GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 1 (ÇÖZÜMLER)

1) $\sqrt[3]{x+3}+6=(x-3)^3$ denklemini $\sqrt[3]{x+3}+3=(x-3)^3-3$ şeklinde ifade edebiliriz. Burada $f(x)=(x-3)^3-3$ dersek birebir ve örten olan f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+3}+3$ olarak bulunur. O halde biz $f^{-1}(x)=f(x)$ şeklindeki bir denklemi çözmeliyiz. Bunun için $y=f^{-1}(x)$ ve $y=f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinin kesişim noktasının apsisini bulmalıyız. Fakat bir fonksiyon ile ters fonksiyonunun grafikleri $y=x$ doğrusuna göre simetrik olacağından, bunların bir kesişme noktası varsa bu nokta ancak $y=x$ üzerinde olabilir. Dolayısıyla biz $f^{-1}(x)=f(x)=x$ denklemini çözmeliyiz. $\sqrt[3]{x+3}+3=(x-3)^3-3=x \Rightarrow (x-3)^3-3-x=0$ olur. $x-3=a$ değişken değiştirmesi yaparsak $a^3-a-6=0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin bir kökü $a=2$ olduğundan polinom bölmesi yaparak $(a-2).(a^2+2a+3)=0$ elde ederiz. $a^2+2a+3=0$ denkleminin reel kökü olmadığından $a=2$ den başka çözüm yoktur. $x-3=a$ olduğundan $x=5$ dir. Sonuç olarak $\sqrt[3]{x+3}+6=(x-3)^3$ denkleminin kökler toplamı 5 olur.

2) $B=\{1,3,12\}$, $C=\{2,6,10,12\}$ ardışık tamsayılar içermeyen istenen koşullara sahip birkaç alt kümedir. 0 ve x sembollerini kullanarak B, C alt kümelerini sırasıyla 0x0xxxxxxxx0 ve x0xxx0xxx0x0 ile gösterebiliriz. İstenen şekilde ardışık eleman içermeyen alt kümeler yazabilmemiz için 0'ları peş peşe gelmeyecek şekilde yazmamız gerektiğini görüyoruz.

0 elemanlı alt küme için bir tek yazılış şekli _x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_ dir. x'lerin arasına hiç 0 yerleştirmiyoruz. Bu gösterim boş kümeyi temsil eder. $\binom{13}{0}=1$ yazalım.

1 elemanlı alt kümeler için 11 tane x, 1 tane 0 kullanmalıyız. _x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_ yazılışındaki 12 tane boşluktan bir tanesi seçilip 0 koyulmalıdır. Bu da $\binom{12}{1}=12$ şekilde yapılır.

2 elemanlı alt kümeler için 10 tane x, 2 tane 0 kullanmalıyız. _x_x_x_x_x_x_x_x_x_x_ yazılışındaki 11 tane boşluktan 2 tanesi seçilip 0 koyulmalıdır. Bu ise $\binom{11}{2}=55$ şekilde yapılır.

3 elemanlı alt kümeler için 9 tane x, 3 tane 0 kullanmalıyız. _x_x_x_x_x_x_x_x_x_ yazılışındaki 10 tane boşluktan 3 tanesi seçilip 0 koyulmalıdır. Bu ise $\binom{10}{3}=120$ şekilde yapılır.

Benzer düşünce ile istenen özellikteki 4, 5, 6 elemanlı alt kümeleri sayısının sarasıyla $\binom{9}{4}=126$, $\binom{8}{5}=56$, $\binom{7}{6}=7$ dir. 7 veya daha fazla elemanlı alt küme yazılamaz. Dolayısıyla tüm durumların toplamı

$$\binom{13}{0}+\binom{12}{1}+\binom{11}{2}+\binom{10}{3}+\binom{9}{4}+\binom{8}{5}+\binom{7}{6}=1+12+55+120+126+56+7=377 \text{ dir.}$$

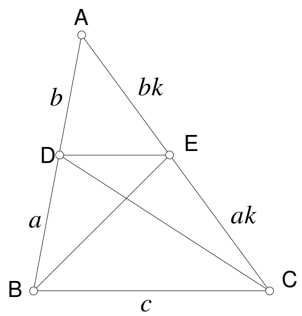
3) $\dfrac{|AC|}{|AB|}=k$ olmak üzere $|BD|=a, |AD|=b$ dersek $|CE|=ak, |AE|=bk$ olur. $|BC|=c$, $|BE|=x$, $|CD|=y$ olsun. Çözümümüzde Stewart teoreminden faydalanacağız.

$$x^2=\frac{(a+b)^2.ak+c^2.bk}{(a+b)k}-abk^2=\frac{(a+b)^2.a+c^2.b}{(a+b)}-abk^2 \text{ ve } y^2=\frac{k^2(a+b)^2.a+c^2.b}{(a+b)}-ab \text{ dir.}$$

$$x\le y \Leftrightarrow x^2\le y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2.a+c^2.b}{(a+b)}-abk^2-\frac{k^2(a+b)^2.a+c^2.b}{(a+b)}+ab\le 0$$
$$\Leftrightarrow 1-k^2\le 0 \Leftrightarrow k\ge 1$$

olup $x\le y \Leftrightarrow k\ge 1$ elde edilir. $\dfrac{|AC|}{|AB|}=k$ olduğundan $|AB|\le|AC| \Leftrightarrow |CD|\ge|BE|$ olarak bulunur. Bu eşitsizliğin anlamı, $DE//BC$ iken kısa kenara çizilen doğru parçası, uzun kenara çizilen doğru parçasından daha uzundur.

NOT: Eşitlik sadece $k=1$ iken sağlandığından $|AB|=|AC| \Leftrightarrow |CD|=|BE|$ sonucuna ulaşırız. Ayrıca bu problemde D ve E kenar orta noktalar olarak alınırsa V_b, V_c kenarortay uzunlukları olmak üzere $|AB|\le|AC| \Leftrightarrow V_c\ge V_b$ kenarortay eşitsizliğine de ulaşırız.



4) $y=0$ durumunda $x^3=8z^3 \Rightarrow x=2z$ olur. z herhangi bir tamsayı olmak üzere $(2z,0,z)$ şeklindeki tüm üçlüler denklemi sağlar.

Şimdi $y>0$ durumunu inceleyelim. $x=2x_1$ şeklinde bir çift sayı olduğundan $(2x_1)^3-2y^3=4z^3 \Rightarrow 4x_1^3-y^3=2z^3$ yazılır. Bu durumda $y=2y_1$ şeklinde bir çift sayıdır. $4x_1^3-(2y_1)^3=2z^3 \Rightarrow 2x_1^3-4y_1^3=z^3$ yazılır. Bu durumda $z=2z_1$ şeklinde bir çift sayıdır. $2x_1^3-4y_1^3=(2z_1)^3 \Rightarrow x_1^3-2y_1^3=4z_1^3$ yazılır. Tekrar orijinal denklemimize döndüğümüz için aynı işlemleri tekrar edersek $y_1=2y_2$ şeklinde bir çift sayı olması gerektiğini görebiliriz. Denklemi sağlayan $y>0$ tamsayıları için $y>y_1>y_2>y_3>\ldots$ çözümler dizisini oluştururuz. Fakat sonsuz terimli azalan bir pozitif tamsayı dizisi yoktur. (Fermat'nın sonsuza iniş metodu). Dolayısıyla $y>0$ için denklemin çözümü yoktur.

Tüm çözümler $(2z,0,z)$ şeklindeki üçlülerdir.

5) $\left(2\sqrt{x},7\sqrt{y},5\sqrt{z}\right)$ ve $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}},\dfrac{1}{\sqrt{y}},\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ üçlüleri için Cauchy – Schwarz eşitsizliğini uygulayalım: $\left(2\sqrt{x}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}+7\sqrt{y}.\dfrac{1}{\sqrt{y}}+5\sqrt{z}.\dfrac{1}{z}\right)^2 \le \left(4x+49y+25z\right).\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ olur.

$4x+49y+25z=2$ ve $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=98$ değerlerini bu eşitsizlikte kullanırsak

$(2+7+5)^2 \le 2.98 \Rightarrow 196 \le 196$ elde edilir. C – S eşitsizliği uygulandığında eşitlik durumu ancak ve ancak

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{7\sqrt{y}}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)}{5\sqrt{z}}$$

orantısı varken sağlanır. Buradan $2x=7y=5z$ elde edilir. $4x+49y+25z=2$ olduğundan $4x+7.(7y)+5(5z)=2 \Rightarrow 4x+7.2x+5.2x=2$ olup $x=\dfrac{1}{14}$ elde edilir. Buna göre $y=\dfrac{1}{49}, z=\dfrac{1}{35}$ olur. Denklem sisteminin tek çözüm üçlüsü $\left(\dfrac{1}{14},\dfrac{1}{49},\dfrac{1}{35}\right)$ dir.

6) $\angle BDC = 120^o$ şartını sağlayan tüm D noktalarının kümesi bir çember yayıdır. Bu yayı tamamlayarak elde ettiğimiz çemberin merkezini O ile gösterelim. $[AO]$ ile $\overset{\frown}{BDC}$ yayının kesişimi D' olsun. Çevre açı ve merkez açı kullanılarak $\angle BOC = 120^o$, $\angle OBC = \angle OCB = 30^o$ bulunur. Dolayısıyla çemberin yarıçapı $R = |OB| = |OD'| = |OD| = |OC| = 8\sqrt{3}$ tür. $\triangle ABC$ nin kenar uzunlukları 5–7–8 sayıları ile orantılı olduğundan $\angle ABC = 60^o$ dir. Böylece $\angle ABO = 90^o$ olup $|AO|^2 = 15^2 + (8\sqrt{3})^2 \Rightarrow |AO| = \sqrt{267}$ dir. $|AD'| + R = |AO| \Rightarrow |AD'| = \sqrt{267} - 8\sqrt{3}$ olur. $\triangle ADO$ üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $|AO| \le |AD| + |OD| \Rightarrow |AD'| + R \le |AD| + R$ olup $|AD'| \le |AD|$ bulunur. Dolayısıyla $|AD| \ge \sqrt{267} - 8\sqrt{3}$ olup aranan en küçük değer $\sqrt{267} - 8\sqrt{3}$ bulunur. Ayrıca $|AD| = \sqrt{267} - 8\sqrt{3}$ olması için D noktasını, $[AO]$ ile çember yayının kesişimi olarak almamız gerekli ve yeterlidir.