^{2019} c) $2^{2017} + 1$ d) $2^{2018} + 1$ e) $2^{2018} + 2$

26. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2018

- 1 $m(\widehat{BAC}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ olan bir ABC üçgeninde A noktasının BC doğrusuna göre simetriği D , B noktasının AC doğrusuna göre simetriği ise E dir. $m(\widehat{DEC})$ kaçtır?
 a) 35° b) 40° c) 45° d) 50° e) 55°

- 2 $x_0, x_1, \dots, x_{2018}$ tam sayıları $x_0 = 1, x_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ koşullarını sağlıyorsa x_{2018} sayısının 2018 ile bölümünden kalan kaçtır?
 a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

- 3 $(x^2 - 2x\sqrt{2} + 7)(y^2 + 2y\sqrt{3} + 8) = 25$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz çoklukta

- 4 Her elemanı 6^{12} sayısının bir pozitif böleni olan ve herhangi iki farklı elemanın çarpımı tam küp olmayan bir kümede en çok kaç eleman bulunabilir?
 a) 65 b) 70 c) 73 d) 77 e) 80

5 C açısı dik olan bir ABC üçgeninde $4|AC| = 3|BC|$ dir. ABC nin iç teğet çemberi BC ye D de, AC ye ise E de teğettir. AD doğrusu iç teğet çemberi D den farklı bir S noktasında, BE doğrusunu ise T noktasında kesiyor. $\frac{|AS|}{|TD|}$ kaçtır?

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{11}{7}$ d) $\frac{18}{11}$ e) $\frac{22}{15}$

6 Bir a pozitif tam sayısını tam bölmeyen en küçük pozitif tam sayıya a nın ilk bölmeyeni diyelim. Kaç $n \leq 26$ pozitif tam sayısı için ilk bölmeyeni n olan bir pozitif tam sayı bulunur?

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

7 $n_1, n_2, \dots, n_{2018}$ tam sayılar olmak üzere

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{2018}^2 + 4036 = 3(n_1 + n_2 + \dots + n_{2018})$$

eşitliğini sağlıyorsa, $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{2018}^2$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

- a) 1 b) 2019 c) 6055 d) 2^{2018} e) Hiçbiri

8 12×12 satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi kırmızı ve k tanesi mavi renge, hiçbir kırmızı birim karenin hiçbir komşusu (ortak kenar veya köşeye sahip birim kareler) boyanmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

- 9) $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = |CD|$, $m(\widehat{ADB}) = 38^\circ$, $m(\widehat{CDB}) = 42^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 140^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaçtır?
 a) 17° b) 18° c) 19° d) 20° e) 21°

- 10) Tam olarak 26 farklı tam kare ile bölünebilen en küçük pozitif tam sayının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11)

$$\begin{aligned}x^2 + xy - y^2 &= 10x \\x^3 - xy^2 + y^2 &= 10y\end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 12) Tahtada başlangıçta 2018 sayısı yazılıdır. Her hamlede tahtadaki sayı silinip yerine o sayının 12 eksiği veya 9 katının 4 eksiği yazılıyor. Aşağıdaki sayılardan hangisi sonlu hamle sonucunda tahtada yazılı olabilir?
 a) $2^{29} + 2$ b) $3^{30} + 1$ c) $4^{31} + 1$ d) $5^{32} + 4$ e) $6^{33} + 2$

- 13** Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 2, |BC| = \sqrt{2}$ dir. $[BC]$ nin orta noktası D , $[AC]$ nin orta noktası ise E dir. ABC nin çevrel çemberi üzerinde AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta olan ve $|PC|^2 = |PD|^2 + |PE|^2$ eşitliğini sağlayan bir P noktası alınıyor. $|PA| + |PB|$ kaçtır?
 a) $1 + \sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) 3

- 14** k, n_1, n_2, \dots, n_k pozitif tam sayılar olmak üzere $4^{n_1} + 4^{n_2} + \dots + 4^{n_k}$ sayısı 43 ile tam bölünüyorsa, k en az kaç olabilir?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 15** x bir irrasyonel sayı olmak üzere, $x^2 - 2x$ ve $x^3 - 5x$ rasyonel sayılar ise, $x^3 - 5x$ kaçtır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 16** 1, 2, ..., 7 sayılarıyla yedi kutunun her birine en az 1 ve en çok 10 olmak üzere, bilyeler dağıtılacaktır. Böyle bir dağılımda $i < j$ olmak üzere, i numaralı kutudaki bilye sayısı j numaralı kutudaki bilye sayısından az değilse, (i, j) ikilisine *ters ikili* diyelim. Tam olarak bir ters ikili içeren kaç dağılım vardır?
 a) 720 b) 1260 c) 1520 d) 1980 e) 2310

- 17** $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ olan dar açılı bir ABC üçgeninde diklik merkezi H ve A dan karşı kenara indirilen dikmenin ayağı D dir. $[AC]$ üzerinde $|BD| \cdot |CD| = |ED|^2$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|BH| = 7|EH|$ ise $\frac{|AE|}{|CE|}$ kaçtır?
 a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

- 18** $2^{2^n} + 2^n + n$ ifadesinin 7 ile tam bölünmesini sağlayan kaç $n \leq 420$ pozitif tam sayısı vardır?
 a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

- 19** Bir a_1, a_2, \dots, a_{100} pozitif gerçel sayı dizisinde $a_1 = 1$ ve her $n = 1, 2, \dots, 99$ için $\frac{1}{a_{n+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(a_i + a_{i+1})\sqrt{a_i^2 + i^2}} = 1$ sağlanıyorsa, a_{100} kaçtır?
 a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

- 20** $1, 2, \dots, 26$ sayılarıyla numaralandırılmış 26 böcek başlangıçta k numaralı böcek $(k, 0)$ noktasında bulunacak şekilde koordinat düzlemine yerleştirilmiştir. Her hamlede tam olarak bir böcek bulunduğu (a, b) noktasından $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, $(a, b+1)$, $(a, b-1)$ noktalarından birine, atlayacağı noktada başka bir böcek bulunmuyorsa, atlıyor. En az kaç hamle sonucunda her $k = 1, 2, \dots, 26$ için k nolu böcek $(27 - k, 0)$ noktasında bulunabilir?
 a) 384 b) 386 c) 388 d) 390 e) 392

- 21** Bir ABC üçgeninde B köşesine ait iç açıortay karşı kenarı D de, C ye ait iç açıortay ise karşı kenarı E de kesiyor. $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DEC})$ olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ kaçtır?
 a) 15° b) 30° c) 45° d) 60° e) 75°

- 22** m ve n tam sayılar olmak üzere, $(m + n^2)(m + 1) = 4mn$ eşitliği sağlanıyorsa $m + n$ ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır ?
 a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

- 23** x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $2x + 16y = x^2 + y^2$ eşitliği sağlanıyorsa, $7x + 4y$ nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) -32 b) -30 c) -28 d) -26 e) -24

- 24** Bir sözlü sınava katılan 26 öğrencinin her birine sabah seansında 1 ve akşam seansında 1 olmak üzere, 2 farklı soru soruluyor. Sorulan soruların hepsinin aynı kitaptan olduğu ve aynı seansta birden fazla öğrenciye sorulmadığı ve her öğrenci için o öğrenciye 2 sorudan en az birinin başka öğrenciye sorulmadığı biliniyor. Buna göre kitapta en az kaç soru bulunabilir?
 a) 28 b) 33 c) 36 d) 42 e) Hiçbiri

- 25** Bir A_1, A_2, \dots, A_{26} düzgün 26-geninde $A_1A_2, A_1A_{15}, A_1A_{16}$ doğruları A_8A_{21} doğrusunu sırasıyla B, C, D noktalarında kesiyorlar. $\frac{|A_8B|}{|CD|}$ kaçtır?
 a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) 3

- 26** 2 nin alabileceği tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin p ile bölümünden kalanların alabileceği farklı değerlerin toplamının p ye eşit olmasını sağlayan 2018 den küçük kaç p asalı vardır ?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 27** a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (a+b+ab)x^2 + (a^2+b^2)x + ab$ polinomunun gerçel kökü yoksa, $(a-2)^2 + (b-2)^2$ ifadesinin alabileceği en büyük tamsayı değeri nedir?
 a) 9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

- 28** Masadaki üç kutuda başlangıçta k, l ve m bilye bulunuyor. İki oyuncu sırasıyla hamle yaparak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncuların birini veya ikisini seçip seçtiği kutu veya kutulardan birer bilye alıyor. Hamle yapamayan oyuncu kaybediyor. Oyun $(k, l, m) = (2017, 2018, 2018), (2017, 2018, 2019), (2018, 2018, 2018), (2018, 2019, 2019)$ ve $(2019, 2019, 2019)$ için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

29 Ayrıt uzunlukları 1, 2, 3 cm olan dikdörtgenler prizmasında A köşesine en uzak köşe F olsun. Daima dikdörtgenler prizmasının üzerinde hareket etmek şartı ile A köşesinden F köşesine giden karınca en az kaç cm yol gitmelidir?

- a) 4 b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $3 + \sqrt{5}$ e) $2 + \sqrt{10}$

30 m ve n tamsayılar, p bir asal sayı olmak üzere kaç farklı (m, n, p) üçlüsü için $\frac{13^m + p \cdot 2^n}{13^m - p \cdot 2^n}$ bir pozitif tamsayıdır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

31 $0 < x \leq 1$ olmak üzere, $\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - \sqrt{1 - x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 1 b) 2 c) $3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{5}$ e) Hiçbiri

32 26 takımın katıldığı bir turnuvada her takım ikilisi arasında tam olarak bir maç yapıyor. A takımı B takımını, B takımı C takımını, C takımı da A takımını yenerse A, B, C kümesine tuhaf küme diyelim. Bu turnuvada tuhaf küme sayısı en çok kaç olabilir?

- a) 684 b) 694 c) 712 d) 728 e) 736

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2019

- 1 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası ve $[AD]$ üzerinde bir E noktası alınıyor. $|DE| = 1$, $|AE| = 2$ ve $|BD| = |CD| = \sqrt{3}$ ise, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BEC})$ kaçtır?
 a) 90° b) 120° c) 135° d) 150° e) 180°

- 2 2020^{2019} sayısının 27 ile bölümünden kalan kaçtır?
 a) 10 b) 13 c) 16 d) 19 e) 22

- 3 k bir sabit gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x + 4z &= 2 \\ kx + 2y &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü bulunmuyorsa, k kaçtır?

- a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9
- 4 İki basamaklı pozitif tam sayılardan oluşan ve herhangi iki elemanının çarpımı 100 ile tam bölünmeyen bir kümenin eleman sayısı en fazla kaç olabilir?
 a) 74 b) 76 c) 78 d) 80 e) 82

- 5 Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{EDA})$ olacak biçimde bir E noktası alınıyor. $[BD]$ doğru parçasının orta noktası F olmak üzere, $|AD| = 6$ ve $|BE| = 9$ ise, $|EF|$ kaçtır?
 a) 3 b) 4 c) $3\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{5}$

- 6 $\frac{2019^p - 27^p}{p}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan p asal sayılarının toplamı kaçtır ?
 a) 46 b) 58 c) 66 d) 78 e) 88

- 7 $P(x) = (x + 1)^{2019} + (x - 1)^{2019}$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan polinomu nedir?
 a) $2^{2019}x$ b) $2^{1010}x$ c) $2^{1009}x$ d) $2019x$ e) $1010x$

- 8 $1, 2, \dots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 top, $1, 2, \dots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 kutuya her bir kutuda bir top bulunacak şekilde dağıtılacaktır. Her bir top için topun numarası bulunduğu kutunun numarasının iki katını geçmeyecek şekilde bu dağılım kaç farklı biçimde yapılabilir?
 a) $13! \cdot 14!$ b) $14! \cdot 14!$ c) $2 \cdot 14! \cdot 15!$ d) $9! \cdot 14! \cdot 14!$ e) $9! \cdot 9! \cdot 9!$

- 9 Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. D noktasından $[BC]$ kenarına inen dikmenin ayağı E olmak üzere, $|AD| = 1$, $|BE| = 2$, $|CE| = 4$ ve $|CD| = \sqrt{21}$ ise, $|AC|$ kaçtır?
 a) 4 b) 5 c) $2\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{5}$

- 10 x ve y tam sayılar ve $x^2y - 15 = 2x(y + 1)$ olmak üzere, $x + y$ nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır ?
 a) -25 b) -14 c) -8 d) -6 e) 0

- 11 Ahmet'in 2019 yılındaki yaşı, doğum yılının son iki basamağının çarpımından 4 eksiktir. Buna göre Ahmet'in doğum yılının rakamları toplamı kaçtır?
 a) 21 b) 22 c) 23 d) 24 e) 25

- 12 Özdeş 6 kırmızı top ve özdeş 6 beyaz top A, B, C, D ve E kutularına, A kutusunda kırmızı toplar beyaz toplardan fazla, B kutusunda beyaz toplar kırmızı toplardan fazla, C, D ve E kutularının her birinde ise eşit sayıda kırmızı ve beyaz top olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
 a) 240 b) 252 c) 256 d) 275 e) 288

- 13** $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası için, $|BE| > |EC|$, $Alan(ABE) = 15$, $Alan(AED) = 23$ ve $Alan(ECD) = 4$ ise, $\frac{|BE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
- 14** A, B ve C farklı rakamlar olmak üzere $A477, B477, C477$ sayılarının her biri asal sayı olduğuna göre, $A+B+C$ kaçtır?
 a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16
- 15** $2x^2 + y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $2x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?
 a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) Hiçbiri
- 16** A, B, C, D ve E noktaları çevresi 15 birim olan bir çember üzerinde bulunmaktadır. A noktasında bulunan bir böcek, A dan B ye, B den C ye, C den D ye, D den E ye ve E den A ya çember boyunca ilerleyerek gidiyor. Böceğin katettiği mesafeler sırasıyla $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ olmak üzere, $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ beşlisi $(3, 7, 6, 5, 6)$, $(3, 6, 5, 2, 6)$, $(6, 4, 3, 7, 7)$ ve $(5, 3, 4, 5, 6)$ beşlilerinden kaç tane olabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 17 $k < n$ olmak üzere $A_1A_2 \dots A_k$ düzgün k -geni $A_1A_2B_3B_4 \dots B_n$ düzgün n -geninin içindedir. $A_3A_4B_4$ bir eşkenar üçgen ise, $k + n$ kaçtır?
 a) 36 b) 33 c) 30 d) 27 e) 24

- 18 a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $a * b$ işlemi, a nın b ile bölümünden kalan sayı ile b nin a ile bölümünden kalan sayının çarpımı olarak tanımlanıyor. Örneğin, $18 * 7 = 28$ ve $5 * 10 = 0$ dır. $n * 23 = 30$ eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?
 a) 16 b) 21 c) 26 d) 31 e) 36

- 19 $x = \frac{8}{(16 + \sqrt{240})(4 + \sqrt[4]{240})(2 + \sqrt[8]{240})}$ olmak üzere, $\frac{1}{1 - (1 - x)^8}$ kaçtır?
 a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 64

- 20 Aslı ve Berk, başlangıçta hiçbir birim karesi boyalı olmayan 27×27 bir tahta üzerinde sırayla hamleler yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna ilk başlayan Aslı, sırası geldiğinde boyalı olmayan bir birim kareyi kırmızıya boyuyor. Sıra Berk'e geldiğinde ise Berk, tahtanın birim karelerinden oluşan ve hiçbir birim karesi boyalı olmayan bir 2×2 karenin dört birim karesini de maviye boyuyor. Bir oyuncu hamle yapamıyorsa oyun bitiyor ve Berk boyadığı birim kare sayısı kadar puan kazanıyor. Buna göre, Berk en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebilir?
 a) 316 b) 324 c) 336 d) 348 e) 364

- 21** $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninde C ye ait yükseklik ayağı D olmak üzere $|AD| = 8$ ve $|BD| = 17$ dir. \widehat{ACB} ve \widehat{CDB} açılarının iç açıortaylarının kesişim noktası E ise, $|CE|$ kaçtır?
 a) 15 b) 14 c) 12 d) 10 e) 9

- 22** Ardışık iki pozitif tam sayının her ikisinin de rakamları toplamı 11 ile tam bölünüyorsa, bu ardışık sayılardan küçük olan en az kaç basamaklıdır?
 a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

- 23** Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her x gerçel sayısı için
 $f(x^2 - 4x + 1) = (f(x) - 5x + 5)(x^2 - 4x)$
 eşitliğini sağlıyorsa, $f(5)$ kaçtır?
 a) 28 b) 32 c) 35 d) 40 e) 42

- 24** A_1, A_2, \dots, A_8 adalar olmak üzere, her $k = 1, 2, \dots, 7$ için A_k ile A_{k+1} ve A_8 ile A_1 arasında ikişer köprü bulunmaktadır. A_1 adasında bulunan bir kişi, bu 16 köprünün her birinden tam olarak bir kez geçerek A_1 adasına dönecek şekilde kaç farklı güzergah izleyebilir?
 a) 4096 b) 4608 c) 4864 d) 5012 e) 5632

- 25** $C \in [AB]$ olmak üzere, $[AB]$ çaplı bir yarım çember üzerinde D ve E noktaları $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCE}) = 30^\circ$ olacak biçimde alınıyor. $|AC| = 27$ ve $|CB| = 3$ ise, $|CD| - |CE|$ kaçtır?
 a) 15 b) 18 c) 21 d) $10\sqrt{3}$ e) $12\sqrt{3}$

- 26** n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in -3, 2$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^n a_k \binom{n}{k} = 87$ eşitliği sağlanıyorsa, n nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

27

$$\begin{aligned} x &= y^2 + y + 1 \\ 5y &= 2 - x - x^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 28** Bir ağaç üzerinde bulunan 22 yuvanın herhangi ikisi r_1, r_2, \dots, r_n renklerinden biri ile boyalı bir iple birleştirilmiştir. Bir salyangoz, her $k = 1, 2, \dots, n$ için herhangi bir yuvadan herhangi başka bir yuvaya sadece r_k rengine boyalı ipler üzerinde ilerleyerek varabiliyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?
 a) 21 b) 20 c) 16 d) 12 e) 11

- 29** Bir dikdörtgenler prizmasının bir yüzeyi kırmızıya, iki yüzeyi maviye ve üç yüzeyi sarıya boyanmıştır. Kırmızı renkli yüzeyin alanı 100 cm^2 , mavi renkli yüzeylerin alanları toplamı 109 cm^2 ve sarı renkli yüzeylerin alanları toplamı 59 cm^2 ise, bu prizmanın hacmi kaç cm^3 tür?
- a) 150 b) 160 c) 180 d) 200 e) 240

- 30** Ahmet aklında bir pozitif tam sayı tutuyor. Sonrasında Ahmet Betül'e, bu sayının üç basamaklı olduğunu ve bu sayının sırasıyla 10, 11 ve 12 ile bölümünden kalanları söylüyor. Betül yalnızca bu bilgileri kullanarak Ahmet'in sayısını bulabiliyor. Buna göre, Ahmet'in tuttuğu sayının alabileceği en büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark kaçtır?
- a) 419 b) 479 c) 539 d) 599 e) 629

- 31** $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 - x - 1$ polinomunun gerçel kökler toplamı A ve çarpımı B olmak üzere, $A(B + 1)$ kaçtır?
- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

- 32** Düz bir yol üzerinde yan yana yer alan 27 bahçenin herhangi ikisinde aralarındaki hiçbir bahçede bulunmayan aynı bir ağaç türü yer almaktadır. Buna göre, bu bahçelerin en az birinde yer alan ağaç türü sayısı en az kaçtır?
- a) 108 b) 152 c) 182 d) 196 e) 351

28. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2020

- 1 $m(\widehat{ABC}) = 135^\circ$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. $[OC]$ doğru parçası üzerindeki bir D noktası için $m(\widehat{DBA}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{ADO}) = 70^\circ$ ise, $m(\widehat{BAC})$ nedir?
 a) 20° b) 25° c) 30° d) 35° e) 40°

- 2 $2^{p-3} + 3^{p-3} + 4^{p-3}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan p tek asal sayılarının toplamı kaçtır?
 a) 48 b) 56 c) 64 d) 72 e) 80

- 3 x bir gerçel sayı olmak üzere $(x+4)(x^2+16) = 11$ ise, $x^4 - 11x$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?
 a) 175 b) 183 c) 196 d) 204 e) 212

- 4 Bir sincap 101 fındık içeren bir kesedeki fındıkların tümünü ya da bir kısmını üç gün içinde yiyecektir. Bu sincap, ikinci ve üçüncü günlerde eşit sayıda fındık ve her gün en az bir fındık yiyecek şekilde bu işlemi kaç farklı biçimde yapabilir?
 a) 2350 b) 2460 c) 2476 d) 2500 e) 2692

- 5 Düzgün bir $ABCDEF$ altıgeninin $[DE]$ kenarı üzerinde bir P noktası alınıyor. $\text{Alan}(PAB) = 60$ ve $\text{Alan}(PBC) = 44$ ise, $\text{Alan}(PAF)$ kaçtır?
 a) 46 b) 48 c) 50 d) 52 e) 54

- 6 $\sqrt{n+11} + \sqrt{n + \sqrt{n+11}}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?
 a) 71 b) 92 c) 113 d) 134 e) 155

- 7 $a > 0$ ve $b \neq c$ koşullarını sağlayan a, b, c, d gerçel sayıları için $P_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ve $P_2(x) = ax^3 + cx^2 + bx + d$ polinomları tanımlanıyor. $P_1(x+1) - P_1(x)$ ve $P_2(x+1) - P_2(x)$ polinomlarının alabilecekleri en küçük değerler eşitse, $\frac{b+c}{a}$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?
 a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) Hicbiri

- 8 N pozitif bir tam sayı olmak üzere, a_1, a_2, \dots, a_k pozitif tam sayıları $N = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ve her $1 \leq i \leq k$ için $a_i = a_{k+1-i}$ koşullarını sağlıyorsa, (a_1, a_2, \dots, a_k) sıralı k -lisine N 'nin bir *simetrik dağılımı* diyelim. Örneğin, (5) , $(2, 1, 2)$ ve $(1, 1, 1, 1)$ sıralılarının her biri 5'in bir simetrik dağılımıdır. Buna göre 28 sayısının kaç farklı simetrik dağılımı vardır?
 a) 12842 b) 13174 c) 14312 d) 15968 e) 16384

- 9 Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = 120^\circ$ ve $m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$ 'dir. $|AD| = 6$ ve $|DC| = 21$ ise, $|AB|$ kaçtır?
 a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

- 10 m, n ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, m sayısının n ile bölümünden kalan k 'dir. Ayrıca m sayısı 28 ile bölündüğünde kalan 27, bölüm ise n dir. Buna göre, k nin alabileceği kaç farklı değer vardır?
 a) 4 b) 7 c) 10 d) 14 e) 27

- 11 Negatif olmayan a, b ve c gerçel sayıları $a + b + c = 1$ eşitliğini sağlıyorsa,

$$\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} + \frac{1}{1+4c^2}$$

İfadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 1 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{4}{3}$

- 12 Her pozitif tam sayı k renkten birine, farkları veya oranları 2 olan herhangi iki sayı farklı renkte olacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

- 13** Bir ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde alınan K ve L noktaları için $|AK| = 12$, $|BK| = 16$ ve $|CL| = 6$ 'dır. $[BC]$ kenarı üzerinde D ve E noktaları $E \in [DC]$ ve $|BD| = |DE| = |EC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{BKE}) = m(\widehat{CLD})$ ise, $|AL|$ kaçtır?
 a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

- 14** Her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1799$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisinde en az iki tam kare bulunuyorsa, a_{2020} sayısının 28 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olabilir?
 a) 2 b) 6 c) 14 d) 22 e) Hiçbiri

- 15** $P(x)$ bir polinom olmak üzere, her a gerçel sayısı için $P(a) = P(b)$ eşitliğini sağlayan a dan farklı en az bir b gerçel sayısı bulunuyorsa, $P(x)$ polinomuna *çok tersli* polinom diyelim. $P_1(x) = x^2 - 2020x$, $P_2(x) = x^3 - 2020x^2 + x$, $P_3(x) = x^4 - 2020x^2$ ve $P_4(x) = x^5 - 2020x^3$ polinomlardan kaç tanesi çok terslidir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 16** 6 farklı renkten 100'er top n kutuya, aynı renkli herhangi iki top farklı kutularda yer alacak şekilde dağıtılmıştır. Herhangi iki kutu için bu 6 renkten öyle biri vardır ki bu iki kutunun hiçbirinde o renge boyalı top bulunmamaktadır. Buna göre n nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) 180 b) 200 c) 220 d) 240 e) 260

- 17** $|AB| = 10$ ve $m(\widehat{BAC}) = 124^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|AD| = 4$ ve $m(\widehat{BAD}) = 68^\circ$ dir. $[BD]$ doğru parçası üzerinde alınan bir E noktası için $|BE|/|ED| = 5$ tir. $[AB]$ kenarının orta noktası F olmak üzere, CF doğrusu AD ve AE doğrularını sırasıyla P ve N noktalarında kestiğine göre, APN üçgeninin alanının $DENP$ dörtgeninin alanına oranı kaçtır?

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{10}{11}$ e) $\frac{16}{17}$

- 18** $n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 4n - 62$ ifadesinin bir tam kare olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 19** Bir $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $f(1) = f(2) = 0$ ve her n pozitif tam sayısı için

$$f(3n) = f(n) + 1 \quad \text{ve} \quad f(3n+1) = f(3n+2) = f(n)$$

koşullarını sağlıyor. Buna göre $f\left(\frac{3^{2020} - 1}{8}\right)$ kaçtır?

- a) 504 b) 673 c) 1009 d) 2019 e) 3029

- 20** Bir satranç turnuvasına katılan üç arkadaş, turnavadaki herkesin en fazla üç arkadaşı bulunduğunu ve arkadaş olmayan her iki kişinin ortak en az bir arkadaşı bulunduğunu fark ediyor. Bu turnuvaya katılan kişi sayısı en fazla kaç olabilir?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

- 21** $|AB| = 25$ ve $|AC| = 40$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|BD| = 15$ ve $|DC| = 24$ tür. Buna göre ABD ve ACD üçgenlerinin diklik merkezleri arasındaki uzaklık kaçtır?
 a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

- 22** $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = 2a_n + 4n^2 a_{n-1}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2020} sayısını tam bölen en büyük asal sayı kaçtır?
 a) 97 b) 101 c) 2011 d) 2017 e) 2027

- 23** L ve U gerçel sayılar ve $L < U$ olmak üzere, her $L < a < U$ gerçel sayısı için $9x^4 - 6x^2 = a$ denkleminin dört farklı gerçel kökü bulunuyorsa, $U - L$ nin alabileceği en büyük değer nedir?
 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) Hiçbiri

- 24** Tek kişilik bir oyun oynayan Aslı, ilk hamlesinde boş bir tahtaya iki basamaklı bir pozitif tam sayı yazıyor. Aslı, bundan sonraki her hamlesinde, tahtada yazılı olan sayılardan birinin hem iki katını hem de üç katını tahtaya yazıyor. Birkaç hamle sonucunda tahtadaki bütün sayıların toplamı 2018, 2020, 2022, 2024 sayılarından kaçına eşit olabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 25** $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{ADB}) < 90^\circ$ şartını sağlayan bir D noktası almıyor. $|AB| \cdot |AC| = 4$, $|BD| \cdot |CD| = 2$ ve $|AD| = \sqrt{2}$ ise, $m(\widehat{ADB})$ nedir?
 a) 15° b) 30° c) 45° d) 60° e) 75°

- 26** n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a^3 - 1$ in n ile tam bölündüğü her a tam sayısı için $a^{2020} - 1$ de n ile tam bölünüyorsa, n ye *tuhaf sayı* diyelim. Aşağıdakilerden hangisi bir tuhaf sayıdır?
 a) 61 b) 63 c) 65 d) 67 e) 69

- 27** $x^2 - x + 1 = y^3$ ve $y^2 - y = x^3$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 28** Her birinin uzunluğu 1 olan n tane kapalı doğru parçasının bileşimi $[0, 28]$ doğru parçasına eşittir. Bu doğru parçalarının her birinde, diğer $n - 1$ doğru parçasının hiçbirinde bulunmayan en az bir nokta varsa, n en fazla kaç olabilir?
 a) 28 b) 34 c) 41 d) 48 e) 54

- 29** Uzayda bir D düzlemi üzerinde çakışık veya doğrusal olmayan A, B ve C noktaları alınıyor. Bu üç noktadan geçen O merkezli bir küre üzerindeki P ve Q noktaları için $|PA| = |PB| = |PC| = 30$ ve $|QA| = |QB| = |QC| = 40$ ise, O noktasının D düzlemine uzaklığı kaçtır?
- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

- 30** Pozitif bölenleri toplamı 8 ile tam bölünmeyen bir pozitif tam sayıya *özel sayı* diyelim. Her biri özel sayı olan en fazla kaç ardışık pozitif tam sayı vardır?
- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

- 31** x ve y gerçel sayılar olmak üzere $x^2 - 2y^2 = \frac{3}{8}$ ise, $x^4 - y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
- a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) 0 d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{4}$

- 32** 12×12 bir satranç tahtasının 71 birim karesi işaretlenecektir. Bu işlem, ortak bir kenar paylaşan işaretli iki birim kare bulunmayacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?
- a) 132 b) 136 c) 140 d) 144 e) 148

29. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2021

- 1 $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda $|CD| = 6$, $|AC| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ve $|BC| = 2\sqrt{3} + 2$ eşitlikleri sağlanmaktadır. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCB})$ ise, $|AB|$ kaçtır?
 a) 3 b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{6} - 1$ e) 2

- 2 Kaç farklı p asal sayısı için $29^{p+1} - 1$ sayısı p ile tam bölünür?
 a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

- 3 Pozitif tam sayılar kümesi \mathbb{Z}^+ ile gösterilmek üzere, bir $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu $f(1) = 1$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(7n+1) = f(n), \quad f(7n+2) = 2f(n), \quad f(7n+4) = 4f(n)$$
 eşitliklerini sağlamaktadır. Buna göre $f(3900)$ kaçtır?
 a) 16 b) 32 c) 64 d) 128 e) 256

- 4 7 farklı top 5 farklı kutuya, en az 2 kutu boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
 a) 19325 b) 19675 c) 19855 d) 20015 e) 20185

- 5 Çeşitkenar bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = |EC| < |BE|$ olacak şekilde D ve E noktaları alınıyor. $|AB| = 3|AD| + |AE|$ ve $|AC| = |AD| + 3|AE|$ ise, $\frac{|BC|}{|DE|}$ kaçtır?
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) Hiçbiri

- 6 Kaç tane n pozitif tam sayısı için n^3 sayısının rakamları toplamı $4n$ sayısına eşittir?
 a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

- 7 Bir $(a_n)_{n=1}^{100}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 3$ ve her $n = 1, 2, \dots, 99$ için

$$a_{n+1} = a_n + 1 - \frac{2}{n^2 + n}$$

eşitliğini sağlıyorsa, $a_1 + 2a_2 + \dots + 100a_{100}$ toplamı kaçtır?

- a) 335850 b) 338505 c) 338550 d) 383505 e) 383550

- 8 Bir çember etrafına yazılmış olan sıfırdan farklı 200 sayı, komşu sayılar farklı renkte olacak şekilde kırmızı ve beyaz renge boyanmıştır. Her kırmızı sayı iki komşusunun çarpımına, her beyaz sayı ise iki komşusunun toplamına eşittir. Buna göre bu 200 sayının toplamı kaçtır?
 a) 60 b) 65 c) 70 d) 75 e) 80

- 9 Bir ABC üçgeninde A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen doğru ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez D noktasında kesmektedir. $|AB| = 15$, $|BC| = 24$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot m(\widehat{BCD})$ ise, $|DC|$ kaçtır?
 a) 9 b) 10 c) 12 d) 14 e) 15

- 10 $n = 5, 7, 11, 13, 121$ değerlerinden kaç tanesi için $\frac{k^2 + 3k + 5}{n}$ tam sayı olacak şekilde k tam sayısı bulunmaz?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 11 a ve b gerçel sayılar olmak üzere,

$$x^4 - x^3 + (a + b - 2)x^2 + (b - 2a)x + ab$$

- polinomunun 4 farklı gerçel kökü varsa, $4a + b$ toplamı $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{17}{8}$ ve $\frac{5}{2}$ değerlerinden kaç tanesini alabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 12 Bir sıraya dizilmiş 58 cücenin 29 tanesinin kavuğu kırmızı, diğer 29 tanesinin kavuğu ise beyaz renktedir. Başlangıçta diziliş nasıl olursa olsun, en fazla k tane kırmızı ve en fazla k tane beyaz kavuklu cüceyi sıradan çıkartarak sırada kalan farklı renkte kavuğa sahip en fazla bir ardışık cüce ikilisi bulunması sağlanabiliyorsa, k en az kaçtır?
 a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 24

- 13** Köşeleri O merkezli ω çemberi üzerinde yer alan bir $ABCD$ karesi veriliyor. $[CD]$ kenarının orta noktasından geçen bir doğru ω çemberinin küçük CD yayını K 'de, küçük AD yayını L noktasında kesiyor. $m(\widehat{KOL}) = 120^\circ$ ise, $m(\widehat{KDC})$ kaçtır?
 a) 15° b) 20° c) $22,5^\circ$ d) 25° e) 30°

- 14** $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 29\}$ olmak üzere,

$$\frac{a^5 + b^6 + c^7 - 2021}{29}$$

ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan kaç farklı (a, b, c) üçlüsü vardır?

- a) 812 b) 832 c) 836 d) 839 e) 841

- 15** n sayısının 2041, 2042, 2043, 2044 ve 2045 değerlerinden kaç tanesi için,

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 2021 \quad \text{ve} \quad P(m) = n$$

olacak şekilde tam sayı katsayılı bir $P(x)$ polinomu ve m tam sayısı bulunur?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 16** Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir tablonun birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, hem herhangi bir satırdaki sayıların toplamı hem de herhangi bir sütundaki sayıların toplamı tek sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?
 a) 72 b) 96 c) 108 d) 128 e) 144

- 17 Herhangi üçünden bir geniş açılı üçgen oluşturulabilen n çubuk bulunuyorsa, n en fazla kaç olabilir?
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

- 18 a, b, c ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, $a + b + c = 939$ ve $a \cdot b \cdot c$ sayısı 10^k ile tam bölünebiliyorsa, k en fazla kaç olabilir?
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

- 19 a bir gerçel sayı olmak üzere, $x^3 + ax^2 + 108 = 0$ denklemini sağlayan tam olarak iki farklı x gerçel sayısı bulunmaktadır. Buna göre a kaçtır?
a) -6 b) -3 c) 4 d) 8 e) Hiçbiri

- 20 Başlangıçta bir tahtada 29 sayısı yazılıdır. Her işlemde tahtada yazılı a sayısı silinip yerine $17a + 1$ ya da $a - 7$ sayılarından biri yazılıyor. Sonlu sayıda işlem sonucunda tahtada yazılı olamayacak en küçük beş basamaklı pozitif tam sayı kaçtır?
a) 10002 b) 10003 c) 10004 d) 10005 e) 10006

- 21** Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 100^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 20^\circ$ ise, $m(\widehat{DAC})$ kaçtır?
 a) 40° b) 45° c) 50° d) 55° e) Hiçbiri

- 22** $n^3 - 4m^3 + 3n^2m = 20$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?
 a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

- 23** $f(x) = x^2(x-1)(x-3)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{12} f(x_n) = -4$$

- denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ tam sayı 12-lilerinin sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?
 a) 0 b) 3 c) 6 d) 7 e) 9

- 24** A_1, A_2, \dots, A_k kümeleri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümeleridir. Bu alt kümelerin herhangi ikisinin kesişimi en fazla bir eleman içeriyorsa, k en fazla kaçtır?
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

- 25** Bir ABC üçgeninde sırasıyla $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde alınan D , E ve F noktaları için AD , BE ve CF noktadaştır. $|BD| = |CD|$, $CF \perp AB$, $|CF| = 8$, $|DF| = 5$ ve $|EF| = 6$ ise, $|BE|$ kaçtır?
- a) $\frac{18}{\sqrt{5}}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{5}$ e) $\frac{24}{\sqrt{5}}$

- 26** n bir pozitif tam sayı olmak üzere, n^2 yi tam bölen ancak n 'yi tam bölmeyen pozitif tam sayıların sayısı 9 ise, n sayısının pozitif tam bölen sayısı kaç farklı değer alabilir?
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 27** x_1, x_2, \dots, x_5 pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{64}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + 8x_5^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) $\frac{119}{4}$ b) $\frac{121}{4}$ c) $\frac{251}{8}$ d) $\frac{63}{2}$ e) 32

- 28** Bir koordinat düzleminin orijininde bir bilye bulunmaktadır. k verilmiş bir pozitif tam sayı olmak üzere, her hamlede eksenlerden biri seçiliyor ve bilye önce seçilen eksene paralel şekilde k birim, sonra diğer eksene paralel şekilde 1 birim öteleniyor. $k = 4, 7, 10, 29, 42$ değerlerinin kaçı için bilye tam sayı koordinatlı istenilen herhangi bir noktaya taşınabilir?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 29** Bir $A_1A_2 \dots A_9$ düzgün dokuzgeninde A_1A_5 ile A_2A_7 doğruları B noktasında, A_1A_5 ile A_4A_8 doğruları da C noktasında kesişiyor. $[A_3B]$ üzerinde $m(\widehat{A_3A_2D}) = 15^\circ$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. A_7BC üçgeninin BCD üçgeninin alanına oranı kaçtır?
 a) 1 b) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) Hiçbiri

- 30** $p > 2$ bir asal sayı olmak üzere, $2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}$ sayılarının p ile bölümünden kalanlarının kümesi m elemanlı olmak üzere $2^{m-1} < p$ sağlanıyorsa, p sayısına *güzel asal* diyelim. 2021'den küçük kaç tane güzel asal sayı vardır?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 31** $xy(x - y - 1) = 6$ eşitliğini sağlayan x ve y pozitif gerçel sayıları için $x + y$ 'nin alabileceği en küçük değer nedir?
 a) 4 b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{21}$ d) $2\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{7}$

- 32** Aslı ve Zehra başlangıçta hiçbir köşesi boyalı olmayan bir düzgün $2n$ -gen üzerinde bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor ve oyuncular sırayla hamle yapıyorlar. Sırası gelen oyuncuya boyalı olmayan bir köşeyi ya da çokgenin merkezine göre simetrik olan ve hiçbiri boyalı olmayan iki köşeyi boyuyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $n = 6, 12, 17, 29, 32$ değerleri için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaç tanesi kazanmayı garantileyebilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

30. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2022

1 Bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ düzgün yedigeninde $[A_2A_6]$ doğru parçası üzerinde $|A_6B| + |A_6A_7| = |A_4A_7|$ olacak biçimde bir B noktası almıyor. $m(\widehat{BA_7A_6})$ kaç derecedir?

- a) 90° b) $\frac{540^\circ}{7}$ c) 75° d) 60° e) $\frac{360^\circ}{7}$

2 Tüm pozitif tam sayı bölenlerinin çarpımı kendisinin küpü olan kaç iki basamaklı pozitif tam sayı vardır?

- a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

3 Her a gerçel sayısı için $[a]$ ile a sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösteriliyor. x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere, $[2x] + [3x] + [5x]$ sayısının birler basamağı kaç farklı değer alabilir?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

4 n adet özdeş top, 30 kız ve 77 erkek öğrenciye dağıtılacaktır. Bu dağıtım, her öğrenci en az bir adet, herhangi iki kız öğrenci eşit sayıda ve herhangi iki erkek öğrenci eşit sayıda top alacak biçimde tek bir şekilde yapılabilirse, n en fazla kaç olabilir?

- a) 321 b) 963 c) 2695 d) 4620 e) 6930

- 5 Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait kenarortay ile B açısının iç açıortayı D noktasında dik kesilmektedir. CD doğrusunun $[AB]$ kenarını kestiği nokta E ise $\frac{|BC|}{|AE|}$ nedir?
- a) 4 b) 6 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

- 6 $a_1 = 12$ ve her $n = 1, 2, \dots, 2021$ için $a_{n+1} = 12^{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2022} sayısının 67 ile bölümünden kalan kaçtır?
- a) 1 b) 4 c) 9 d) 16 e) 25

- 7 $1 \leq a, b \leq 2022$ ve $\sqrt{a - \sqrt{a + b}} = b$ koşullarını sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?
- a) 1 b) 2 c) 21 d) 36 e) Hiçbiri

- 8 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere, her biri çift sayıda eleman içerecek ve herhangi iki tanesinin kesişiminde çift sayıda eleman bulunacak şekilde S nin en fazla kaç farklı alt kümesi seçilebilir? (Boş kümede çift sayıda eleman olduğu kabul ediliyor.)
- a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

9 $|AB| = 1$, $|BC| = 2$ ve $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde D noktası, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği olsun. $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına teğet olan ve D noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{4}{5}$

10 Kaç $n < 2023$ pozitif tam sayısı için $\frac{n^6 + n^4 - n^2 - 1}{2022}$ ifadesi bir tam sayıdır?

- a) 8 b) 6 c) 5 d) 3 e) 2

11 $a_1 < a_2 < \dots < a_{2022}$ pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{2022}{a_{2022}}$$

şeklinde yazılabilen kaç pozitif tam sayı vardır?

- a) 100 b) 501 c) 812 d) 1011 e) 2022

12 21 öğrenciden oluşan bir sınıfta bazı öğrenciler arkadaşdır (arkadaşlık karşılıklıdır). Bu sınıfta arkadaş sayıları eşit olan iki arkadaş bulunmuyorsa, bu sınıftaki arkadaş ikililerinin sayısı en fazla kaç olabilir?

- a) 175 b) 177 c) 179 d) 181 e) 183

- 13** Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenler E noktasında kesilmektedir. $|AD| = 6$, $|AE| = 3\sqrt{2}$, $|ED| = 3$, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC})$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADB})$ ise $|BC|$ nedir?
 a) $2\sqrt{6}$ b) 5 c) $3\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{7}$ e) Hiçbiri

- 14** $p > 3$ bir asal sayı olmak üzere, $4p + 91$ ve $12p + 7$ sayıları da asal sayılar ise aşağıdakilerden hangisi bir asal sayı olabilir?
 a) $p^2 + 6$ b) $p^2 - 4$ c) $8p + 1$ d) $2p + 11$ e) $p + 2$

- 15** $x, y, z \geq -2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^3 + 2 &= 5y + z \\ y^3 + 2 &= 2z + 7x \\ z^3 + 2 &= -2y - 4x \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri
- 16** Rakamları toplamı 9 olan pozitif tam sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında baştan 2022. sayının birler basamağı kaçtır?
 a) 1 b) 2 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

- 17** Bir ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarına sırasıyla D ve E noktalarında teğet olan bir çember $[AB]$ kenarını F ve G noktalarında kesmektedir. F noktası A ile G arasında, $|AB| = 81$, $|BC| = 72$, $|AC| = 63$ ve $|CD| = 45$ ise $|GB| - |AF|$ farkı nedir?
 a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

- 18** Ondalık yazılımı $9ABA9$ formunda olan ve 63 ile tam bölünen kaç farklı beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 19** n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 87$ ve $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 51$ eşitliklerini sağlayan x_1, x_2, \dots, x_n gerçel sayıları bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 20** Başlangıçta koordinat düzleminde $(1, 1)$ noktası kırmızıya boyalıdır. Her adımda kırmızıya boyalı bir (x, y) noktası için hem $(x + 2, y + 1)$ noktası hem de $(2x + y, 2x)$ noktası kırmızıya boyanıyor. Buna göre $(100, 60)$, $(70, 70)$, $(150, 100)$ ve $(120, 200)$ noktalarından kaç tanesi sonlu adım sonunda kırmızıya boyanmış olabilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 21** Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olsun. $[AC]$ köşegeni üzerinde bir E noktası, $[AE]$ üzerinde ise bir F noktası alınıyor. $s(\widehat{DEC}) = s(\widehat{DFM}) = 90^\circ$, $|AF| = 4$ ve $|EC| = 18$ olduğuna göre $ABCD$ dikdörtgeninin alanı nedir?
- a) 156 b) 192 c) 250 d) 312 e) 390

- 22** p bir asal sayı olmak üzere, $p \mid a - b^2$, $p \mid b - a^2$ ve $p \nmid a - b$ olacak şekilde a ve b tam sayıları varsa p ye tuhaf asal sayı diyelim. 73, 79, 83, 89, 97 asal sayılarından kaç tanesi tuhaftır?
- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 23** Her x gerçel sayısı için $(x-27)P(3x) = (27x-27)P(x)$ koşulunu sağlayan ve sabit olmayan $P(x)$ polinomunun gerçel kökleri toplamı nedir?
- a) 30 b) 33 c) 36 d) 39 e) 42

- 24** 5×5 bir satranç tahtasının her birim karesine bir sayı, her satırda ve her sütunda en fazla 3 farklı sayı olacak şekilde yazılmıştır. Buna göre, bu tahtanın tamamında en fazla kaç farklı sayı yer alabilir?
- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

25 Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına indirilen dikmenin ayağı E noktasıdır. $|AD| = 1$, $|DC| = 2$ ve $2|AB|^2 + |BC|^2 = 18$ ise $|AB| - |DE|$ farkının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1

26 $x^3 - y^3 = 9z + 60$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

- a) 12 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

27 $x + y \neq 0$ koşulunu sağlayan x ve y gerçel sayıları için $4x(x + 2y) + \left(\frac{1 - y^2}{x + y}\right)^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- a) -8 b) -6 c) -4 d) -2 e) 0

28 11×11 satranç tahtasının birim karelerinden oluşan n tane 2×2 karenin herhangi ikisinin en fazla bir ortak birim karesi varsa n en fazla kaç olabilir?

- a) 44 b) 46 c) 48 d) 50 e) 52

29 Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ ve $|BC| = 2\sqrt{2}$ dir. $[BC]$ kenarının orta noktası D ve B noktasından $[AC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E noktasıdır. Buna göre D den geçen ve AC doğrusuna E noktasında teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

- a) $\frac{5}{4}$ b) 1 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

30 m ve n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere, $2m^2 + 3m - 44 = 3p^n$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, p) üçlüsü vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

31 Bir $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu tüm x ve y pozitif rasyonel sayıları için

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy(x+y)}$$

eşitliğini sağlıyor. $f(x)$ fonksiyonunun aldığı en küçük değer 1 ise $f(1)$ nedir?

- a) 1 b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 2

32 Aslı ve Zehra, başlangıçta boş olan 30×30 bir satranç tahtası üzerinde sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor. Aslı her hamlesinde, kırmızı bir bilye içeren bir birim kareyle ortak bir kenarı bulunmayan boş bir birim kareye bir kırmızı bilye yerleştiriyor. Zehra ise her hamlesinde, boş bir birim kareye bir beyaz bilye yerleştiriyor. Oyunculardan herhangi biri hamle yapamazsa oyun sonlandırılıyor. Aslı her zaman en az k tane kırmızı bilye yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, k en fazla kaç olabilir?

- a) 200 b) 225 c) 250 d) 275 e) Hiçbiri

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2023

- 1 $s(\widehat{B}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, M den AC ye çizilen dikmenin BC ile kesişimi N olsun. $|BN| = 8$ ve $|CN| = 17$ ise $|MN|$ kaçtır?
 a) 10 b) 13 c) 15 d) 17 e) Hiçbiri

- 2 $3^{p^2+p+1} + 7^{p^2+p+1}$ sayısının p ile bölünmesini sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

- 3 x bir gerçel sayı olmak üzere, $4^x + 7^x + 8^x + 10^x + 14^x + 15^x = 17^x + 19^x$ denklemini sağlayan kaç tane x sayısı vardır?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz çoklukta

- 4 31 kişiden oluşan bir sınıfta, 4 öğrenci içeren her grubun içinde kendisi dışındaki diğer 3 öğrenciyle arkadaş olan en az bir öğrenci bulunuyor. Buna göre bu sınıfta kendisi dışındaki tüm öğrencilerle arkadaş olan öğrenci sayısı en az kaç olabilir?
 a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

- 5 $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay ve dış açıortay uzunlukları birbirine eşit ise $2 \cdot \widehat{A} + 3 \cdot \widehat{B} + \widehat{C}$ kaç derecedir?
 a) 360° b) 420° c) 540° d) 630° e) Hiçbiri

- 6 $(3m + 4n)(4m + 3n) = 3^{63}$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?
 a) 44 b) 64 c) 88 d) 128 e) Hiçbiri

- 7 x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ şeklinde yazılamayan 2023'ten küçük kaç tane pozitif tam sayı vardır?
 a) 1 b) 12 c) 22 d) 44 e) 90

- 8 Bir yuvarlak masa etrafına oturmuş 31 öğrenciden üçü, seçilen herhangi iki öğrenci arasında en az 4 öğrenci bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde seçilebilir?
 a) 1450 b) 1471 c) 1512 d) 1543 e) 1581

- 9 O merkezli bir çember üzerinde alınan A ve B noktaları için $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ dir. Çemberin küçük AB yayı üzerinde alınan bir C noktası ve $[OB]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$ dir. $|AC| = 30$, $|CD| = 16$ ise $|BD|$ uzunluğu kaçtır?
 a) $\sqrt{66}$ b) $2\sqrt{34}$ c) $3\sqrt{34}$ d) $2\sqrt{66}$ e) Hiçbiri

- 10 $2^n + 3^n + 5^n$ sayısının 100 ile tam bölünmesini sağlayan 2023 ten küçük kaç n pozitif tam sayısı vardır?
 a) 50 b) 101 c) 150 d) 202 e) 251

- 11 a_1, a_2, \dots, a_{31} dizisi $a_1 = \frac{1}{31}$ ve her $n = 1, 2, \dots, 30$ değeri için $(n+2)a_n = na_{n+1}$ olarak tanımlanmıştır. Buna göre, $a_1 + a_2 + \dots + a_{31}$ kaçtır?
 a) 176 b) 179 c) 181 d) 187 e) 192

- 12 Bir sıraya dizilmiş 7 topun her biri kırmızı, mavi ve siyah renklerden birine, yan yana iki siyah top olmayacak şekilde kaç farklı biçimde boyanabilir?
 a) 1128 b) 1158 c) 1186 d) 1224 e) 1296

- 13** Bir kenarının uzunluğu 6 olan $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BE| = 4$ olan bir E noktası alınıyor. $DE \cap AB = \{K\}$ ve $AE \cap DC = \{L\}$ olmak üzere, EKL üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı nedir?
- a) $\frac{13\sqrt{10}}{6}$ b) 6 c) 9 d) $\frac{8\sqrt{13}}{3}$ e) Hiçbiri

- 14** $a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 18b^3 = 2023$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 15** x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $x^2 - xy + y^2 - x - 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?
- a) -3 b) $-\frac{7}{3}$ c) -2 d) $-\frac{4}{3}$ e) Hiçbiri

- 16** 7 kişilik bir grup içinde bazı tokalaşmalar olmuştur. Tam olarak 1 kişiyle tokalaşan kişi sayısı 1, tam olarak 2 kişiyle tokalaşan kişi sayısı 2 ve tam olarak 3 kişi ile tokalaşan kişi sayısı 3'tür. Buna göre, toplam tokalaşma sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 17** $|AB| = 6$, $|AC| = 8$, $|BC| = 10$ olan bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin çevrel çemberinde A noktasını içermeyen BC yayının orta noktası D olsun. Çevrel çembere D noktasında teğet olan doğrunun AB doğrusuyla kesiştiği nokta E ise $|ED|$ uzunluğu nedir?

- a) 8 b) $\frac{36}{5}$ c) 9 d) $\frac{28}{3}$ e) $\frac{35}{4}$

- 18** p bir asal sayı, $n < p$ bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$p^2 \mid n^5 + n^4 + 7n^3 + n^2 + n + 7$$

şartını sağlayan kaç (n, p) ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 19** $k \neq -1$ ve ℓ verilmiş gerçel sayılar olsun.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} = 1$$

eşitliğinde $x = k$ iken $yz = \ell$ olmak zorunda ise, $k + \ell$ kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

- 20** $0 * 1 * 2 * 3 * \dots * 30 * 31$ ifadesindeki 31 tane $*$ işaretinin her birinin yerine $+$ ya da $-$ işareti yazarak kaç farklı pozitif tam sayı elde edilebilir?

- a) 224 b) 248 c) 312 d) 368 e) 496

- 21** Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde köşelerden farklı bir D noktası alınıyor. $|AB| = |AD|$, $\frac{|CD|}{|BD|} = 3 + 2\sqrt{3}$, $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ ise $m(\widehat{ABC})$ kaçtır?
 a) 75° b) 60° c) 45° d) 30° e) Hiçbiri

- 22** p ve q asal sayılar olmak üzere,

$$\frac{7pq}{1+p+q}$$

ifadesi $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$ değerlerinden kaç tanesine eşit olabilir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 23** $x^2 = 4y + 1$, $y^2 = x^3 + 1$ denklem sisteminin gerçel sayılarda kaç farklı (x, y) çözüm ikilisi bulunur?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 24** Başlangıçta 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarının yazılı olduğu bir tahtada Aslı bir oyun oynuyor. Aslı her hamlesinde tahtadan önce bir a sayısı sonra da bir b sayısı seçiyor. $x^2 - ax + b$ polinomunun iki kökü de pozitif tam sayıysa, Aslı a ve b sayılarını silip yerine bu polinomun iki kökünü yazmaktadır. Aslı, sonlu sayıda hamle sonucunda tahtadaki sayıların çarpımını 14, 16, 20, 24, 32 sayılarından kaç tanesini yapabilir?
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

25 $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde A noktasından BC kenarına inen dikmenin ayağı D ve $[AD]$ nin orta noktası E olsun. $m(\widehat{BEC}) = 120^\circ$ ise $\frac{|BC|}{|AD|}$ kaçtır?

- a) 2 b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) 3 d) $2\sqrt{3}$ e) 4

26 $f : \{1, 2, \dots, 30\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 30\}$ birebir bir fonksiyon olmak üzere, en fazla kaç tane $1 \leq a \leq 30$ tam sayısı için $f(1)f(2)\dots f(a) + 1$ sayısı 31 ile tam bölünür?

- a) 14 b) 15 c) 16 d) 29 e) 30

27 x, y, z pozitif gerçel sayıları

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{49 - y^2} + \sqrt{169 - z^2} &= 24 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa $\frac{xz}{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\frac{30}{7}$ b) 5 c) 6 d) $\frac{65}{8}$ e) $\frac{49}{3}$

28 Bir masa üzerinde k, m ve n bilye içeren üç öbek bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu masa üzerindeki öbeklerden istediği ikisini seçiyor ve bu iki öbeğin daha az bilye içereninden daha fazla bilye içerenine istediği bir pozitif tam sayı adedince bilyeyi aktarıyor (seçilen öbeklerde bilye sayıları eşitse bilyeler öbeklerin herhangi birinden aktarılıyor). Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(k, m, n) = (9, 9, 21), (11, 11, 11), (9, 10, 31), (8, 16, 24)$ ve $(9, 22, 22)$ için birer kez oynanırsa oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 29** Bir kenar uzunluğu 50 olan $ABCD$ karesinin iç bölgesinde bir Γ çemberi çiziliyor. A ve B den Γ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları 40, C den Γ çemberine çizilen teğetin uzunluğu 30 ise Γ çemberinin yarıçapı kaçtır?
 a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

- 30** $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + (31!)^{(31!)}$ sayısının 31 ile bölümünden kalan nedir?
 a) 0 b) 1 c) 15 d) 16 e) 30

31

$$(xy + 2)^2 + 10(x + y) + 21 = 2(x^3 + y^3) + 5(x^2 + y^2)$$

eşitliğini sağlayan x ve y gerçel sayıları için $x^2 + y^2$ en az kaçtır?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

- 32** 32×31 bir tahtanın tüm birim karelerine farklı birer gerçel sayı yazılmıştır. Bir birim karedeki sayı, bu birim kareyle en az bir ortak köşe paylaşan birim karelerdeki sayıların en fazla birinden küçükse bu birim kareye **özel** birim kare diyelim. Özel birim kare sayısı en fazla kaç olabilir?
 a) 480 b) 488 c) 496 d) 505 e) 512

32. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı - 2024

- 1 $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda, E noktası D ile F arasında olacak şekilde $[CD]$ üzerinde alınan E ve F noktaları için, $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BAF}) = 45^\circ$, $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{ABE}) = 60^\circ$, $|DE| = 3$, $|CF| = 4$ ise $|AB|$ kaçtır?

a) $2 + 4\sqrt{3}$ b) $3 + 3\sqrt{3}$ c) $5 + \sqrt{3}$ d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

- 2 $3^{p^3} + 5^{p^5} + 7^{p^7} + 11^{p^{11}}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 3 Her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için n 'den büyük olmayan en büyük asal sayı $f(n)$, n 'den büyük olan en küçük asal sayı $g(n)$ olsun.

$$\frac{1}{f(2)g(2)} + \frac{1}{f(3)g(3)} + \cdots + \frac{1}{f(112)g(112)}$$

toplamı kaçtır?

a) $\frac{109}{222}$ b) $\frac{111}{226}$ c) $\frac{110}{113}$ d) $\frac{113}{1224}$ e) $\frac{55}{111}$

- 4 100 öğrencinin katıldığı bir yaz okulunda en fazla 4 arkadaşı olan öğrencilere *utangaç* diyelim. Her öğrencinin en az 4 tane utangaç arkadaşı varsa, utangaç öğrenci sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 8

- 5 İç teğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninde, IBC üçgeninin çevrel çemberine I noktasında teğet olan doğrunun $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarıyla kesişimlerine sırasıyla M ve N diyelim. $|BC| = 225$, $|BM| = 64$ ve $|CN| = 81$ ise $|IB| + |IC|$ kaçtır?
- a) 250 b) 260 c) 270 d) 280 e) Hiçbiri

- 6 n bir pozitif tam sayı ve a, b, c, d pozitif tek tam sayılar olmak üzere, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 11 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c, d, n) beşlisi vardır?
- a) 4 b) 6 c) 12 d) 16 e) 20

- 7 x ve y pozitif gerçel sayıları $x^2 + xy = 1$ şartını sağlıyorsa, $61x + 25y$ en az kaç olabilir?
- a) 40 b) 50 c) 60 d) 70 e) 80

- 8 Bir tahtaya 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 sayıları yazılmıştır. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, her işlemde tahtadaki sayılardan k tanesi seçiliyor ve seçilmiş sayı 1 azaltılıyor. Birkaç işlem sonucunda tahtadaki tüm sayıları 0 yapmak mümkünse k 'ye uygun sayı diyelim. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sayılarından kaç tanesi uygun sayıdır?
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

9 $|AB| < |AC|$ olan bir ABC üçgeninde \hat{A} açısının iç açıortayının $[BC]$ kenarı ve ABC üçgeninin çevrel çemberiyle ikinci kesişim noktasına sırasıyla D ve E diyelim. E noktasından BC doğrusuna inen dikmenin BC ve AB doğruları ile kesişimi sırasıyla F ve G olsun. D noktasından AC ve GC doğrularına inen dikme ayakları sırasıyla K ve L olmak üzere, $|DK| = 3$ ve $|DL| = 11$ ise $\frac{|DF|}{|FC|}$ oranı kaçtır?

- a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{3}{8}$

10 k bir pozitif tam sayı olmak üzere, k 'nin pozitif tam bölenlerinin sayısını $d(k)$ ile gösterelim. $d(n^3) = 2 \cdot d(n^2)$ ve $1 \leq n \leq 2024$ koşullarını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

- a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

11 $\{3x\} + \{4x\} + \{5x\} = \{x\} + 2$ denkleminin kaç tane $0 < x < 1$ çözümü vardır? (x gerçel sayısı için x 'ten, x 'i aşmayan en büyük tam sayının çıkarılmasıyla elde edilen sayı $\{x\}$ ile gösterilir. Örneğin, $\{20, 24\} = 0, 24$ ve $\{32\} = 0$.)

- a) 0 b) 1 c) 2 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

12 5×5 bir satranç tahtasının 5 birim karesine birer bilye yerleştirilecektir. Bu yerleştirme, herhangi bir satır ile herhangi bir sütunun birleşiminde en az bir bilye bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde yapılabilir?

- a) 5760 b) 5870 c) 5940 d) 6050 e) 6130

- 13** $|AB| = 50$, $|AC| = 78$, $|BC| = 112$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının üzerinde $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{5}{9}$ şartını sağlayan bir D noktası almıyor. ABD üçgeninin çevrel merkezi ile ACD üçgeninin ağırlık merkezi arasındaki uzaklık nedir?
 a) $\sqrt{1961}$ b) $\sqrt{1993}$ c) $\sqrt{2001}$ d) $\sqrt{2024}$ e) Hiçbiri

- 14** N pozitif tam sayısının 1 dışındaki en küçük tek pozitif böleni d , en büyük tek pozitif böleni ise D olsun. $N = 15D + 11d$ olmasını sağlayan N pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?
 a) 4576 b) 4928 c) 5280 d) 5632 e) 5984

- 15** x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 129 = 12xy + 18(x + y)$ ise xy kaçtır?
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

- 16** Bir dik koordinat düzleminde, $0 \leq x \leq 9$ ve $0 \leq y \leq 9$ koşullarını sağlayan tam sayı koordinatlı (x, y) noktalarının N tanesi boyanmıştır. Üç köşesi de boyalı olan bir dik üçgen bulunmuyorsa N en fazla kaç olabilir?
 a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 26

- 17** $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$ olan bir ABC üçgeninde çevrel merkez O noktası olup, A noktasının BC doğrusuna göre yansıması D olsun. $BD \cap OC = \{S\}$ ve $CD \cap OB = \{R\}$ ise $m(\widehat{RAS})$ kaçtır?
 a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) Hiçbiri

- 18** $n^2 + 1$ 'in 269 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısının rakamları toplamı kaçtır?
 a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) Hiçbiri

- 19** r bir gerçel sayı olmak üzere, $5x^4 - 8x^3 + rx^2 - 11x + 10 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı 1 ise gerçel köklerinin toplamı kaçtır?
 a) $\frac{6}{5}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) Hiçbiri

- 20** Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir satranç tahtasının birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, her bir satırdaki sayıların toplamı çift ve her bir sütundaki sayıların toplamı tek olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?
 a) 216 b) 240 c) 252 d) 288 e) Hiçbiri

- 21** Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası $|AE| = |CD|$ eşitliğini sağlamaktadır. $AE \cap BC = \{F\}$ olmak üzere, $ECFG$ bir dikdörtgen olacak şekilde bir G noktası alınıyor. $DF \cap AG = \{K\}$ olmak üzere, $m(\widehat{AKE}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{KAE}) = 25^\circ$ ise $m(\widehat{EAB})$ kaçtır?
 a) 20° b) 30° c) 40° d) 45° e) Hiçbiri

- 22** $2^{22!} - 1$ sayısını bölmeyen en küçük tek pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?
 a) 7 b) 9 c) 11 d) 13 e) 15

- 23** x, y, z, a pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xyz = a$ şartını sağlayan tüm (x, y, z) üçlüleri için $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6xyz$ sayısının alabileceği en küçük değere $f(a)$ diyelim. $f(a)$ sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?
 a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{11}{12}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\sqrt[3]{3}$

- 24** Başlangıçta bir doğru üzerinde farklı ağırlıklı n top soldan sağa hafiften ağıra doğru sıralanmıştır. Her işlemde aralarında 2 veya 5 top olan iki top birbirleriyle yer değiştiriliyor. $n = 2022, 2023, 2024, 2025$ değerlerinin kaçını için birkaç işlem sonucunda toplar soldan sağa ağırdan hafife doğru dizilebilir?
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

- 25** Çeşitkenar bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, AC doğrusuna C noktasında dik olan doğrunun MA doğrusu ile kesişimi N olsun. BMN üçgeninin çevrel çemberi AB doğrusuna B noktasında teğet ise $\frac{|AB|}{|MA|}$ kaçtır?

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

- 26** $n \leq 2024$ bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\{kn : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2024\}$ kümesinde tam olarak 9 tane tam kare bulunmasını sağlayan n sayılarının toplamı kaçtır?

a) 18240 b) 18810 c) 19380 d) 19950 e) 20520

- 27** Birbirinden farklı x, y, z gerçel sayıları,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9x + 7y + 6z \\ y^2 + z^2 &= 7x + 7y + 8z \\ z^2 + x^2 &= 6x + 8y + 8z \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlıyorsa $\frac{15x^2 + 4y^2}{z^2}$ kaçtır?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

- 28** (x_1, \dots, x_{32}) 32-lisi $(1, 2, \dots, 32)$ 'nin bir permütasyonu olmak üzere, her $i = 1, \dots, 32$ için $y_i = \max\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ olsun. Tam olarak 2 tane i indisi için $y_i = x_i$ olmasını sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_{32})$ permütasyonlarının sayısının 29 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 0 b) 4 c) 9 d) 18 e) 27

- 29** $|AB| > |AC|$ olan bir ABC üçgeninde \hat{A} açısına ait dış açıortayın BC ile kesişimi D olsun. $|BC| = 24\sqrt{2}$, $|AB| = 35$ ve $m(\widehat{ADC}) = 45^\circ$ ise ABC üçgeninin alanı kaçtır?
 a) 60 b) 70 c) 72 d) 84 e) 98

- 30** Pozitif tam bölenlerinin ortancası (medyanı) 63 olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır? (Bir veri grubunun ortancası, veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralandığında veri sayısı tekse en ortadaki sayıya, çiftse en ortadaki iki sayının aritmetik ortalamasına eşittir.)
 a) 8 b) 14 c) 18 d) 20 e) 22

- 31** Bir $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dizisi, $a_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\left(a_{n+1} - \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}\right) \left(a_{n+1} - \frac{5a_n + 1}{a_n + 5}\right) = 0$$

şartını sağlamaktadır. Buna göre, a_{2024} sayısı kaç farklı değer alabilir?

- a) 2024 b) 2024^2 c) 2^{2023} d) 2^{2024} e) Hiçbiri
- 32** İlk hamleyi Aslı yapmak üzere, Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Hamleler yapılmadan önce Zehra 1, 2, ..., 200 sayılarıyla numaralanmış bilyeleri istediği bir sırayla bir doğru üzerine diziyor. Sırası gelen oyuncu bu bilye dizisinin en solunda ve en sağında bulunan iki bilyeden birini alıyor. Zehra, yüzüncü bilyesini aldığı anda elindeki en büyük ve en küçük numaralı bilyelerin numaraları farkının en fazla N olmasını garantileyebiliyorsa N sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?
 a) 99 b) 112 c) 125 d) 149 e) Hiçbiri

Cevap Anahtarları

(*) ile belirtilen yıllara ait resmi cevap anahtarı bulunmamaktadır.

1993 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	C
3	E
4	B
5	C
6	D
7	A
8	C
9	B
10	E
11	D
12	A
13	D
14	C
15	E
16	C
17	B
18	D
19	E
20	B
21	D
22	A
23	E
24	C
25	B
26	D
27	A
28	E
29	A
30	E
31	B
32	D
33	A
34	E
35	A
36	B

1994 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	B
3	E
4	D
5	D
6	C
7	D
8	E
9	A
10	D
11	C
12	C
13	B
14	D
15	A
16	A
17	D
18	B
19	D
20	B
21	C
22	A
23	E
24	C
25	C
26	A
27	D
28	A
29	C
30	E
31	B
32	D
33	D
34	D
35	E
36	B
37	(Hatalı)
38	B
39	A
40	B

1995 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	D
3	D
4	E
5	E
6	B
7	A
8	E
9	D
10	A
11	(Hatalı)
12	A
13	D
14	C
15	C
16	A
17	(Hatalı)
18	C
19	D
20	E
21	D
22	E
23	D
24	C
25	B
26	C
27	B
28	D
29	E
30	B
31	A
32	B
33	B
34	(Hatalı)
35	B
36	(Hatalı)

1996 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	E
2	C
3	A
4	C
5	B
6	A
7	D
8	B
9	D
10	B
11	B
12	B
13	B
14	A
15	D
16	B
17	E
18	C
19	B
20	D
21	D
22	A
23	D
24	E
25	A
26	C
27	A
28	C
29	D
30	D
31	A
32	C
33	A
34	E
35	A
36	E

1997 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	E
3	D
4	E
5	B
6	C
7	A
8	D
9	A
10	A
11	A
12	A
13	C
14	D
15	A
16	C
17	C
18	E
19	(Hatalı)
20	C
21	E
22	B
23	A
24	E
25	A
26	B
27	B
28	B
29	E
30	B
31	C
32	B
33	D
34	D
35	A
36	D

1998

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	B
3	A
4	B
5	D
6	D
7	B
8	A
9	E
10	C
11	A
12	C
13	E
14	B
15	D
16	C
17	A
18	C
19	D
20	E
21	B
22	E
23	D
24	D
25	C
26	A
27	D (Hatalı)
28	A
29	C
30	D
31	D
32	A
33	A
34	C
35	C
36	E

1999 (*)

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	D
3	A
4	C
5	E
6	D
7	B
8	B
9	D
10	C
11	D
12	C
13	A
14	B
15	A
16	E
17	E
18	B
19	B
20	C
21	B
22	E
23	C
24	D
25	B
26	B
27	B
28	B
29	D
30	E
31	B
32	E
33	C
34	C
35	D
36	C

2000

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	A
3	C
4	E
5	E
6	B
7	C
8	C
9	E
10	B
11	B
12	C
13	D
14	D
15	A
16	A
17	C
18	D
19	B
20	D
21	D
22	B
23	C
24	C
25	E
26	C
27	C
28	B
29	C
30	B
31	D
32	A
33	A
34	E
35	C
36	B

2001

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	D
3	B
4	A
5	D
6	C
7	A
8	A
9	C
10	D
11	D
12	B
13	A
14	C
15	E
16	D
17	B
18	B
19	B
20	D
21	D
22	B
23	E
24	D
25	B
26	B
27	A
28	C
29	E
30	A
31	C
32	A
33	C
34	A
35	C
36	D

2002

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	E
3	C
4	C
5	A
6	B
7	B
8	E
9	E
10	E
11	B
12	B
13	İPTAL
14	D
15	A
16	A
17	C
18	C
19	B
20	B
21	A
22	B
23	A
24	A
25	C
26	C
27	B
28	B
29	İPTAL
30	B
31	D
32	B
33	B
34	A
35	D
36	C

2003

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	C
3	C
4	B
5	E
6	B
7	E
8	C
9	B
10	C
11	B
12	A
13	D
14	B
15	C
16	D
17	D
18	A
19	C
20	E
21	E
22	A
23	A
24	C
25	B
26	A
27	C
28	E
29	D
30	D
31	B
32	D
33	E
34	D
35	E
36	B

2004

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	D
2	C
3	C
4	A
5	A
6	D
7	B
8	D
9	D
10	İPTAL
11	A
12	D
13	C
14	C
15	C
16	C
17	E
18	B
19	E
20	C
21	B
22	C
23	A
24	D
25	C
26	A
27	E
28	B
29	B
30	B
31	A
32	E
33	D
34	D
35	C
36	B

2005

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	E
2	A
3	D
4	C
5	B
6	C
7	B
8	B
9	E
10	C
11	A
12	A
13	E
14	A
15	C
16	B
17	D
18	C
19	D
20	D
21	E
22	B
23	C
24	D
25	D
26	B
27	A
28	E
29	B
30	E
31	C
32	A
33	A
34	C
35	D
36	B

2006

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	E
2	C
3	E
4	D
5	B
6	E
7	D
8	E
9	A
10	C
11	A
12	E
13	E
14	C
15	A
16	A
17	C
18	D
19	B
20	D
21	A
22	B
23	D
24	E
25	B
26	B
27	E
28	D
29	B
30	B
31	C
32	D
33	B
34	B
35	B
36	A

2007

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	E
3	C
4	B
5	E
6	A
7	E
8	D
9	A
10	D
11	C
12	A
13	A
14	A
15	D
16	C
17	C
18	B
19	D
20	B
21	B
22	D
23	C
24	C
25	E
26	B
27	D
28	B
29	D
30	E
31	A
32	B
33	A
34	B
35	E
36	İPTAL

2008

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	C
3	E
4	C
5	B
6	A
7	D
8	E
9	C
10	A
11	C
12	C
13	D
14	C
15	B
16	B
17	D
18	E
19	C
20	E
21	C
22	B
23	D
24	D
25	A
26	E
27	E
28	E
29	D
30	D
31	D
32	A
33	B
34	D
35	E
36	C

2009

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	E
3	B
4	B
5	D
6	D
7	D
8	C
9	A
10	D
11	B
12	A
13	B
14	A
15	E
16	A
17	D
18	A
19	A
20	A
21	C
22	B
23	C
24	E
25	D
26	B
27	B
28	C
29	D
30	D
31	A
32	C
33	E
34	C
35	D
36	C

2010

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	C
3	A
4	C
5	C
6	D
7	A
8	B
9	D
10	B
11	D
12	B
13	E
14	A
15	A
16	A
17	A
18	C
19	B
20	D
21	E
22	C
23	B
24	C
25	A
26	D
27	C
28	B
29	E
30	E
31	E
32	E
33	D
34	C
35	A
36	D

2011

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	C
3	D
4	A
5	C
6	B
7	D
8	C
9	C
10	D
11	A
12	C
13	B
14	A
15	E
16	E
17	B
18	B
19	E
20	C
21	E
22	C
23	A
24	E
25	D
26	A
27	B
28	D
29	E
30	D
31	E
32	A
33	E
34	B
35	D
36	C

2012

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	D
2	D
3	C
4	D
5	A
6	A
7	B
8	A
9	C
10	E
11	E
12	D
13	E
14	D
15	E
16	A
17	B
18	B
19	E
20	C
21	C
22	A
23	D
24	A
25	C
26	C
27	D
28	E
29	A
30	B
31	B
32	B
33	C
34	B
35	C
36	D

2013

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	A
3	A
4	C
5	A
6	C
7	B
8	E
9	D
10	E
11	C
12	E
13	C
14	C
15	B
16	D
17	A
18	A
19	D
20	D
21	D
22	A
23	E
24	E
25	A
26	C
27	C
28	E
29	C
30	E
31	C
32	D
33	B
34	D
35	D
36	B

2014

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	C
3	B
4	D
5	E
6	C
7	A
8	D
9	E
10	A
11	E
12	C
13	E
14	B
15	D
16	C
17	B
18	D
19	E
20	A
21	C
22	B
23	A
24	B
25	D
26	C
27	C
28	A
29	D
30	E
31	D
32	B

2015

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	C
3	B
4	D
5	A
6	C
7	E
8	E
9	D
10	C
11	B
12	A
13	D
14	E
15	C
16	B
17	D
18	B
19	C
20	E
21	B
22	E
23	C
24	B
25	D
26	B
27	E
28	C
29	C
30	C
31	C
32	D

2016

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	D
3	A
4	B
5	D
6	C
7	B
8	B
9	C
10	D
11	B
12	B
13	B
14	D
15	E
16	C
17	E
18	B
19	E
20	E
21	A
22	B
23	A
24	D
25	E
26	B
27	C
28	D
29	B
30	D
31	D
32	D

2017

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	İPTAL
3	E
4	C
5	A
6	E
7	B
8	C
9	E
10	A
11	A
12	B
13	E
14	D
15	A
16	D
17	B
18	E
19	C
20	D
21	D
22	A
23	C
24	A
25	B
26	C
27	E
28	C
29	D
30	B
31	C
32	B

2018

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	D
2	C
3	B
4	C
5	E
6	D
7	B
8	C
9	E
10	B
11	D
12	E
13	A
14	B
15	B
16	D
17	D
18	E
19	B
20	C
21	B
22	A
23	D
24	E
25	D
26	D
27	B
28	C
29	B
30	B
31	B
32	D

2019

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	E
2	A
3	C
4	D
5	C
6	E
7	B
8	B
9	E
10	D
11	E
12	B
13	A
14	D
15	C
16	E
17	D
18	A
19	D
20	C
21	D
22	C
23	A
24	B
25	E
26	D
27	B
28	E
29	A
30	A
31	B
32	C

2020

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	C
3	E
4	D
5	A
6	C
7	A
8	E
9	B
10	D
11	B
12	A
13	A
14	D
15	B
16	B
17	D
18	A
19	C
20	C
21	D
22	D
23	E
24	C
25	C
26	E
27	A
28	E
29	B
30	B
31	C
32	E

2021

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	E
2	B
3	B
4	A
5	D
6	A
7	C
8	D
9	B
10	C
11	C
12	A
13	A
14	E
15	A
16	E
17	B
18	C
19	E
20	E
21	A
22	B
23	B
24	D
25	E
26	A
27	D
28	C
29	C
30	D
31	C
32	B

2022

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	B
2	D
3	C
4	D
5	B
6	E
7	E
8	E
9	E
10	A
11	E
12	A
13	D
14	D
15	B
16	E
17	D
18	A
19	C
20	A
21	D
22	C
23	D
24	B
25	A
26	E
27	C
28	D
29	C
30	C
31	B
32	B

2023

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	A
2	B
3	B
4	C
5	E
6	A
7	D
8	E
9	B
10	D
11	A
12	D
13	A
14	B
15	B
16	C
17	E
18	D
19	E
20	B
21	A
22	D
23	C
24	C
25	B
26	C
27	A
28	C
29	D
30	E
31	C
32	E

2024

Cevap Anahtarı	
Soru	Yanıt
1	C
2	B
3	B
4	A
5	E
6	C
7	C
8	D
9	B
10	E
11	B
12	E
13	A
14	A
15	E
16	B
17	C
18	A
19	İPTAL
20	B
21	C
22	C
23	D
24	A
25	D
26	B
27	D
28	E
29	D
30	D
31	A
32	A