GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 8 (ÇÖZÜMLER)

1) $x^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H=0$ şeklindeki bir denklemde Vieta teoremine göre kökler toplamı ve köklerin ikişerli çarpımının toplamı:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+...+x_7 &= -B \\ x_1.x_2+x_1.x_3...+x_6x_7 &= C \end{aligned}\right\}$$

ile belirlidir. $x^7+7x^6+6x^5+5x^2-2x-3=0$ denklemi için

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+...+x_7 &= -7 \\ x_1.x_2+x_1.x_3...+x_6x_7 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

olur. Tam kare açılımından $(x_1+x_2+...+x_7)^2 = {x_1}^2+{x_2}^2+...+{x_7}^2+2.(x_1.x_2+x_1.x_3...+x_6x_7)$ olup buradan ${x_1}^2+{x_2}^2+...+{x_7}^2 = 7^2-2.6 = 37$ bulunur.

2) 1260 sayısını asal çarpanlarına ayıralım: $1260 = 2^2.3^2.5.7$ dir. Biz $x \le 1260$ şeklinde olan ve 2, 3, 5, 7 sayılarından herhangi birisine bölünmeyen *x* pozitif tamsayılarının sayısını bulmalıyız. 1261 den küçük ve 2 nin katı olan sayıların kümesi *A* olsun. 3, 5, 7 nin katı olan sayıların kümesi de sırasıyla *B*, *C*, *D* olsun. O halde $A \cup B \cup C \cup D$ kümesinin eleman sayısını hesaplayıp 1260 dan çıkardığımızda problemimiz çözülmüş olur. İçerme – dışarıma (dahiliyet – hariciyet) prensibi gereğince:

$$\begin{aligned} s(A\cup B\cup C\cup D) = {} & s(A)+s(B)+s(C)+s(D) \\ & -s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(A\cap D)-s(B\cap C)-s(B\cap D)-s(C\cap D) \\ & +s(A\cap B\cap C)+s(A\cap B\cap D)+s(A\cap C\cap D)+s(B\cap C\cap D) \\ & -s(A\cap B\cap C\cap D) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

$s(A)=\frac{1260}{2}=630$, $s(B)=\frac{1260}{3}=420$, $s(C)=\frac{1260}{5}=252$, $s(D)=\frac{1260}{7}=180$ dir.

$s(A\cap B)=\frac{1260}{2.3}=210$, $s(A\cap C)=\frac{1260}{2.5}=126$, $s(A\cap D)=\frac{1260}{2.7}=90$, $s(B\cap C)=\frac{1260}{3.5}=84$,

$s(B\cap D)=\frac{1260}{3.7}=60$, $s(C\cap D)=\frac{1260}{5.7}=36$ dır. $s(A\cap B\cap C)=\frac{1260}{2.3.5}=42$,

$s(A\cap B\cap D)=\frac{1260}{2.3.7}=30$, $s(A\cap C\cap D)=\frac{1260}{2.5.7}=18$, $s(B\cap C\cap D)=\frac{1260}{3.5.7}=12$ ve

$s(A\cap B\cap C\cap D)=\frac{1260}{2.3.5.7}=6$ dır. Böylece

$s(A\cup B\cup C\cup D)=630+420+252+180-210-126-90-84-60-36+42+30+18+12-6$

$s(A\cup B\cup C\cup D)=972$ bulunur. Böylelikle 1260 a eşit ya da küçük olan pozitif tamsayılardan 972 tanesi 2, 3, 5 veya 7 ile tam bölünebilir. $1260-972=288$ tane sayı ise 2, 3, 5 veya 7 ile tam bölünmez.

NOT: $n=p_1^{a_1}.p_1^{a_2}...p_k^{a_k}$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış bir *n* sayısı verilsin. *n* den küçük veya eşit olan, $p_1, p_2, ..., p_{k-1}$ veya p_k asallarından herhangi biriyle tam bölünmeyen sayıların sayısı

$$n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}...-\frac{n}{p_k}+\frac{n}{p_1\cdot p_2}+\frac{n}{p_1\cdot p_3}+...+\frac{n}{p_{k-1}\cdot p_k}$$

$$-\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdot p_3}-...-\frac{n}{p_{k-2}\cdot p_{k-1}\cdot p_k}+...+(-1)^k.\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdots p_k}=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right)....\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$ olur. Bu son ifade ise *n* den küçük *n* ile aralarında asal sayıların sayısına (Euler – φ fonksiyonu) eşittir. Yani $\varphi(n)=\varphi(p_1^{a_1}.p_1^{a_2}...p_k^{a_k})=(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1}).(p_1^{a_2}-p_1^{a_2-1})...(p_k^{a_k}-p_k^{a_k-1})$ değerini hesaplamak da işimizi görür. Bu problem için $\varphi(1260)=(2^2-2^1).(3^2-3^1).(5^1-5^0).(7^1-7^0)=2.6.4.6=288$ olur.

3) $58.800=2^4.3^1.5^2.7^2$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. $A=2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1}$ ve $B=2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2}$ şeklindedir. Burada

$$\max(x_1,x_2)=4,\ \max(y_1,y_2)=1,\ \max(z_1,z_2)=2,\ \max(t_1,t_2)=2$$

olmalıdır. $x_1=4$ için $x_2=0,1,2,3,4$ şeklinde 5 değer alabilir. $x_2=4$ için $x_1=0,1,2,3,4$ şeklinde 5 değer alabilir. Fakat $(4,4)$ iki defa sayıldığından $5+5-1=9$ farklı yazılış vardır. Benzer işlemleri yaparsak $\max(y_1,y_2)=1$ için 3 farklı yazılış, $\max(z_1,z_2)=2$ için 5 farklı yazılış, $\max(t_1,t_2)=2$ için 5 farklı yazılış vardır. Çarpma yoluyla sayma prensibi gereği $9.3.5.5=675$ yazılış vardır. Fakat burada $A=B=58.800$ iki defa sayılmıştır. Ayrıca

$$\left.\begin{matrix}A=2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1}\\ B=2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2}\end{matrix}\right\}\text{ ve }\left.\begin{matrix}A=2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2}\\ B=2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1}\end{matrix}\right\}$$

aynı olduğundan farklı (A,B) ikililerinin sayısı $\frac{675-1}{2}+1=338$ olur.

4)

(a) $\angle CBD = 90^o$ olduğundan $[CD]$ çemberin çapıdır. Çemberin merkezi O olmak üzere yarıçap uzunluğu $|OA| = \dfrac{c}{2}$ dir. Böylece $\triangle AOC$ ikizkenar üçgeninde $|AC| = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ olur. $\triangle ABC$ de kosinüs teoreminden $\left(\dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos 120^o$ olup

$$\frac{3c^2}{4} = a^2 + b^2 + ab \ \ \ldots (*)$$

bulunur.

$c \geq a + b \Leftrightarrow c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab$

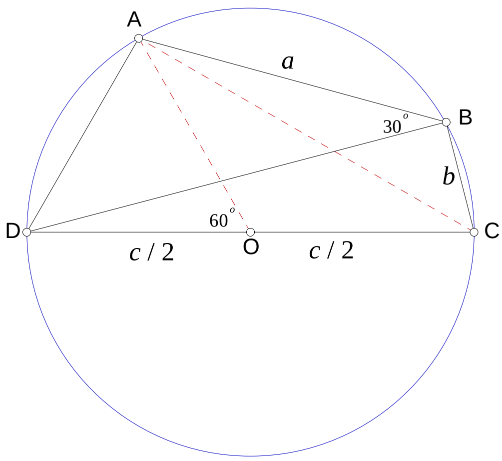
$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + ab) \geq a^2 + b^2 + 2ab$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4ab \geq 3a^2 + 3b^2 + 6ab$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

olup son eşitsizlik daima doğrudur. Eşitlik durumu sadece $a = b$ iken vardır. Dolayısıyla ilk eşitsizlik de doğrudur.



(b) $\left|\sqrt{c+a} - \sqrt{c+b}\right| = \sqrt{c-a-b}$ eşitliğinde her iki tarafın karesini alırsak

$c + a + c + b - 2\sqrt{(c+a)(c+b)} = c - a - b$

$\Leftrightarrow c + 2(a+b) = 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$

$\Leftrightarrow c^2 + 4(a+b)^2 + 4(a+b).c = 4c^2 + 4c(a+b) + 4ab$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4ab = 3c^2$

elde edilir. Bu ifade ise (*) eşitliğine denktir. Öyleyse $\left|\sqrt{c+a} - \sqrt{c+b}\right| = \sqrt{c-a-b}$ eşitliği de doğrudur.

5) $P(x) = x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 42)$ denkliğinde $42 = 2.3.7$ olduğundan $P(x) \equiv (\mathrm{mod}\, 2)$, $P(x) \equiv (\mathrm{mod}\, 3)$, $P(x) \equiv (\mathrm{mod}\, 7)$ denklikleri çözülmelidir.

(a) $P(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ nin çözümü $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ olup tek çözüm vardır.

(b) $P(x) \equiv x^3 + x^2 + 2x + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ün çözümleri $x \equiv 1$ ve $x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 2)$ dir. 2 çözüm vardır.

(c) $P(x) \equiv x^3 + 5x^2 - x + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$ nin çözümleri $x \equiv \pm 1, 2 (\mathrm{mod}\, 7)$ olup 3 tanedir.

Bu denkliklerin çözüm sayısının çarpımı $x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 42)$ denkliğinin çözüm sayısını verir. Bu çözümleri bulmak için:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (4) \qquad \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (5) \qquad \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ x \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} (6)$$

Denklik sistemleri Çin Kalan Teoremi yardımıyla çözülmelidir. Bizden polinom denkliğin çözüm sayısı istendiğinden $x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 42)$ denkliğinin $1.2.3 = 6$ farklı çözümü vardır.

NOT: Yukarıdaki altı tane denklik sisteminin çözümleri yapılırsa bunların modülo 42 deki çözüm sınıflarının 1, 13, 23, 29, 37, 41 olduğu bulunabilir.

6) $60 < a_{51} < 61$ olduğunu göstereceğiz.

(a) $a_n(a_{n+1} - a_n) = 30 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{30}{a_n} + a_n$ olur. Buna göre $a_{n+1} > a_n$ olup (a_n) dizisi artandır. Bu son eşitlikte her iki tarafın karesi alınırsa

$$a_{n+1}{}^2 = \frac{900}{a_n{}^2} + a_n{}^2 + 60 \Rightarrow a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 = \frac{900}{a_n{}^2} + 60$$

olur. Burada $n = 1, 2, ..., 50$ değerlerini verelim.

$n = 1$ için $a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2} = \dfrac{900}{a_1^{\ 2}} + 60$

$n = 2$ için $a_3^{\ 2} - a_2^{\ 2} = \dfrac{900}{a_2^{\ 2}} + 60$

$\vdots$

$n = 50$ için $a_{51}^{\ 2} - a_{50}^{\ 2} = \dfrac{900}{a_{50}^{\ 2}} + 60$

olur. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. $a_{51}^{\ 2} - (10\sqrt{6})^2 = 900.\left(\dfrac{1}{a_1^{\ 2}} + \dfrac{1}{a_2^{\ 2}} + ... + \dfrac{1}{a_{50}^{\ 2}}\right) + 60.50$ olup

$$a_{51}^{\ 2} = 3600 + 900.\left(\frac{1}{a_1^{\ 2}} + \frac{1}{a_2^{\ 2}} + ... + \frac{1}{a_{50}^{\ 2}}\right) \ \dots \ (*)$$

eşitliği elde edilir.

(*) eşitliğine göre $a_{51}^{\ 2} > 3600$ olup $a_{51} > 60$ bulunur.

(b) (a_n) dizisi monoton artan olduğundan $a_1 < a_2 < ... < a_{50}$ olup $\dfrac{1}{a_1^{\ 2}} > \dfrac{1}{a_2^{\ 2}} > ... > \dfrac{1}{a_{50}^{\ 2}}$ dir. (*) eşitliğine göre

$a_{51}^{\ 2} < 3600 + 900.\left(\dfrac{1}{a_1^{\ 2}} + \dfrac{1}{a_1^{\ 2}} + ... + \dfrac{1}{a_1^{\ 2}}\right)$

$\Rightarrow a_{51}^{\ 2} < 3600 + 900.50.\dfrac{1}{a_1^{\ 2}}$

$\Rightarrow a_{51}^{\ 2} < 3600 + 900.50.\dfrac{1}{600}$

$\Rightarrow a_{51}^{\ 2} < 3675$

olur. $3675 < 3721 = 61^2$ olduğundan $a_{51} < 61$ bulunur.

Böylece $60 < a_{51} < 61$ olup $[\![a_{51}]\!] = 60$ bulunur.