GEOMANİA OLİMPİYAT DENEMESİ – 3 (ÇÖZÜMLER)

1) Ayhan ve Betül avlanmayı şu iki adımda yapabilirler:

1. Adım: Ayhan ve Betül 100 er atış yaparlar.

2. Adım: Betül bir atış daha yapar.

Betül'ün daha fazla ördek vurması olayı iki farklı şekilde gerçekleşebilir.

1. Durum: İlk adımda Betül, Ayhan'dan daha fazla ördek vurarak bu işi bitirmiştir.

2. Durum: İlk adımda Betül, Ayhan'la eşit sayıda ördek vurabilmiş, 2. adımda maharetini gösterip son atışını yaparak bir ördek daha avlamıştır.

İlk adımda Betül'ün Ayhan'dan daha fazla ördek vurabilmesi olasılığını *p* ile gösterelim. Betül ve Ayhan eşit yetenekli avcılar olduğundan simetriden dolayı Ayhan'ın da Betül'den daha fazla ördek vurabilmesi olasılığını *p* olur. Buna göre ilk adımda Betül ve Ayhan'ın eşit sayıda ördek vurabilmesi olasılığı $1-2p$ dir. Betül'ün son atışında başarılı olması olasılığı $\frac{1}{2}$ olduğundan 2. durumun gerçekleşmesi olasılığı $(1-2p).\frac{1}{2}$ çarpımına eşittir. 1. ve 2. durumun gerçekleşme olasılıklarını toplarsak $p+(1-2p).\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ bulunur.

2) Dört basamaklı sayının rakamları a,b,c,d olsun. $a+b+c+d=a.b.c.d$ olmalıdır. Genelliği bozmadan $a\le b\le c\le d$ kabul edebiliriz. Bu halde $d+d+d+d\ge a.b.c.d$ $\Rightarrow 4.d\ge a.b.c.d$ olup $a.b.c\le 4$ elde edilir. $c\in\{1,2,3,4\}$ olur. $c=1, c=3, c=4$ değerleri denenirse bir çözüm gelmeyeceği görülebilir. Örneğin

$c=4$ için $a.b\le 1$ olacağından $a=b=1$ elde edilir. Bu değerleri denklemde yazarsak $1+1+4+d=1.1.4.d$ olup $d=3$ olarak çözülür. Fakat bu durum $c\le d$ kabulümüze uymadığı için çözüm yoktur.

$c=2$ durumunda $a.b\le 2$ olduğundan $a=b=1$ ya da $a=1, b=2$ olabilir. $a=1, b=2$ değerlerini denklemde yazarsak $1+2+2+d=1.2.2.d$ olup bir *d* tamsayı çözümü yoktur. $a=b=1$ değerleri denklemde yazılırsa $1+1+2+d=1.1.2.d$ olup $d=4$ olarak çözülür. $(a,b,c,d)=(1,1,2,4)$ denklemin bir çözümüdür. $(1,1,2,4)$ dizilişinin tüm permütasyonları çözüm olacağından toplamda $\frac{4!}{2!}=12$ tane çözüm vardır.

3)

(a) k bir tamsayı olmak üzere şekli O noktası etrafında k defa 14^o döndürürsek yine kendisiyle çakışacaktır. Yani $k.14^o$ döndürmek de şekli etkilemez. Ayrıca her şekil bir nokta etrafında 360^o döndürüldüğünde kendi kendisiyle çakışır. t bir tamsayı olmak üzere şekli O noktası etrafında t defa 360^o döndürürsek yine kendisiyle çakışır. Açıkça $t.360^o$ döndürmek şekli etkilemez. O halde $360t-14k$ işlemi ile elde edebileceğimiz en küçük pozitif tamsayıyı bulalım. $\text{obeb}(14,360)=2$ olduğundan $360t-14k=2$ olacak şekilde k,t tamsayıları bulabiliriz. Gerçekten $360t-14k=2 \Rightarrow 180t-7k=1$ olup $t=3, k=77$ için denklem sağlanır. Bu durumda şekli O noktası etrafında 2^o döndürürsek yine kendisiyle çakışacaktır. 49 defa 2^o döndürürsek şekil kendisiyle çakışır. Demek ki şekli $49.2^o=98^o$ döndürürsek kesinlikle kendisiyle çakışır.

(b) 97^o döndürme yaparsak şeklin kendisiyle çakışması gerekmez. Çünkü en az 2^o ve tam katlarını kullanarak yaptığımız döndürmelerle, şeklin kendi kendisiyle çakıştığından emin olabiliriz. Örneğin bir düzgün 180 – gen verilsin. O ağırlık merkezi etrafında 2^o döndürürsek kendisiyle çakışır. Fakat 97^o döndürürsek 180 – gen kendisiyle çakışmaz. Bununla birlikte 97^o döndürme yapılınca kendisiyle çakışan şekiller de var olabilir. Örneğin bir düzgün 360 – gen bu özelliğe sahiptir.

Sonuç olarak, verilen şekli O etrafında 97^o döndürünce kendisiyle çakışması gerekmez ama çakışmaması da gerekmez.

4) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ eşitsizliğini tümevarım ile ispatlayalım.

$n=2$ için $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{7}}$ olup her iki tarafın karesi alınırsa $9.7<64$ eşitsizliğin doğru olduğu görülür.

$n=k$, ($k\geq 2$) için $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$ olduğunu ispatlayalım. Kabulümüzden dolayı

$$\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k}\right).\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} \quad \ldots (1)$$

olur. O halde $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$ eşitsizliğini ispatlamamız yeterlidir.

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

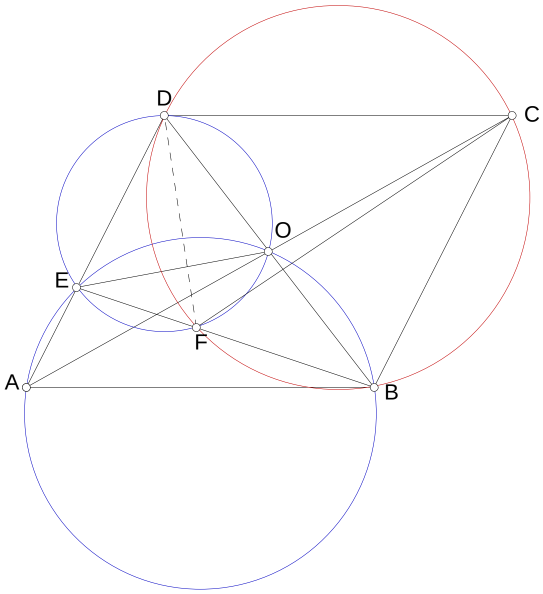
$$\Leftrightarrow \sqrt{3k+4}.(2k+1)<\sqrt{3k+1}.(2k+2)$$

$$\Leftrightarrow (3k+4)(4k^2+4k+1)<(3k+1)(4k^2+8k+4)$$

$$\Leftrightarrow 12k^3+28k^2+19k+4<12k^3+28k^2+20k+4$$

olup bu eşitsizlik tüm $k\geq 2$ tamsayıları için doğrudur. Tümevarım prensibi gereği tüm $n>1$ tamsayıları için $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ doğrudur.

5) Kirişler dörtgeninde açı özelliklerinden $\angle EFD=\angle EOD=\angle EAB=\angle BCD$ olup $BCDF$ bir kirişler dörtgenidir. Buna göre $\angle FCB=\angle BDF=\angle OEF=\angle OAB=\angle ACD=\angle CAB$ olup $\angle CAB=\angle FCB$ elde edilir.



6) Verilen polinom denklemin katsayıları x^3 terimine göre simetriktir. Tüm terimleri x^3 ile bölersek $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+42=0$ olur. Burada $x+\frac{1}{x}=t$ değişken değiştirmesi yaparsak $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ olur. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=t.(t^2-3)=t^3-3t$ olarak hesaplanır. Bu eşitlikleri denklemde yazarsak $(t^3-3t)-3(t^2-2)-13t+42=0$
$\Rightarrow t^3-3t^2-16t+48=0$ olur. Ortak çarpan parantezine alarak $t^2(t-3)-16(t-3)=0$

$\Rightarrow (t-3).(t^2-16)=0$ olup denklemin kökleri $t_1=3, t_2=4, t_3=-4$ olarak çözülür. Şimdi bu değerleri $x+\frac{1}{x}=t$ eşitliğinde kullanalım. Orijinal denklemin tüm kökleri

$$x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$$

$$x+\frac{1}{x}=-4 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow x_{5,6}=-2\pm\sqrt{3}$$

olarak elde edilir. Bunlar arasındaki en büyük ve en küçük sayının çarpımı
$(-2-\sqrt{3})(+2+\sqrt{3})=-7-4\sqrt{3}$ olur.