Türkiye Bilimsel Teknolojik Araştırma Kurumu
Uluslararası Matematik Olimpiyatı
Takım Seçme Deneme Sınavı

birinci gün
12 Ağustos 2016

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ sayılarını ,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right)^2 \leq (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçebileceğimizi kanıtlayınız.

2. $a_1, a_2 \cdots a_n$, $x_1, x_2 \cdots x_n$ ve $r \geq 2$ tam sayılar olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j^k = 0$$

olduğu bilinmektedir. $k = 1, 2, \cdots r$ ve tüm $m \in \{r+1, r+2, \cdots, 2r+1\}$ için,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j^m \equiv 0 \pmod{m}$$

olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, S_n kümesi $S_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_{2^n}) \mid a_i = 0 \textit{ veya } 1, 1 \leq i \leq 2^n\}$ olarak tanımlanmaktadır. Bu kümenin, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{2^n})$, ve $b = (b_1, b_2, \cdots, b_{2^n})$ gibi herhangi iki elemanı için, S_n

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{2^n} |a_i - b_i|$$

ifadesine eşit oluyor. a ve b bir $\mathcal{A}$ altkümesinin elemanı ise ve $d(a, b) \geq 2^{n-1}$ koşulu gerçekleniyorsa, $A \subseteq S_n$ olmak üzere, bu kümeye **İyi Küme** diyelim. En fazla kaç adet elemanın S_n içinde **İyi Küme** oluşturabileceğini belirleyiniz.