

Türkiye Bilimsel Teknolojik Araştırma Kurumu  
Uluslararası Matematik Olimpiyatı  
Takım Seçme Deneme Sınavı

*ikinci gün*  
*13 Ağustos 2016*

**1.** Herhangi  $S$  ve  $T$  konveks çokgenleri için, eğer  $S$  nin tüm yüzeyleri,  $T$  ninde yüzeyiyse,  $S$  ye  $T$  nin alt çokgeni diyeceğiz. Buna göre,

**a)**  $n \geq 5$  koşulunu sağlayan bir  $n$  tamsayısı için , birbirleri ile hiçbir köşe paylaşmayan ve bir  $n$ -genin alt çokgeni olan  $m$  çokgenlerinin bulunduğunu gösteriniz.

**b)**  $m$  nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

**2.**  $p$  bir asal sayı olmak üzere,  $F_p$  kümesi modülo  $p$  deki tamsayıları içersin.  $F_p[x]$  de katsayıları  $F_p$  ye ait olan polinomları içersin.  $\Psi : F_p[x] \rightarrow F_p[x]$  olarak tanımlayalım öyleki,

$$\Psi \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n a_i x^{p^i}.$$

$F, G \in F_p[x]$  koşulunu sağlayan 0 dan farklı polinomlar için,

$$\Psi(\gcd(F, G)) = \gcd(\Psi(F), \Psi(G)).$$

olduğunu gösteriniz. (Burada  $Q$  polinomu  $P$  polinomunu ancak ve ancak  $P(x) - Q(x)R(x)$  polinomunun tüm katsayıları 0 olacak şekilde  $R \in F_p[x]$  bulunuyorsa böler. (Tüm çarpma ve toplama işlemlerindeki katsayılar modülo  $p$  de alınmıştır.) İki polinomun ebobu başkatsayısı 1 olan ve her iki polinomu da bölen en yüksek dereceli polinomdur. gcd işlemi ebob u göstermektedir.)

**3.** Tüm  $k$  pozitif tamsayıları için,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

ifadesinin bir tamsayıya eşit olduğunu gösteriniz.