

yazılır. (2) ve (3) eşitliklerinden $|CE|=|FG|$ elde edilir. Böylece $\triangle FNG \cong \triangle CQE$ eşliğine ulaşırız. $\angle GFN = \angle ECQ$ ve $CQ \perp FN$ olduğundan $CE \perp FG$ bulunur.

2) $f(x) = \tan x$ fonksiyonu $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında birebir ve örten olduğundan her bir a, b, c reel sayısı için sırasıyla $a = \tan x$, $b = \tan y$, $c = \tan z$ olacak şekilde bir ve yalnız bir tane x, y, z sayısı vardır. Burada $-\frac{\pi}{2} < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ dir. $1+a^2 = \sec^2 x$, $1+b^2 = \sec^2 y$, $1+c^2 = \sec^2 z$ olur.

Buna göre eşitsizliğimizi tekrar yazarsak

$$\sec^2 x \cdot \sec^2 y \cdot \sec^2 z \geq (\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \cos^2 z (\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \sin y \cdot \cos x \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow [\cos z(\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x) + \sin z \cdot (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)]^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow [\cos z \cdot \sin(x+y) + \sin z \cdot \cos(x+y)]^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow [\sin(x+y+z)]^2 \leq 1$$

Son eşitsizlik doğru olduğundan ilk eşitsizlik de doğrudur.

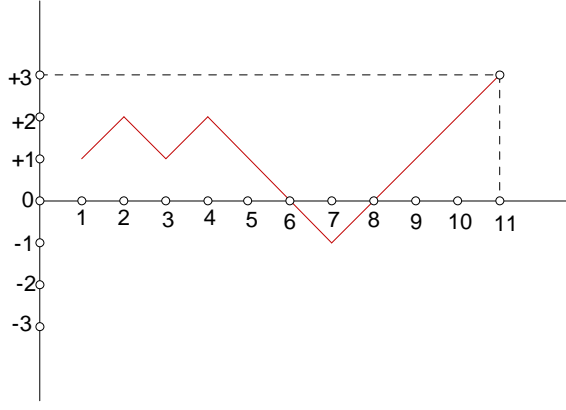
3)

(a) 4 turaya karşı 7 yazı gelen tüm durumların sayısı $\binom{11}{7} = 330$ dur. İstenmeyen durumlar iki şekilde gerçekleşebilir.

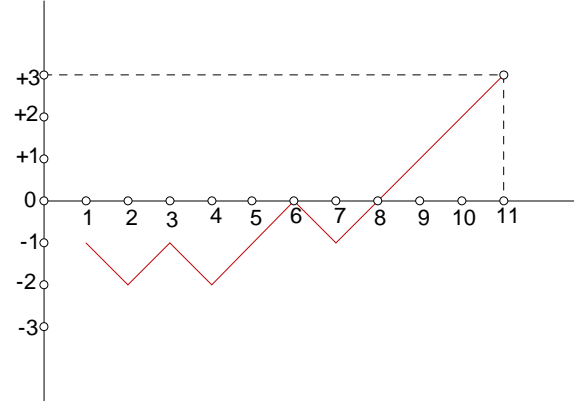
1. Durum: İlk atışta yazı gelmiştir fakat ileride bir yerde yazıların önde gitmesi sona ermiştir. Örnek verelim: YYTYTTTTYYYYY gibi olabilir. Bu durumların sayısını henüz bilmiyoruz.

2. Durum: Daha ilk atışta tura gelmiştir. Örneğin TTYTYTYTYYYY gibi olabilir. İlk atıştan sonra 3 tura, 7 yazı geleceğinden $\binom{10}{7} = 120$ farklı durum vardır.

Problemin çözümü, her iki istenmeyen durumdaki sayıların eşit olduğunun gösterilmesine dayanmaktadır. Şimdi bunu ispatlayalım.



Şekil A



Şekil B

Yukarıdaki grafiklerde atışların sayısı ve yazıların net sayısı gösterilmektedir. İlk atıştan sonra net sayısı ya +1 ya da -1 olacaktır. Her atış net sayıyı ya +1 ya da -1 oranında değiştirir. Atışların sonunda net sayı +3 olur. Şekil A'da +1 ile başlayıp bir yerde 0 olup sonra +3 ile biten, Şekil B'de de -1 ile başlayıp +3 ile biten durum örnekleri verilmiştir. Şekil B'deki grafik Şekil A'daki grafiğin 0'a inene kadar olan kısmının simetrisidir. Daha sonra ise Şekil A ile aynıdır. O halde Şekil A'daki duruma benzer her grafiğe karşılık, Şekil B'deki gibi bir grafik çizebiliriz. Yani önce +1'e gidip, +3'de biten ve bu ikisi arasında 0 çizgisine dönen grafiklerin sayısı, önce -1'e gidip sonra +3'de biten çizgilerin sayısına eşittir.

Dolayısıyla 1. durumda da $\binom{10}{7} = 120$ farklı durum vardır. Bu istenmeyen durumları tüm

durumdan çıkarırsak, istenen durumların sayısı $\binom{11}{7} - 2 \cdot \binom{10}{7} = 330 - 240 = 90$ olarak hesaplanır.

(b) Çözüm 1: Daha fazla yazı gelebilecek mümkün olan durumlar şunlardır:

$$5 \text{ tura, } 6 \text{ yazı olan durumlar } \binom{11}{6} - 2 \cdot \binom{10}{6} = 462 - 420 = 42$$

$$4 \text{ tura, } 7 \text{ yazı olan durumlar } \binom{11}{7} - 2 \cdot \binom{10}{7} = 330 - 240 = 90$$

$$3 \text{ tura, } 8 \text{ yazı olan durumlar } \binom{11}{8} - 2 \cdot \binom{10}{8} = 165 - 90 = 75$$

$$2 \text{ tura, } 9 \text{ yazı olan durumlar } \binom{11}{9} - 2 \cdot \binom{10}{9} = 55 - 20 = 35$$

$$1 \text{ tura, } 10 \text{ yazı olan durumlar } \binom{11}{10} - 2 \cdot \binom{10}{10} = 11 - 2 = 9$$

0 tura, 11 yazı olan durumlar $\binom{11}{11} = 1$

tanedir. Tüm durumların toplamı $42 + 90 + 75 + 35 + 9 + 1 = 252$ olur.

$$\text{Çözüm 2: } \binom{11}{6} + \binom{11}{7} + \binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{11}{5} = 2^{10}$$

$$\text{ve } \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = \binom{10}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \left[\binom{11}{6} + \binom{11}{7} + \binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} - 2 \cdot \left[\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right] \right] \\ & = 2^{10} - 2 \cdot \frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2} = \binom{10}{5} = 252 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Madeni paranın atış sayısının fazla olduğu bir problemde 2. çözümdeki adımları izlemenin daha pratik olacağına dikkat edilmelidir.

4) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ denkleminin her iki tarafını 4 ile çarpalım:

$$4x^6 + 12x^3 + 4 = 4y^4$$

$$\Rightarrow (4x^6 + 12x^3 + 9) - 5 = 4y^4$$

$$\Rightarrow (2x^3 + 3)^2 - (2y^2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (2x^3 + 3 + 2y^2)(2x^3 + 3 - 2y^2) = 5$$

olur. 5'in çarpanları $\pm 1, \pm 5$ olduğundan

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x^3 + 3 + 2y^2 = 1 \\ 2x^3 + 3 - 2y^2 = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^3 + 3 + 2y^2 = -1 \\ 2x^3 + 3 - 2y^2 = -5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^3 + 3 + 2y^2 = 5 \\ 2x^3 + 3 - 2y^2 = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^3 + 3 + 2y^2 = -5 \\ 2x^3 + 3 - 2y^2 = -1 \end{array} \right\} \end{array}$$

şeklinde dört tane denklem sistemi elde ederiz. Her bir denklem sisteminin çözümü araştırılırsa sadece 3. denklem sisteminden $(0, 1)$, $(0, -1)$ şeklinde iki farklı çözüm ikilisi elde ederiz.

5) $Alan(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ alan eşitliğini

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot Alan(ABC)$ ifadesinde yazalım:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$$

olur. Bu son eşitsizlikte eşitlik halinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $a = b = c$ olmasıdır. Yani $\triangle ABC$ eşkenar üçgen iken eşitlik vardır.

6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ tam kare açılımından $64 = 26 + 2(ab+ac+bc)$ olup $ab+ac+bc = 19$ bulunur. Şimdi a, b, c sayılarının, $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ denkleminin kökleri olduğunu varsayalım. Vieta teoremine göre

$$-B = a + b + c$$

$$C = ab + ac + bc$$

$$-D = abc$$

olup $B = -8, C = 19, D = -12$ bulunur. Buna göre $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ denkleminin kökleri aranan a, b, c sayıları olacaktır. Rasyonel kök teoremi gereğince 12'nin çarpanları denirse $x = 1$ için denklemin sağlandığı görülebilir. $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ polinomu $x - 1$ ile tam bölünecektir. Bölme işlemi yapılırsa $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = (x-1)(x-3)(x-4)$ olarak çarpanlarına ayrılır. O halde denklemin kökleri 1, 3 ve 4'tür.

Orijinal denklemin tüm çözümleri $(a, b, c) = (1, 3, 4)$ ve permütasyonları olup 6 tane üçlü buluruz.