GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 7 (ÇÖZÜMLER)

1) $i^2=-1$ olmak üzere binom açılımından $(1+i)^{97}=\binom{97}{0}+\binom{97}{1}.i+\binom{97}{2}.i^2+...+\binom{97}{97}.i^{97}$

yazılabilir. $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$ olduğundan De Moivre formülünden:

$(1+i)^{97}=2^{97/2}.(\cos\frac{97.\pi}{4}+i.\sin\frac{97.\pi}{4})=2^{97/2}.(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})=2^{48}.(1+i)$ olur. Buna göre $\binom{97}{0}+\binom{97}{1}.i-\binom{97}{2}-\binom{97}{3}i+...+\binom{97}{97}.i=2^{48}.(1+i)$ olup reel ve sanal kısımların katsayıları eşit olacağından

$\binom{97}{0}-\binom{97}{2}+\binom{97}{4}-...+\binom{97}{96}=2^{48}$, $\binom{97}{1}-\binom{97}{3}+\binom{97}{5}-...+\binom{97}{97}=2^{48}$ bulunur.

2) $p\,|\,(n-1)(n^2+n+1)$ ifadesinde $p\,|\,(n-1)$ ya da $p\,|\,(n^2+n+1)$ ifadelerinden yalnızca biri doğrudur. $p\,|\,(n-1)$ olsa $n-1\geq p$ olurdu. Fakat $n\,|\,p-1$ verildiğinden $p-1\geq n$ dir. Bu iki eşitsizliğe göre $n-1\geq p>p-1\geq n$ şekline bir çelişki ortaya çıkar. Demek ki ancak $p\,|\,(n^2+n+1)$ olabilir. $n\,|\,p-1\Rightarrow p=n.k+1$ olacak şekilde bir $k\geq 1$ tamsayısı vardır. Öklid algoritmasından $p\,|\,(n^2+n+1)\Rightarrow p\,|\,(n^2+n+1)-p$ olup $p\,|\,n(n-k+1)$ elde edilir. Burada $p>n$ olduğundan $p\nmid n$ dir. O halde $p\,|\,(n-k+1)$ olmalıdır. Burada $n-k+1=0$ olmak zorundadır. Aksi halde $n-k+1>0$ olsa $p\leq n-k+1$ olması gerekirdi. Buna göre $nk+1\leq n-k+1\Rightarrow n(k-1)\leq 0$ çelişkisi ortaya çıkardı. Sonuç olarak $n-k+1=0$ dır. $p=nk+1=n(n+1)+1=n^2+n+1$ olup $4p-3=4.(n^2+n+1)-3=(2n+1)^2$ bir tam karedir.

NOT: Problemin koşullarını sağlayan p asal sayılarının kümesi boş değildir. Örneğin $p=3$, $p=7$, $p=13$, $p=17$, $p=31$ asalları verilen koşullara uygundur. Başka uygun asal sayılar da bulunabilir.

3) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}}$ dir. Ayrıca $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cot\frac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ olduğundan

$\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ yazılır. Çapraz çarpım yapılarak

$$\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\theta}{2}=1 \ \dots\ (1)$$

elde edilir.

(a) Cauchy – Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}\right).\left(\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\geq\left(\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\right)^2$$

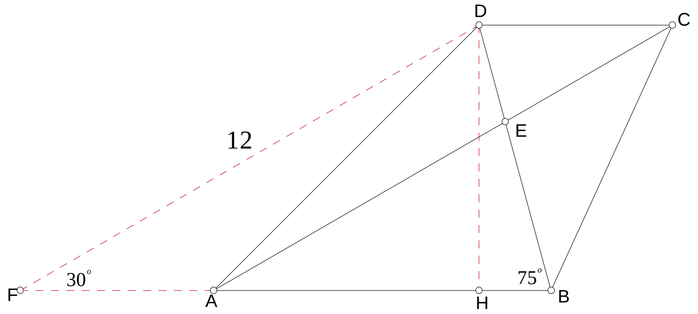
olup (1) eşitliğinin yardımıyla $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}\geq 1$ elde edilir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha=\beta=\theta=60^o$ olması halinde gerçekleşir.

(b) Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\geq 3.\sqrt[3]{\left(\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}\right).\left(\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\right).\left(\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\right)}$$

olup (1) eşitliği yardımıyla $\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ elde edilir. Burada da eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha=\beta=\theta=60^o$ olması halinde sağlanır.

4) D den AB ye çizilen dikme ayağı H olmak üzere $|DH|=6$ dır. $ACDF$ paralelkenarını oluşturalım. Bu halde $|FD|=12$ olup $\triangle FDH$ dik üçgeninde $\angle FDH=60^o$ dir. Yöndeş açılardan $\angle FDB=\angle AEB=75^o$ olduğundan $\angle DBF=75^o$ elde edilir. Böylece $\triangle FDB$ ikizkenar olup $|FB|=|FD|=12$ dir. $A(FDB)=\frac{|FB|.|DH|}{2}=\frac{12.6}{2}=36$ bulunur. Taban ve yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları da eşit olduğundan $A(FAD)=A(BCD)$ dir. Böylece $A(ABCD)=A(FDB)$ olup $A(ABCD)=36$ olarak hesaplanır.



5) $b_n = \log a_n$ diyelim. $b_1 = \log a_1 = \log 10^{11} = 11$, $b_2 = \log a_2 = \log 10^{29} = 29$ ve

$b_{n+2} = \log(a_{n+2}) = \log \dfrac{(a_{n+1})^4}{(a_n)^3} \Rightarrow b_{n+2} = 4.\log b_{n+1} - 3.\log b_n$ olur. (b_n) bir doğrusal indirgemeli dizi

olduğundan $r^2 - 4r + 3 = 0$ karakteristik denklemine sahiptir. Bu denklemin kökleri $r_1 = 3, r_2 = 1$

olduğundan $b_n = A.3^n + B.1^n$ formundadır. Bu eşitlikte $n = 1$ ve $n = 2$ değerleri yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} 3A + B &= 11 \\ 9A + B &= 29 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse $A = 3$, $B = 2$ bulunur. Böylece

$b_n = 3.3^n + 2 = 3^{n+1} + 2$ olup $a_n = 10^{b_n} = 10^{3^{n+1}+2}$ bulunur. $a_{n+1} = 10^{3^{n+2}+2}$ olup

$\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{3^n}} = \left(\dfrac{10^{3^{n+2}+2}}{10^{3^{n+1}+2}}\right)^{\frac{1}{3^n}} = \left(10^{2.3^{n+1}}\right)^{\frac{1}{3^n}} = 10^6$ olarak hesaplanır.

6) $\sqrt{x} = a$ olsun. $\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt{x}} = 6 \Rightarrow a^2 = 6a + 5$ olur. Bizden $x^2 - 276\sqrt{x} = a^4 - 276a$ ifadesinin eşiti istenmektedir. $a^2 = 6a + 5$ ifadesinde eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$a^4 = 36a^2 + 60a + 25$

$\Rightarrow a^4 = 36.(6a + 5) + 60a + 25$

$\Rightarrow a^4 = 276a + 205$

olup $a^4 - 276a = 205$ bulunur.