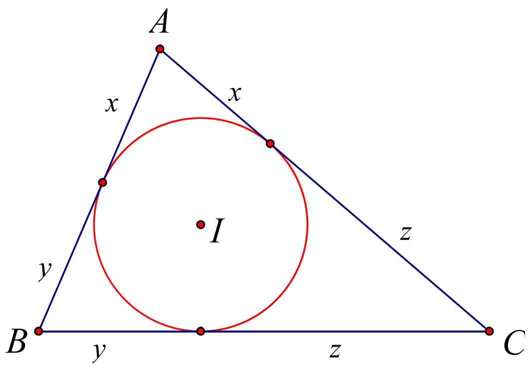
Ravi Dönüşümü

Lokman Gökçe

12 Ekim 2023

Ravi Dönüşümü

Ravi dönüşümü, kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgende $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ yazılmasıdır. $x, y, z > 0$ olup geometrik anlamını aşağıdaki şekilden görebiliriz. Şimdi bu yöntem ile ilgili bazı problemler sunabiliriz.



Şekil 1: Ravi Dönüşümü

Problemler

1. Kenar uzunlukları a, b, c olan herhangi bir üçgende

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

olduğunu ispatlayınız. Eşitlik koşulunu belirleyiniz.

2. Kenar uzunlukları a, b, c ve yarı çevresi s olan bir üçgende

$$a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) \leq \frac{3}{2}abc$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

3. **(a)** Kenar uzunlukları a, b, c olan herhangi bir üçgende

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik durumunu belirleyiniz.

(Padoa Eşitsizliği[1])

(b) a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

olduğunu gösteriniz.

(Leo Giugiuc)

[1] Alessandro Padoa (1868-1937)

4. a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olsun.

(a) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

(Nesbitt Eşitsizliği, 1903)

(b) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$ eşitsizliğini ispatlayınız.

(Petrovic Eşitsizliği, 1932)

5. a, b, c kenar uzunluklarına sahip herhangi bir üçgende

$$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

olduğunu kanıtlayınız. Eşitlik koşulunu belirleyiniz.

Çözümler

1. Çözüm 1: $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ Ravi dönüşümü yapılırsa ispatlamamız istenen eşitsizlik:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3$$

biçimine dönüşür.

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ eşitsizlikleri yazıp taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 6$$

elde edilir. Eşitlik durumu $x = y = z$ iken sağlanır. Yani $a = b = c$ olup, üçgenin eşkenar olması halinde eşitlik hali geçerlidir.

Çözüm 2: Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin faydalı bir türü olan Bergstrom Eşitsizliği'nden faydalanarak problemi çözebiliriz. Ayrıca çözümün bir aşamasında kullanacağımız bazı eşitsizlikler de şunlardır:

a, b, c gerçel sayılar ise $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ve $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ dır. Bu eşitsizlikleri ispatlamak için $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ aşikar eşitsizliğinde parantezleri açmak yeterli olacaktır. Ayrıca eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $a = b = c$ olmasıdır.
Şimdi ana probleme geri dönelim ve $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}$ diyelim. Bergstrom Eşitsizliği'nden

$$S = \frac{a^2}{ab+ca-a^2} + \frac{b^2}{bc+ab-b^2} + \frac{c^2}{ca+bc-c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)}$$

olur. Aşikar eşitsizlikten elde ettiğimiz eşitsizlikleri de kullanırsak

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)} = 3$$

olup $S \geq 3$ elde edilir. Eşitlik analizi de kolayca yapılabilir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $a = b = c$, yani, üçgenin eşkenar olmasıdır.

2. $s = \frac{a+b+c}{2}$ ve Ravi dönüşümünden $a = y+z, b = x+z, c = x+y$ alıp eşitsizlikte yazarsak ispatlamamız gereken ifade,

$$y^2z + zx^2 + yx^2 + z^2y + y^2x + z^2x \geq 6xyz$$

biçimine dönüşür. Soldaki 6 pozitif terim için airtmetik geometrik ortalama eşitsizliğini uygularsak, bu eşitsizliğin de doğru olduğunu görürüz. Eşitlik durumu $x = y = z$ için vardır, yani üçgen eşkenar olmalıdır.

3. Verilen eşitsizlikte $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$ Ravi dönüşümü uygulanırsa gösterilmesi istenilen eşitsizlik

$$(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$$

halini alır. Eşitsizliğin solundaki üç çarpana ayrı ayrı

$$y+z \geq 2\sqrt{yz}$$
$$x+z \geq 2\sqrt{xz}$$
$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

şeklinde aritmetik geometrik ortalama eşitsizliği uygulanarak

$$(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$$

eşitsizliği elde olunur. Eşitlik durumu aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğinden dolayı $x = y = z$ iken, yani üçgen eşkenar olduğunda sağlanır.

4. (a) $S = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a^2}{ab+ac} + \dfrac{b^2}{bc+ba} + \dfrac{c^2}{ca+cb}$ olup Bergström Eşitsizliği uygulanırsa,

$$S \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

olur. Üç terimlinin karesi açılırsa, iyi bilinen $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ eşitsizliğinin doğru olduğunu görmek kolaydır. Böylece $S \geq \dfrac{3}{2}$ elde edilir. Eşitlik durumu $a = b = c$ iken sağlanır.

Ayrıca burada Nesbitt eşitsizliğinin genelleştirilmiş biçiminin çeşitli ispatlarını sunduk. Bunları da inceleyebilirsiniz.

(b) çözüm 1: Ravi dönüşümü'nü uygularsak $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ olacak şekilde x, y, z pozitif gerçel sayıları vardır. $S = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$ dersek

$$S = \frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z}$$

olup

$$S < \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

elde edilir.

Çözüm 2: Petrovic eşitsizliğinin O. Bottema'nın Geometrik Eşitsizlikler kitabında verilen güzel bir ispatını biraz daha açıklayıcı bir dille sunalım.
Üçgenin yarı çevresi $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ olmak üzere, öncelikle $b+c > s$ olduğunu görelim.
$b+c > \dfrac{1}{2}(a+b+c) \iff 2b+2c > a+b+c \iff b+c > a$ olmasıdır. Bu son eşitsizlik, üçgen eşitsizliği olup doğrudur. Benzer şekilde $c+a > s$ ve $a+b > s$ eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan kolayca,

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = \frac{a+b+c}{s} = 2$$

elde edilir.

5. Farklı çözümler de olabilir. Düşünme biçimimi açıklama adına vakit kaybettiğim yerleri de ekleyeceğim. Şu şekilde yaptım.

Ravi dönüşümü uygularsak $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ olacak şekilde x, y, z pozitif gerçel sayıları vardır. Bu durumda ispatlamamız gereken eşitsizlik

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \tag{1}$$

biçimine dönüşür. Bu aşamada bazı faydasız uğraşlarım oldu. Her iki tarafın karesini alıp, düzenleyip tekrar kare almak gibi. Bir noktada $f(x) = \sqrt{x}$ konkav fonksiyonu için Jensen eşitsizliğini düşündüm. $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ olacaktır. Bu ise,

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \tag{2}$$

eşitsizliğini verir. Artık (2) eşitsizliğinin problemimizi çözeceğini görebiliyoruz. Bu noktada, (2) eşitsizliğinin aslında $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sayıları için aritmetik ortalama - karesel ortalama eşitsizliği olduğunu da görüyoruz. Yani hiç Jensen eşitsizliğine girişmeden aritmetik karesel ortalama eşitsizliği ile,

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{y+z}{2}} \geq \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{z+x}{2}} \geq \frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2}$$

yazıp taraf tarafa toplarsak (1) deki

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}$$

eşitsizliğine ulaşıyoruz. Ortalama eşitsizliklerinde eşitlik hali yalnızca $x = y = z$ iken geçerlidir. Bu durumda $a = b = c$ olup üçgen eşkenar olmalıdır.