

Türkiye Ulusal Matematik Olimpiyatları

Birinci Aşama Deneme Sınavı– 10 Haziran 2016

DENEME SINAVI

2. Deneme

Soru Sayısı: 32

Sınav Süresi: 180 dakika

Başarılar Dileriz...

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

1. Bir $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, $m(\widehat{D}) = 120^\circ$, $AB + DC = 15$, $BD + AC = 12$, $DA + BC = \sqrt{43}$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Bu çokgenin köşelerinin orta noktalarını birleştirelim. Oluşan bu doğru parçasının uzunluğu kaçtır?

- a) $\sqrt{31}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $\sqrt{41}$ d) $\sqrt{33}$ e) 6

2. Ardışık 3 tamsayının kareleri toplamının 1 fazlası olarak yazılabilen sayılar bir küme oluştursun. Bu kümedeki sayıların asal çarpanları bir \mathcal{S} kümesi oluştursun. \mathcal{S} kümesinde ilk 100 sayıdan en çok kaç bulunabilir?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 24 e) 25

3. Bir torbada 23 kırmızı, m beyaz ve n mavi şeker var. İki çocuğa biri yalnızca mavi şekerleri alacak şekilde şekerleri dağıttığımız zaman diğer çocuğun elinde yalnız mavi alandan n tane daha fazla şeker bulunuyor. Üç çocuğa bu şekerleri kimse herhangi bir renkten $m - 23$ şeker almayacak şekilde dağıtabiliyoruz. Buna göre torbadaki şeker sayısı en az kaç olabilir?

- a) 46 b) 55 c) 63 d) 71 e) Hiçbiri

4. Bir akvaryumda turuncu ve yeşil olmak üzere iki çeşit hamsi vardır. Biz bir çift hamsi almak istiyoruz. Balıkçı akvaryumdan rastgele iki hamsi aldığında bunların aynı renk olma olasılığının $\frac{1}{2}$ olduğunu söylüyor. Buna göre akvaryumdaki hamsi sayısı 23, 24, 25, 26, 27 değerlerinden kaçını alabilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

5. $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ ve $|CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde A nın BC ye izdüşümü H noktası ve ABC nin içteğet çemberinin merkezi I olsun. HI doğrusu AB yi M de kesiyor. Buna göre $|MA|$ nedir?

- a) 13 b) 14 c) $\frac{39}{2}$ d) $\frac{53}{3}$ e) Hiçbiri

6. Kaç farklı p asal sayısı için $p \mid (n + 2)^2 + 2$ ve $p \mid (n + 3)^3 + 3$ koşullarını sağlayan n tamsayıları bulunabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7. Bir tabakta 2323 adet şeker var. Bir dizi çocuk şeker almak için sıraya dizilmiştir. İlk gelen çocuk n adet şeker alıyor. Daha sonra sırası gelen her çocuk, kendisinden öncekinin aldığından bir fazla şeker alıyor. Bu işlem tabakta hiç şeker kalmayacak biçimde yapılabiliyorsa $2323 > n > 0$ sayısı kaç farklı değer alabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

8. Aslı ile Berk bir oyun oynuyorlar. Berk'in 11 adet bilyesi var; bu bilyelerin ağırlıkları $1, 2, \dots, 11$. Bir de, elinde bir çanta var. Bu çantanın içine 12 veya daha fazla miktarda ağırlık koyulduğunda çanta yırtılıyor. Aslı, bilyelerin ağırlıklarının $1, 2, \dots, 11$ olduğunu biliyor, ancak hangi bilyenin ne kadar ağır olduğunu bilmiyor. Berk, her hamlesinde çantaya birkaç adet bilye koyarak çantanın yırtılıp yırtılmadığına bakıyor. Buna göre Berk, Aslı'ya ağırlığı 1 olan topun ağırlığının 1 olduğunu, çantayı yırtmadan en az kaç hamlede ispatlayabilir?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

9. ABC üçgeninde AB nin orta noktası D ve $\angle BAC$ açısının açıortayının BC yi kestiği nokta E olsun. $CD \cap AE = F$ olmak üzere $BF \cap AC = K$ olsun. $AD = 3$, $KC = 1$ ve $\frac{DC}{AE} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre ABC üçgeninin alanı nedir?

- a) $3\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{3}$ c) 6 d) 9 e) 12

10. $\sum_{n=1}^{2015} n^2 2^n$ ifadesinin 23 ile bölümünden kalan kaçtır?

- a) 5 b) 12 c) 17 d) 22 e) Hiçbiri

11. Başlangıçta bir öbekte 2015 adet şeker bulunuyor. Berk önce istediği kadar şeker alıyor. Sonra bu şekerleri yiyor. Daha sonra Aslı her hamlede öbekten 1, 5 veya 23 adet şeker alıyor. Eğer Aslı her sayıda şeker alma en az bir kez hakkını kullanarak yaptığı bu işlemi aynı hamle sayısıyla ancak farklı sayıda 23 şeker olarak gerçekleştirebiliyorsa Berk'in yediği şeker sayısı en çok kaç olabilir?

- a) 1682 b) 1744 c) 1826 d) 1931 e) Hiçbiri

12. a ve b pozitif tamsayı olmak üzere kenarları $a, b, 2015 - a - b$ olan bir üçgen bulunmasını sağlayan kaç (a, b) ikilisi vardır?

- a) 472568 b) 488252 c) 507528 d) 2029105 e) 2031120
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

13. $ABCD$ dörtgeninde $\angle D = 2 \cdot \angle A = 60^\circ$ ve $AB = CD = 2$ ise AD ile BC kenarlarının orta noktaları arasındaki uzaklık ne kadardır?

- a) 1 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) $\frac{1}{2}$

14. m, n tamsayılar olmak üzere $m^2 + 23n = mn + 2n^2 + 58$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) ikilisi vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

15. $P(x) = 3x^2 + bx + c$ polinomunun köklerinden bir tanesi 1 ve her x gerçel sayısı için, $P(x) \geq 0$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Tamsayı katsayılı bir $Q(x)$ polinomu için, $P(x) = 3(Q(x)) + 4$ eşitliği sağlanıyor. $P^2(x) + 3Q(x) = R(x) - 2$ eşitliğini sağlayan 4. dereceden bir $R(x)$ tamsayı katsayılı bir polinomu varsa, bu polinomun gerçel kökleri toplamı kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) -2

16. 13 kişilik bir toplulukta herhangi 3 kişiden en az ikisi arkadaşsa bu toplulukta en çok arkadaşsa sahip olan kişilerden birinin arkadaş sayısı en az kaç olabilir?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

17. İç teğet çember merkezi I olan ABC üçgeninde, $|AI| = 3$, $|BI| = 2\sqrt{3}$ ve $|AB| \cdot |AC| = 21$ ise $m(\widehat{ICB})$ nedir?

- a) 15 b) 30 c) 48 d) 60 e) 72

18. $23^{7^4} + 24^{7^4}$ sayısının 301 ile bölümünden kalan nedir?

- a) 1 b) 25 c) 33 d) 47 e) Hiçbiri

19. Farklı x, y sayıları $x^3 - x + 1 = y^3 - y + 1 = 0$ eşitliğini sağlasın. Buna göre $xy(x + y)$ kaçtır?

- a) -1 b) 1 c) 2 d) -2 e) Hiçbiri

20. 3 hafif, 3 normal ve 3 ağır toplam 9 tane birbirinden farksız görünen topların, iki kefli bir terazi yardımıyla, hangilerinin hafif, normal yada ağır olduklarını bulmak istiyoruz. Bu işlemi garantilemek için en az kaç tartı yapmak gerekir? (Hafif, normal ve ağır toplar kendi aralarında aynı ağırlıktadır. Hafif, ağır ve normal topların ağırlıkları arasında hiçbir ilişki bilinmemektedir.)

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

21. $ABCD$ konveks dörtgeninde $m(\widehat{CAD}) = 70^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{BCA}) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CBD})$ kaç derecedir?

- a) 40 b) 50 c) 70 d) 80 e) 100

22. $\binom{p}{n} + (p-1)! + pn^2$ bir tamkare olacak şekilde n tamsayısı bulunuyorsa p sayısı 7, 19, 23, 31 değerlerinden kaçını alabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

23. $(a+1)(b+8)(a+b) = K.ab$ eşitliğini sağlayan (a, b) pozitif gerçel sayı ikilisi bulunuyorsa K sabiti 25, 27, 30, 32, 36 değerlerinden kaçını alabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

24. Pozitif tamsayılardan oluşan ve hiçbir tam kare veya tam küp içermeyen dizinin 2015. teriminin rakamları toplamı kaçtır?

- a) 9 b) 10 c) 16 d) 17 e) Hiçbiri
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

25. Dar açılı bir ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait yükseklik ayakları sırasıyla, D, E, F dir. $|DF| = 13, |DE| = 14, |EF| = 15$ ise, ABC üçgeninin alanı $(a, b) = 1$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ ise $a + b$ nedir?

- a) 1369 b) 1453 c) 1557 d) 1601 e) 1689

26. Her $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için p_i asal sayı ve k pozitif tamsayı olmak üzere;

$$23p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 + k\sqrt{2015p_1p_2p_3} = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3$$

eşitliği sağlanacak şekilde p_i sayıları bulunmasını mümkün kılan en küçük k kaçtır?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

27. $5p^2 + 2q^2 + 3 = 4p + 2q$ eşitliğini sağlayan kaç (p, q) gerçel sayı ikilisi vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz sayıda e) Hiçbiri

28. $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sayılarının altılı permütasyonlarından kaç tanesinde yan yana olan herhangi iki eleman arasındaki fark en az ikidir?

- a) 24 b) 30 c) 64 d) 72 e) 90
-

Ulusal Matematik Olimpiyatı Deneme Sınavı 2

29. ABC bir üçgen, B ve C den çıkılan iç açıortaylar $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarını kessin ve I da keşissinler. BIC açısının açıortayı $[ED]$ ve $[BC]$ yi sırasıyla X ve Y de kessin. $\frac{|XI|}{|IY|} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre, $m(\widehat{CAB})$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) 36 b) 45 c) 72 d) 90 e) Hiçbiri

30. İlk başta tahtada 2012^{2015} sayısı yazılıdır. Her hamlede ya ilk baştaki sayının rakamları toplamı alınıp tahtadaki sayı yerine o yazılıyor ya da sayının karekökü alınıp tahtadaki sayı yerine o yazılıyor. Her hamle sonunda tahtada yazan sayı bir tamsayı ise sonlu hamle sonucunda tahtada yazan sayı 1, 2, 3, 4, 5 değerlerinden kaçını alabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

31. Kenarları tamsayılar ve çevresi 2014 olan kaç adet dik üçgen vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

32. Bazen iyi, bazen kötü işler yaparak sorun çıkaran Winchester kardeşler, Lucifer tarafından ziyaret edilir. Lucifer şöyle der: "İyilik ya da kötülük yapmak için 10 olayla karşılaşacaksınız. Bunlardan 5 tanesinde iyilik, 5 tanesinde de kötülük yapmalısınız. Herhangi bir anda yaptığımız kötülüklerin sayısı, iyiliklerin sayısını geçerse gözünüzün yaşına bakmadan sizi de yanımda Cehenneme götürürüm. Diğer durumlarda yaşamanıza izin veririm." Bu tehdit üzerine Winchester kardeşler karşılaştıkları ilk 3 olayda iyilik yaparlar. (Ancak arka arkaya 4 kötülük yapsalar Cehenneme giderler). Lucifer'in yanına gitmek istemeyen Winchester kardeşler kalan olayları kaç farklı yolla sonuçlandırabilirler?

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15
-