

## GEOMANIA OLİMPİYAT DENEMESİ – 2 (ÇÖZÜMLER)

1)  $x = t - 1$  değişken değiştirilmesi yapalım.  $2.f(t) + f\left(\frac{2t+3}{t-2}\right) = 3t - 4$  olur.  $g(t) = \frac{2t+3}{t-2}$  dersek

$g^{-1}(t) = \frac{2t+3}{t-2} = g(t)$  olur. O halde denklemde  $t$  yerine  $\frac{2t+3}{t-2}$  koyarsak

$2.f\left(\frac{2t+3}{t-2}\right) + f(t) = 3\left(\frac{2t+3}{t-2}\right) - 4$  olur.

$$\left. \begin{aligned} 2.f(t) + f\left(\frac{2t+3}{t-2}\right) &= 3t - 4 \\ f(t) + 2.f\left(\frac{2t+3}{t-2}\right) &= \frac{2t+17}{t-2} \end{aligned} \right\}$$

fonksiyonel denklemlerinden  $f\left(\frac{2t+3}{t-2}\right)$  terimini yok etmek için ilk denklem  $-2$  ile çarpılırsa

$-3f(t) = -2(3t - 4) + \frac{2t+17}{t-2} \Rightarrow f(t) = \frac{6t^2 - 22t - 1}{3(t-2)}$  olur. Dolayısıyla  $f(x) = \frac{6x^2 - 22x - 1}{3(x-2)}$  olup

$f(3) = -\frac{13}{9}$  olarak bulunur.

2)

Çözüm 1: Doğal sayıların 4. dereceden kuvvetleri toplamı  $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$

eşitliği ile belirlidir. Buna göre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)}{n^5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

olarak bulunur.

Çözüm 2:  $x > 0$  için  $f(x) = x^4$  monoton artan bir fonksiyondur. İntegral hesabından

$\int_0^n x^4 dx < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \int_1^{n+1} x^4 dx$  dir. Dolayısıyla her  $n$  pozitif tamsayısı için

$\frac{\int_0^n x^4 dx}{n^5} < \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} < \frac{\int_1^{n+1} x^4 dx}{n^5}$  yazılır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n x^4 dx}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^5}{5}}{n^5} = \frac{1}{5} \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_1^{n+1} x^4 dx}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^5 - 1}{5}}{n^5} = \frac{1}{5} \text{ olduğundan sandviç teoremine göre}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} = \frac{1}{5} \text{ dir.}$$

3) Cauchy – Schwartz eşitsizliğinden

$$(9 \cdot \sin \alpha - 8 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 12 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)^2$$

$$\leq (9^2 + (-8)^2 + 12^2) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta) \text{ yazılır.}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ ve}$$

$$(9^2 + 12^2) + (-8)^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2 \text{ olduğundan } (9 \cdot \sin \alpha - 8 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 12 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)^2 \leq 17^2$$

dir. Böylece  $-17 \leq 9 \cdot \sin \alpha - 8 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 12 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \leq 17$  olup ifadenin maksimum değeri 17 dir.

4)  $0 < x < 2$ ,  $0 < y < 2$ ,  $0 < z < 4$  değerlerinden oluşan  $(x, y, z)$  noktaları analitik uzayda taban boyutları  $2 \times 2$ , yüksekliği 4 olan bir kare prizma belirtir. Bu kare prizma, örnek uzayı oluşturur.  $z^2 \geq x^2 + y^2$  ifadesinin de bir koni denklemi olduğunu biliyoruz.  $z^2 \geq x^2 + y^2$  eşitsizliğini sağlayan  $(x, y, z)$  noktaları; yarıçapı 2, yüksekliği 4 olan çeyrek koninin içinde kalır. Dolayısıyla

$$z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ olma olasılığı} = \frac{\text{çeyrek koninin hacmi}}{\text{kare prizmanın hacmi}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \right)}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{\pi}{12}$$

olarak hesaplanır.

5)  $p = 19$  asal sayısı için Fermat teoremini yazarsak  $x^{18} \equiv 0$  veya  $1 \pmod{19}$  olur. Buna göre  $x^9 \equiv 0, 1$  veya  $-1 \pmod{19}$  yazılır.  $y \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9 \pmod{19}$  olduğundan  $y^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16 \pmod{19}$  olur. Şimdi  $x^9 - y^2$  farkının mod19 daki kalanlarını incelersek  $x^9 - y^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18 \pmod{19}$  olduğunu görürüz. O halde  $x^9 - y^2$  farkının mod19 da hiçbir zaman 13, 14, 15'e denk olamayacağını söyleyebiliriz.  $203 \equiv 190 + 13 \equiv 13 \pmod{19}$  olduğundan  $x^9 - y^2 \not\equiv 203 \pmod{19}$ . Yani  $x^9 - y^2 = 203$  denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

6)  $\triangle ABC$  üçgeninde  $[AD]$  yüksekliği aynı zamanda açıortay olacağından  $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$  dir.  $\triangle AFE$  üçgeninde  $[AD]$  açıortay ve  $\angle FDE = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$  bağıntısı sağlandığından  $D$  noktası bir dış merkezdir. Yani  $\triangle AFE$  üçgeninde  $[FD]$  ve  $[ED]$  dış açıortaylardır.  $D$  noktasından  $\triangle AFE$  'nin kenarlarına (veya onların uzantılarına) indirilen dikmelerin ayakları  $G, H, K$  olsun.  $D$  merkezli dış teğet çemberi çizersek  $|DH| = |DG| = |DK|$  eşit uzunlukları yarıçaplardır.  $\triangle KFD \cong \triangle GFD$  ve  $\triangle HED \cong \triangle GED$  olduğundan (neden?)  $|FG| = |FK|$ ,  $|GE| = |EH|$  dir. Ayrıca görmesi kolay olan  $|AH| = |AK| = \frac{3}{4} \cdot |AB|$  eşitliğini de aklımızda tutalım.

$$\begin{aligned} \text{Çevre}(AFE) &= |AF| + |FE| + |AE| = |AF| + (|FG| + |GE|) + |AE| \\ &= (|AF| + |FK|) + (|EH| + |AE|) = |AK| + |AH| = \frac{3}{2} \cdot |AB| \end{aligned}$$

olup  $\text{Çevre}(AFE) = \frac{3}{2} \cdot |AB|$  dir.

