GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 7

Bu çalışmamız, çeşitli olimpiyatlardan – matematik yarışmalarından derlenen ya da geomania.org takımı tarafından hazırlanan problemlerin bir araya getirilmesiyle oluşturulmuştur. Klasik olarak sunulan 6 soruluk bu deneme sınavının süresi 3 saattir. Kolay gelsin…

1) Aşağıdaki toplamları hesaplayınız:

(a) $\binom{97}{0}-\binom{97}{2}+\binom{97}{4}-...+\binom{97}{96}$ (b) $\binom{97}{1}-\binom{97}{3}+\binom{97}{5}-...+\binom{97}{97}$

2) $n>1$ doğal sayısı ve bir p asal sayısı verilsin. $p \mid n^3-1$ ve $n \mid p-1$ ise $4p-3$ sayısının bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

3) α, β, θ pozitif reel sayıları için $\alpha+\beta+\theta=\pi$ eşitliği sağlandığına göre aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız. Ayrıca eşitlik durumunun ne zaman sağlanacağını belirleyiniz

(a) $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}\geq 1$ (b) $\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}.\tan\frac{\theta}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$

4) $AB//CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun köşegenleri E de kesişiyor. $|AC|=12$, $\angle AEB=75^o$ ve yamuğun yüksekliği 6 ise yamuğun alanını bulunuz.

5) $a_1=10^{11}$, $a_2=10^{29}$ ve $a_{n+2}=\frac{(a_{n+1})^4}{(a_n)^3}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için $\sqrt[3^n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$ işleminin sonucunu hesaplayınız.

6) x pozitif bir gerçel sayı ve $\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}=6$ ise $x^2-276\sqrt{x}=?$