

GEOMANIA OLİMPİYAT DENEMESİ – 4

Bu çalışmamız, çeşitli olimpiyatlardan – matematik yarışmalarından derlenen ya da geomania.org takımı tarafından hazırlanan problemlerin bir araya getirilmesiyle oluşturulmuştur. Klasik olarak sunulan 6 soruluk bu deneme sınavının süresi 3 saattir. Kolay gelsin...

1) $\angle C = 90^\circ$ olan $\triangle ABC$ üçgeninde C den $[AB]$ ye çizilen yükseklik ayağı D olsun. $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle BDC$ üçgenlerinin iç teğet çember merkezleri sırasıyla E, F, G olsun. Bu çemberlerin yarıçap uzunlukları da sırasıyla r, r_1, r_2 olsun.

(a) $|CD| = r + r_1 + r_2$

(b) $|CE| = |FG|$ ve $CE \perp FG$ olduğunu gösteriniz.

2) a, b, c reel sayılar ise $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (a+b+c - a.b.c)^2$ eşitsizliğini ispat ediniz.

3) Bir madeni para 11 kez atılıyor.

(a) 4 tura ve 7 yazı gelmesi ile sonuçlanabilecek durumlar arasında, yazıların ilk atıştan başlayarak önde gittiği kaç farklı durum vardır?

(b) Tüm durumlar arasında daha fazla yazının geleceği ve yazıların ilk atıştan başlayarak önde gideceği kaç farklı durum vardır?

4) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ denklemini sağlayan tüm (x, y) tamsayı ikililerini bulunuz.

5) Kenar uzunlukları a, b, c olan herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninde $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \text{Alan}(ABC)$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca eşitlik halinin hangi durumda sağlanacağını belirleyiniz.

6) Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan tüm reel (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 8 \\ a.b.c = 12 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \end{array} \right\}$$