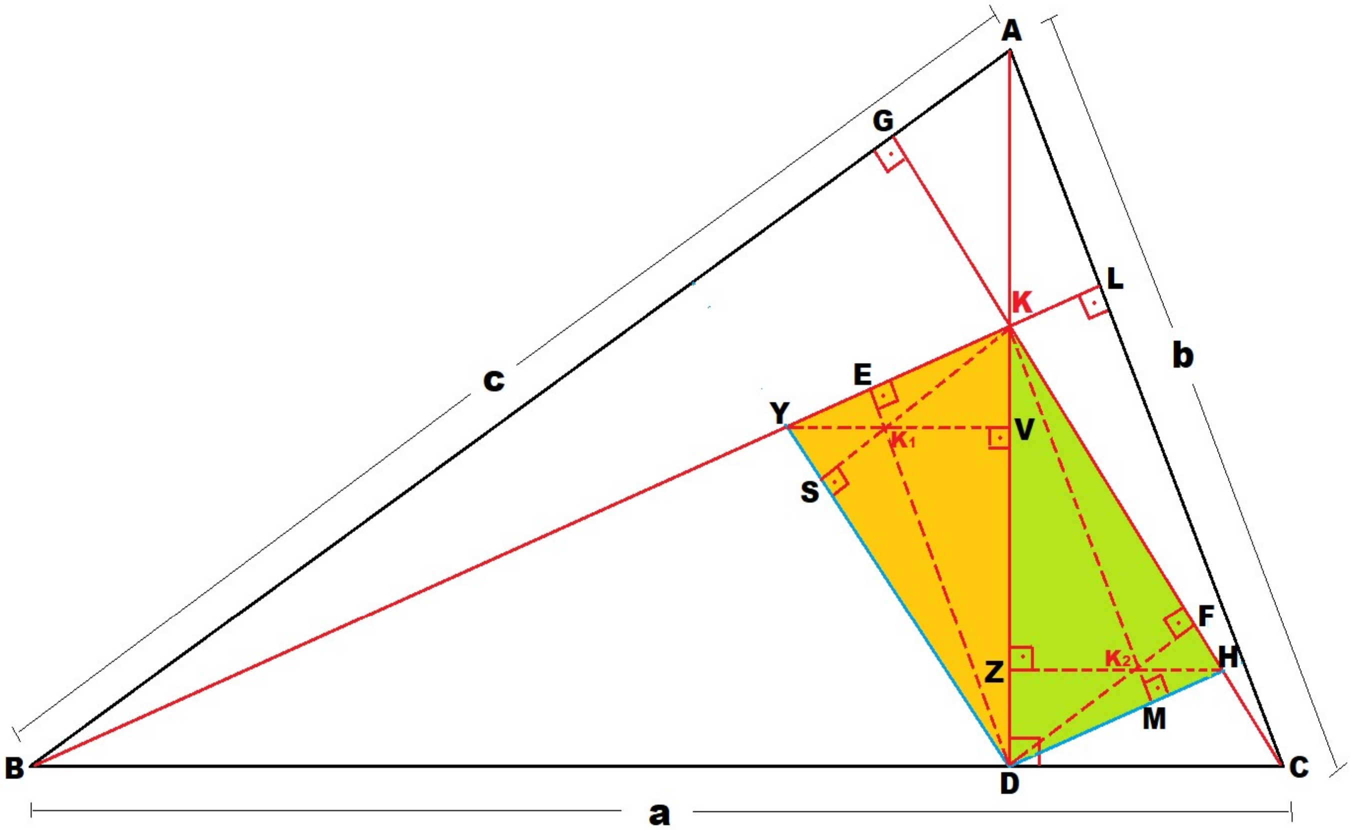
ÜÇGENDE YÜKSEKLİK VE DİKLİK MERKEZİ İLE İLGİLİ YENİ TEOREMLER

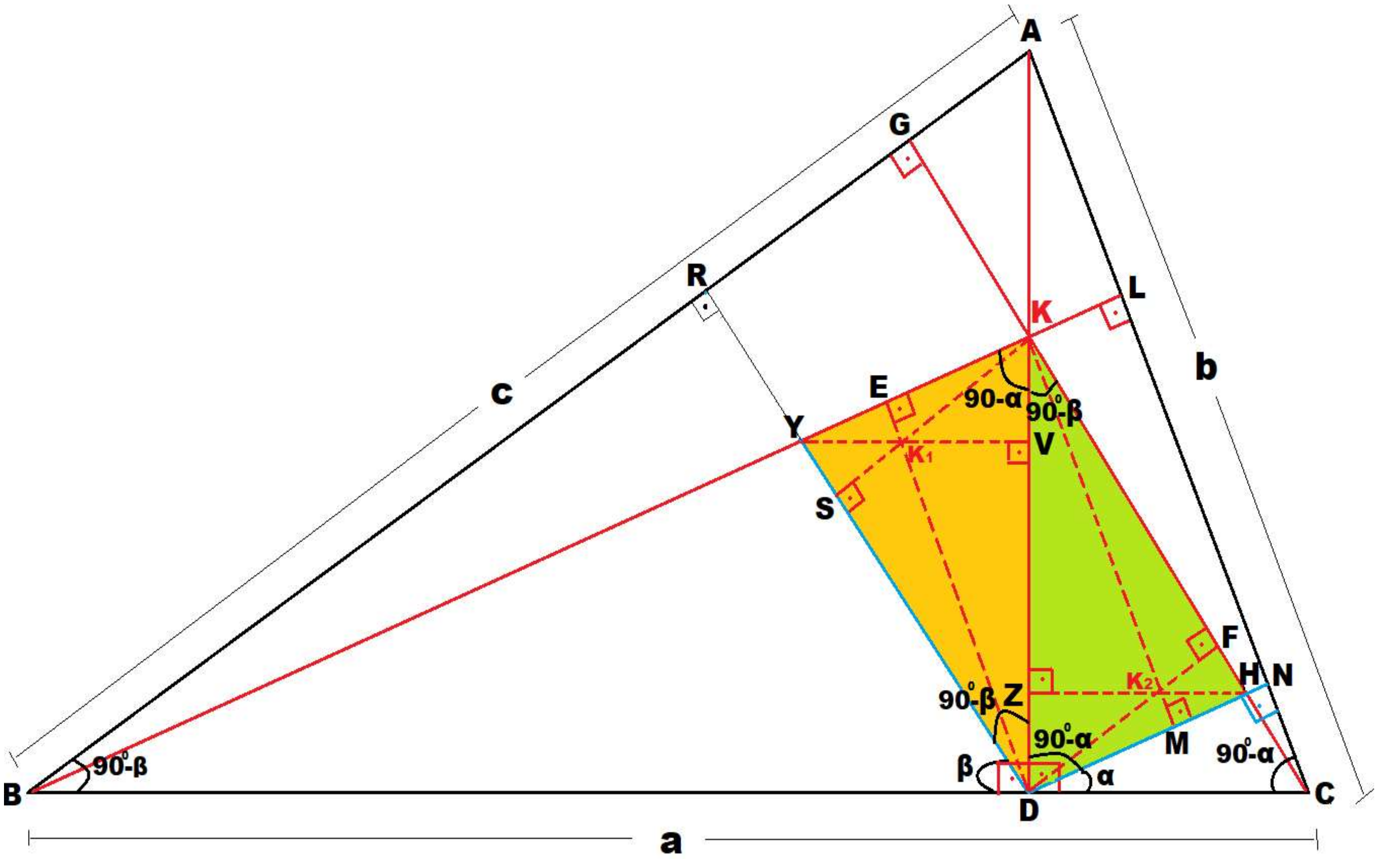


K noktası ABC üçgeninin diklik merkezi olmak üzere,

|YD| // |GC|

|DH| // |BL|

KYD üçgeni ve KHD üçgeni eş üçgenler ve ABC üçgenine benzer üçgenlerdir.Benzerlik oranları ise $\frac{|KD|}{|BC|}$ dir.



Yukarıda bahsedilen benzerliğin ispatı şöyle yapılabilir:

HDC açısına **α** diyelim. NDC üçgeninin N köşesi |DN| de |DH| gibi |BL| yüksekliğine paralel olduğu için b kenarına yani |AC| ye diktir yani 90 derecedir. Bu durumda ABC üçgeninin C köşesi ise (90- **α**) olacaktır.

KHD üçgenindeki (yeşil renkli üçgen) KDH açısının da (90- **α**) olması gerektiği görülecektir. Zira |AD|, a kenarına çizilmiş yükseklik olduğu için KDC açısı diktir yani 90 derecedir. HDC açısı **α** olduğundan KDH açısının (90- **α**) olacağı kolayca görülür.

RDB açısına ise **β** diyelim. |RD| ve |YD|, c kenarına ait yükseklik olan |GC| ye paralel olduğu için RDB üçgenindeki R köşesinin açısı da 90 derecedir. Bu durumda ABC üçgenindeki B açısı ise (90- **β**) olacaktır. KYD üçgenindeki (turuncu renkli üçgen) D köşesindeki açı da (KDB açısı 90 derece olduğu için) (90- **β**) olacaktır.

Şimdi ise KYD üçgenindeki (turuncu üçgen) K köşesindeki açı ile KHD üçgenindeki (yeşil üçgen) K köşesindeki açılara dikkat edelim. KYD ve KHD üçgeninin birleşiminden oluşan KYDH paralelkenarında |KD| bir köşegen oluşturmaktadır. Bu durumda ‘z kuralı’ olarak bilinen özellikten dolayı KHD üçgeninin K köşesindeki açı ile KYD üçgeninin D köşesinde açı eşit ve (90- **β**) olacaktır. Yine aynı mantıkla KYD üçgeninin K köşesindeki açı ile KHD üçgeninin D köşesindeki açılar da eşit ve (90- **α**) olmalıdır.

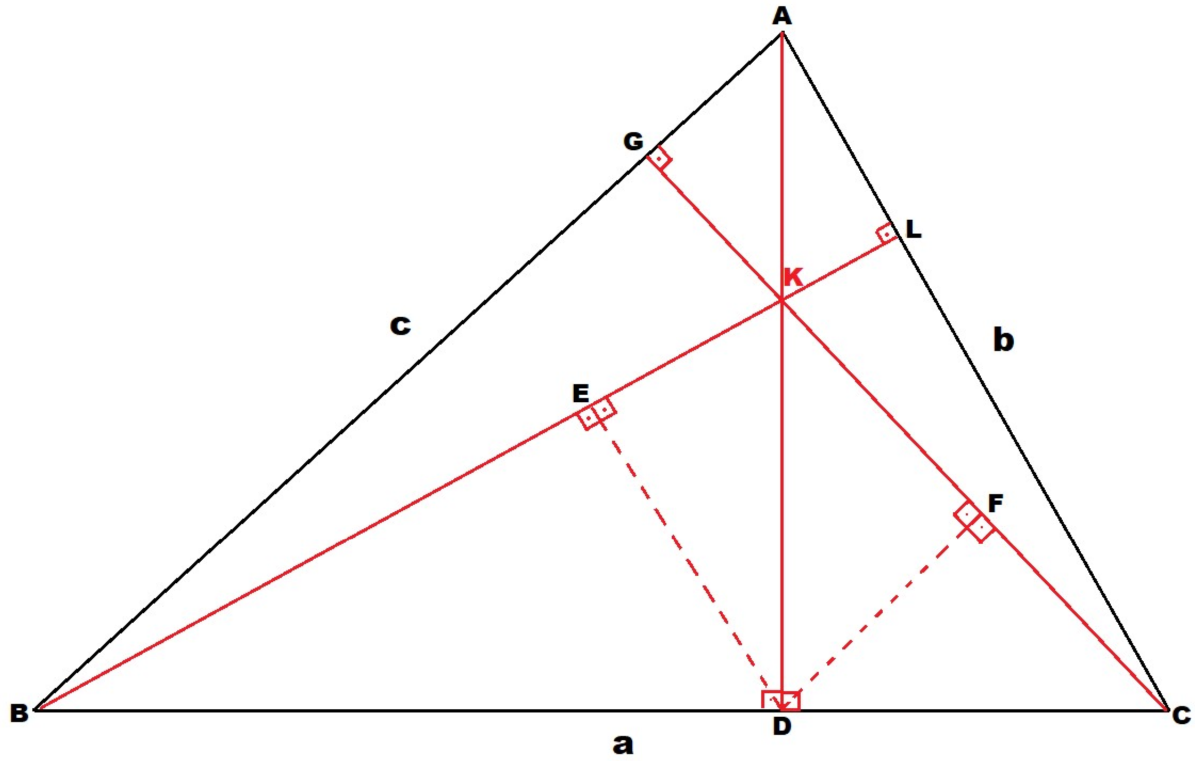
Sonuç olarak, üçgenlerde benzerlik kuralları gereği iki üçgenin her iki açısı eşit ise üçüncü açı da eşit olması gerektiğinden ve (Açı-Açı-Açı benzerliğinden) ABC üçgeni ile KYD ve KHD üçgenlerinin benzer olduğu ortaya çıkar. ABC üçgeninin iki açısından B açısı (90- **β**) ve C açısı (90- **α**) olduğu gibi KHD ve KYD üçgeninin de iki açısı (90- **β**) ve (90- **α**) olmaktadır. Sonuçta ABC üçgeni ile KYD ve KHD üçgenleri benzerdir ve aynı zamanda KYD ile KHD üçgenleri açıların yanında kenarları da eşit olduğu için eş üçgenlerdir.

Peki, benzerlik oranlarının |KD| / |BC| olması gerektiğini nereden anlıyoruz?

ABC üçgeni ile KYD ve KHD üçgenlerinin benzerliğini kenar kenara karşılaştırırsak yani hangi açının karşısında hangi kenar olduğuna dikkat edersek, KYD ve KHD nin |KD| kenarlarının ABC üçgeninin |BC| kenarına karşılık geldiğini görürüz.

Yukarıda açıkladığımız benzerliklerden ortaya çıkan bazı özelliklere de dikkat çekmek gerekir:

Bir üçgenin diklik merkezinden herhangi bir kenara çizilen dikmenin uzunluğunun (|KD|), çizildiği kenarın uzunluğuna (|BC|) oranı ile dikmenin kenarı kestiği noktadan (D) diğer herhangi bir kenarın yüksekliğine çizilen dikmenin(|ED|,|FD|) uzunluğunun o yüksekliğe oranı eşittir.



K noktası ABC üçgeninin diklik merkezi olmak üzere,

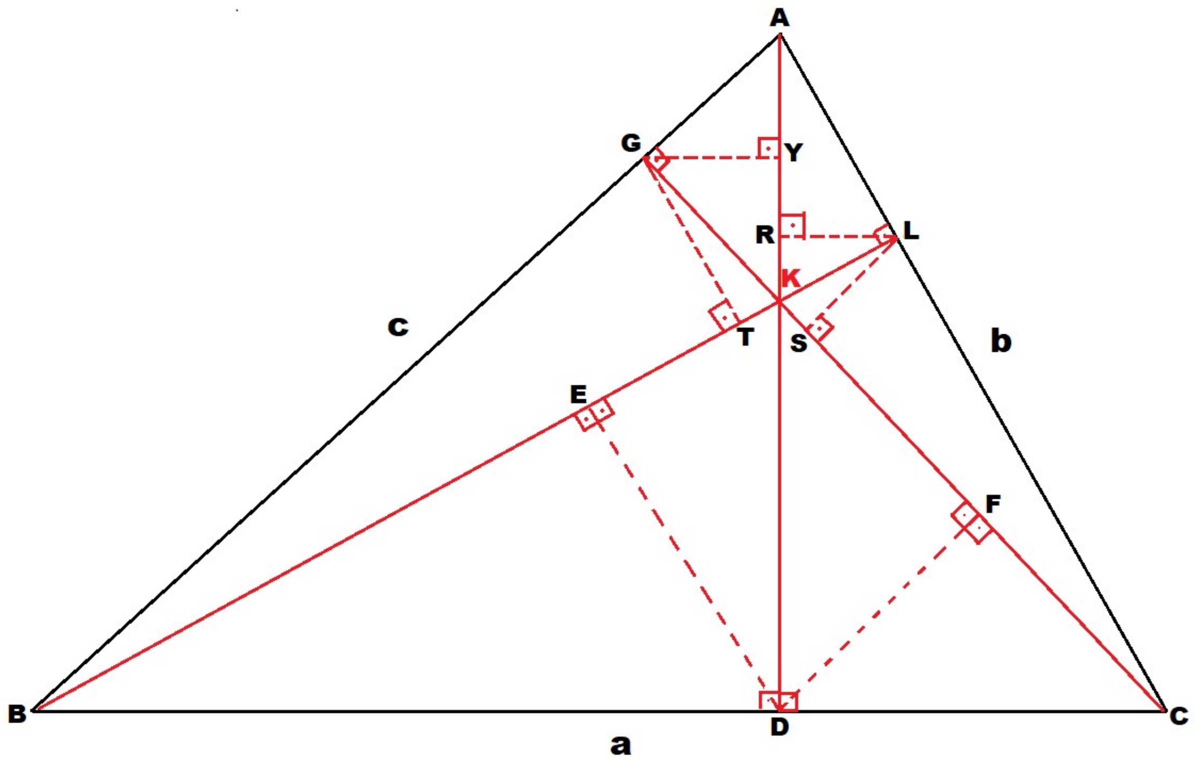
|AD|, a kenarına (|BC|) ait yükseklik, |AD|=h_a

|BL|, b kenarına (|AC|) ait yükseklik, |BL|=h_b

|GC|, c kenarına (|AB|) ait yükseklik, |GC|=h_c

$$\frac{|KD|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|BL|} = \frac{|FD|}{|GC|}$$

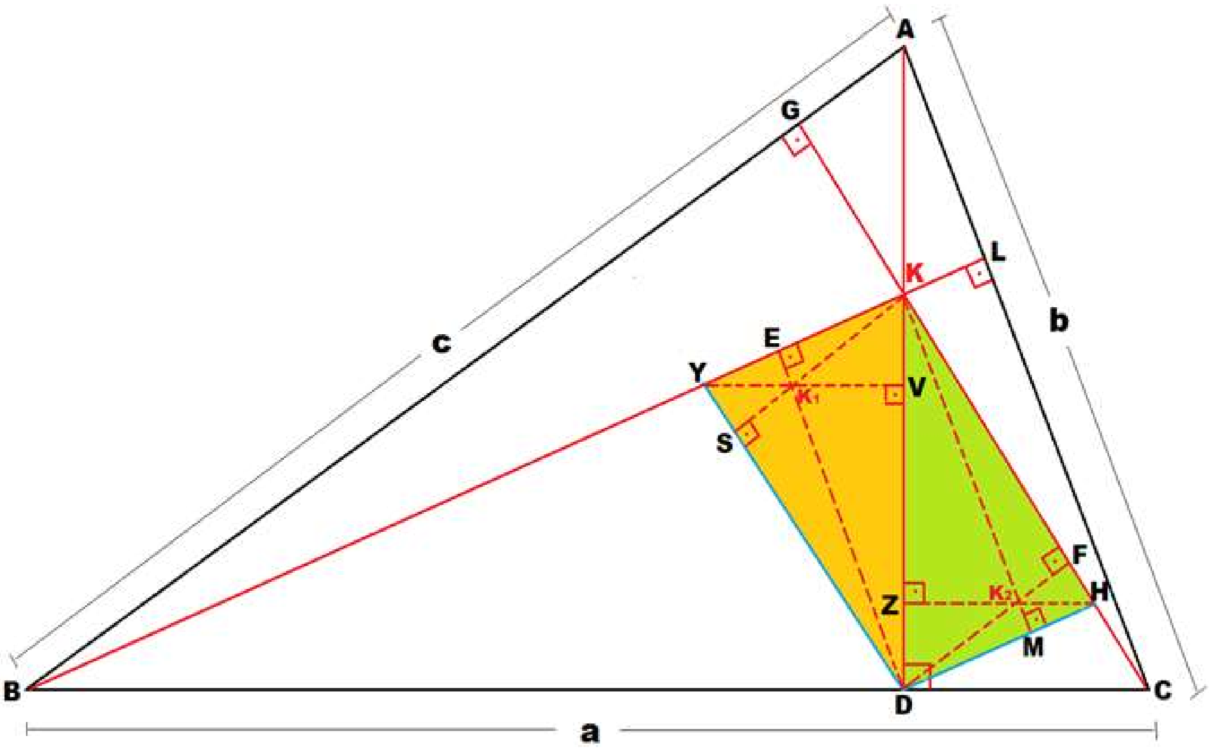
Yukarıda bahsedilen bağıntıları tüm yükseklik ve kenarlara uygularsak, aşağıdaki şekilde belirtildiği üzere diğer bazı önemli eşitliklere de ulaşabiliriz.



$$|BC| = \frac{|KD| \times |BL|}{|ED|} \qquad |BC| = \frac{|KD| \times |GC|}{|FD|}$$

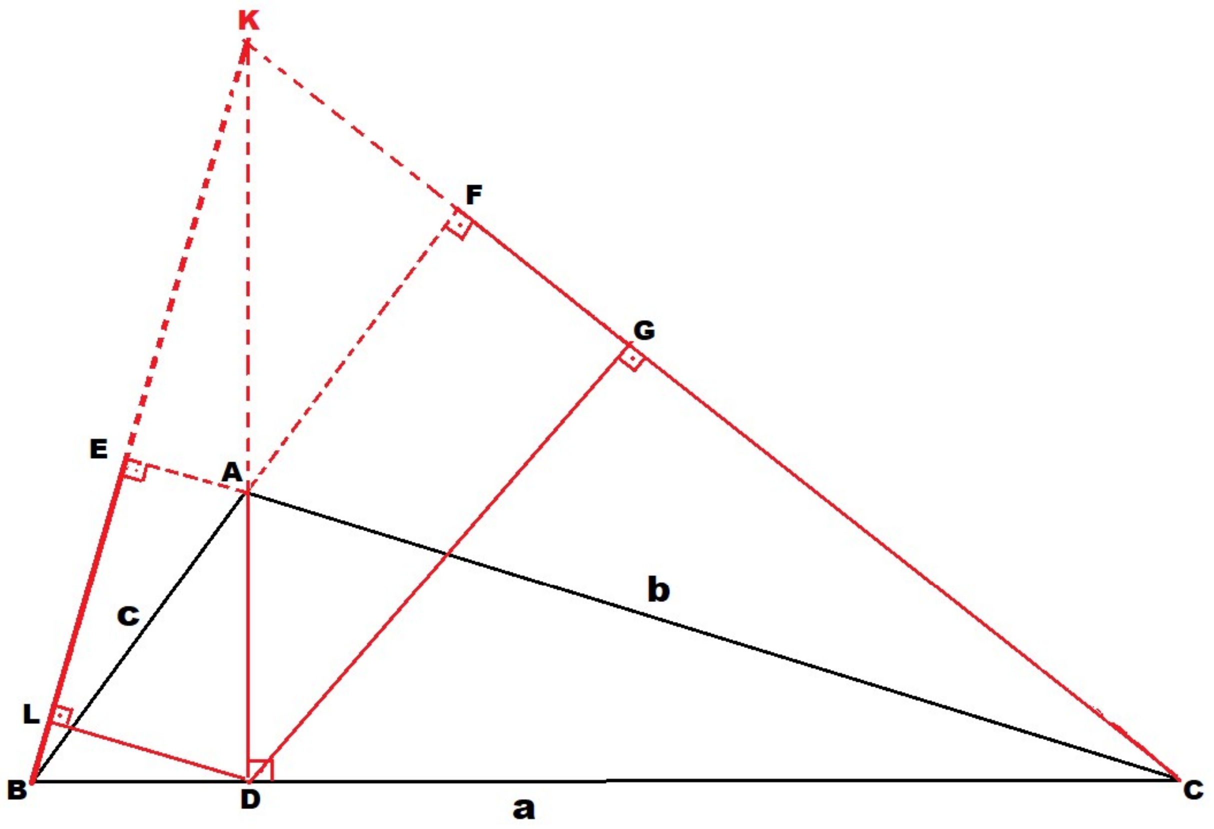
$$|AC| = \frac{|KL| \times |GC|}{|SL|} \qquad |AC| = \frac{|KL| \times |AD|}{|RL|}$$

$$|AB| = \frac{|GK| \times |BL|}{|GT|} \qquad |AB| = \frac{|GK| \times |AD|}{|GY|}$$



Dikkat edilirse |ED| ve |FD|, yukarıda bahsettiğimiz KHD ve KYD üçgenlerinin içindeki yüksekliklerdir. |ED|, KYD üçgeninin |KY| kenarına; |FD| ise KHD üçgeninin |KH| kenarına ait yüksekliklerdir. Biraz incelediğimizde, |ED| nin dikme olarak çizildiği ABC üçgenine ait |BL| yüksekliğinin, benzerlik oranında (|KD| / |BC|) küçültülmüş hali olduğu fark edilecektir. Aynı şekilde |FD| ise dikme olarak çizildiği |GC| yüksekliğinin benzerlik oranında (|KD| / |BC|) küçülmüş halidir. İşte bu yüzden |ED| / |BL| = |FD| / |GC| = |KD| / |BC| eşitlikleri de geçerli olacaktır.

Geniş açılı olan ve dolayısıyla diklik merkezi üçgenin dışında olan üçgenlerde ise aşağıdaki şekilde verilen açıklamalar geçerli olacaktır.



K noktası geniş açılı ABC üçgeninin diklik merkezi olmak üzere,

|AD|,a kenarına (|BC|) ait yükseklik, $|AD|=h_a$

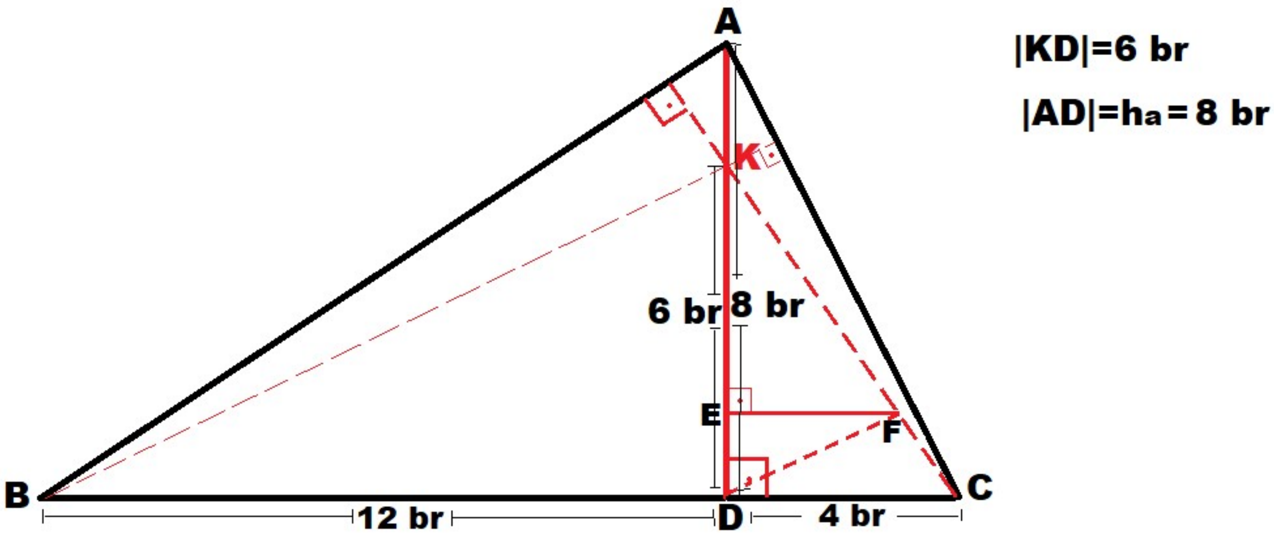
|BE|,b kenarına (|AC|) ait yükseklik, $|BE|=h_b$

|FC|,c kenarına (|BA|) ait yükseklik, $|FC|=h_c$

$$\frac{|KD|}{|BC|}=\frac{|LD|}{|BE|}=\frac{|DG|}{|FC|}$$

$$|BC|=\frac{|KD| \times |BE|}{|LD|} \qquad |BC|=\frac{|KD| \times |FC|}{|DG|}$$

ÜÇGENDE YÜKSEKLİK VE DİKLİK MERKEZİ İLE BUNLARIN AİT OLDUĞU KENAR ARASINDAKİ BAĞINTI



K noktası ABC üçgeninin diklik merkezi ve |AD| a kenarına (|BC|) ait yükseklik olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$|BD| \times |DC| = |KD| \times |AD|$$

$$12 \times 4 = 6 \times 8$$

$$48 = 48$$

Teorem:

Bir üçgende herhangi bir kenarın diklik merkezine dik uzaklığı ile o kenara ait yüksekliğin söz konusu kenarda oluşturduğu iki bölümün uzunlukları bilindiği taktirde, o üçgenin alanı yukarıdaki bağıntıdan yaralanarak hesaplanabilir. Zira, o üçgenin bir kenarının uzunluğu (|BC|) ve o kenara ait yükseklik (|AD|) bulunabilecektir.

İSPAT:

Yukarıda açıklanan konulardan anlaşılacağı üzere, KFD üçgeni ABC üçgeninin |KD| / |BC| oranında küçük bir benzeridir. Yukarıda daha önce açıklanan gerekçelerle, KFD üçgeninin F açısı ile ABC üçgenindeki A açısı eşit olduğundan

bu eşit açıları gören kenarlar birbirinin benzeri olacağından |KD| ile |BC| benzer kenarlardır.

Bu özellikten dolayı,

|BD| / |DC| = |KE| / |ED|

|BC| / |BD| = |KD| / |KE|

eşitlikleri de geçerli olacaktır.

Şimdi ise KDC üçgenine dikkat edelim. KDC üçgeninde |EF| ile |DC| arasındaki bağıntıyı araştırdığımızda, |EF| ile |DC| paralel olduğundan dolayı -ki her ikisi de |KD| ve |AD| ye dik oldukları görülmektedir, o nedenle paraleldirler- temel orantı teoreminden de yararlanarak,

|KD| / |KE| = |DC| / |EF|

eşitliğine ulaşırız. Yukarıda bahsedilen

|BC| / |BD| = |KD| / |KE|

eşitliğini de kullanarak, |KD| / |KE| nin yerine |BC| / |BD| yi koyarsak,

|BC| / |BD| = |DC| / |EF| eşitliğine ulaşmış oluruz.

ABC üçgeninin |KD| / |BC| oranında benzeri olan KFD üçgenindeki |EF|,|KD| kenarına ait yüksekliktir.

Şimdi buradan |EF| nin değerini şu şekilde çıkara biliriz;

|BC| / |BD| = |DC| / |EF| eşitliğinden,

|EF|= (|BD| x |DC|) / |BC| eşitliği de geçerli olur.

|BC| = |BD| + |DC| olduğundan

|EF| = (|BD| x |DC|) / (|BD| + |DC|) olacaktır.

Şimdi ise |EF|nin, ABC üçgeninin |KD| / |BC| oranında küçük hali olan KFD üçgeninin |KD| kenarına ait yüksekliği olduğunu tekrar hatırlayalım. Bu durumda |EF|nin |BC| / |KD| ile çarpılması ile ABC üçgeninin |AD| yüksekliği buluna bilecektir.

|EF| yerine, |EF| = (|BD| x |DC|) / (|BD| + |DC|) eşitliğindeki

(|BD| x |DC|) / (|BD| + |DC|) ifadesini yazarsak ve |BC| yerine de |BD| + |DC| ifadesini yazarsak;

$$\frac{|BD| \times |DC|}{|BD| + |DC|} \times \frac{|BD| + |DC|}{|KD|} = |AD| = h_a$$

$$\frac{|BD| \times |DC|}{\cancel{|BD| + |DC|}} \times \frac{\cancel{|BD| + |DC|}}{|KD|} = |AD| = h_a$$

$$\boxed{\frac{|BD| \times |DC|}{|KD|} = |AD| = h_a}$$

Eşitliklerine ulaşmış oluruz ve sonuçta, yukarıda bahsettiğimiz

|BD| x |DC| = |KD| x |AD| eşitliği de geçerli olacaktır.

Ayrıca ABC üçgeni için şu şekilde bir alan formülü oluşturulabilecektir:

$$\boxed{A\,(ABC) = \frac{\dfrac{|BD| \times |DC|}{|KD|} \times |BC|}{2}}$$

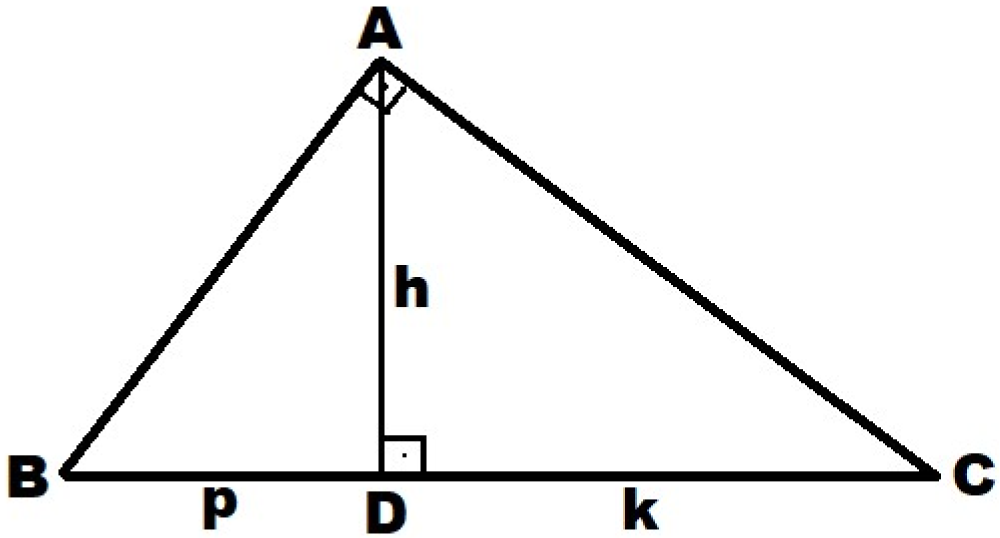
Yukarıda bahsedilen ABC üçgenindeki değerleri bu formülde yerlerine koyarsak;

$$A\,(ABC) = \frac{\dfrac{12 \times 4}{6} \times 16}{2}$$

$$= 64\ br^2$$

DİK ÜÇGENLERDE GEÇERLİ OLAN ÖKLİD BAĞINTISININ FARKLI BİR İSPATI

Genellikle $h^2 = p\,.\,k$ şeklinde formüle edilen ve dik üçgenlerde Öklid Bağıntısı olarak bilinen bağıntı için farklı bir ispatı da yukarıda anlattığımız özellikleri kullanarak yapabiliriz.



Dik üçgenlerde diklik merkezi dik kenarların kesiştiği köşede yani A köşesindedir. Bu yüzden diklik merkezinin hipotenüse dik uzaklığı |AD| uzunluğundadır. Hipotenüse çizilen yükseklik de (h) |AD| uzunluğunda olduğundan,

Yukarıda bahsedilen

|BD| x |DC| = |KD| x |AD| bağıntısını bu dik üçgen için uygularsak;

|AD| x |AD| = |BD| x |DC|

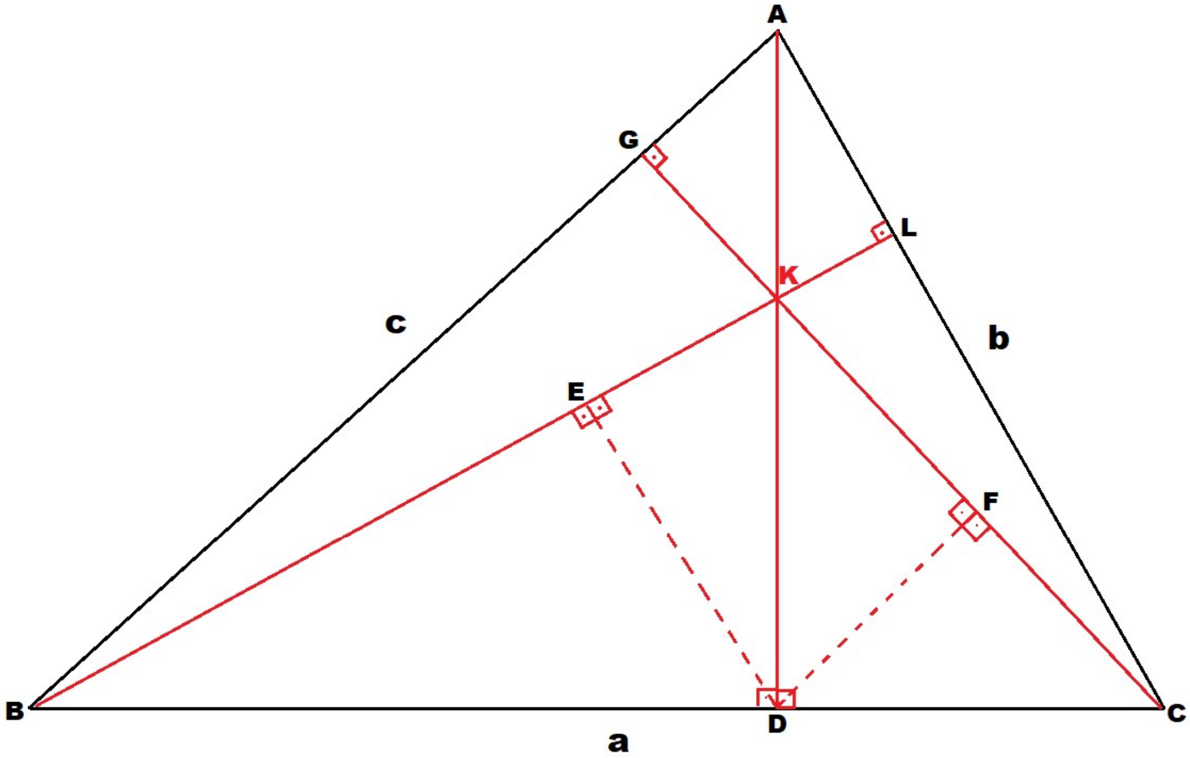
$|AD|^2$ = |BD| x |DC| ve sonuçta

$h^2 = p \cdot k$ geçerli olacaktır.

DİK ÜÇGENLERDEKİ DİKLİK MERKEZİ VE YÜKSEKLİK ÖZELLİKLERİYLE İLGİLİ ÖZEL BAĞINTILAR

Yukarıda bahsedilen diklik merkezi ve yükseklikle ilgili bağıntıların dik üçgenlerde gösterdiği yukarıda bahsettiğimiz özelliklerden kaynaklanan bazı

ilginç bağıntı ve özellikler de vardır. Şimdi yukarıda açıkladığımız bağıntıyı tekrar hatırlayalım;



K noktası ABC üçgeninin diklik merkezi olmak üzere,

|AD|, a kenarına (|BC|) ait yükseklik, $|AD|=h_a$

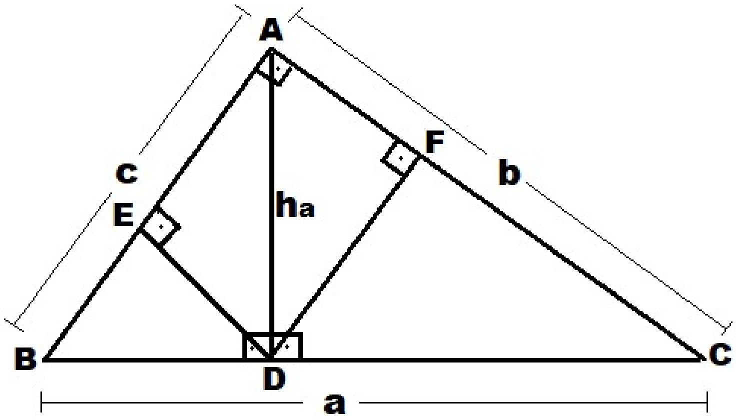
|BL|, b kenarına (|AC|) ait yükseklik, $|BL|=h_b$

|GC|, c kenarına (|AB|) ait yükseklik, $|GC|=h_c$

$$\frac{|KD|}{|BC|}=\frac{|ED|}{|BL|}=\frac{|FD|}{|GC|}$$

Bir üçgenin diklik merkezinden herhangi bir kenara çizilen dikmenin uzunluğunun (|KD|), çizildiği kenarın uzunluğuna (|BC|) oranı ile dikmenin kenarı kestiği noktadan (D) diğer herhangi bir kenarın yüksekliğine çizilen dikmenin(|ED|,|FD|) uzunluğunun o yüksekliğe oranı eşittir.

Dik üçgenlerde diklik merkezi iki dik kenarın birleştiği 90 derecelik açıya sahip olan köşedir. Aşağıdaki üçgende A köşesi aynı zamanda ABC üçgeninin diklik merkezidir. Dik kenarlar ise karşılıklı olarak birbirlerinin yüksekliğini oluşturmaktadır.



$$\frac{h_a \times b}{|DF|} = a$$

$$A(ABC) = \frac{h_a \times a}{2} \qquad a = \frac{h_a \times b}{|DF|}$$ olduğu için,

$$A(ABC) = \frac{h_a}{2} \times \frac{h_a \times b}{|DF|}$$

$$\boxed{A(ABC) = \frac{(h_a)^2 \times b}{2\,|DF|}}$$

Dik üçgenlerdeki Öklid bağıntısına dikkat edersek
ve yukarıdaki ABC üçgenine uyarlarsak,

$$(h_a)^2 = |BD| \times |DC|$$

$$\boxed{A(ABC) = \frac{(h_a)^2 \times b}{2\,|DF|}}$$ **eşitliğinde** $(h_a)^2 = |BD| \times |DC|$ **yerine konulursa**

$$\boxed{A(ABC) = \frac{|BD| \times |DC| \times b}{2\,|DF|}}$$ **eşitliğine de ulaşmış oluruz.**

$$\frac{h_a \times c}{|DE|} = a$$ eşitliğinden de,

$$\boxed{A(ABC) = \frac{(h_a)^2 \times c}{2\,|DE|}}$$ ve yine Öklid bağıntısını uyarlarsak,

$$\boxed{A(ABC) = \frac{|BD| \times |DC| \times c}{2\,|DE|}}$$ eşitliklerine de ulaşırız.

TARIK TAŞPINAR

T.C:10901490374

1972-TARSUS D.LU

ANKARA ÜNİ.HUKUK

FAK. MEZUNU

E-mail: tarik.taspinar@hotmail.com