

Türkiye Ulusal Matematik Olimpiyatları

Birinci Aşama Deneme Sınavı– 11 Haziran 2016

DENEME SINAVI

3. Deneme

Soru Sayısı: 32

Sınav Süresi: 180 dakika

Başarılar Dileriz...

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

1. $|BC| > |AD|$ olan bir $ABCD$ dikdörtgeninde AC köşegenin orta dikmesi BC doğrusunu E noktasında $|AE| = 5$ olacak şekilde kesiyor. $|AC|$ nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

2. Ardışık her n sayı içinde kareleri toplamı 13 ile tam olarak bölünen iki farklı sayı bulunmasını mümkün kılan en küçük n sayısı nedir?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

3. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $[2014/n]$ formunda yazılamayan en küçük tamsayı kaçtır?

- a) 46 b) 47 c) 48 d) 49 e) Hiçbiri

4. Bir çember üzerindeki 10 nokta en çok kaç dışbükey çokgen belirtir?

- a) 1024 b) 996 c) 981 d) 965 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

5. $|AB| = 9$, $|BC| = 10$ ve $|CA| = 11$ olan bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olsun. G nin BC doğrusuna olan uzaklığı nedir?

- a) $2\sqrt{2}$ b) 2 c) $4\sqrt{2}$ d) 4 e) Hiçbiri

6. $2016^{24^{23}}$ sayısının 23 ile bölümünden kalan kaçtır?

- a) 4 b) 11 c) 17 d) 22 e) Hiçbiri

7. $m < n$ olmak üzere $(m, n) = 1$ olan iki pozitif tamsayı olsun. Periyotları sırasıyla m ve n olup ilk 2016 elemanı aynı olan iki $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ sonsuz dizileri bulunuyorsa n en az kaç olabilir?

- a) 1008 b) 1009 c) 1010 d) 1011 e) 1012

8. 25 yarışmacıdan her biri A, B, C problemlerinden en az birisini çözmüştür. A yı çözemeyip B yi çözenlerin sayısı A çözemeyip C yi çözenlerin sayısının iki katıdır. Sadece A yı çözenlerin sayısı A yı çözüp B ve C den en az birini çözenlerin sayısından bir fazladır. Sadece A yı çözenlerin sayısı sadece B yi çözenler ile sadece C yi çözenlerin toplamına eşitse, sadece B yi çözen kaç kişi vardır?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

9. Bir ABC üçgenin içinde rastgele bir D noktası alınıyor. $s(\widehat{ABD}) = 30^\circ$, $s(\widehat{ACD}) = s(\widehat{DBC}) = 10^\circ$, $s(\widehat{DCB}) = 20^\circ$ ise $s(\widehat{BAD})$ açısı kaç derecedir ?

- a) 80 b) 85 c) 90 d) 95 e) 100

10. $a_1 = 3, a_2 = 7$ olan bir a_n dizisi her $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için;

$$a_n^2 + 5 = a_{n-1}a_{n+1}$$

olarak tanımlansın. Bir L pozitif tamsayısı için $a_L + (-1)^L$ bir asal sayı ise L sayısı 2015, 2016, 2017, 2018 değerlerinden kaçını alabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

11. $n \geq 2$ olmak üzere düzlemde P_1, P_2, \dots, P_n noktaları alalım. Her $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için P_i noktasının merkez olduğu i yarıçaplı dairenin kapsadığı bölgeye $F(i)$ diyelim.

$$\text{Alan}(F(i) \cap F(j)) = k(i + j)^2$$

olacak şekilde kaç k pozitif tamsayı sabiti vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

12. Bir düzgün dörtyüzlü her köşesi ve her yüzü mavi ya da kırmızıya boyanmak şartıyla kaç farklı biçimde boyanabilir?

- a) 24 b) 36 c) 48 d) 72 e) 108

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

13. ABC üçgeninde $s(\widehat{ABC}) = 120^\circ$ dir. BE , AD ve CF açıortay olmak üzere, iç teğet çemberin merkezi K noktasıdır. CF ve DE doğru parçaları G noktasında kesişiyor. CD nin orta noktası M ve $CD = 6$, $GM = 4$ ise CGD üçgeninin alanı nedir?

- a) 14 b) $7\sqrt{3}$ c) $14\sqrt{3}$ d) 7 e) 12

14. En az 4 eleman içeren bir A kümesinde $i, j \in A$ ise $|i - j|$ nin asal olmasını ve $2015 \in A$ olmasını sağlayan kaç A kümesi vardır?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

15. a, b, c gerçel sayıları $a + b + 1 = c$, $ab - 13 = c(c - 7)$ eşitliklerini sağladıklarına göre $a^2 + b^2$ nin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) Hiçbiri

16. Boyları $1, 2, \dots, 12$ olan 12 çubuk arasından 3 çubuk, bir üçgen belirtmek şartıyla kaç farklı biçimde seçilebilir?

- a) 70 b) 84 c) 95 d) 120 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

17. ABC üçgeninde G ağırlık merkezi olmak üzere; $s(\widehat{AGB}) = 3.s(\widehat{ABG})$, $AB = 6$ ve $AG = 4$ ise $|AC|$ nedir?

- a) 5 b) $3\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{2}$ d) 9 e) Hiçbiri

18. $pqr = 7p + 4q + qr$ eşitliğini sağlayan kaç (p, q, r) asal sayı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

19. $x \neq 1$ gerçel sayısı

$$(x^2 - x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2 = x(x + 1)(x^2 + 1) + 3$$

eşitliğini ve $y \neq 0$ gerçel sayısı da

$$y^2 + (y^2 + y - 1)^2 + (y + 1)(y - 1)^2 + 2 = (y^2 - y + 2)^2$$

eşitliğini sağlıyor. Bu x, y gerçel sayıları için $5xy(x - 1)^2 = f(x)$ olabilmesini mümkün kılan $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ doğrusal fonksiyonlarının kümesi S olsun. S kümesindeki bir $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu bir k değeri için $f(k) = 23$ eşitliğini sağlıyorsa k nın alabileceği değerler toplamı nedir?

- a) 23 b) 22 c) 21 d) 20 e) Hiçbiri

20. Yuvarlak bir masa etrafındaki 1 den 10 kadar sıralı koltuklara oturan 10 kişiden her biri bir sayı tutup, tuttuğu sayıyı solundaki ve sağındaki arkadaşına söylüyor. Daha sonra her biri solundaki ve sağındaki arkadaşının kendisine söylediği sayıların aritmetik ortalamasını hesaplayıp diğer arkadaşlarına duyuruyor. Masa etrafındaki her kişi oturduğu koltuk numarasını anons ettiğine göre 8 numaralı koltukta oturan hangi sayıyı tutmuştur?

- a) 3 b) 7 c) 10 d) 13 e) 17

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

21. ABC üçgeninde $AC < AB$ ve BC nin orta noktası D dir. $[BA]$ üzerinde $[AB]$ dışında $AC = AE = 3$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. D den EC ye çizilen paralel AB yi F de kesiyor. FD ye D de dik olan doğru AB yi G de kesiyor. $GD = 4$ ise GF nedir?

- a) 1 b) $2\sqrt{3}$ c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

22. n pozitif tamsayı olmak üzere $n^4 + 81$ sayısının en küçük asal böleni $f(n)$ olsun.

$$f(1) + f(2) + \dots + f(70)$$

toplamının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

23. Tüm x, y, z gerçel sayıları için $f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz$ koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

24. Yedişer kişilik A ve B takımları arasında aşağıdaki gibi bir karşılaşma yapılıyor: A takımının birinci oyuncusu ile B takımının birinci oyuncusu karşılaşır. Kaybeden oyuncu elenir, kazanan oyuncu rakip takımın sıradaki oyuncusu ile karşılaşır. Son oyuncusu yenilen takım karşılaşmayı kaybeder. Buna göre karşılaşma kaç farklı şekilde A takımının galibiyeti ile biter?

- a) 720 b) 756 c) 858 d) 1024 e) Hiçbiri

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

25. ABC üçgeninin $\angle BAC$ nin açıortayı $D \in [BC]$ olmak üzere AD dir. B noktasından AD ye çizilen dikme ABD üçgeninin çevrel çemberini B ve E noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel merkezi O olsun. $AO = 9$ ve $AE = 4$ olduğuna göre OE nin alabileceği değerlerin toplamı nedir?

- a) 5 b) 6 c) 11 d) 13 e) 18

26.

$$3(m^3n + 2m^2n + n^2 - 3m^2 + 1) = n(mn^2 + m + 2n^2 + 2)$$

eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tamsayı ikilisi vardır?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

27. $P(1) = 3$ eşitliğini sağlayan 2. dereceden tamsayı katsayılı bir $P(x) = x^2 + bx + c$ polinomu, her x, y gerçel sayıları için, $P(x) + P\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{3+by}{y^2} = P(2x) + P\left(\frac{2}{y}\right)$ eşitliğini sağlamaktadır. $P(x)$ polinomun alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) $\frac{25}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{4}$ e) $\frac{-1}{2}$

28. $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$ kümesinin n elemanlı her altkümesi, herhangi ikisi aralarında asal olan en az beş tamsayı içeriyorsa, n en az kaç olmalıdır?

- a) 215 b) 216 c) 217 d) 218 e) 219
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 3

29. ABC üçgeninin kenarortayları M de kesişsin. D ve E , BC üzerinde $DC = CE = AB$ şartını sağlayan farklı iki nokta olsun. P ve Q , BD ve BE üzerinde $2.BP = PD$ ve $2.BQ = QE$ şartını sağlayan noktalar olsun. $s(\widehat{PMQ})$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) 30 b) 45 c) 60 d) 75 e) Hiçbiri

30. Ondalık yazılımında tüm rakamları tek olan pozitif tam sayılar artan sırayla

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, ...

biçiminde yazıldığında 2016. sayı nedir?

- a) 39935 b) 39937 c) 39939 d) 39951 e) Hiçbiri

31. $[1, 2016]$ aralığında yer alan n gerçel sayısı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

- a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 10

32. 20 takım her bir gün 10 maç olmak üzere 2 günde toplam 20 maç yapıyor. Herhangi iki takım 2 gün içinde birbirleriyle en çok 1 kez maç yapabiliyor. Ayrıca her bir takım, bir gün içinde en fazla iki kez maç yapabilir. Bu iki günün sonunda öyle k takım vardır ki bu k takımdan herhangi ikisi aralarında maç yapmamıştır. k nın alabileceği en büyük değeri nedir?

- a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18
-