GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 5 (ÇÖZÜMLER)

1) Akla gelen ilk metot genellikle şudur: a,b sayılarından birine pozitif, diğerine de negatif değerler verilerek $0<\left|a+b.\sqrt{2}\right|<\dfrac{1}{400}$ olmasını sağlamalıyız. Fakat a,b sayılarının alabileceği değerler çok fazla olduğundan bu yöntem pratikte kullanılamaz. Daha başka ve ilginç bir yol izleyeceğiz.

$x,y\in[-500,500]$ olacak şekilde x,y tamsayıları seçelim. Neden $[-1000,1000]$ aralığını yarı yarıya daralttığımız çözümün sonunda anlaşılacaktır. Sabrınıza sığınarak çözüme devam ediyoruz. x ve y nin her biri için 1001 tane değer olduğundan $[-500,500]$ aralığından seçerek oluşturulabileceğimiz (x,y) ikililerinin sayısı 1001^2 dir. $x+y.\sqrt{2}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer $500.\left(1+\sqrt{2}\right)$ ve en küçük değer de $-500.\left(1+\sqrt{2}\right)$ dir. O halde $-500.\left(1+\sqrt{2}\right)\le x+y.\sqrt{2}\le 500.\left(1+\sqrt{2}\right)$ olur. $x+y.\sqrt{2}$ toplamının, sayı doğrusu üzerinde oluşturduğu aralığın uzunluğu $1000.\left(1+\sqrt{2}\right)$ dir. Biz bu $1000.\left(1+\sqrt{2}\right)$ uzunluğundaki aralığı, 1001^2-1 parçaya bölelim. Elbette her bir küçük parçanın uzunluğu eşit olarak $\dfrac{1000.\left(1+\sqrt{2}\right)}{1001^2-1}$ olur. Fakat biz 1001^2 tane $x+y.\sqrt{2}$ şeklinde sayıya sahip olduğumuz için güvercin yuvası prensibi gereği uzunluğu $\dfrac{1000.\left(1+\sqrt{2}\right)}{1001^2-1}$ olan bu küçük parçalardan en az birisinin içine, iki tane birden $x+y.\sqrt{2}$ şeklinde sayı düşer. Bu sayılar $x_1+y_1.\sqrt{2}$ ve $x_2+y_2.\sqrt{2}$ olsun. Bu durumda $\left|\left(x_1-x_2\right)+\left(y_1-y_2\right).\sqrt{2}\right|<\dfrac{1000.\left(1+\sqrt{2}\right)}{1001^2-1}$ olur. Eğer $\dfrac{1000.\left(1+\sqrt{2}\right)}{1001^2-1}<\dfrac{1}{400}$ olduğunu da gösterebilirsek problemimiz çözülmüş olacaktır. $\sqrt{2}<1,5$ olduğunu kullanalım. Pozitif bir kesrin payını büyütmek veya paydasını küçültmek kesrin değerini büyütür. Buna göre

$$\frac{1000.\left(1+\sqrt{2}\right)}{1001^2-1}<\frac{1000.(2,5)}{(1001-1).(1001+1)}=\frac{2,5}{1002}<\frac{25}{1000}=\frac{1}{400}$$ olup

$\left|\left(x_1-x_2\right)+\left(y_1-y_2\right).\sqrt{2}\right|<\dfrac{1}{400}$ elde edilir. Artık $x_1-x_2=a$, $y_1-y_2=b$ seçersek aranan a,b tamsayıları bulunmuş olur.

2) Denklemi xyz ile bölerek $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$ şekline getirelim. Denklem x, y, z bilinmeyenlerine göre simetriktir. Bunun anlamı, eğer $(x, y, z)=(a, b, c)$ bir çözüm ise (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) ve (c, b, a) da birer çözümdür. Bu sebeple $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul etmemiz problemin genel şeklini bozmaz. Böylece $\frac{3}{x} \geq \frac{4}{3}$ olup $x \leq \frac{9}{4}$ bulunur. x'in alabileceği pozitif tamsayı değerleri 1 ve 2 dir.

(a) $x=1$ için $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{3z}{z-3} \Rightarrow y=3+\frac{9}{z-3}$ olur. $y \leq z$ kabulümüze uygun olarak $z-3=9$ veya $z-3=3$ olabilir. Böylece $(1,4,12)$ ve $(1,6,6)$ çözümleri elde edilir.

(b) $x=2$ için $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}$ olur. $2 \leq y \leq z$ olduğundan $\frac{2}{y} \geq \frac{5}{6} \Rightarrow y \leq \frac{12}{5}$ dir. Bu aralıkta sadece $y=2$ değeri olduğundan $(2,2,3)$ çözümü bulunur.

Dolayısıyla tüm çözümler $(1,4,12)$, $(1,6,6)$, $(2,2,3)$ ve bunların permütasyonlarıdır. Çözüm sayısı $3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=12$ bulunur.

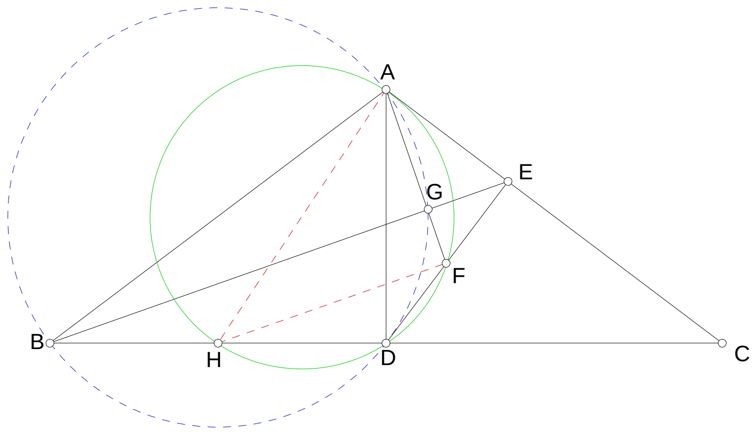
3) Dizinin 2. terimini hesaplayalım: $a_2=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)+2}{1-\left(\sqrt{2}+1\right).2}=-\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}=-\frac{1+5\sqrt{2}}{7}$ olur.

Görüldüğü gibi terimleri ardışık olarak hesaplayarak 2010. terime ulaşmak pek pratik görünmüyor. Başka bir yol deneyeceğiz:

$\sqrt{2}+1=\tan\frac{3\pi}{8}$ dir. $-\frac{\pi}{2}<b_n<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $a_n=\tan b_n$ yazalım. $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ için $f(x)=\tan x$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan $a_n=\tan b_n$ eşitliğinde her a_n sayısına karşılık gelen bir ve yalnız bir b_n değeri vardır. Böylece

$$\tan b_{n+1}=\frac{\tan\frac{3\pi}{8}+\tan b_n}{1-\tan\frac{3\pi}{8}+\tan b_n} \Rightarrow \tan b_{n+1}=\tan\left(\frac{3\pi}{8}+b_n\right)$$ olup $b_{n+1}=\frac{3\pi}{8}+b_n$ ya da $b_{n+1}=\frac{3\pi}{8}+b_n-\pi$ uygun şekillerinden birisi geçerli olacaktır. Her iki durumda da uygun bir k tamsayısı için $b_{n+8}=b_n+k.\pi$ eşitliği elde edilir. Bu durumda $\left(a_n\right)$ dizisinin periyodu 8 dir. Yani $a_{n+8}=a_n$ olur. Dolayısıyla $a_{2010}=a_2$ dir. Neyse ki a_2 nin değerini daha önce hesaplamıştık. $a_{2010}=a_2=-\frac{1+5\sqrt{2}}{7}$ bulunur.

4) AF ile BE nin kesişimi G olsun. F den geçen ve BE ye paralel olarak çizilen doğru $[BD]$ yi H da kessin. $|FE|=|ED|$ olduğundan $|BH|=|HD|$ dir. $[AD]$, $\angle BAC$ nin açıortayı olduğundan $\angle BAD=\angle DAE$ dir. Dolayısıyla $\triangle BAD \cong \triangle DAE$ (A – A benzerliği) vardır. Benzer üçgenlerin eşlenmiş iki kenarortayı $[AH]$ ve $[AF]$ olduğundan bunların oluşturduğu açılar da eşit olup $\angle BAH=\angle DAF$, $\angle HAD=\angle FAE$ dir. Bu iki eşitlikten $\angle HAF=\dfrac{\angle BAC}{2}$ elde edilir. Ayrıca $\triangle CED$ dik üçgeninde $\angle CDE=\dfrac{\angle BAC}{2}$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\angle HAF=\angle CDE$ olup $HEDF$ dörtgeni çemberseldir. Aynı yayı gören çevre açılardan $\angle FAD=\angle FHD$ ve yöndeş açılardan $\angle FHD=\angle EBD$ olup $\angle FAD=\angle EBD$ bulunur. Biz bu eşitliği $\angle GAD=\angle GBD$ şeklinde yazarsak $ABDG$ dörtgeninin çembersel olduğu anlaşılır. Aynı yayı gören çevre açılardan $\angle BGA=\angle BDA=90^o$ olup $AF \perp BE$ bulunur.

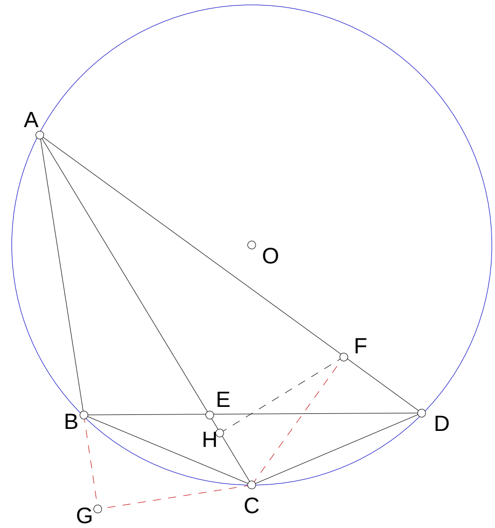


5) $|AB|.|ED|=|BE|.|AD| \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|BE|}=\dfrac{|AD|}{|DE|}$ yazılabilir. Buna göre $\triangle BAD$ üçgeninde $[AE$, iç açıortay olup $\angle BAC=\angle DAC=22,5^o$ dir. Çemberde eşit ölçüye sahip çevre açıların gördüğü kirişler eşit uzunlukta olduğundan $|BC|=|CD|$ dir. Açıortay üzerindeki C noktasından $[AD$, $[AB$ ışınlarına çizilen dikme ayakları sırasıyla F ve G ise $|CF|=|CG|$ olur. Böylece $\triangle GCB \cong \triangle FCD$ eş dik üçgenler olup, alanları da eşittir. Dolayısıyla

$$A(ABCD)=A(AFCG)=2.A(AFC)\ \ldots\ (*)$$

elde edilir. Açıları $22,5^o-67,5^o-90^o$ olan $\triangle AFC$ üçgeninde $[FH]$ yüksekliğini çizersek $\dfrac{|FH|}{|AC|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ oranı vardır. (Neden?) Buna göre $|FH|=\dfrac{6}{2\sqrt{2}} \Rightarrow |FH|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ve

$A(AFC)=\dfrac{6.\left(3\sqrt{2}/2\right)}{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ dir. (*) eşitliğinden $A(ABCD)=2.\dfrac{9\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$ bulunur.



6)

Çözüm 1: $3^{n-1}.(a^n+b^n+b^n)\geq(a+b+c)^n$ eşitsizliğinin ispatını tümevarımla yapalım:

(a) $n=1$ için $3^0.(a^1+b^1+b^1)\geq(a+b+c)^1$ eşitsizliği doğrudur.

(b) $n=k$ için $3^{k-1}.(a^k+b^k+c^k)\geq(a+b+c)^k$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

(c) $n=k+1$ için $3^k.(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1})\geq(a+b+c)^{k+1}$ eşitsizliğini ispat edelim:

$(a+b+c)^{k+1}=(a+b+c)^k.(a+b+c)$

$\leq 3^{k-1}.(a^k+b^k+c^k).(a+b+c)$ … (1)

olduğundan

$$(a^k+b^k+c^k).(a+b+c)\leq 3.(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}) \text{ … (2)}$$

eşitsizliğini gösterirsek ispat tamamlanacaktır.

(a,b,c) ve (a^k,b^k,c^k) üçlüleri benzer sıralı olduğundan Chebycshew eşitsizliğinden

$\dfrac{a^k+b^k+c^k}{3}.\dfrac{a+b+c}{3}\leq\dfrac{a.a^k+b.b^k+c.c^k}{3}$ yazılır. Bu ifade ise (2) eşitsizliğine denktir. (2) eşitsizliğini (1) de kullanırsak tümevarım prensibinin (c) basamağı da tamamlanmış olur.

Çözüm 2: Problemimiz, $\sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n+b^n}{3}}\geq\dfrac{a+b+c}{3}$ genelleştirilmiş ortalama eşitsizliği teoreminin açık bir sonucudur. Her iki tarafın n – inci kuvvetini almak yeterlidir.