

Geomania Deneme Sınavı 17

17 Ağustos 2016

1. Tüm x, y tamsayıları için;

$$f(x)f(y) + f(x + y) = f(xy + 1)$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

2. Bir ABC üçgeninin sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ kenarları üzerinde $|BD| = |BF|$, $|CD| = |CE|$ olacak şekilde D, E, F noktaları alınıyor. DEF üçgeninin çevrel çemberi ω olsun. D nin EF doğrusuna izdüşümü P olsun. ω çemberi üzerinde K ve Q noktaları $\angle PKD = 90^\circ$ ve $DQ \parallel EF$ olacak şekilde alınıyor. ω çemberine D de teğet olan doğru KQ doğrusunu T noktasında kesiyorsa AEF ve DKT üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirine teğet olduğunu gösteriniz.

3. Bir $\mathcal{S} \subset \mathbf{Z}^+$ kümesi için;

(i.) \mathcal{S} kümesinde aralarında asal olan iki sayı bulunur.

(ii.) x ve y farklı olması gerekmeyen iki sayı olsun. $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

koşulları sağlanıyor. $\mathcal{F} = \mathbf{Z}^+ \setminus \mathcal{S}$ olmak üzere aşağıdaki önermeyi ispatlayınız.

$$\sum_{x \in \mathcal{F}} \leq |\mathcal{F}|^2$$

———— Sınav süresi 4,5 saattir. Her soru 7 puan değerindedir. ————

4. $x^3 + ky^2$ ve $y^3 + kx^2$ birer tamküp olacak şekilde (x, y) pozitif tamsayı ikilisi bulunuyorsa, (x, y) ikilisine *iyi ikili* diyelim. İyi ikili bulunmasını mümkün kılan en küçük k pozitif tamsayısını belirleyiniz.

5. $2n + 1$ oyuncu arasında bir satranç turnuvası düzenleniyor. Her oyuncu diğer tüm oyuncularla tam olarak bir kez beraberlik olmaksızın karşılaşıyor. Her oyuncunun turnuva başlamadan önce bir sıralaması vardır ve hiçbir oyuncu aynı sıralamada değildir. Bu turnuvada tam olarak k maçta alt sıralamada olan oyuncu kendisinden üst sırada olan bir oyuncuyu yenmiştir. Kazandığı maç sayısı $n - \sqrt{2k}$ den az ve $n + \sqrt{2k}$ den çok olmayan bir oyuncu bulunduğunu gösteriniz.

6. ABC üçgeni içinde $\angle BAC = \angle CPB$ olacak şekilde bir P noktası alalım. $[BC]$ nin orta noktası M olsun. $[MP]$ üzerinde bir Q noktası alalım. Q noktasından BP , ve CP doğrularına çizilen paraleller CA ve AB yi sırasıyla E ve F noktalarında kesiyor. AEF üçgeninin çevrel çemberine E ve F den çizilen teğetler R de kesişiyorsa $\angle BAC + \angle EPF = \angle BRC$ olduğunu gösteriniz.

———— Sınav süresi 4,5 saattir. Her soru 7 puan değerindedir. ————