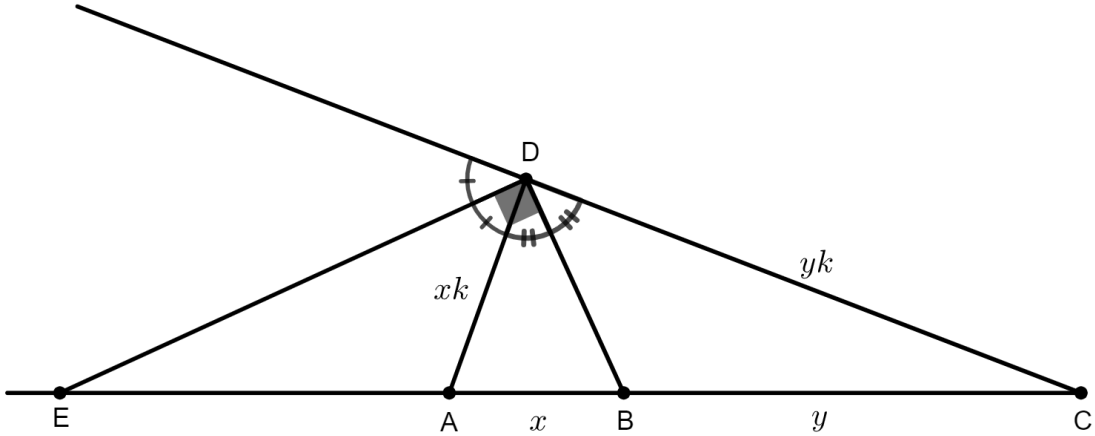


ÇÖZÜM:Oğulcan Barış Öztürk

Lemma ve Tanım: B , A ve C arasında olmak üzere A, B, C doğrusal üç nokta olsun. $|AB| = x$ ve $|BC| = y$ olmak üzere $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{x}{y}$ ($x \neq y$) koşulunu sağlayan D noktalarının geometrik yeri bir çemberdir. Bu çembere **Apollonius Çemberi** denir.

Kanıt: $x = y$ olması durumunda bu noktaların yeri $|AC|$ 'nin orta dikmesi olacaktır. O halde $x < y$ kabul edebiliriz. AB doğrusu üzerinde istenen koşulu sağlayan iki nokta vardır. Bunlardan bir tanesi B noktasıdır. Diğer nokta ise $|AB|$ 'nin dışında ve $x < y$ olduğundan A noktasına daha yakındır. Bu noktaya da E diyelim. (Şekil 1) Şimdi AB doğrusunun dışında bulunan ve istediğimiz koşulu sağlayan bir nokta olduğunu kabul edelim ve bu noktaya da D diyelim. ADC üçgeninde $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{x}{y}$ olduğundan iç açıortay teoreminin karşıtı gereğince $|BD|$, D açısına ait iç açıortaydır. Benzer şekilde $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{x}{y}$ olduğundan dış açıortay teoreminin karşıtı gereğince $|DE|$, D açısına ait dış açıortaydır. O halde $m(\widehat{BDE}) = 90^\circ$ dir. Buradan da D noktasının $|BE|$ çaplı çember üzerinde olduğu anlaşılmış olur. Kanıt biter.

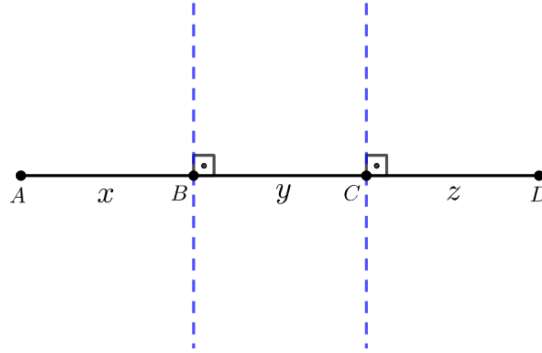


(Şekil 1)

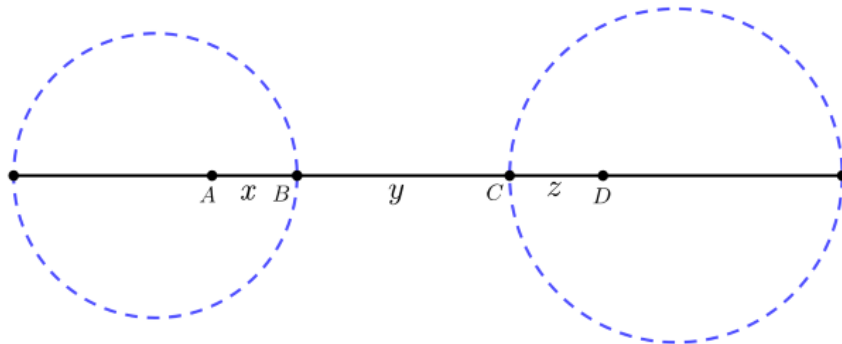
Kanıtta bu çember üzerinde yer alan bir D noktasının $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$ şartını da sağladığını göstermiş olduk. Aynı zamanda $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$ şartını sağlayan D noktaları da iç açıortay teoremi gereğince bu çember üzerinde olacaktır. O halde $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$ şartını sağlayan tüm D noktalarının $|BE|$ çaplı Apollonius çemberi üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi bu bilgiyi kullanalım.

A, B, C, D sırasıyla doğrusal dört nokta ve $|AB| = x, |BC| = y, |CD| = z$ olmak üzere $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{CPD})$ şartlarını sağlayan bir P noktasının var olmasını sağlayan gerek ve yeter şartları inceleyelim. Aradığımız nokta $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{BPC})$ şartını sağlayan bir nokta olduğundan biliyoruz ki bu nokta A ve C noktalarının B noktasına göre çizilen *apollonius çemberi* üzerinde olmalıdır. Keza bu nokta $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{CPD})$ şartını sağladığından dolayı da B ve D noktalarına göre çizilen *apollonius çemberi* üzerinde olmalıdır. O halde şunu söylebiliriz ki eğer böyle bir P noktası varsa bu iki çemberin kesişmesi gerekir. Aradığımız P noktaları da çemberlerin kesiştiği noktalardır. Şimdi x, y ve z 'nin hangi durumlarda bu iki çemberin kesişmesi mümkün olur, bunu araştıralım.

$x \leq y$ ve $z < y$ ya da $x = y = z$ durumlarda böyle bir P noktasının var olamayacağı görsel olarak barizdir. Çünkü $x = y = z$ durumunda çemberler birbirine paralel iki doğruya dönüşür. (Şekil 2). $x < y$ ve $z < y$ şartlarının her ikisinin birden sağlandığı durumda ise çemberlerin merkezleri $|AB|$ 'nin zıt taraflarında bulunacağından çemberlerin kesişmesi mümkün olmaz. (Şekil 3)



Şekil 2

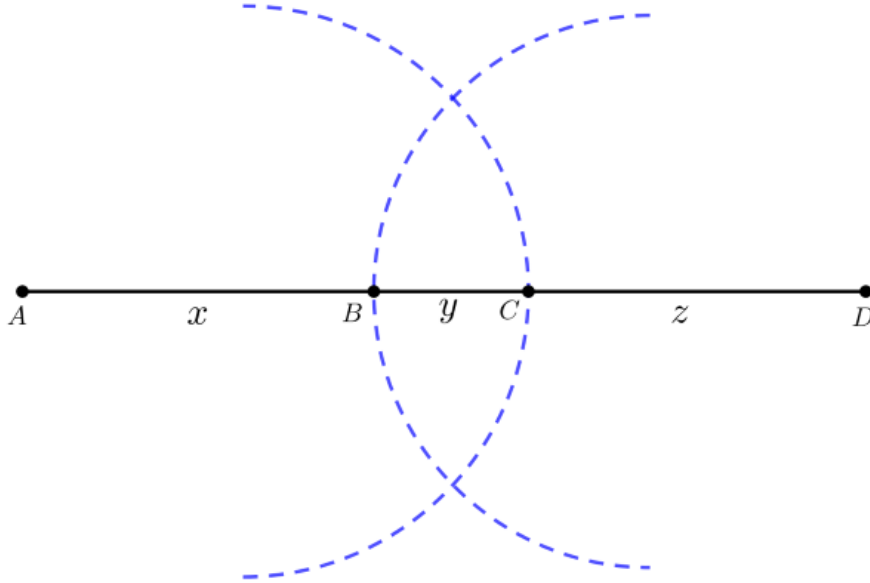


Şekil 3

Ayrıca şuna dikkat edelim ki $x = y = z$ ve $x \leq y$, $z < y$ durumlarının her ikisinde de hem $xz > y^2$ hem de $(3x - y) \cdot (3z - y) > 4y^2$ eşitsizlikleri sağlanmamaktadır.

Hem y 'nin x ve z 'den büyük olduğu durumda hem de $x = y = z$ durumunda çemberlerin kesişmesinin mümkün olmadığını gösterdik. O halde bu çemberlerin kesişebilmesi için $x > y$ veya $z > y$ eşitsizliklerinden en az biri sağlanmalıdır. Genelliği bozmadan $x > y$ kabul edelim ve bu kabulü göz önünde bulundurarak oluşabilecek çemberlerin durumunlarını inceleyelim.

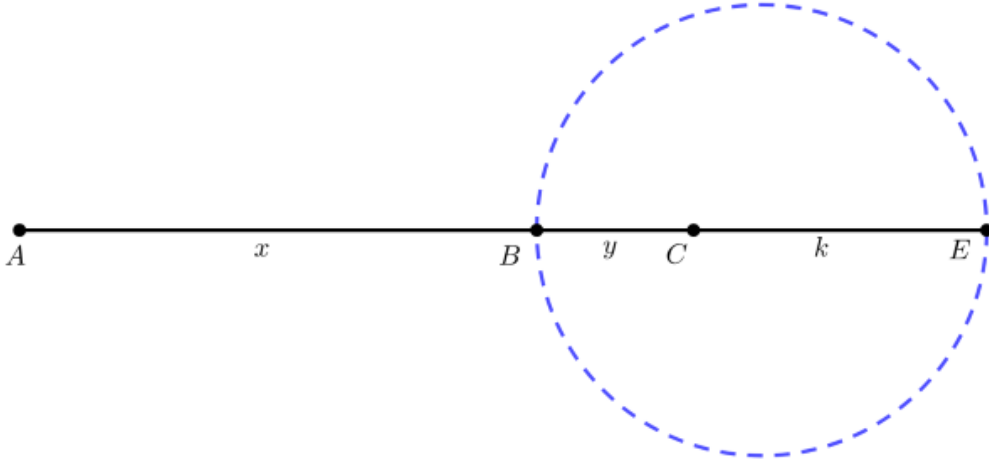
Öncelikle şunu söyleyebiliriz ki $x > y$ ve $z \geq y$ eşitsizliklerinin her ikisinin de aynı anda sağlandığı durumda çemberlerin daima kesişeceği görsel olarak barizdir. (Şekil 4). Çünkü B noktasından geçen çemberin merkezi, $x > y$ olduğu için $|AC|$ doğru parçasının dışında ve C 'ye daha yakın olacaktır. Benzer şekilde $z > y$ olduğundan dolayı da C noktasından geçen çemberin merkezi $|BD|$ doğru parçasının dışında ve B 'ye daha yakın olacaktır. ($y = z$ olması durumunda C noktasından geçen çember AD ile C noktasında dik kesişen bir doğruya dönüşecektir. B noktasından geçen çemberin merkezi $|AC|$ doğru parçasının dışında ve C 'ye daha yakın olduğundan bu çember ile doğrunun daima kesişeceği aşıkardır.)



Şekil 4

$x > y$ ve $z \geq y$ olduğu durumda aradığımız koşulu sağlayan P noktalarının varlığı göstermiş olduk. Ayrıca dikkat etmemiz gereken diğer önemli nokta şudur ki $x > y$ ve $z \geq y$ olduğu durumda $xz > y^2$ ve $(3x - y).(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinin her ikisinin de sağlandığı rahatlıkla görülebilir.

Son olarak $x > y > z$ durumunu inceleyelim. Bunun için önce bazı uzunlukları ve *apollonius çemberlerinin* yarıçaplarını hesaplayalım. A ve C noktalarının B noktasına göre çizilen *apollonius çemberinin* bu AC doğrusu ile iki noktada kesiştiğini ve hatta bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının çemberin çapı olduğunu biliyoruz. Bu bilgilerden yararlanarak çemberin yarıçapını hesaplayalım.



Şekil 5

$|AC|$ doğru parçasının dışında, AC doğrusu ile çemberin kesiştiği noktaya E diyelim. $|CE| = k$ olsun. (Şekil 5). K noktası $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{x}{y}$ şartını sağladığından

$$\frac{x}{y} = \frac{x + y + k}{k}$$

yazabiliriz. Buradan k 'yı çekersek

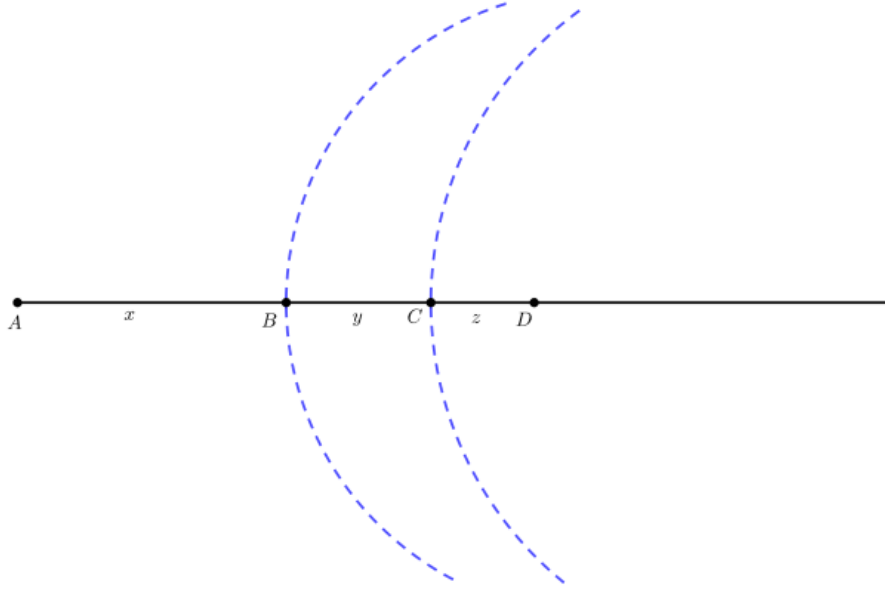
$$k = \frac{y \cdot (x + y)}{x - y}.$$

elde ederiz. $|BE|$ çap olduğundan çemberin yarıçapı

$$\frac{|BE|}{2} = \frac{y + \frac{y \cdot (x + y)}{x - y}}{2} = \frac{xy}{x - y}$$

dir.

Benzer şekilde B ve D noktalarına göre çizilen *apollonius çemberinin* BD doğrusunu kestiği diğer noktaya F diyecek olursak da $|BF| = \frac{y(y+z)}{z-y}$ olacaktır. Keza benzer şekilde yarıçap uzunluğu da $\frac{CF}{2} = \frac{yz}{z-y}$ 'dir. Şekil 6'da $x > y > z$ şartının sağlandığı durumda şeklin kabaca neye benzeyeceğini görülebilir. Eğer iki çember kesişiyorsa bu çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık; yarıçaplar farkının mutlak değerinden büyük, yarıçaplar toplamından küçük olmalıdır. $x > y > z$ olması durumunda merkezler arasındaki uzaklık, daima yarıçaplar toplamından küçüktür. Çünkü her iki çemberin merkezi de C noktasının sağ tarafındadır. (Şekil 5). Aksinin mümkün olabilmesi için B noktasından geçen çemberin merkezinin $|BC|$ arasında olması gerekirdi fakat çemberin merkezinin C noktasının sağında olduğunu biliyoruz.



Şekil 6

Merkezler arasındaki uzaklık daima yarıçaplar toplamından küçük olduğuna göre çemberlerin kesişebilmesi için merkezler arası uzaklığın yarıçaplar farkının mutlak değerinden büyük olması gerekir. Şimdi bunun için gereken şartları araştıralım.

A ve C noktalarına göre çizilen çemberin yarıçapı $\frac{xy}{x-y}$ olduğundan bu çemberin merkezinin B noktasına olan uzaklığı da $\frac{xy}{x-y}$ 'dir. B ve D noktalarına göre çizilen çemberin yarıçapı da $\frac{yz}{z-y}$ 'dir. O halde bu çemberin merkezinin B noktasına olan uzaklığı $y + \frac{yz}{z-y}$ olur. Bu durumda çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık, merkezlerin B noktasına olan uzaklıkları farkının mutlak değerine eşit olur. Yani bu uzaklık $|y + \frac{yz}{y-z} - \frac{xy}{x-y}|$ 'dir. Şimdi ise eşitsizliğe bakalım.

$$\left| \frac{yz}{y-z} - \frac{xy}{x-y} \right| < \left| y + \frac{yz}{y-z} - \frac{xy}{x-y} \right|$$

Eşitsizliği $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ ya da $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ olması durumuna göre iki kısımda inceleyeceğiz.

Öncelikle $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ kısmına bakalım. $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ olması durumunda $0 < y$ eşitsizliği elde edilir. y pozitif olduğundan bu koşulun sağlandığı durumda çemberlerin daima kesişeceğini söylebiliriz. Ayrıca bu eşitsizliği biraz düzenleyecek olursak:

$$\begin{aligned} \frac{yz}{y-z} &\geq \frac{xy}{x-y} \\ \frac{z}{y-z} &\geq \frac{x}{x-y} \\ xz - yz &\geq xy - xz \\ 2xz &\geq xy + yz \\ xz &\geq y \cdot \frac{(x+z)}{2} \end{aligned}$$

A.O \geq G.O eşitsizliğinden dolayı $\frac{x+z}{2} > xz$ 'dir. ($x > z$ olduğunu göz önünde bulundurarak). O halde $xz > y \cdot \frac{(x+z)}{2}$ eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $\sqrt{xz} > y$ dolayısıyla $xz > y^2$ olması gerekir. Şimdi de $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığına bakalım. Bu eşitsizlikte parantezleri dağıtacak olursak $3xz - xy - yz - y^2 > 0$ eşitsizliğini elde ederiz. Burayı da

$$2 \underbrace{\left(xz - y \cdot \frac{(x+z)}{2} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{xz - y^2}_{y > 0} > 0$$

şeklinde yazabiliriz. $xz - y \cdot \frac{(x+z)}{2} \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca az önce $xz - y^2 > 0$ olduğunu da göstermiştik. O halde $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanmış olur. Böylece $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ olduğu durumda hem $xz > y^2$ eşitsizliğinin hem de $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliğinin doğruluğunu kanıtlamıştık olduk.

Şimdi de $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ durumuna bakalım. $\frac{xy}{x-y} - \frac{yz}{y-z} = a$ olsun. O halde eşitsizliğimizi $a < |y - a|$ şeklinde yazabiliriz. Buradan da $2a < y$ ve $y < -2a$ şeklinde iki eşitsizlik gelecektir. a ve y pozitif olduğundan $y < -2a$ olamaz. O halde $2a < y$ olmalıdır. Bu eşitsizliği çözelim.

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{xy}{x-y} - \frac{yz}{y-z} \right) &< y \\ \frac{2xy}{x-y} - \frac{2yz}{y-z} &< y \\ \frac{2xy}{x-y} &< y + \frac{2yz}{y-z} \\ \frac{2xy}{x-y} &< y \left(1 + \frac{2z}{y-z} \right) \\ \frac{2x}{x-y} &< 1 + \frac{2z}{y-z} \\ \frac{2x}{x-y} &< \frac{y+z}{y-z} \end{aligned}$$

Şimdi içler dışlar çarpımı yapalım.

$$2xy - 2xz < xy + xz - y^2 - yz$$

$$y^2 < 3xz - xy - yz$$

Her iki tarafı 3 ile genişletelim

$$3y^2 < 9xz - 3xy - 3yz$$

Her iki tarafa y^2 eklersek

$$4y^2 < (3x - y)(3z - y)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ olduğu durumda $xz > y^2$ eşitsizliğinin doğruluğunu araştıralım. $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ eşitsizliğini düzenlersek

$$xz < y \cdot \frac{(x+z)}{2}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Bunu aklımızda tutalım. $4y^2 < (3x - y)(3z - y)$ olduğunu az önce gösterdik. Bunu da biraz öncekine benzer şekilde yazalım:

$$2 \underbrace{\left(xz - \frac{y(x+z)}{2} \right)}_{<0} + xz - y^2 > 0$$

$xz < \frac{y(x+z)}{2}$ olduğundan $xz - \frac{y(x+z)}{2} < 0$ 'dır. O halde yukarıdaki eşitsizliğin sağlanabilmesi için $xz > y^2$ olmalıdır. Böylece $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ olduğu durumda da hem $xz > y^2$ eşitsizliğinin hem de $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliğinin doğruluğunu kanıtlamışık olduk.

Son olarak da

$$\left| y + \frac{yz}{y-z} - \frac{xy}{x-y} \right| < \left| \frac{yz}{y-z} - \frac{xy}{x-y} \right|$$

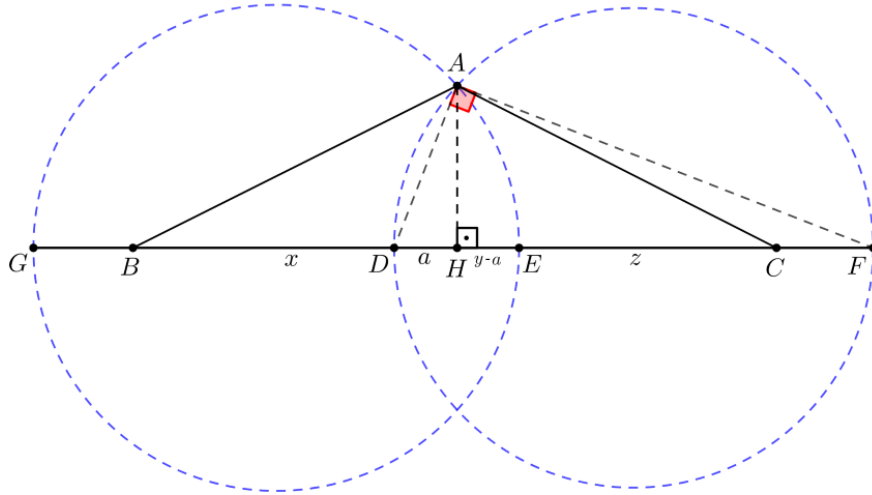
olursa neler olabileceğine bakalım. $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ olması durumunda çemberlerin daima kesişeceğini kanıtlamıştık. O halde $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ için bu eşitsizliğin sağlanması mümkün değildir. Diğer taraftan $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ olursa daha öncekine benzer şekilde düzenleme yaptığımızda $(3x - y)(3z - y) < 4y^2$ eşitsizliğine ulaşırız. Bu noktada da daha öncekine benzer mantıkla $xz < y^2$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu da demek olur ki $x > y > z$ olması durumunda eğer aranan koşulu sağlayan bir P noktası yoksa $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) < 4y^2$ eşitsizliklerinin en az biri sağlanmamaktadır.

Şimdiye kadar yaptıklarımızı özetleyecek olursak $x = y = z$ ya da $x < y$ ve $z \leq y$ eşitsizliklerinin aynı anda sağlandığı durumlarda aranan koşulları sağlayan bir P noktasının bulunamayacağını ve bu durumlar için $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinin sağlanmadığını gösterdik. Daha sonra ise $x > y$ ve $z \geq y$ şartlarının her ikisinin aynı anda sağlandığı durumda aranan koşulları sağlayan P noktalarının daima var olduğunu ve bu durum için $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinin sağlandığını gösterdik. Devamında $x > y > z$ durumunu $\frac{yz}{y-z} \geq \frac{xy}{x-y}$ ya da $\frac{xy}{x-y} > \frac{yz}{y-z}$ koşulunun sağlanmasına göre iki kısma ayırdık ve her iki koşul için de aranan şartları sağlayan bir P noktası varsa $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinin sağlandığını gösterdik. Son olarak ise $x > y > z$ iken çemberlerin kesişmesinin mümkün olmadığı durumlarda $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinden en az birinin sağlanmadığını gösterdik.

Şimdiye kadar x, y, z 'nin tüm durumlarına göre istenen koşulu sağlayan bir P noktasının varlığı araştırdık. Bunun sonucunda ise böyle bir noktanın varlığını mümkün kılan her durumda $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizliklerinin doğru olduğunu; böyle bir noktanın var olmadığı tüm durumlarda ise bu iki eşitsizlikten en az birinin sağlanmadığını gösterdik. Buradan hareketle şunu söyleyebiliriz ki $xz > y^2$ ve $(3x - y)(3z - y) > 4y^2$ eşitsizlikleri doğruysa aranan koşulu sağlayan 2 tane P noktası vardır (çünkü çemberle bir çember ya da doğru 2 noktada kesişir) ve AD 'ye göre simetriktir. Eğer bu iki eşitsizlikten en az biri sağlanmıyorsa da aranan koşulu sağlayan bir P noktası yoktur.

Şimdi de üçgenin alanı ile ilgilenelim. (Şimdiye kadar ki nokta adlandırmalarından farklı olarak burada sorudaki adlandırmalar kullanılmıştır.). Öncelikle ABC üçgeninde $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAC})$ olduğuna göre B ve E noktalarının D noktasına göre çizilen apollonius çemberi ile D ve C noktalarının E noktasına göre çizilen apollonius çemberinin kesiştiğini söyleyebiliriz. Bu durumda $x > y$ veya $z > y$ olmalıdır. Genelliği bozmadan $x > y$ kabul edelim. Bu koşulda $x > y$, $z > y$ ya da $x > y > z$ ya da $x > y = z$ olmasına göre 3 farklı durum ortaya çıkar. Bütün durumlara tek tek bakacağız.

$x > y$ ve $z > y$ durum ile başlayalım. B ve E noktalarının D noktasına göre çizilen çemberinin BC 'yi kestiği ikinci noktaya G ; D ve C noktalarının E noktasına göre çizilen çemberinin BC 'yi kestiği diğer noktaya F diyelim. A köşesine ait yüksekliğin ayağı H ve $|DH| = a$ olsun. Bu durumda $|EH| = y - a$ olur. H noktası, $x > y$ ve $z > y$ olduğundan dolayı D ve E arasındadır. (Şekil 7)



Şekil 7

A noktası $|EF|$ çaplı çember üzerinde olduğundan $m(\widehat{FAD}) = 90^\circ$ dir. Bu durumda ADF üçgeninde Euclid teoremi uygulanırsa:

$$|DH|.|HG| = |AH|^2$$

eşitliğine ulaşılır. Daha önce apollonius çemberinin çapının $\frac{2xy}{x-y}$ olduğunu bulmuştuk. Bu durumda $|DH| = a$ olduğundan $|HF| = \frac{2xy}{x-y} - a$ olur. Aynı zamanda $m(\widehat{EAG}) = 90^\circ$ olduğundan AEG üçgeninde de Euclid teoremini uygulanırsa

$$|EH|.|HG| = |AH|^2$$

elde edilir. Burada $|EH| = y - a$ olduğundan $|GH| = \frac{2yz}{z-y} - (y - a)$ olur. Elde ettiğimiz iki eşitlikten $|AH|^2$ leri çekip bulduğumuz değerleri yerine yazacak olursak:

$$a \left(\frac{2xy}{x-y} - a \right) = (y - a) \left(\frac{2yz}{z-y} - y + a \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan a 'yı bulmaya çalışalım. Parantezleri dağıtırsak:

$$\frac{2axy}{x-y} + \frac{2ayz}{z-y} = \frac{2y^2z}{z-y} + 2ay - y^2$$

$$2ay \left(\frac{x}{x-y} + \frac{z}{z-y} \right) = y \left(\frac{2yz}{z-y} + 2a - y \right)$$

$$2a \left(\frac{x}{x-y} + \frac{z}{z-y} \right) = \frac{2yz}{z-y} + 2a - y$$

$$2a \cdot \frac{(xz - xy + xz - yz)}{(x-y)(z-y)} = \frac{2yz}{z-y} + 2a - y$$

$$2a \cdot \frac{(xz - xy + xz - yz)}{(x-y)(z-y)} - 2a = \frac{2yz}{z-y} - y$$

$$2a \left(\frac{(xz - xy + xz - yz)}{(x-y)(z-y)} - 1 \right) = \frac{2yz}{z-y} - y$$

$$2a \left(\frac{(xz - y^2)}{(x - y)(z - y)} \right) = \frac{2yz}{z - y} - y$$

$$\frac{2a}{(x - y)(z - y)} (xz - y^2) = \frac{2yz}{z - y} - y$$

$$\frac{2a}{(x - y)(z - y)} (xz - y^2) = y(y + z)$$

$$\frac{2a}{(x - y)} (xz - y^2) = y(y + z)$$

$$a = \frac{y(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)}$$

Bulduğumuz bu değeri $a \left(\frac{2xy}{x - y} - a \right) = |AH|^2$ eşitliğinde yerine yazarsak:

$$|AH|^2 = \frac{y(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \left(\frac{2xy}{x - y} - \frac{y(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \right)$$

$$|AH|^2 = \frac{y^2(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \left(\frac{2x}{x - y} - \frac{(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \right)$$

$$|AH|^2 = \frac{y^2(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \left(\frac{2x}{x - y} - \frac{(xy + xz - y^2 - yz)}{2(xz - y^2)} \right)$$

$$|AH|^2 = \frac{y^2(y + z)(x - y)}{2(xz - y^2)} \left(\frac{3x^2z - x^2y - 2xy^2 - y^2z - y^3 + 2xyz}{2(x - y)(xz - y^2)} \right)$$

$$|AH|^2 = \frac{y^2(y + z)}{4(xz - y^2)^2} (3x^2z - x^2y - 2xy^2 - y^2z - y^3 + 2xyz)$$

$$|AH|^2 = \frac{y^2}{4(xz - y^2)^2} (3x^2z^2 + 2x^2yz + 2xyz^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - 2xy^3 - 2y^3z - y^4)$$

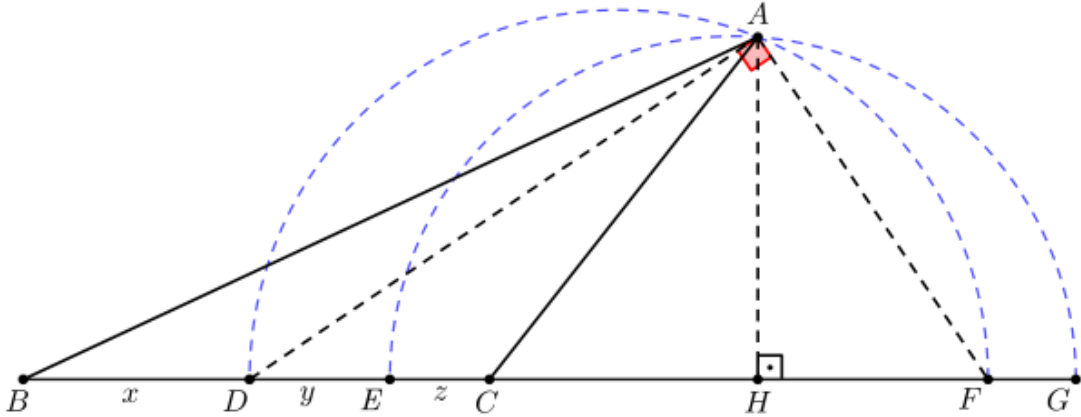
$$|AH|^2 = \frac{y^2}{4(xz - y^2)^2} [(xz - y^2)(x + y + z)^2 - xz(x^2 + z^2 - xz - y^2)]$$

Son adımı anlamak çok kolay değil. İki sene önceki notlarımda böyle bir sonuca ulaştığımı yazmışım fakat nasıl ulaştığımı hatırlamıyorum maalesef. Yine de $\frac{y^2}{4(xz-y^2)^2} (3x^2z^2 + 2x^2yz + 2xyz^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - 2xy^3 - 2y^3z - y^4)$ ifadeyle $\frac{y^2}{4(xz-y^2)^2} [(xz-y^2)(x+y+z)^2 - xz(x^2+z^2-xz-y^2)]$ ifadesini ayrı ayrı açılırsa bu iki ifadenin özdeş olduğunu görülebilir.

ABC üçgeninde A köşesine ait yüksekliği bulmuş olduk. O halde S , ABC noktasının alanı olmak üzere $S^2 = \frac{1}{4}|BC|^2|AH|^2$ olduğundan bu eşitlikte bulduğumuz değeri yerine yazacak olursak

$$S^2 = \frac{y^2}{16(xz-y^2)^2} (x+y+z)^2 [(xz-y^2)(x+y+z)^2 - xz(x^2+z^2-xz-y^2)]$$

elde ederiz. Böylece $x > y$, $z > y$ olması durumundan ABC üçgeninin alanını bulmuş olduk. Şimdi de $x > y > z$ durumuna bakalım. (Şekil 8)



Şekil 8

$|DH| = a$ olsun. O halde $|HF| = \frac{2xy}{x-y} - a$ olacaktır. Ayrıca $|EH| = a - y$ olduğundan $|HG| = \frac{2yz}{y-z} - (a - y)$ 'dir. Az önce yaptığımız gibi ADF ve AEG üçgenlerinde Euclid teoremi yazıp $|AH|^2$ leri eşitlersek

$$a \left(\frac{2xy}{x-y} - a \right) = (a-y) \left(\frac{2yz}{y-z} - a + y \right)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafında hem $(a-y)$ 'yi hem de $\left(\frac{2yz}{y-z} - a + y \right)$ 'yi eksi ile çarparsak

$$a \left(\frac{2xy}{x-y} - a \right) = (y-a) \left(-\frac{2yz}{y-z} - y + a \right)$$

olacaktır. Son olarak $-\frac{2yz}{z-y}$ 'da paydayı eksi ile çarpıp önündeki eksiden kur-

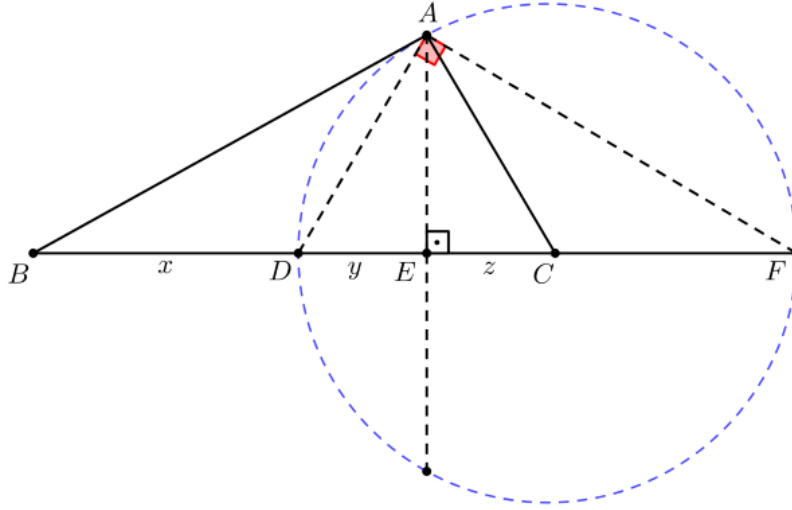
tulursak

$$a \left(\frac{2xy}{x-y} - a \right) = (y-a) \left(\frac{2yz}{z-y} - y+a \right)$$

elde ederiz. Dikkat edilirse bu eşitlik $x > y$, $z > y$ durumunda elde ettiğimiz eşitlik ile aynıdır. O halde bu durumda da

$$S^2 = \frac{y^2}{16(xz-y^2)^2} (x+y+z)^2 [(xz-y^2)(x+y+z)^2 - xz(x^2+z^2-xz-y^2)]$$

eşitliğinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Son olarak $x > y = z$ durumuna bakalım. (Şekil 9)



Şekil 9

$y = z$ olması durumunda Apollonius çemberi $|DC|$ 'nin orta dikmesine dönüşeceğinden $|DE| = y$ ve $|EF| = \left(\frac{2xy}{x-y} - a \right)$ olur. ADF üçgeninde Euclid teoremi yazarsak:

$$|AE|^2 = y \left(\frac{2xy}{x-y} - y \right) = \frac{y^2(x+y)}{x-y}$$

elde ederiz. Daha önceki iki durum için bulduğumuz formülde z gördüğümüz yere y yazarsak $\frac{y^2(x+y)}{x-y}$ elde edileceğinden $x > y = z$ durumu için de

$$S^2 = \frac{y^2}{16(xz-y^2)^2} (x+y+z)^2 [(xz-y^2)(x+y+z)^2 - xz(x^2+z^2-xz-y^2)]$$

eşitliğinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdiye kadar mümkün olan tüm durumlar için aynı formülün alanı verdiğini gösterdik. O halde genel olarak S, ABC üçgeninin alanı olmak üzere:

$$S^2 = \frac{y^2}{16(xz-y^2)^2} (x+y+z)^2 [(xz-y^2)(x+y+z)^2 - xz(x^2+z^2-xz-y^2)]$$