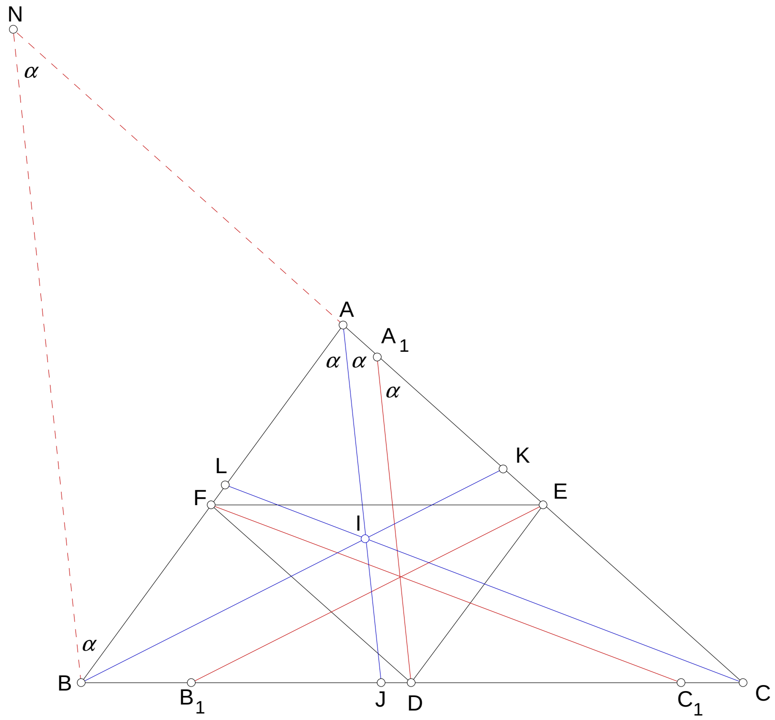
GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 6 (ÇÖZÜMLER)

1) l_A, l_B, l_C doğruları, karşılarında bulunan kenarları sırasıyla *D*, *E*, *F* noktalarında kessin. İç açıortaylar da karşılarında bulunan kenarları *J*, *K*, *L* noktalarında kessin. $\angle BAC = 2\alpha$ dersek yöndeş açılardan dolayı $\angle DA_1C = \alpha$ olur. [AC ışınının *A* yönündeki uzantısı üzerinden $|AB| = |AN|$ olacak şekilde bir *N* noktası alalım. $\triangle ABN$ ikizkenar üçgen olduğundan $\angle ANB = \angle ABN = \alpha$ dır. Böylece $\angle CNB = \angle CA_1D = \alpha$ olup $A_1D // NB$ elde ederiz. $\triangle CA_1D \cong \triangle CNB$ (A – A – A benzerliği) vardır. A_1, [*NC*] kenarının orta noktası olduğundan *D* de [*BC*] kenarının orta noktasıdır.

Benzer şekilde *E* ve *F* sırasıyla, [*AC*], [*AB*] kenarlarının orta noktaları olur. Kenar orta noktalar yardımıyla oluşan $\triangle DEF$ üçgeni ve $\triangle ABC$ üçgeni homotetiktir. Dolayısıyla $\triangle ABC$ nin iç açıortaylarına paralel olan l_A, l_B, l_C doğruları da $\triangle DEF$ nin iç açıortaylarıdır. Bir üçgende üç iç açıortay noktadaş olduğundan l_A, l_B, l_C doğruları noktadaştır.



2) Önce polinomun derecesini düşürmeyi deneyelim: $(x, 49) = 1$ şeklindeki *x* sayıları için $\varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$ olmak üzere, Euler teoreminden $x^{\varphi(49)} \equiv 1 (\bmod 49) \Rightarrow x^{42} \equiv 1 (\bmod 49)$ olur. Her iki tarafı x^3 ile çarparsak, *x* ile 49 un aralarında asal olmasına gerek olmaksızın $x^{45} \equiv x^3 (\bmod 49)$ yazabiliriz. Bu denklik her *x* tamsayısı için doğrudur. Böylece problemimiz $x^3 + x - 19 \equiv 0 (\bmod 49)$ denkliğinin çözümüne dönüşür.

Bundan sonrasında sayılar teorisine ait aşağıdaki şu önemli teoremden faydalanacağız:

Teorem: $P(x)$, tamsayı katsayılı bir polinom, $n>1$ tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere $P(x)\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ denkliği verilsin. $P(x)\equiv 0(\text{mod } p^{n})$ denkliğinin bir çözümü $x=a$ ve $P(x)$ polinomunun türevi $P'(x)$ olsun. Bu durumda:

1. Hal: $P'(a)\equiv 0(\text{mod } p)$ ve $P(a)\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ ise her k tamsayısı için $x=a+k.p^{n}$, $P(x)\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ denkliğinin bir çözümüdür. Bununla birlikte $P(a)\not\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ ise $x=a+k.p^{n}$ sayılarından hiçbirisi $P(x)\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ denkliğinin çözümü değildir.

2. Hal: $P'(a)\not\equiv 0(\text{mod } p)$ ise modülo p^{n+1} de birbirine denk olmayan $x=a+k.p^{n}$ sayıları içinde $P(x)\equiv 0(\text{mod } p^{n+1})$ dekliğinin çözümü olan bir tek sayı vardır. Bu çözümü veren k tamsayısı $k\equiv -\left[P'(a)\right]^{-1}.\dfrac{P(a)}{p^{n}}(\text{mod } p)$ denkliği ile bulunur. (Teoremin bir ispatı için F. Çallıalp'in Sayılar Teorisi isimli kitabına bakılabilir)

Artık $P(x)=x^{3}+x-19\equiv 0(\text{mod } 49)$ denkliğinde $p=7$ durumunda çözüme geçebiliriz.

$0,\pm1,\pm2,\pm3$ sayılarını deneyerek $P(x)=x^{3}+x-19\equiv 0(\text{mod } 7)$ denkliğinin çözümlerinin $a=-1$ ve $a=-3$ olduğunu görebiliriz. Bu sayıları kullanarak $P(x)\equiv 0(\text{mod } 7^{2})$ denkliğinin (varsa) tüm çözümlerini bulabiliriz.

(a) $a=-1$ için $P(-1)=-21$, $P'(x)=3x^{2}+1 \Rightarrow P'(-1)=4$ tür. Teoremdeki 2. hal sağlanmaktadır. $P'(-1)=4$ sayısının modülo 7'deki tersini hesaplarsak $4^{-1}\equiv 2(\text{mod } 7)$ dir. Denkliğin tek çözümü vardır ve $k\equiv -\left[P'(-1)\right]^{-1}.\dfrac{P(-1)}{7^{1}}(\text{mod } 7) \Rightarrow k\equiv -2.\dfrac{21}{7}\equiv -6(\text{mod } 7)$ olmak üzere bu çözüm $x=-1+6.7=41(\text{mod } 49)$ olur.

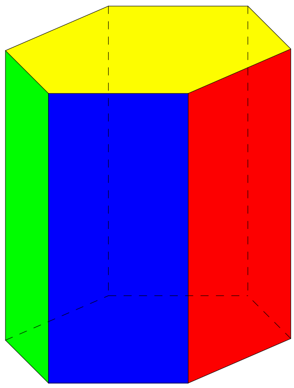
(b) $a=-3$ için $P(-3)=-49$, $P'(-3)=28$ dir. Teoremdeki 1. hal sağlanmaktadır. Her k tamsayısı için $x=-3+7k$ şeklindeki sayılar denkliğin bir çözümü olur. Bu çözümler $k=0,1,2,3,4,5,6$ için $x=-3,4,11,18,25,32,39(\text{mod } 49)$ olarak bulunur.

Toplamda modülo 49 içinde 8 farklı çözüm vardır.

3)

a) Öncelikle tabanları boyayacağımız renkleri seçelim. $\binom{8}{2}=28$ seçim yapabiliriz. Bundan sonra genellikle $\binom{8}{2}=28$ sayısını $2!=2$ ile çarpma eğilimi gösterilse de bunu yapmayacağız! Çünkü prizmanın baş aşağı çevrilmesi ile tavan – taban yer değiştirebilir.

Döndürmeler farklı bir durum oluşturmadığından bu yer değiştirmeler aynı durumu gösterir. Bir başka ifade ile tavanı sarı, tabanı pembe ile boyadıysak; prizmayı ters çevirerek sarıyı aşağı, pembeyi yukarı getirebiliriz. Bunların her ikisi de aynı durumu gösterdiğinden hiç de $2!=2$ ile çarpmaya gerek yoktur. Gelelim yan yüzeylerin boyanmasına: $6!=720$ şekilde boyanabileceği şeklinde bir düşünce eğilimi olabilir. Ama bu da yanlış bir düşüncedir. Burada da dairesel permütasyon durumu oluştuğundan yan yüzeyler $(6-1)!=120$ şekilde boyanabilir. Sonuç olarak $\binom{8}{2}.5!=28.120=3360$ farklı boyama yapılabilir.



(b) 10 farklı boyamız olsun. Öncelikle tabanlar için renk seçimi yapalım. $\binom{10}{2}=45$ farklı boyama yapabiliriz. Artık taban – tavan yer değiştirmesinin farklı bir durum oluşturmayacağını biliyoruz. Yan yüzeylerin boyanmasına gelelim. Elimizde kalan 8 boyadan 6 tanesini $\binom{8}{6}=28$ yolla seçebiliriz. Şimdi de bu seçtiğimiz 6 boya ile yan yüzeyleri $5!=120$ yolla boyayalım. Çarpma yoluyla sayma prensibine göre $\binom{10}{2}.\binom{8}{6}.5!=151200$ farklı boyama yapılabilir.

4) $1.000.000=2^6.5^6$ olduğundan her bir böleni olduğundan çarpımları $1.000.000$'a eşit olan üç çarpan:

$$1.000.000=(2^{a_1}.5^{b_1}).(2^{a_2}.5^{b_2}).(2^{a_3}.5^{b_3})$$

şeklindedir. Burada a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 negatif olmayan tamsayıları

$$a_1+a_2+a_3=6\,,\ b_1+b_2+b_3=6$$

denklemlerini sağlar. Şimdi bu eşitlikleri sağlayan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sayılarının sayısını hesaplayalım. $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ denklemini sağlayan (a_1, a_2, a_3) üçlülerinin sayısını kombinasyon hesabından $\binom{8}{6} = 28$ olarak buluruz. Benzer şekilde $b_1 + b_2 + b_3 = 6$ denklemini sağlayan (b_1, b_2, b_3) üçlülerinin sayısı $\binom{8}{6} = 28$ dir. Böylece $1.000.000$'un üçlü çarpanlara ayrılma sayısı $28.28 = 784$ tür. Fakat bu hesaplamada henüz, çarpanların sırasının yer değiştirmesini farklı bir durum olarak almadık. Dolayısıyla birkaç defa saydığımız birbirinin aynı olan durumlar vardır. Bunların sayısını da belirleyelim.

(a) $10^6 = (2^2.5^2).(2^2.5^2).(2^2.5^2)$ durumu bir defa sayılmıştır.

(b) $10^6 = (2^a.5^b).(2^a.5^b).(2^{6-a}.5^{5-b})$ şeklindeki iki çarpanı aynı, üçüncüsü ise diğer ikisinden farklı olan yazılışlara bakalım. Tekrarlı permütasyonu göz önüne almadığımız için bu şekildeki yazılışların sayısını olması gerekenin 3 katı olarak hesapladık. Burada $a = 0,1,2,3$ ve $b = 0,1,2,3$ olabileceğinden $4.4 = 16$ yazılış vardır. Fakat $a = 2, b = 2$ halinde üç çarpan da eşit olduğundan bu durumu atmalıyız. Yani üçer defa hesaplanmış 15 farklı yazılış vardır.

(c) Tüm çarpanların farklı olması durumunu inceleyelim. Burada da her yazılışı olması gerekenin 6 katı olarak hesapladık. Bir yazılışın nasıl 6 defa sayıldığını aşağıdaki şekilde görebiliriz:

$$(2^{a_1}.5^{b_1}).(2^{a_2}.5^{b_2}).(2^{a_3}.5^{b_3}),\ (2^{a_1}.5^{b_1}).(2^{a_3}.5^{b_3}).(2^{a_2}.5^{b_2}),\ (2^{a_2}.5^{b_2}).(2^{a_1}.5^{b_1}).(2^{a_3}.5^{b_3})$$

$$(2^{a_2}.5^{b_2}).(2^{a_3}.5^{b_3}).(2^{a_1}.5^{b_1}),\ (2^{a_3}.5^{b_3}).(2^{a_1}.5^{b_1}).(2^{a_2}.5^{b_2}),\ (2^{a_3}.5^{b_3}).(2^{a_2}.5^{b_2}).(2^{a_1}.5^{b_1})$$

Bu durumların sayısını hesaplarken (a) ve (b) de hesapladığımız durumları atmalıyız. Böylece tüm farklı yazılışların sayısı $1 + 15 + \frac{784 - 3.15 - 1.1}{6} = 1 + 15 + \frac{738}{6} = 1 + 15 + 123 = 139$ olur.

5) Ceva teoreminin karşıtına göre *AN*, *BM*, *CH* doğrularının aynı noktadan geçmesi için

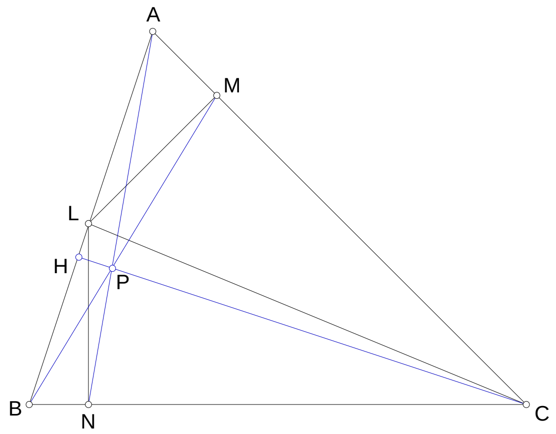
$$\Leftrightarrow \frac{|BM|}{|MC|}.\frac{|CN|}{|NA|}.\frac{|AH|}{|HB|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BM|}{|NA|}.\frac{|AH|}{|HB|} = 1 \qquad (|CN| = |MC|)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BL|.\cos B}{|AL|.\cos A}.\frac{|AC|.\cos A}{|BC|.\cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BL|}{|AL|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

olması gerek ve yeter koşuldur. İç açıortay teoremi olarak bilinen son eşitlik doğru olduğundan ilk önerme de doğrudur. Yani *AN*, *BM*, *CH* doğrularının aynı noktadan geçer.



6)

$$11111102222224 = 10^{13} + 10^{12} + 10^{11} + 10^{10} + 10^{9} + 10^{8} + 2.(10^{6} + 10^{5} + 10^{4} + 10^{3} + 10^{2} + 10^{1}) + 4$$

$$= 10^{8}.(10^{5} + 10^{4} + 10^{3} + 10^{2} + 10^{1} + 1) + 2.10.(10^{5} + 10^{4} + 10^{3} + 10^{2} + 10^{1} + 1) + 4$$

$$= 10^{8}.\frac{10^{6}-1}{9} + 2.10.\frac{10^{6}-1}{9} + 4 = \frac{10^{14} - 10^{8} + 2.10^{7} - 20 + 9.4}{9}$$

$$= \frac{(10^{14} + 8.10^{7} + 16) - 10^{8} - 6.10^{7}}{9} = \frac{(10^{7}+4)^{2} - 16.10^{7}}{9}$$

$$= \frac{(10^{7} + 4 - 4.10^{7/2}).(10^{7} + 4 + 4.10^{7/2})}{9} = \frac{(10^{7/2}-2)^{2}.(10^{7/2}+2)^{2}}{9}$$

$$= \frac{(10^{7}-4)^{2}}{9}$$

olduğundan $\sqrt{11111102222224} = \dfrac{10^{7}-4}{3} = \dfrac{9999996}{3} = 3333332$ bulunur.