

# EVİRTİM (II)

CEM TEZER

Geçen sayıdaki Evirtim (I) başlıklı yazıda kaldığımız yerden devam ediyoruz.

## Örnek IV

Evirtim sayesinde bilinen teoremlerden yeni teoremler elde edilebilir.

Önce üçgen eşitsizliğini hatırlayalım:

**Üçgen Eşitsizliği:** Düzlemde birbirinden farklı herhangi A, B, C noktaları için

$$|AC| \leq |AB| + |BC|$$

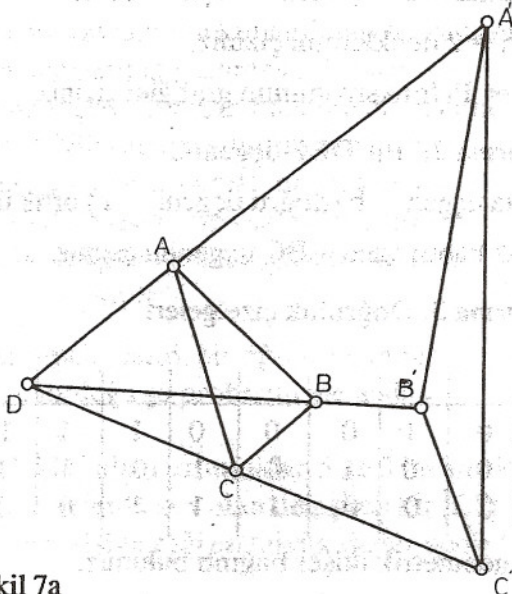
olup, eşitlik ancak ve yalnız A, B, C doğrudan olup, B, A ve C arasında kalırsa doğrudur.

Şimdi de önemli bir teoremi üçgen eşitsizliğinin evirtim altında görünüşü olarak elde edelim:

**Teorem 4. ("Batlamyus (M.S. 2. yüzyıl) Teoremi")** Birbirinden farklı ve doğrudan olmayan herhangi A, B, C, D noktaları için

$$|AC| |BD| \leq |AB| |CD| + |BC| |AD|$$

olup, eşitlik ancak ve yalnız A, B, C, D noktalarının çemberde olup, AC, BD doğrularının da sözkonusu çember içinde kesişmeleri halinde doğrudur.



Şekil 7a

**İspat:** (Şekil 7a, 7b) Noktalardan bir tanesi geri kalan üç çiftten hiçbirisiyle doğrudan olmayacaktır (Neden?) D nin bu özelliğe sahip olduğunu varsayalım. D merkezli bir evirtim alalım. Evirtimin kuvvetini (burada bir şey değiştirmemekle beraber)  $\rho$  ile gösterelim. A, B, C nin evrikleri sırasıyla A', B', C' olsun (Şekil 7a). DAB ve DB'A' üçgenlerinin benzerliğinden ve  $|DA| |DA'| = |\rho|$  dan

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|DA'|}{|DB|} = \frac{|DA'| |DA|}{|DA| |DB|} = \frac{|\rho|}{|DA| |DB|}$$

ve

$$|A'B'| = \frac{|AB|}{|DA| |DB|} |\rho| \quad (7)$$

bulunur. Aynı şekilde

$$|B'C'| = \frac{|BC|}{|DB| |DC|} |\rho| \quad (8)$$

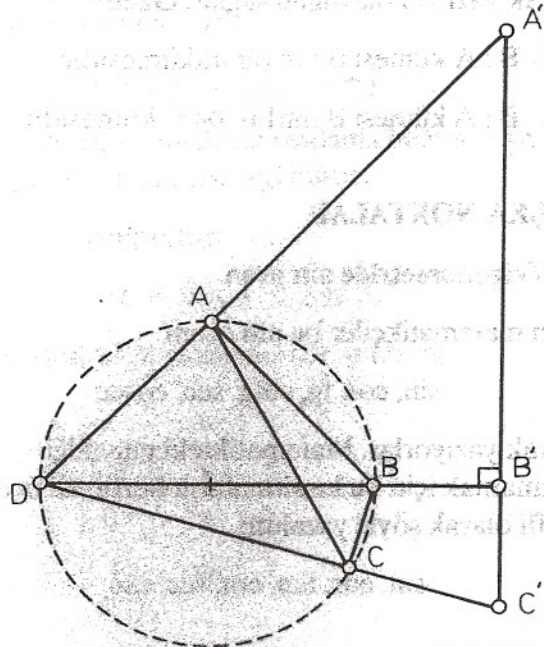
$$|A'C'| = \frac{|AC|}{|DA| |DC|} |\rho| \quad (9)$$

elde edilir. A'B'C' üçgeninde üçgen eşitsizliği yani

$$|A'C'| \leq |A'B'| + |B'C'| \quad (10)$$

ve (7), (8), (9) yardımıyla

$$\frac{|AC|}{|DA| |DC|} |\rho| \leq \frac{|AB|}{|DA| |DB|} |\rho| + \frac{|BC|}{|DB| |DC|} |\rho|$$



Şekil 7b

bundan da her tarafı  $|DA| |DB| |DC|$  ile çarpıp  $|\rho|$  ile bölmek suretiyle aranılan eşitsizlik

$$|AC| |BD| \leq |AB| |CD| + |BC| |AD|$$

bulunur. Bu eşitsizliğin eşitlik haline düşmesi için gerek ve yeter şart (10) eşitsizliğinin eşitlik haline düşmesidir. Yani  $A', B', C'$  doğruduş olmalı ve  $B', A'$  ve  $C'$  arasında kalmalıdır. Bu da ancak ve yalnız  $A, B, C, D$  nin çemberdaş olup  $AC$  ve  $BD$  doğrularının sözkonusu çember içinde kesişmeleriyle mümkündür (Şekil 7b).

Evirtim konusunu biraz daha açıp son örneğime geçmeden önce okuyucunun, Batlamyus teoremi yardımıyla çözebileceği üç problem sunmak istiyorum:

**Problem 3:**  $ABC$  bir eşkenar üçgen,  $X$  de  $ABC$  nin çevrel çemberi üzerinde  $B$  yi  $C$  ye birleştiren kısa yay üzerinde bir nokta ise

$$|XA| = |XB| + |XC|$$

olduğunu gösteriniz.

**Problem 4:** Kenar uzunluğu 1 olan bir düzgün beşgenin köşegen uzunluğunun  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  olduğunu ispat ediniz.

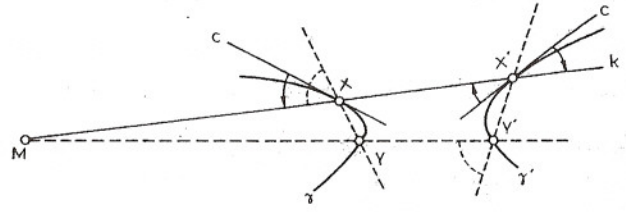
**Problem 5:**  $A$  açısı  $120^\circ$  ye eşit veya  $120^\circ$  den büyük bir  $ABC$  üçgeni alalım. Herhangi bir  $X$  noktası için

$$|XA| + |XB| + |XC| \geq |AB| + |AC|$$

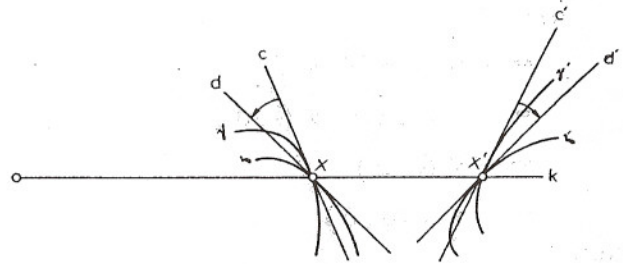
eşitsizliğini ispat ediniz. Bu eşitsizliğin eşitlik haline gelmesi için gerek ve yeter şartın  $X = A$  olduğunu gösteriniz. (İpucu:  $CA$  üzerinde  $|AB| = |AB'|$  olacak şekilde bir  $B'$  noktası alın.  $A, B'$  ve  $C$  arasında kalsın. Batlamyus teoremini  $XAB B'$  dörtgenine uygulayın.)

Evirtimi bir yere kadar Euclid geometrisinin içinde tutan özellik, bu dönüşümün açıları mutlak değerce korumasıdır:

**Teorem 5:** Bir evirtim eğriler arasındaki açıların işaretini değiştirir, açılar mutlak değerce saklı kalır.



Şekil 8a



Şekil 8b

**İspat:** Önce kısaca “eğriler arasındaki açı” tabirine açıklık getirelim:  $\gamma$  ve  $\delta$  gibi iki eğrinin bir  $X$  noktasında kesiştiğini varsayalım (Şekil 8b). Eğrilerin  $X$  noktasında yalnız birer teğete sahip olduklarını düşünelim.  $\gamma$  ve  $\delta$  nin  $X$  noktasındaki teğetleri sırasıyla  $c, d$  doğruları olsun. “ $\gamma$  ve  $\delta$  eğrileri arasında  $X$  noktasındaki açı” ile  $c$  ve  $d$  doğruları arasındaki açı anlaşılacaktır. (Gösterim:  $\angle X(\gamma, \delta)$ ). Şimdi ispata dönebiliriz:  $M$  merkezli bir evirtim gözönüne alalım.  $\gamma$  ve  $\delta$  eğrileri  $X (\neq M)$  noktasında, sırasıyla bunların evrikleri olan  $\gamma'$  ve  $\delta'$  eğrileri de  $X'$  noktasında kesişsinler (Şekil 8b).  $X', X$  in evriğidir. (Aşında, iki eğrinin  $X$  in belirli bir civarında yeniden kesişmedikleri vb. ikazlar gerekli. İspatı fazla karıştırmamak için bunları bir kenara bırakalım.)  $\gamma, \delta$  nin  $X$  deki teğetleri sırasıyla  $c, d$  doğruları,  $\gamma', \delta'$  nün  $X'$  deki teğetleri de sırasıyla  $c', d'$  olsun. Önce  $\gamma$  eğrisine yönelelim (Şekil 8a). Bu eğri üzerinde  $X$  e yakın (!) bir  $Y$  noktası alalım.  $Y$  nin evriği  $Y'$  de  $\gamma'$  üzerinde  $X'$  ye yakın bir nokta olacaktır.  $XX' = MX$  doğrusu  $k$  ile gösterilerek ve  $X, Y, Y', X'$  noktalarının ya doğruduş, yahut da çemberdaş oldukları hatırlanarak

$$\ast(XY, k) = \ast(k, X'Y') \quad (11)$$

bulunur. Y, X e yanaşırken ve Y', X' ne yanaşırken, XY doğrusu c doğrusuna, X'Y' doğrusu da c' doğrusuna yanaşacaktır. Bunun neticesinde de (11) denklemi

$$\ast(c, k) = \ast(k, c') = -\ast(c', k) \quad (12)$$

şeklini alacaktır. Aynı akıl yürütme,  $\delta, \delta'$  eğrilerine uygulanarak

$$\ast(d, k) = \ast(k, d') = -\ast(d', k) \quad (13)$$

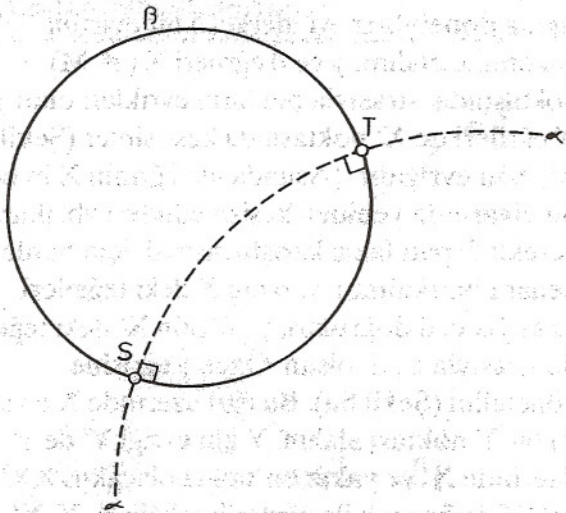
elde edilebilir. (12) ve (13) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \ast(\gamma, \delta) &= \ast(c, d) \\ &= \ast(c, k) + \ast(k, d) \\ &= -\ast(c', k) - \ast(k, d') \\ &= -\ast(c', d') \\ &= -\ast(x', g', \delta') \end{aligned}$$

bulunur.

**Yorum:** Teorem 5 çok genel bir teorem. Biz bu teoremi sadece çemberler ve doğrulara o da yalnız  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  için uygulayacağız. Yani: Bir evirtim birbirine dik (teğet) çemberleri veya doğruları gene birbirine dik (teğet) çember veya doğrulara dönüştürür. (Tabii, okuyucu paralel doğruları sonsuzda teğet çemberler olarak görmeli.)

**Yardımcı Teorem 2.** Pozitif kuvvetli bir evirtim, evirtim çemberine dik bir çemberi sabit bırakır.



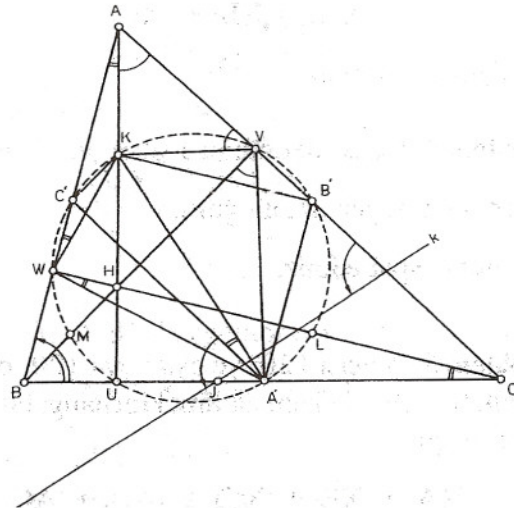
**İspat:** (Şekil 9) Bir  $\alpha$  çemberinde evirtim gözönüne alalım.  $\beta, \alpha$  çemberine S, T noktalarında dik olsun. Evirtim, S ve T

noktalarını sabit bırakmakta. Demek ki  $\beta$  nin evriği, S ve T noktalarında  $\alpha$  ya dik bir çember olmalı ki bu  $\beta$  nin kendisidir.

**Örnek V**

Kim ne derse desin benim için matematik tarihinin şahikalarından biri olan Feuerbach Teoremini son örnek olarak ele alıyorum. Söz konusu teoremi layıkıyla takdir edebilmesi için okuyucu bir üçgenin dokuz-nokta çemberini ve ilgili dokuyu biraz olsun tanımalıdır. Kısaca ele alalım:

**Teorem 6:** Bir üçgende, kenar orta noktaları, yükseklik ayakları ve üç yüksekliğin kesiştiği noktayı ("ortosantr") köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları çemberdedir.



**İspat:** (Şekil 10). Bir ABC üçgeni alalım. A, B, C den karşı kenarlara indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla U, V, W ve AU, BV, CW yüksekliklerinin kesiştiği noktası ("ortosantr") H olsun. Sırasıyla [BC], [CA], [AB], [HA], [HB], [HC] doğru parçalarının orta noktaları A', B', C', K, L, M olsun. Yapmak istediğimiz şey, U, V, W, A', B', C', K, L, M noktalarını aynı çember üzerinde kaldığını görmek; söz konusu çemberin [A'K] çaplı çember olduğunu iddia ediyorum: U noktası aşikar bir şekilde [A'K] çaplı çember üzerindedir. Diğer taraftan B', K sırasıyla [CA] ve [HA] nın orta noktaları olduğundan B', K, CW yüksekliğine paraleldir. A'B' ve AB ye paralel olduğundan, B'K, B'A' ye dik olmalıdır. Yani B' noktası da [A'K] çaplı çember üzerindedir. Aynı akıl yürütme C' ne de uygulanabilir.

Gelelim V ye: AHV dik üçgendir; K hipotenüsün orta noktasıdır. Demek ki K AV (tepesi K de olan) bir ikizkenar üçgen olup

$$\begin{aligned} \sphericalangle(AV, KV) &= \sphericalangle(AU, AC) \\ &= \sphericalangle(BC, BV) \quad (\text{Neden?}) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan gene BVC bir dik üçgen olduğundan ve A' hipotenüsün orta noktası olduğundan A'BV (tepesi A' de olan) bir ikizkenar üçgendir. Böylece

$$\sphericalangle(BC, BV) = \sphericalangle(BV, VA')$$

bundan da

$$\sphericalangle(AV, KV) = \sphericalangle(BV, VA')$$

bulunur. AV, BV ye dik olduğundan, KV de VA' ne dik olmalıdır. Yani V, [A'K] çaplı çember üzerindedir. Aynı akıl yürütme W noktasına da uygulanabilir. Bu suretle A', B', C', U, V, W, K noktalarının aynı çember ([A'K] çaplı çember) üzerinde kaldığını göstermiş olduk. L ve M ne olacak? Bunu okuyucuya bırakıyorum.

**Yorum:** Teorem 6'da ele alınan çember, üzerinde dokuz tane ilginç nokta bulunduğundan "dokuz-nokta çemberi" (veya "Euler çemberi") olarak anılıyor. Bu çember üzerindeki ilk altı noktayı L. Euler (1707-1783) yakalamış. Noktaların sayısını dokuzu çıkaran az sonra harikulade bir teoremini sunacağız K. W. Feuerbach (1800-1834). Teorem 6'daki dokuyla ilgili bir nokta daha:

**Yardımcı Teorem 3:** BC kenarının A daki içaçıortaya göre bakışığı A'K doğrusuna diktir.

**İspat:** (Şekil 10) A daki içaçıortay BC yi J noktasında kessin. BC nin bu içaçıortaya göre bakışığına (simetriğine) k diyelim. k doğrusu da J noktasından geçer ve

$$\sphericalangle(A'C', k) = \sphericalangle(AC, k) = \sphericalangle(BC, BA)$$

dir. Ayrıca

$$\sphericalangle(A'K, A'C') = \sphericalangle(C'W, C'K) = \sphericalangle(BA, AU)$$

olup, bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$\begin{aligned} \sphericalangle(A'K, k) &= \sphericalangle(A'K, A'C') + \sphericalangle(A'C', k) \\ &= \sphericalangle(BA, AD) + \sphericalangle(BC, BA) \\ &= \sphericalangle(BC, AU) = \pi/2 \end{aligned}$$

bulunur.

Bu örneğin hedefi olan teoreme geçmeden önce evirtim hakkında bir noktaya daha işaret edilmesi gerekiyor:

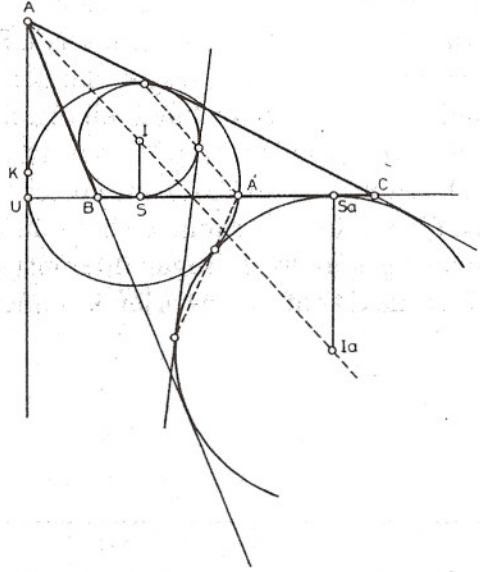
**Yardımcı Teorem 4:** Bir k doğrusu üzerinde birbirinden farklı A, B, X, X' noktaları alınsın. X, X' noktalarının [AB] çaplı çembere göre evrik noktalar olmaları için gerek ve yeter şart

$$\overline{XB} : \overline{XA} = -\overline{X'A} : \overline{X'B}$$

olmasıdır.

**İspat:** Bunu okuyucuya bırakıyoruz. k doğrusunun x eksenini olarak seçip, basit bir hesap yapmak yeterli.

**Teorem 7: ("Feuerbach Teoremi")** Bir üçgende dokuz-nokta çemberi iç ve dışteğet çemberlere teğettir.



**İspat:** (Şekil 11) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I, A karşısındaki dışteğet çemberin merkezi de I<sub>a</sub> olsun. Bu çemberleri sırasıyla (I), (I<sub>a</sub>), yarıçaplarını da r, r<sub>a</sub> ile gösterelim. (I) ve (I<sub>a</sub>) nın BC ye değdiği noktalar sırasıyla S, S<sub>a</sub> olsun. Bu belirtilenler dışında Teorem 4'ün gösterimini aynen alalım. Dokuz-nokta çemberinin (I) ve (I<sub>a</sub>) ya teğet olduklarını göstereceğiz. Diğer iki dışteğet çembere de aynı akıl yürütme uygulanabilir. A, I, I<sub>a</sub> noktaları, A daki içaçıortay üzerinde olup, bu içaçıortay BC yi J de kesmekte. Gene BC nin AI ya göre bakışığı olan k doğrusu da J den geçmekte olup (I) ve (I<sub>a</sub>) ya teğettir. (Neden?) Son olarak da

$$\begin{aligned} \overline{JS} : \overline{JS_a} &= -r : r_a \\ &= -\overline{AI} : \overline{AI_a} \\ &= -\overline{US} : \overline{US_a} \end{aligned}$$

olduğunu gözleyelim. Diğer taraftan A' (yani [BC] nin orta noktası) [SS<sub>a</sub>] nin orta noktasıdır. (Neden?) Yardımcı Teorem 4'e göre [SS<sub>a</sub>] çaplı çembere göre bir evirtim J yi U ya gönderecektir; evirtim merkezi de A' noktasıdır. Demek ki k doğrusunun evriği U ve A' den geçen, merkezi A' den k ye indirilen dikme üzerinde yani Yardımcı Teorem 3'e göre A'K üzerinde olan çember olmalıdır ki, bu ancak dokuz-nokta

çemberidir. yardımcı Teorem 2'ye göre (I) ve (I<sub>a</sub>) söz konusu evirtim altında sabit kalırlar. Demek ki k doğrusunun evriği olan dokuz-nokta çemberi de k doğrusu gibi (I) ve (I<sub>a</sub>) ya teğet olmalıdır.

Son olarak da konunun tarihini kısaca ele almak istiyorum: Evirtimin tarihi ne yazık ki açıklık kazanmamış bir saha. 17. yüzyılda henüz bilinmediği hakkında az çok anlaşma var. 19. yüzyılın ikinci çeyreğinde ise (mesela J. Plücker (1801-1863) tarafından) doğru olarak tarif edilmiş ve hemen hemen bugünkü olgunluğu ile geometride kullanılmış ([1]). Hemen arkasından W. Thomson (1824-1907, nam-ı diğer Lord Kelvin) tarafından evirtimin elektrostatiğe uygulandığı görülüyor. Bugün diferansiyel geometrideki konform tasvirler, kompleks

analizdeki Möbius dönüşümleri, cebirsel geometrideki Cremona dönüşümleri, ileri matematikte evirtimin genelleşmiş şekilleri olan dönüşümlerdir.

### Kaynaklar

- [1] J. L. Coolidge, "A Treatise on the Circle and the Sphere", Chelsea Publishing Company, New York 1971 (İlk basım: Oxford, 1916).
- [2] H. Demir, "Homoteti ve Benzerlik", *Matematik Dünyası*, Sayı 4, s. 2-7.
- [3] E. J. Dijksterhuis, "Archimedes", Ejnar Munksgaard, Kopenhag, 1956. (C. Dikshoorn tarafından Felemenkçe aslından İngilizce'ye tercüme)
- [4] C. Tezer, "Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri", *Matematik Dünyası*, Sayı 1, s. 3-6.

Ziraat Yüksek Mühendisi Vahap Alper'in *Aritmetik ve Tarım Aritmetiği* (1989) adlı kitabında ilginç pratik uygulamalar var. Bunlardan Biri:

### SIĞIRLARDA CANLI AĞIRLIĞIN HESABI

Bir siğirin canlı ağırlığını bulmak için, göğüs çevresinin karesi ile vücut uzunluğu ve 87,5 kat sayısı çarpılır.

$$P = C^2 \times h \times 87,5$$

C : Göğüs çevresi (metre olarak)

h : Vücut uzunluğu (metre olarak)

P : Siğirin canlı ağırlığı (kg. olarak)

Formülün nasıl çıktığını düşünürseniz buradan canlı bir siğirin ortalama özgül ağırlığını bulabiliyorsunuz.

