EVİRTİM (I)

CEM TEZER

Bu yazıda, aslında Euclid geometrisinin (izometriler, homotetiler vb. gibi) gerçek anlamda malı olmayan, fakat hem bu geometrideki bazı uygulamaları, hem de Euclid-dışı geometrilere verilecek en basit örneklerin kuruluşu açısından büyük öneme sahip bir dönüşümü, "evirtim"i ele alacağım.

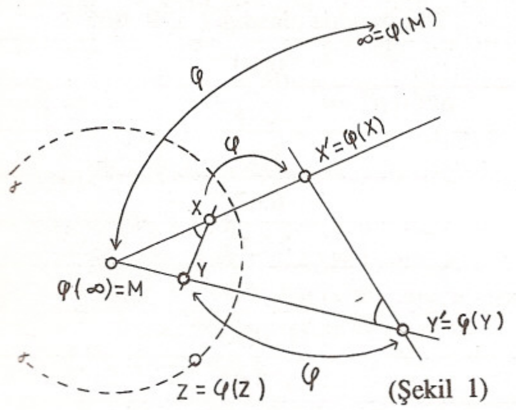
Euclid düzlemini Δ ile gösterelim. Bir $M \in \Delta$ noktası ve bir $\rho \neq 0$ gerçel sayısı gözönüne alalım. "M merkezli ve ρ kuvvetinde bir evirtim" dediğimiz zaman

$$\varphi : \Delta - \{M\} \rightarrow \Delta - \{M\} \qquad (1)$$

şeklinde (yani düzlemin M dışındaki noktalarını gene düzlemin M dışındaki noktalarına dönüştüren) her $X \in \Delta - \{M\}$ noktasını MX doğrusu üzerinde bulunan ve

$$\overline{MX} \, . \, \overline{MX'} = \rho$$

denklemini sağlayan birtek $X' \in \Delta - \{M\}$ (neden?) noktasına gönderen dönüşümü anlıyoruz. (Şekil 1)
$X' = \varphi(X)$ noktasına "X in evriği" diyeceğiz.



(Şekil 1)

Evirtimin en basit özelliklerine işaret edelim:

a) (1) denkleminde, Hüseyin Demir'in bu dergide incelediği "yönlü uzunluklar" kullanılmakta ([1]). Demek ki $\rho > 0$ ise X ve X′ noktaları MX doğrusu üzerinde M nin aynı tarafında, $\rho < 0$ ise ters tarafında kalmaktadırlar.

b) (1) denkleminde X ve X′ birbirleriyle yer değiştiği zaman, söz konusu denklem değişmeyecektir. Demek ki $\varphi(X) = X'$ iken $X = \varphi(X')$ dür. Yani bir noktanın evriğinin evriği daima kendisidir.

c) $\rho > 0$ olsun. Merkezi M, yarıçapı $\rho^{1/2}$ olan γ çemberini ele alalım. φ evirtimi altında, γ nın içindeki noktalar (M hariç) γ nın dışına, dışındakiler de içine gidecektir. Tabii bu arada γ üzerindeki her nokta sabit kalacaktır.

Yorum: b) ve c) de bahsedilen hususlar evirtimin yansımaya benzerliklerini ortaya çıkarıyor. Gerçekten de evirtimi, bir doğruya göre değil de bir çembere göre yansıma olarak görmek mümkün (dilimizdeki eski metinlerde evirtimin "akis" olarak adlandırılmasının nedeni herhalde bu).

d) Neden, evirtim için "Euclid geometrisinin gerçek anlamda malı değil!" dedim? Bu derin konuya sadece dokunmak istiyorum: Örneğin, bu dönüşüm her zaman doğruları, doğrulara dönüştürmez: Yukardaki gösterimle φ evirtimi γ çemberinin dışını içine gönderiyor; bu koşullarda γ nın dışında bir doğru, doğru olarak kalabilir mi? Mızrak çuvala sığmayacaktır.

e) Yukardaki gösterimle, $\rho > 0$ halinde γ çemberi φ evirtimini tamamen belirlemekte. Bu nedenle φ ye "γ çemberine göre evirtim" diyeceğiz. Aynı şekilde pozitif kuvvetli belirli bir evirtim sözkonusu iken, o evirtimi belirten çemberi "evirtim çemberi" olarak anacağız. Evirtim çemberinin evirtim altında sabit kalan noktalardan oluştuğuna tekrar işaret edelim.

Yorum: Okuyucu yarıçapı sanal çemberlere bir anlam biçebiliyorsa bu söz dağarcığını kuvveti negatif evirtimlere de genişletilebilir.

f) Evirtim merkezinin evriğinin bulunmaması bir eksiklik hissi veriyor. Bu eksiklikten kurtulmanın bir yolu da var: Düzlemde hareketli bir noktanın evirtim merkezine gittikçe yanaştığını düşünelim. Bu noktanın evriği evirtim merkezinden istenildiği kadar uzağa gidecektir. Düzlemimizi ∞ ile göstereceğimiz "sonsuzdaki nokta"yı eklemekle genişletirsek, evirtim merkezi ve ∞ evrik noktalar addolunabilir.

Şimdi evirtimi biraz daha derinlemesine inceleyebiliriz:

Yardımcı Teorem 1:

M merkezli bir evritmi alalım. X, Y $\neq$ M noktalarının evrikleri sırasıyla X′, Y′ olsun. X, Y, X′, Y′ noktaları ya doğrudaş ya da çemberdeştir.

İspat: (Şekil 1) Evirtim kuvveti ρ olsun. Bu noktaların doğrudaş olmadıklarını varsayalım.

$$\overline{MX} \,.\, \overline{MX'} = \rho = \overline{MY} \,.\, \overline{MY'}$$

den OXY ve OY′X′ üçgenlerinin ters benzer oldukları, bu nedenle de

$$\measuredangle(XX',XY) = \measuredangle(YX',Y'Y)$$

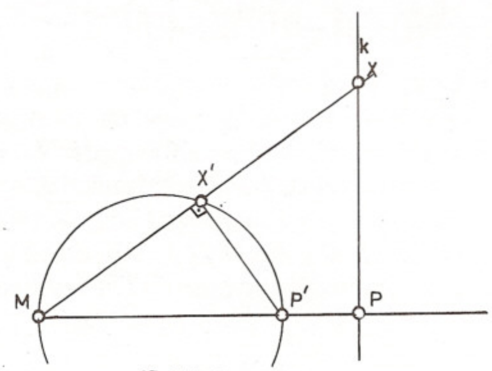
olduğu görülür. (Dikkat: "Doğrular arasındaki açı", bkz. [3]). Demek ki X,Y,X′,Y′ noktaları çemberdeştir.

Teorem 1:

a) Bir evirtim, evirtim merkezinden geçen bir doğruyu kendisine dönüştürür.

b) Bir evirtim evirtim merkezinden geçmeyen bir doğruyu, evirtim merkezinden geçen bir çembere dönüştürür. Bu çemberin evirtim merkezinden geçen çapı doğruya diktir.

b′) Bir evirtim evirtim merkezinden geçen bir çemberi, bu çemberin evirtim merkezinden geçen çapına dik bir doğruya dönüştürür. (Şekil 2)



(Şekil 2)

İspat:

a) Evirtim merkezi M olsun. M den geçen bir s doğrusu alalım. (Bu Şekil 2'de yok!) s doğrusu üzerindeki herhangi bir X $\neq$ M noktasının evriği (evirtimin tanımından!) gene MX = s doğrusu üzerinde kalmalıdır. Demek ki s doğrusu kendine dönüşmektedir. (Dikkat: Doğru üzerindeki noktalar yer değiştiriyor ama doğru bütün olarak sabit kalıyor!)

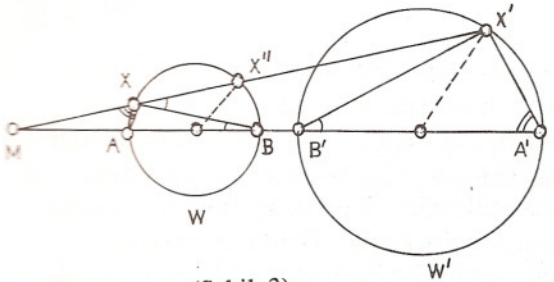
b) k, M den geçmeyen bir doğru olsun. M den k ye indirilen dikmenin ayağı P olsun. P nin evriği MP üzerinde bir P′ noktasıdır. Şimdi k doğrusu üzerinde herhangi bir X noktası düşünelim. X in evriği X′ olsun. Yardımcı Teorem 1'e göre X,X′,P,P′ noktaları çemberdeştir. MP, k ye dik olduğuna göre X′P′ de MX′ ye dik olmalıdır. Böylece X′ daima [OP′] çaplı çember üzerinde kalacaktır.

b′) Bir noktanın evriğinin evriği kendisi olduğundan bu, **b)** den aşikardır.

Yorum: Teorem 1 b′) nün önemli bir sonucu olarak evirtim merkezinde birbirine teğet olan iki çember, paralel iki doğruya dönüşecektir.

Yorum: Teorem 1 doğruları çemberlere dönüştürüyor; yani bir anlamda bizi doğruları çember olarak görmeye yöneltiyor. Gerçekten de M noktası hariç çember üzerindeki noktalar doğru üzerindeki noktalarla birebir ilişki içinde bulunuyor. Doğru üzerinde ise M ye karşılık gelen bir nokta yok! Eğer, düzlemimize ∞ noktasını ekler, düzlemimizdeki her doğrunun da ∞ dan geçtiğini düşünürsek bu durum ortadan kalkar. Yani evirtim konusunda doğruları ∞ dan geçen çemberler olarak görmek yararlı olacaktır. Bundan önceki yorumun ışığında da paralel doğrular ∞ da birbirine teğet çemberler olarak anlaşılabilir.

Teorem 2: Bir evirtim, evirtim merkezinden geçmeyen bir çemberi evirtim merkezinden geçmeyen bir çembere çevirir. Evirtim merkezi aynı zamanda bu iki çemberin bir homoteti merkezidir. (Evirtim kuvveti pozitifse dış, negatifse iç homoteti merkezi.) bkz. [1]).



(Şekil 3)

İspat: (Şekil 3) M merkezli bir evirtim ve M den geçmeyen bir ω çemberi alalım. ω nın M den geçen çapı [AB] olsun. A, B nin evrikleri sırasıyla A', B' olsun. ω üzerinde herhangi bir X ≠ A, B noktası için AX, BX e diktir. X', X noktasının evriği ise Yardımcı Teorem 1'den A, X, X', A' noktaları çemberdeş olup

$$\measuredangle(XM, XA) = \measuredangle(A'X', A'B') \qquad (2)$$

Aynı şekilde B, X, X', B' noktalarının çemberdeşliğinden

$$\measuredangle(XB, XX') = \measuredangle(B'A', B'X') \qquad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) denklemlerinin sol taraflarının toplamı bir dik açı, sağ taraflarının toplamı da $\measuredangle(A'X', B'X')$ vereceğinden, A'X' daima B'X' ne dik olmalıdır. Yani ω çemberi üzerindeki her X, noktasının evriği (yani X') daima [A'B'] çaplı ω' çemberi üzerinde kalmalıdır. Şimdi, M noktasının ω, ω' çemberlerinin homoteti merkezi olduğunu göstermek kalıyor: MX doğrusu ω yı X haricinde bir de X'' de kessin. (Özel hal: MX, ω ya teğetse X = X''). Evirtimin kuvveti ρ > 0 olsun. (ρ < 0 hali benzer şekilde ele alınabilir.)

$$\overline{MX}\,.\,\overline{MX'} = \rho \qquad (4)$$

dur. Ayrıca MXB ve MAX'' üçgenlerinin ters benzerliğinden

$$\overline{MX}\,.\,\overline{MX''} = \overline{MA}\,.\,\overleftarrow{MB} = d > 0 \text{ (sabit!)} \qquad (5)$$

dir. (4) ve (5) bölünerek (nasıl?)

$$\overline{MX'} : \overline{MX''} = \rho/d = \text{sabit} > 0$$

bulunur. Demek ki M, ω ve ω' nün dış homoteti merkezidir.

Yorum: Doğruları da genelleştirilmiş çemberler olarak görürsek, Teorem 1 ve 2 "Bir evirtim çemberleri çemberlere dönüştürür!" şeklinde sloganlaştırılabilir.

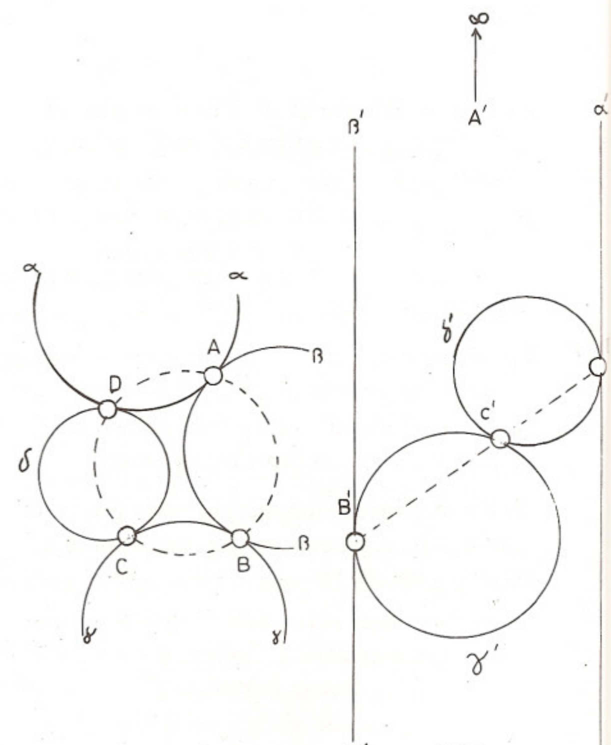
Okuyucuyu uyaralım: Genel olarak çember merkezleri, çember merkezlerine dönüşmez.

Yorum: Teğet iki çember bir evirtim altında gene teğet iki çembere dönüşür. Değme noktasının evriği, evrik çemberlerin değme noktasıdır. Okuyucu bunu evirtimin bire-bir bir dönüşüm olması gerçeğinden yola çıkarak, kolayca ispat edebilir.

Örnek I:

İçinde çok sayıda çember bulunan problemler evirtim sayesinde basitleştirilebilir:

Problem 1: α, β, γ, δ çemberlerini gözönüne alalım. α ve β, β ve γ, γ ve δ, δ ve α sırasıyla A, B, C, D noktalarında teğet olsun. (Şekil 4a)
A, B, C, D noktalarının çemberdeş olduklarını gösteriniz.



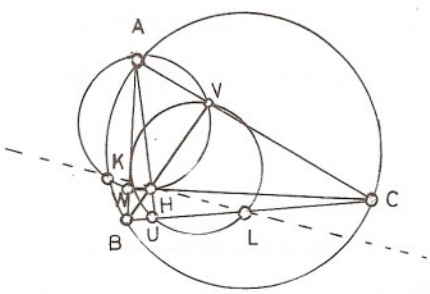
(4a) (4b)

Çözüm: A noktası merkez olmak üzere bir evirtim alalım. α ve β çemberleri α', β' paralel doğrularına dönüşecektir. γ, δ çemberlerinin evrikleri γ', δ' ise α' doğrusu δ' çemberine D nin evriği olan D′ de, β' doğrusu γ' çemberine B nin evriği olan B′ de değerken, β' ve γ' çemberleri de C nin evriği C′ noktasında birbirlerine teğet olurlar. (Şekil 4b) Şimdi işimiz B′, C′, D′ noktalarının bir doğru (yani A nın evriği olan ∞ dan geçen bir çember) üzerinde kaldığını göstermeye kalıyor. Bunu okuyucu kolayca yapabilir. (İpucu: C′ deki teğet B′C′ ve C′D′ kirişleriyle aynı açıları yapar.)

Örnek II

İlk örneğimizde evirtimin kuvveti önemli değildi. Bazen evirtim kuvveti akıllıca seçilirse, problemler basitçe çözülebilir.

Problem 2: Bir ABC üçgeninde üç yüksekliğin kesişme noktası H, sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerindeki yükseklik ayakları da U, V, W olsun. [HA] çaplı çember ABC üçgeninin çevrel çemberini bir $K \neq A$ noktasında, UVW üçgeninin çevrel çemberi de BC doğrusunu bir $L \neq U$ noktasında kessin. K, H, L noktalarının doğrudaş olduklarını gösteriniz.



(Şekil 5)

Çözüm: (Şekil 5) Önce

$$\overline{HA}\,.\,\overline{HU} = \overline{HB}\,.\,\overline{HV} = \overline{HC}\,.\,\overline{HW} \qquad (6)$$

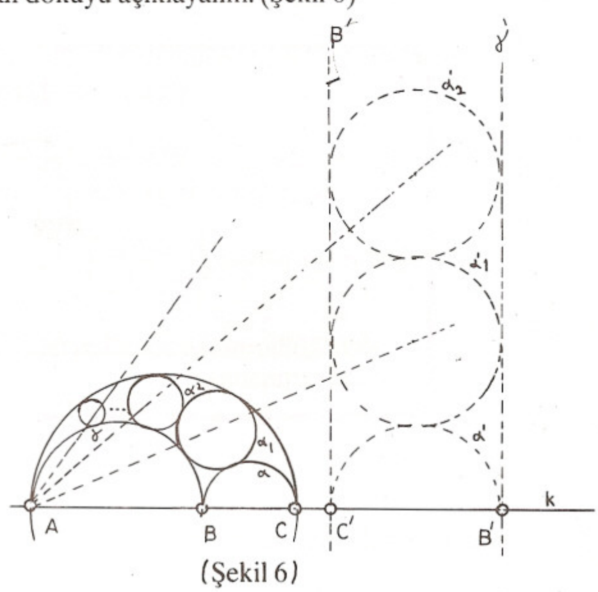
olduğunu hatırlayalım. (Örneğin H AV ve H BU üçgenlerinin benzerliğinden ilk eşitlik, HCV ve H BW üçgenlerinin benzerliğinden de ikinci eşitlik bulunabilir.) Sonra da H merkezli ve $\rho = \overline{HA}\,.\,\overline{HU}$ kuvvetinde bir evirtim alalım. (6) eşitliğine göre U, V, W sırasıyla A, B, C nin evrikleridir. Öte yandan ABC nin çevrel çemberi UVW nin çevrel çemberine dönüşecektir. En nihayat [HA] çaplı çember aynı zamanda V ve W den de geçtiği için (Neden?) BC doğrusuna dönüşmelidir. Demek ki ABC nin çevrel çemberiyle [HA] çaplı çemberin A olmayan kesişim noktası K, söz konusu evirtim altında UVW nin çevrel çemberiyle BC doğrusunun U olmayan kesişim noktasına yani L ye gitmelidir. Bir nokta, evirtim merkezi ve evrik nokta daima doğrudaş olduğundan, K, H, L noktaları da doğrudaştır.

Yorum: Bilgili okuyucu UVW nin çevrel çemberini ABC üçgeninin dokuz nokta çemberi olarak tanıyacaktır. Ayrıca L noktası da [BC] nin orta noktasıdır. Dokuz nokta çemberini ve ilgili dokuyu az ilerde kısaca tanıtacağız.

Yorum: Geniş açılı üçgenlerde $\rho = \overline{HA}\,.\,\overline{HU} > 0$ olduğundan, yukarıda sözkonusu olan evirtimde, H merkezli ve $\rho^{1/2}$ yarıçaplı çembere evirtim çemberi olarak bakılabilir. Bu önemli çembere üçgenin kutup çemberi adı verilir. Tabii, dar açılı üçgenlerde kutup çemberi sanaldır.

Örnek III

Evirtim uzaklıkları saklı tutmamakla birlikte, bu yönde de önemli ipuçları sağlayabilir. Okuyucu bu örnekte, evirtim merkezinin aynı zamanda evrik çemberlerin homoteti merkezi olduğu hususunun nasıl etkili bir araç olduğunu görecektir. Örneğimiz, Pappus'a (M.S. 4. Yüzyıl) izafe edilen bir teorem olacak. Önce biraz karışık olan dokuyu açıklayalım: (Şekil 6)



(Şekil 6)

Bir k doğrusu üzerinde birbirlerinden farklı A, B, C noktaları alalım. B noktası, A ile C arasında bulunsun. α, β, γ sırasıyla [BC], [CA], [AB] yarıçaplı, k nın aynı tarafından kalan yarıçemberler olsun. Böyle üç çemberin oluşturduğu şekil eski Yunan matematikçileri tarafından incelenmiş ve ayakkabıcı bıçağı anlamında "arbilos" olarak adlandırılmıştır. ("Arbilos" hakkında birkaç güzel teorem Arşimed'in (M.Ö. 3. yüzyıl, Ölüm 212) aslı değil Arapça aktarmaları bulunan bir eserinde görülmekte [2]). Şimdi "arbilos"un içine α, β, γ yarı çemberlerinin her birine teğet bir α_1 çemberi yerleştirelim. Bundan sonra gene "arbilos"un içine α_1 çemberine ve β, γ yarı çemberlerine teğet bir α_2 çemberi yerleştirelim. Devamla "arbilos"un içine α_2 çemberine ve β, γ yarıçemberlerine teğet olup α_1 olmayan bir α_3 çemberini yerleştirelim. Tanımımızı tümevarımla tamamlayalım. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ çemberlerinin tanımlandığını varsayarak α_{n+1} i "arbilos"un içinde kalıp, α_n çemberine ve β, γ yarıçemberlerine teğet olup α_{n-1} olmayan tek çember olarak tanımlayalım.

TEOREM 3: α_n çemberinin k doğrusuna uzaklığı, bu çemberin çapının n katıdır.

İSPAT: Püf noktasını teşkil eden evirtimi verip, ispatı okuyucuya bırakacağız: A merkezli bir evirtim alalım. (Şekil 6'da pozitif kuvvetli bir evirtim tasvir ediliyor.) B ve C nin evrikleri C′ ve B′ olsun. β ve γ yarıçemberleri k doğrusuna sırasıyla C′ ve B′ de dik yarıdoğrulara dönüşürken α yarıçemberi [B′C′] çaplı α' yarıçemberine dönüşecektir. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ çemberlerinin evrikleri de β' ve γ' doğrularına teğet olup α' yarıçemberinin üzerine bir kule şeklinde istif edilmiş çemberler olacaktır. Son ipucu: A noktası α_n ve α_n' nün homoteti merkezidir.

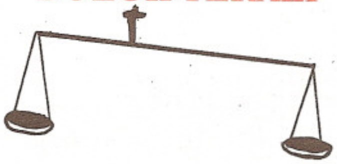
KAYNAKLAR:

1) H. Demir, "Homoteti ve Benzerlik", **Matematik Dünyası,** Sayı 4, s. 2-7.

2) E.J. Dijksterhuis, "Archimedes", **Ejnar Munksgard,** Kopenhag, 1956. (c. Dikshorn tarafından Felemenkçe aslından İngilizce'ye tercüme)

3) C. Tezer, "Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri", **Matematik Dünyası,** Sayı 1, s. 3-6.

BOZUK TERAZİ



Kefe kollarının uzunlukları farklı olan bozuk bir terazi ile bir maddeyi doğru olarak nasıl tartarsınız.