

$n = 1$ için

$$7^3 - 4 \cdot 7 + 9 = 324 = 18^2 \text{ ve çözüm var.}$$

Şimdi $n \geq 2$ için çözüm olmadığını gösterelim.

$m \geq 1$ ve $n = m + 1$ olsun.

$$7^{2m+3} - 4 \cdot 7^{m+1} = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$7^{m+1}(7^{m+2} - 4) = (x - 3)(x + 3)$$

Şimdi $(x - 3)$, 7 'ye bölünüyorsa $x - 3 = 7n$ diyebiliriz. Bu durumda $x = 7n + 3$ olur. ve $x + 3 = 7n + 6$ olur. Buradan ya $x + 3$ 7 'ye bölünür ya da $x - 3$ 7 'ye bölünür. Her ikisi birlikte 7 'ye bölünmez.

Diyelim $x - 3$ 7 'ye bölünüyorsa

$$x - 3 = k7^{m+1} \text{ ise } x = k7^{m+1} + 3$$

$$7^{m+2} - 4 = k(x + 3)$$

$$7^{m+2} - 4 = k(k7^{m+1} + 6) \text{ olur.}$$

Mod 7 göre bu denklemi incelersek

$$0 - 4 \equiv 0 + 6k \pmod{7}$$

$$k \equiv 4 \pmod{7}$$

$$k = 4 + 7t$$

$$7^{m+2} - 4 = k(k7^{m+1} + 6)$$

$$7^{m+2} - 4 = (4 + 7t)((4 + 7t)7^{m+1} + 6)$$

$$7^{m+2} - 4 = (16 + 56t + 49t^2)7^{m+1} + 24 + 42t \text{ ve}$$

$$7^{m+2} = (16 + 56t + 49t^2)7^{m+1} + 28 + 42t \text{ olur. Her iki tarafı } 7' \text{ ye bölersek}$$

$$7^{m+1} = (16 + 56t + 49t^2)7^m + 4 + 6t \text{ olur.}$$

$$(-9 - 56t - 49t^2)7^m = 4 + 6t \text{ ve}$$

$$7^m = -\frac{4 + 6t}{9 + 56t + 49t^2} \text{ olur. her tamsayı } t \text{ için } 0 < |7^m| < 2 \text{ olur.}$$

Çelişki. Halbuki $m \geq 1$ için $7^m \geq 7$ dir.

Şimdi de diyelim $x + 3$, 7 'ye bölünüyorsa

$$x + 3 = k7^{m+1} \text{ ise } x = k7^{m+1} - 3$$

$$7^{m+2} - 4 = k(x - 3)$$

$$7^{m+2} - 4 = k(k7^{m+1} - 6) \text{ olur.}$$

Mod 7 göre bu denklemi incelersek

$$0 - 4 \equiv 0 - 6k \pmod{7}$$

$$k \equiv 3 \pmod{7} \text{ bulunur.}$$

$$k = 3 + 7t \text{ olur.}$$

$$7^{m+2} - 4 = k(k7^{m+1} - 6)$$

$$7^{m+2} - 4 = (3 + 7t)((3 + 7t)7^{m+1} - 6)$$

$$7^{m+2} - 4 = (9 + 42t + 49t^2)7^{m+1} - 18 - 42t \text{ ve}$$

$$7^{m+2} = (9 + 42t + 49t^2)7^{m+1} - 14 - 42t \text{ ve her iki tarafı } 7' \text{ ye bölersek}$$

$$7^{m+1} = (9 + 42t + 49t^2)7^m - 2 - 6t \text{ olur.}$$

$$(-2 - 42t - 49t^2)7^m = -2 - 6t \text{ ve}$$

$$7^m = \frac{2 + 6t}{(2 + 42t + 49t^2)} \text{ olur. her tamsayı } t \text{ için } 0 < |7^m| < 2 \text{ olur.}$$

Çelişki. Halbuki $m \geq 1$ için $7^m \geq 7$ dir.

Öyleyse $n \geq 2$ için çözüm yoktur.

Tek çözüm $n = 1$ iken vardır.