О применении одного неравенства

Н. СЕДРАКЯН

Часто встречаются задачи на доказательство неравенств. Некоторые из них требуют оригинального подхода, другие можно решить, пользуясь известными методами и неравенствами.

В этой статье мы расскажем об одном неравенстве и его обобщениях. Покажем, как с их помощью можно доказать алгебраические и геометрические неравенства.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Докажите двойное неравенство*

$$\frac{12}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d} \le \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

где a, b, c, d — положительные числа.

Решение. Легко убедиться в верности неравенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0. \quad (1)$$

Несколько раз применяя неравенство (1), получим:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right);$$

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right)+\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right)\ge\frac{12}{a+b+c+d}.$$

Вторая задача похожа на первую.

Задача 2. *Докажите неравенство*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{9}{2(a+b+c)},$$

где a, b, c — положительные числа.

Решение. Оказывается, что

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge\frac{9}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0 \quad (2)$$

(проверьте это самостоятельно). Значит,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{4}{a+b+b+c}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Решения этих двух задач очень похожи. Появилась идея: а может быть, верно более общее неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}, \quad (3)$$

где $b_1>0$, $b_2>0$? Неравенство (3) сразу приводится к виду

$$\frac{a_1^2b_2}{b_1}+\frac{a_2^2b_1}{b_2}\ge 2a_1a_2,$$

что очевидно (причем равенство достигается при $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$).

Теперь уже не стоит большого труда методом математической индукции доказать обобщение неравенства (3):

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \quad (4)$$

где $b_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Замечание. В неравенстве (4) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Получилось очень красивое неравенство. Но оказывается, что это не что иное, как одна из форм записи неравенства Коши-Буняковского. Действительно, подставляя $x_i=a_i/\sqrt{b_i}$ и $y_i=\sqrt{b_i}$, получим неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)\ge\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2.$$

Но форма записи (4) оказывается более удобной при решении некоторых задач.

Попробуем получить более общее неравенство. Есть идея: вместо a_i^2 напишем произведение двух множителей. Пробуя доказать получившееся неравенство при $n=2$, получаем новое условие. Оказывается, для

$$\frac{a_1}{c_1}\ge\frac{a_2}{c_2}\ge\ldots\ge\frac{a_n}{c_n},\quad \frac{b_1}{c_1}\ge\frac{b_2}{c_2}\ge\ldots\ge\frac{b_n}{c_n}$$

(или, можно сказать, $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ одинаково упорядочены) и $c_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot b_i}{c_i}\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \quad (5)$$

При $a_i=b_i$ неравенство (5) обращается в (4).

Для доказательства (5) нам понадобится следующий простой факт, который можно доказать методом математической индукции: если

$$\frac{a_1}{c_1}\ge\frac{a_2}{c_2}\ge\ldots\ge\frac{a_n}{c_n}$$

$$(c_i>0,\ i=1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{c_1+c_2+\ldots+c_k}\ge\frac{a_n}{c_n}$$

для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

Неравенство (5) докажем математической индукцией по n. При $n=2$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}\ge\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{c_1+c_2},$$

или же

$$(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_2-b_2c_1)\ge 0,$$

что вытекает из условия

$$\frac{a_1}{c_1}\ge\frac{a_2}{c_2} \text{ и } \frac{b_1}{c_1}\ge\frac{b_2}{c_2}.$$

Пусть (5) верно для $n=k$. При $n=k+1$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}+\ldots+\frac{a_kb_k}{c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}.$$

Из факта, указанного выше, и доказанного неравенства при $n=2$ следует,